Une fonction zêta motivique pour l'étude des singularités réelles

Jean-Baptiste Campesato

Thèse dirigée par Adam Parusiński

11 décembre 2015

Introduction : équivalence blow-Nash

Définition : équivalence C^k

Deux germes analytiques $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ sont C^k**-équivalents** s'il existe $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ un C^k-difféomorphisme tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "g"] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

Exemple – Whitney, 1965

Pour $t \in (0,1)$, posons $f_t(x,y) = xy(y-x)(y-tx)$.
Alors $f_t \underset{C^1}{\sim} f_{t'} \Leftrightarrow t = t'$.

Introduction : équivalence blow-Nash

Définition : équivalence C^k

Deux germes analytiques $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ sont C^k**-équivalents** s'il existe $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ un C^k-difféomorphisme tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "g"] \\ & (\mathbb{R}, 0) & \end{tikzcd}$$

Exemple – Whitney, 1965

Pour $t \in (0, 1)$, posons $f_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx)$.
Alors $f_t \underset{C^1}{\sim} f_{t'} \Leftrightarrow t = t'$.

Introduction : équivalence blow-Nash

1. T.-C. Kuo (1979–1985) propose la notion d'équivalence blow-analytique de façon à obtenir une classification sans module continu pour les singularités isolées.
2. T. Fukui (1997) et S. Koike et A. Parusiński (2003) ont développé des invariants qui permettent d'obtenir la classification blow-analytique des polynômes de Brieskorn–Pham à deux variables.
3. Cependant ces invariants ne permettent pas de traiter le cas des polynômes $x^p + y^{kp} + z^{kp}$ et $-x^p - y^{kp} - z^{kp}$ où p est impair.
4. G. Fichou (2005) algébrise la notion d'équivalence blow-analytique afin d'obtenir des invariants encore plus riches.

Introduction : équivalence blow-Nash

1. T.-C. Kuo (1979–1985) propose la notion d'équivalence blow-analytique de façon à obtenir une classification sans module continu pour les singularités isolées.
2. T. Fukui (1997) et S. Koike et A. Parusiński (2003) ont développé des invariants qui permettent d'obtenir la classification blow-analytique des polynômes de Brieskorn–Pham à deux variables.
3. Cependant ces invariants ne permettent pas de traiter le cas des polynômes $x^p + y^{kp} + z^{kp}$ et $-x^p - y^{kp} - z^{kp}$ où p est impair.
4. G. Fichou (2005) algébrise la notion d'équivalence blow-analytique afin d'obtenir des invariants encore plus riches.

Introduction : équivalence blow-Nash

1. T.-C. Kuo (1979–1985) propose la notion d'équivalence blow-analytique de façon à obtenir une classification sans module continu pour les singularités isolées.
2. T. Fukui (1997) et S. Koike et A. Parusiński (2003) ont développé des invariants qui permettent d'obtenir la classification blow-analytique des polynômes de Brieskorn–Pham à deux variables.
3. Cependant ces invariants ne permettent pas de traiter le cas des polynômes $x^p + y^{kp} + z^{kp}$ et $-x^p - y^{kp} - z^{kp}$ où p est impair.
4. G. Fichou (2005) algébrise la notion d'équivalence blow-analytique afin d'obtenir des invariants encore plus riches.

Introduction : équivalence blow-Nash

1. T.-C. Kuo (1979–1985) propose la notion d'équivalence blow-analytique de façon à obtenir une classification sans module continu pour les singularités isolées.
2. T. Fukui (1997) et S. Koike et A. Parusiński (2003) ont développé des invariants qui permettent d'obtenir la classification blow-analytique des polynômes de Brieskorn–Pham à deux variables.
3. Cependant ces invariants ne permettent pas de traiter le cas des polynômes $x^p + y^{kp} + z^{kp}$ et $-x^p - y^{kp} - z^{kp}$ où p est impair.
4. G. Fichou (2005) algébrise la notion d'équivalence blow-analytique afin d'obtenir des invariants encore plus riches.

Introduction : équivalence blow-Nash

Définition : application Nash

Une **application Nash** est une application analytique dont le graphe est semialgébrique.

Définition : fonction blow-Nash

Une fonction semialgébrique $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble algébrique réel est **blow-Nash** s'il existe $\sigma : M \to X$ une suite finie d'éclatements algébriques à centres non-singuliers telle que $f \circ \sigma$ est Nash.

Introduction : équivalence blow-Nash

Définition : équivalence blow-Nash – Fichou, 2005

Deux germes Nash $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ sont **blow-Nash équivalents** s'il existe

- un homéomorphisme semialgébrique $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$,
- deux modifications Nash $\mu_i : (M_i, \mu_i^{-1}(0)) \to (\mathbb{R}^d, 0)$,
- un isomorphisme Nash $\Phi : (M_1, \mu_1^{-1}(0)) \to (M_2, \mu_2^{-1}(0))$ qui préserve les multiplicités des déterminants jacobiens de μ_1 et μ_2 le long de $\mu_1^{-1}(0)$ et de $\mu_2^{-1}(0)$

$$\begin{tikzcd}
(M_1, \mu_1^{-1}(0)) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\mu_1"'] & & (M_2, \mu_2^{-1}(0)) \arrow[d, "\mu_2"] \\
(\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "f_2"] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

Introduction : équivalence blow-Nash

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M}_1 \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[dr, "\sigma_1"'] & (M_1, \mu_1^{-1}(0)) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\mu_1"'] & & (M_2, \mu_2^{-1}(0)) \arrow[d, "\mu_2"] & \tilde{M}_2 \arrow[l, "\Psi_2"'] \arrow[dl, "\sigma_2"] \\
& (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "f_2"] & \\
& & (\mathbb{R}, 0) & &
\end{tikzcd}$$

Où σ_i est une suite finie d'éclatements à centres algébriques non-singuliers et Ψ_i est une application Nash.

Donc φ et φ^{-1} sont blow-Nash.

Introduction : le polynôme de Poincaré virtuel

Définition : ensemble $\mathcal{AS}$ – Parusiński, 2004

Une partie semialgébrique $A \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{AS}$ si pour tout arc analytique réel $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ vérifiant $\gamma((-1,0)) \subset A$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma((0,\varepsilon)) \subset A$.

Définition

On note $K_0(\mathcal{AS})$ le groupe libre abélien engendré par les symboles $[X]$, $X \in \mathcal{AS}$, modulo les relations

- Si $A \xrightarrow[\mathcal{AS}]{\text{bij}} B$ alors $[A] = [B]$.
- Si $B \subset A$ est $\mathcal{AS}$-fermé alors $[A] = [A \setminus B] + [B]$.

On a une structure d'anneau donnée par $[A \times B] = [A][B]$.

$0 = [\varnothing]$, $1 = [\mathrm{pt}]$, $\mathbb{L}_{\mathcal{AS}} = [\mathbb{R}]$.

Introduction : le polynôme de Poincaré virtuel

Le polynôme de Poincaré à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, pour les ensembles $\mathcal{AS}$ compacts et non-singuliers, se prolonge de façon unique en un invariant additif des ensembles $\mathcal{AS}$.

Théorème : polynôme de Poincaré virtuel – McCrory–Parusiński, 2003, 2011 ; Fichou, 2005

Il existe un unique morphisme d'anneaux $\beta : K_0(\mathcal{AS}) \to \mathbb{Z}[u]$ tel que

- Si $X \neq \varnothing$ alors $\deg \beta(X) = \dim X$ et le coefficient dominant est strictement positif.
- Si X est compact et lisse alors $\beta(X) = \sum \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2) u^i$.

Exemples

$\beta(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) = u + 1$ et $\beta(\mathbb{R}) = u$.

Introduction : le polynôme de Poincaré virtuel

Le polynôme de Poincaré à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, pour les ensembles $\mathcal{AS}$ compacts et non-singuliers, se prolonge de façon unique en un invariant additif des ensembles $\mathcal{AS}$.

Théorème : polynôme de Poincaré virtuel – McCrory–Parusiński, 2003, 2011 ; Fichou, 2005

Il existe un unique morphisme d'anneaux $\beta : K_0(\mathcal{AS}) \to \mathbb{Z}[u]$ tel que

- Si $X \neq \varnothing$ alors $\deg \beta(X) = \dim X$ et le coefficient dominant est strictement positif.
- Si X est compact et lisse alors $\beta(X) = \sum \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2) u^i$.

Exemples

$\beta(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) = u + 1$ et $\beta(\mathbb{R}) = u$.

Introduction : les fonctions zêta de Fichou

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,0) = \{\gamma : (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^d,0) \quad C^\omega\}$$
$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,0) \Big/ \gamma_1 \equiv \gamma_2 \mod t^{n+1}$$

Soit $f : (\mathbb{R}^d,0) \to (\mathbb{R},0)$ un germe Nash.
On pose $\mathfrak{X}_n(f) = \left\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0),\ f(\gamma(t)) \equiv ct^n \mod t^{n+1},\ c \neq 0\right\}$
et $\mathrm{ac}_f^n : \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^*,\ \gamma \mapsto \mathrm{ac}(f\gamma)$.

Théorème – Fichou, 2005

$Z_f^{\beta,\mathrm{naive}}(T) = \sum_{n\geq 1} \beta\left(\mathfrak{X}_n(f)\right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$
$Z_f^{\beta,+}(T) = \sum_{n\geq 1} \beta\left((\mathrm{ac}_f^n)^{-1}(1)\right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$
$Z_f^{\beta,-}(T) = \sum_{n\geq 1} \beta\left((\mathrm{ac}_f^n)^{-1}(-1)\right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$
sont des invariants de l'équivalence blow-Nash.

Introduction : les fonctions zêta de Fichou

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,0) = \{\gamma : (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R}^d,0) \quad C^\omega\}$$
$$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d,0) \Big/ \gamma_1 \equiv \gamma_2 \mod t^{n+1}$$

Soit $f : (\mathbb{R}^d,0) \to (\mathbb{R},0)$ un germe Nash.
On pose $\mathfrak{X}_n(f) = \left\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d,0),\ f(\gamma(t)) \equiv ct^n \mod t^{n+1},\ c \neq 0\right\}$
et $\mathrm{ac}_f^n : \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^*,\ \gamma \mapsto \mathrm{ac}(f\gamma)$.

Théorème – Fichou, 2005

$$Z_f^{\beta,\mathrm{naive}}(T) = \sum_{n\geq 1} \beta\left(\mathfrak{X}_n(f)\right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$$
$$Z_f^{\beta,+}(T) = \sum_{n\geq 1} \beta\left((\mathrm{ac}_f^n)^{-1}(1)\right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$$
$$Z_f^{\beta,-}(T) = \sum_{n\geq 1} \beta\left((\mathrm{ac}_f^n)^{-1}(-1)\right) u^{-nd} T^n \in \mathbb{Z}[u,u^{-1}][[T]]$$

sont des invariants de l'équivalence blow-Nash.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Soit $\varphi : X \to Y$ une application blow-Nash où X est non-singulier :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ X \arrow[rr, "\varphi"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Définition : application analytique par arcs – Kurdyka 1988

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble algébrique est **analytique par arcs** si $f \circ \gamma$ est analytique pour tout arc analytique réel $\gamma : (-1,1) \to X$

Un théorème d'inversion blow-Nash

Soit $\varphi : X \to Y$ une application blow-Nash où X est non-singulier :

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\
(-1,1) \arrow[r, "\gamma"'] & X \arrow[rr, "\varphi"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Définition : application analytique par arcs – Kurdyka 1988

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble algébrique est **analytique par arcs** si $f \circ \gamma$ est analytique pour tout arc analytique réel $\gamma : (-1,1) \to X$

Un théorème d'inversion blow-Nash

Soit $\varphi : X \to Y$ une application blow-Nash où X est non-singulier :

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\
(-1,1) \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[urr, bend left, "\tilde{\gamma}"] & X \arrow[rr, "\varphi"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Définition : application analytique par arcs – Kurdyka 1988

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble algébrique est **analytique par arcs** si $f \circ \gamma$ est analytique pour tout arc analytique réel $\gamma : (-1,1) \to X$

Un théorème d'inversion blow-Nash

Théorème – Bierstone–Milman, 1990

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction semialgébrique définie sur un ensemble algébrique réel non-singulier. Alors f est analytique par arcs si et seulement si f est blow-Nash.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Exemple

La fonction $f : \{x^3 = zy^3\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \frac{x}{y}$ est blow-Nash mais elle n'est pas analytique par arcs puisque $f(0,0,t) = t^{\frac{1}{3}}$.

Applications génériquement analytiques par arcs

Soit $f : X \to Y$ une application semialgébrique et continue entre deux ensembles algébriques réels.
Alors f est blow-Nash si et seulement si elle envoie par composition les arcs analytiques réels non entièrement inclus dans un certain ensemble dense nulle part sur des arcs analytiques.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Exemple

La fonction $f : \{x^3 = zy^3\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \frac{x}{y}$ est blow-Nash mais elle n'est pas analytique par arcs puisque $f(0,0,t) = t^{\frac{1}{3}}$.

Applications génériquement analytiques par arcs

Soit $f : X \to Y$ une application semialgébrique et continue entre deux ensembles algébriques réels.
Alors f est blow-Nash si et seulement si elle envoie par composition les arcs analytiques réels non entièrement inclus dans un certain ensemble dense nulle part sur des arcs analytiques.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Lemme

Soit $f : X \to X$ une application blow-Nash.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde\sigma"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

On peut supposer que les idéaux jacobiens de σ et de $\tilde\sigma$ sont simultanément à croisements normaux : $\sum_{i\in I} \nu_i E_i$ et $\sum_{i\in I} \tilde\nu_i E_i$. Alors la propriété (HJ) $\forall i \in I,\ \nu_i \geq \tilde\nu_i$ ne dépend pas du choix de σ.

Proposition

Si X est non-singulier alors
$(HJ) \Leftrightarrow \exists c > 0,\ |\det \mathrm{d}f| > c$ où $\mathrm{d}f$ est définie

Un théorème d'inversion blow-Nash

Théorème – C., 2015

Soit X un ensemble algébrique réel. Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme semialgébrique. Si f est blow-Nash et satisfait (HJ) alors f^{-1} est blow-Nash et satisfait (HJ) aussi.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Notations

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) = \{\gamma : (\mathbb{R},0) \to \mathbb{R}^N \ C^\omega\}$
$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \big/ \gamma_1 \equiv \gamma_2 \mod t^{n+1}$

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble algébrique.
$\mathcal{L}(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X),\ f(\gamma(t)) = 0\}$
$\mathcal{L}_n(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X),\ f(\gamma(t)) \equiv 0 \mod t^{n+1}\}$

Pour $m \geq n$, on a $\pi_n : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_n(X)$ et $\pi_n^m : \mathcal{L}_m(X) \to \mathcal{L}_n(X)$.
Si X est singulier, il existe n tel que $\mathcal{L}_n(X) \neq \pi_n(\mathcal{L}(X))$.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Notations

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) = \{\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^N \ C^\omega\}$
$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) / \gamma_1 \equiv \gamma_2 \mod t^{n+1}$

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble algébrique.
$\mathcal{L}(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X), f(\gamma(t)) = 0\}$
$\mathcal{L}_n(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X), f(\gamma(t)) \equiv 0 \mod t^{n+1}\}$

Pour $m \geq n$, on a $\pi_n : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_n(X)$ et $\pi_n^m : \mathcal{L}_m(X) \to \mathcal{L}_n(X)$.
Si X est singulier, il existe n tel que $\mathcal{L}_n(X) \neq \pi_n(\mathcal{L}(X))$.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Notations

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N) = \{\gamma : (\mathbb{R},0) \to \mathbb{R}^N\ C^\omega\}$
$\mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \big/ \gamma_1 \equiv \gamma_2 \mod t^{n+1}$

Soit $X \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble algébrique.
$\mathcal{L}(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X),\ f(\gamma(t)) = 0\}$
$\mathcal{L}_n(X) = \{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^N), \forall f \in I(X),\ f(\gamma(t)) \equiv 0 \mod t^{n+1}\}$

Pour $m \geq n$, on a $\pi_n : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}_n(X)$ et $\pi_n^m : \mathcal{L}_m(X) \to \mathcal{L}_n(X)$.
Si X est singulier, il existe n tel que $\mathcal{L}_n(X) \neq \pi_n(\mathcal{L}(X))$.

Un théorème d'inversion blow-Nash

Une adaptation du lemme clé de Denef–Loeser

Soient M un ensemble algébrique non-singulier et $X \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble algébrique réel.
Soit $\sigma : M \to X$ une application propre, Nash, génériquement injective.
Soit $\Delta_{e,e'} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M), \operatorname{ord}_t \left(\operatorname{Jac}_\sigma \gamma(t)\right) = e, \sigma\gamma \in \mathcal{L}^{(e')}(X)\}$.
Si $n \geq \max(2e, e')$ alors

- $\sigma_{*n}(\pi_n(\Delta_{e,e'})) \in \mathcal{AS}$
- $\sigma_{*n} : \pi_n(\Delta_{e,e'}) \to \sigma_{*n}(\pi_n(\Delta_{e,e'}))$ est une $\mathcal{AS}$-fibration triviale par morceaux de fibre $\mathbb{R}^e$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Jac}_\sigma = \sum_{i\in I} \nu_i E_i$$

$$\sigma^{-1}(H) = \sum_{i\in I} \lambda_i E_i \text{ où } V(H) = X_{\mathrm{sing}}.$$

$$\mathbf{j} = (j_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I \rightsquigarrow J(\mathbf{j}) = \{i \in I,\ j_i \neq 0\} \rightsquigarrow E_J^\bullet = \bigcap_{j\in J} E_j \setminus \bigcup_{i\in I\setminus J} E_i,$$

$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M), \forall i \in J, \operatorname{ord}_\gamma E_i = j_i, \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$ et
$X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \sigma_{*n}(\pi_n \mathcal{B}_{\mathbf{j}})$.

- $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{\nu\cdot\mathbf{j},\lambda\cdot\mathbf{j}}(\sigma)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(\sigma) = \left\{\mathbf{j},\ \nu\cdot\mathbf{j} \leq \frac{n}{2},\ \lambda\cdot\mathbf{j} \leq n\right\}$
- $\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \Rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \in \mathcal{AS}$,
  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = (n+1)\dim X - \sum j_i - \nu\cdot\mathbf{j}$
- $\operatorname{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$ et
  $\dim Z_n(\sigma) < (n+1)\dim X - \frac{n}{c}$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde\sigma"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Jac}_\sigma = \sum_{i\in I} \nu_i E_i$$

$$\sigma^{-1}(H) = \sum_{i\in I} \lambda_i E_i \text{ où } V(H) = X_{\mathrm{sing}}.$$

$$\mathbf{j} = (j_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I \rightsquigarrow J(\mathbf{j}) = \{i \in I,\ j_i \neq 0\} \rightsquigarrow E_J^\bullet = \bigcap_{j\in J} E_j \setminus \bigcup_{i\in I\setminus J} E_i,$$

$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M),\ \forall i \in J,\ \mathrm{ord}_\gamma E_i = j_i,\ \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$ et
$X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \sigma_{*n}(\pi_n \mathcal{B}_{\mathbf{j}})$.

- $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{\nu\cdot\mathbf{j},\lambda\cdot\mathbf{j}}(\sigma)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(\sigma) = \left\{\mathbf{j},\ \nu\cdot\mathbf{j} \le \frac{n}{2},\ \lambda\cdot\mathbf{j} \le n\right\}$
- $\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \Rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \in \mathcal{AS}$,
  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = (n+1)\dim X - \sum j_i - \nu\cdot\mathbf{j}$
- $\mathrm{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$ et
  $\dim Z_n(\sigma) < (n+1)\dim X - \frac{n}{c}$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Jac}_\sigma = \sum_{i\in I} \nu_i E_i$$
$$\sigma^{-1}(H) = \sum_{i\in I} \lambda_i E_i \text{ où } V(H) = X_{\mathrm{sing}}.$$

$$\mathbf{j} = (j_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I \rightsquigarrow J(\mathbf{j}) = \{i \in I,\ j_i \neq 0\} \rightsquigarrow E_J^\bullet = \bigcap_{j\in J} E_j \setminus \bigcup_{i\in I\setminus J} E_i,$$

$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M),\ \forall i \in J,\ \mathrm{ord}_\gamma E_i = j_i,\ \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$ et
$X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \sigma_{*n}(\pi_n \mathcal{B}_{\mathbf{j}})$.

- $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{\nu\cdot\mathbf{j},\lambda\cdot\mathbf{j}}(\sigma)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(\sigma) = \left\{\mathbf{j},\ \nu\cdot\mathbf{j} \leq \frac{n}{2},\ \lambda\cdot\mathbf{j} \leq n\right\}$
- $\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \Rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \in \mathcal{AS}$,
  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = (n+1)\dim X - \sum j_i - \nu\cdot\mathbf{j}$
- $\mathrm{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$ et
  $\dim Z_n(\sigma) < (n+1)\dim X - \frac{n}{c}$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Jac}_\sigma = \sum_{i\in I} \nu_i E_i$$

$$\sigma^{-1}(H) = \sum_{i\in I} \lambda_i E_i \text{ où } V(H) = X_{\mathrm{sing}}.$$

$$\mathbf{j} = (j_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I \rightsquigarrow J(\mathbf{j}) = \{i \in I,\ j_i \neq 0\} \rightsquigarrow E_J^\bullet = \bigcap_{j\in J} E_j \setminus \bigcup_{i\in I\setminus J} E_i,$$

$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M),\ \forall i \in J,\ \mathrm{ord}_\gamma E_i = j_i,\ \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$ et
$X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \sigma_{*n}(\pi_n \mathcal{B}_{\mathbf{j}})$.

- $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{\nu\cdot\mathbf{j},\lambda\cdot\mathbf{j}}(\sigma)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(\sigma) = \left\{\mathbf{j},\ \nu\cdot\mathbf{j} \leq \frac{n}{2},\ \lambda\cdot\mathbf{j} \leq n\right\}$
- $\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \Rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \in \mathcal{AS}$,
  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = (n+1)\dim X - \sum j_i - \nu\cdot\mathbf{j}$
- $\mathrm{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$ et
  $\dim Z_n(\sigma) < (n+1)\dim X - \frac{n}{c}$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde\sigma"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Jac}_\sigma = \sum_{i\in I} \nu_i E_i$$

$\sigma^{-1}(H) = \sum_{i\in I} \lambda_i E_i$ où $V(H) = X_{\mathrm{sing}}$.

$$\mathbf{j} = (j_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I \rightsquigarrow J(\mathbf{j}) = \{i \in I,\ j_i \neq 0\} \rightsquigarrow E_J^\bullet = \bigcap_{j\in J} E_j \setminus \bigcup_{i\in I\setminus J} E_i,$$

$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M),\ \forall i \in J,\ \mathrm{ord}_\gamma E_i = j_i,\ \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$ et
$X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \sigma_{*n}(\pi_n \mathcal{B}_{\mathbf{j}})$.

- $\mathcal{B}_{\mathbf{j}} \subset \Delta_{\nu\cdot\mathbf{j},\lambda\cdot\mathbf{j}}(\sigma)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(\sigma) = \left\{\mathbf{j},\ \nu\cdot\mathbf{j} \leq \frac{n}{2},\ \lambda\cdot\mathbf{j} \leq n\right\}$
- $\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \Rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \in \mathcal{AS}$,
  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = (n+1)\dim X - \sum j_i - \nu\cdot\mathbf{j}$
- $\mathrm{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$ et
  $\dim Z_n(\sigma) < (n+1)\dim X - \frac{n}{c}$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tilde{\sigma}"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Jac}_\sigma = \sum_{i\in I} \nu_i E_i$$

$$\sigma^{-1}(H) = \sum_{i\in I} \lambda_i E_i \text{ où } V(H) = X_{\mathrm{sing}}.$$

$$\mathbf{j} = (j_i)_{i\in I} \in \mathbb{N}^I \rightsquigarrow J(\mathbf{j}) = \{i \in I,\ j_i \neq 0\} \rightsquigarrow E_J^\bullet = \bigcap_{j\in J} E_j \setminus \bigcup_{i\in I\setminus J} E_i,$$

$\mathcal{B}_\mathbf{j} = \{\gamma \in \mathcal{L}(M),\ \forall i \in J,\ \mathrm{ord}_\gamma E_i = j_i,\ \gamma(0) \in E_J^\bullet\}$ et
$X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = \sigma_{*n}(\pi_n \mathcal{B}_\mathbf{j})$.

- $\mathcal{B}_\mathbf{j} \subset \Delta_{\nu\cdot\mathbf{j},\lambda\cdot\mathbf{j}}(\sigma)$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n(\sigma) = \left\{\mathbf{j},\ \nu\cdot\mathbf{j} \le \frac{n}{2},\ \lambda\cdot\mathbf{j} \le n\right\}$
- $\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \Rightarrow X_{\mathbf{j},n}(\sigma) \in \mathcal{AS}$,
  $\dim X_{\mathbf{j},n}(\sigma) = (n+1)\dim X - \sum j_i - \nu\cdot\mathbf{j}$
- $\mathrm{Im}(\sigma_{*n}) = Z_n(\sigma) \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$ et
  $\dim Z_n(\sigma) < (n+1)\dim X - \frac{n}{c}$.

$$\widetilde{\pi_n(\mathcal{L}(X))} := \overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im} \sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$$

$$\widetilde{\operatorname{Im} \tilde{\sigma}_{*n}} := \overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma})} X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})$$

$$\begin{aligned} &\beta\left(\widetilde{\pi_n(\mathcal{L}(X))} \setminus \widetilde{\operatorname{Im} \tilde{\sigma}_{*n}}\right) - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \cap A_n(\tilde{\sigma})} \left(\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}))\right) \\ &\qquad = \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \setminus A_n(\tilde{\sigma})} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma}) \setminus A_n(\sigma)} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})) \\ &\qquad\quad + \beta\left(\overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im} \sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}}\right) - \beta\left(\overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}}\right) \end{aligned}$$

Le degré du terme de droite est inférieur ou égal à $(n+1)\dim X - \frac{n}{cste}$.
Soit $S = X_{\text{sing}} \cup \{x \in X,\ \#\tilde{\sigma}^{-1}(x) > 1\}$. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\nu_{i_0} > \tilde{\nu}_{i_0}$ ou s'il existe un arc analytique non-entièrement inclus dans S qui ne se relève pas par $\tilde{\sigma}$ alors le degré du terme de gauche est supérieur ou égal à $(n+1)\dim X - k$ pour n assez grand.

$$\pi_n\widetilde{(\mathcal{L}(X))} := \overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im}\sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$$

$$\widetilde{\operatorname{Im}\tilde{\sigma}_{*n}} := \overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\tilde{\sigma})} X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})$$

$$\begin{aligned}\beta\left(\pi_n\widetilde{(\mathcal{L}(X))} \setminus \widetilde{\operatorname{Im}\tilde{\sigma}_{*n}}\right) - \sum_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)\cap A_n(\tilde{\sigma})} \left(\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}))\right) \\ = \sum_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)\setminus A_n(\tilde{\sigma})} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \sum_{\mathbf{j}\in A_n(\tilde{\sigma})\setminus A_n(\sigma)} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})) \\ + \beta\left(\overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im}\sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}}\right) - \beta\left(\overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}}\right)\end{aligned}$$

Le degré du terme de droite est inférieur ou égal à $(n+1)\dim X - \frac{n}{cste}$.

Soit $S = X_{\text{sing}} \cup \{x \in X, \#\tilde{\sigma}^{-1}(x) > 1\}$. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\nu_{i_0} > \tilde{\nu}_{i_0}$ ou s'il existe un arc analytique non-entièrement inclus dans S qui ne se relève pas par $\tilde{\sigma}$ alors le degré du terme de gauche est supérieur ou égal à $(n+1)\dim X - k$ pour n assez grand.

$$\pi_n(\widetilde{\mathcal{L}(X)}) := \overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im}\sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$$

$$\widetilde{\operatorname{Im}\tilde{\sigma}_{*n}} := \overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j}\in A_n(\tilde{\sigma})} X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})$$

$$\begin{aligned}
&\beta\left(\pi_n(\widetilde{\mathcal{L}(X)}) \setminus \widetilde{\operatorname{Im}\tilde{\sigma}_{*n}}\right) - \sum_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)\cap A_n(\tilde{\sigma})} \left(\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}))\right) \\
&\quad = \sum_{\mathbf{j}\in A_n(\sigma)\setminus A_n(\tilde{\sigma})} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \sum_{\mathbf{j}\in A_n(\tilde{\sigma})\setminus A_n(\sigma)} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})) \\
&\qquad + \beta\left(\overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im}\sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}}\right) - \beta\left(\overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}}\right)
\end{aligned}$$

Le degré du terme de droite est inférieur ou égal à $(n+1)\dim X - \frac{n}{cste}$. Soit $S = X_{\text{sing}} \cup \{x \in X, \#\tilde{\sigma}^{-1}(x) > 1\}$. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\nu_{i_0} > \tilde{\nu}_{i_0}$ ou s'il existe un arc analytique non-entièrement inclus dans S qui ne se relève pas par $\tilde{\sigma}$ alors le degré du terme de gauche est supérieur ou égal à $(n+1)\dim X - k$ pour n assez grand.

$$\widetilde{\pi_n(\mathcal{L}(X))} := \overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im} \sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma)} X_{\mathbf{j},n}(\sigma)$$

$$\widetilde{\operatorname{Im} \tilde{\sigma}_{*n}} := \overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}} \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma})} X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})$$

$$\begin{aligned}
\beta\left(\widetilde{\pi_n(\mathcal{L}(X))} \setminus \widetilde{\operatorname{Im} \tilde{\sigma}_{*n}}\right) &- \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \cap A_n(\tilde{\sigma})} \left(\beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma}))\right) \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\sigma) \setminus A_n(\tilde{\sigma})} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\sigma)) - \sum_{\mathbf{j} \in A_n(\tilde{\sigma}) \setminus A_n(\sigma)} \beta(X_{\mathbf{j},n}(\tilde{\sigma})) \\
&\quad + \beta\left(\overline{Z_n(\sigma) \sqcup (\pi_n(\mathcal{L}(X)) \setminus \operatorname{Im} \sigma_{*n})}^{\mathcal{AS}}\right) - \beta\left(\overline{Z_n(\tilde{\sigma})}^{\mathcal{AS}}\right)
\end{aligned}$$

Le degré du terme de droite est inférieur ou égal à $(n+1)\dim X - \frac{n}{cste}$. Soit $S = X_{\text{sing}} \cup \{x \in X, \#\tilde{\sigma}^{-1}(x) > 1\}$. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\nu_{i_0} > \tilde{\nu}_{i_0}$ ou s'il existe un arc analytique non-entièrement inclus dans S qui ne se relève pas par $\tilde{\sigma}$ alors le degré du terme de gauche est supérieur ou égal à $(n+1)\dim X - k$ pour n assez grand. $\square$

Définition : équivalence arc-analytique

Deux germes Nash $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ sont **arc-analytiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme semialgébrique et arc-analytique $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ tel qu'il existe $c > 0$ vérifiant $|\det \mathrm{d}\varphi| > c$ où $\mathrm{d}\varphi$ est définie et tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "f_2"] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

Proposition

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition

Deux germes Nash sont arc-analytiquement équivalents si et seulement s'ils sont blow-Nash équivalents.

Définition : équivalence arc-analytique

Deux germes Nash $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ sont **arc-analytiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme semialgébrique et arc-analytique $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ tel qu'il existe $c > 0$ vérifiant $|\det \mathrm{d}\varphi| > c$ où $\mathrm{d}\varphi$ est définie et tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "f_2"] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

Proposition

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition

Deux germes Nash sont arc-analytiquement équivalents si et seulement s'ils sont blow-Nash équivalents.

Définition : équivalence arc-analytique

Deux germes Nash $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ sont **arc-analytiquement équivalents** s'il existe un homéomorphisme semialgébrique et arc-analytique $\varphi : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ tel qu'il existe $c > 0$ vérifiant $|\det \mathrm{d}\varphi| > c$ où $\mathrm{d}\varphi$ est définie et tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^d, 0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f_1"'] & & (\mathbb{R}^d, 0) \arrow[dl, "f_2"] \\
& (\mathbb{R}, 0) &
\end{tikzcd}$$

Proposition

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition

Deux germes Nash sont arc-analytiquement équivalents si et seulement s'ils sont blow-Nash équivalents.

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

- $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash
- $\mathfrak{X}_n(f) = \left\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0),\ f(\gamma(t)) \equiv ct^n \mod t^{n+1},\ c \neq 0\right\}$
- $\mathrm{ac}_f^n : \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^*,\ \gamma \mapsto \mathrm{ac}(f\gamma)$
- $\mathbb{R}^* \circlearrowright \mathfrak{X}_n(f),\ \lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$
- $\mathrm{ac}_f^n(\lambda \cdot \gamma) = \lambda^n \,\mathrm{ac}_f^n(\gamma)$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

- $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash
- $\mathfrak{X}_n(f) = \left\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0),\ f(\gamma(t)) \equiv ct^n \mod t^{n+1},\ c \neq 0\right\}$
- $\mathrm{ac}_f^n : \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^*,\ \gamma \mapsto \mathrm{ac}(f\gamma)$
- $\mathbb{R}^* \circlearrowright \mathfrak{X}_n(f),\ \lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$
- $\mathrm{ac}_f^n(\lambda \cdot \gamma) = \lambda^n\, \mathrm{ac}_f^n(\gamma)$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

- $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash
- $\mathfrak{X}_n(f) = \left\{\gamma \in \mathcal{L}_n(\mathbb{R}^d, 0),\ f(\gamma(t)) \equiv ct^n \mod t^{n+1},\ c \neq 0\right\}$
- $\mathrm{ac}_f^n : \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^*,\ \gamma \mapsto \mathrm{ac}(f\gamma)$
- $\mathbb{R}^* \circlearrowright \mathfrak{X}_n(f),\ \lambda \cdot \gamma(t) = \gamma(\lambda t)$
- $\mathrm{ac}_f^n(\lambda \cdot \gamma) = \lambda^n\, \mathrm{ac}_f^n(\gamma)$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Soit K_0 le groupe libre abélien engendré par les symboles $\left[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circlearrowright X \to \mathbb{R}^*\right]$ où $X \in \mathcal{AS}$, $\Gamma_{\varphi_X} \in \mathcal{AS}$, $\Gamma_{\mathbb{R}^* \times X \to X} \in \mathcal{AS}$ et $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda^n \varphi(x)$ pour un certain n, modulo les relations

- $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\text{bij. équiv.}", "\mathcal{AS}"'] \arrow[dr, "\varphi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_Y"] \\ & \mathbb{R}^* & \end{tikzcd} \Rightarrow \left[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circlearrowright X \to \mathbb{R}^*\right] = \left[\varphi_Y : \mathbb{R}^* \circlearrowright Y \to \mathbb{R}^*\right]$$
- Si $Y \subset X$ est $\mathcal{AS}$-fermé et invariant par l'action alors $\left[\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*\right] = \left[\varphi_{X|X \setminus Y} : X \setminus Y \to \mathbb{R}^*\right] + \left[\varphi_{X|Y} : Y \to \mathbb{R}^*\right]$
- $[\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*, \sigma] = [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*, \sigma']$ si $\lambda \cdot_{\sigma'} x = \lambda^k \cdot_\sigma x$
- $[Y \times \mathbb{R}^m \to Y \to \mathbb{R}^*, \sigma] = [Y \times \mathbb{R}^m \to Y \to \mathbb{R}^*, \sigma']$ si σ et σ' relèvent la même action sur Y.

Structure d'anneau induite par le produit fibré :

- $[\varphi_X \times_{\mathbb{R}^*} \varphi_Y] = [\varphi_X][\varphi_Y]$

Structure de $K_0(\mathcal{AS})$-algèbre induite par le produit cartésien :

- $\overline{[A]}[\varphi_X] = [A \times X \to X \to \mathbb{R}^*]$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Soit K_0 le groupe libre abélien engendré par les symboles $\left[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circlearrowright X \to \mathbb{R}^*\right]$ où $X \in \mathcal{AS}$, $\Gamma_{\varphi_X} \in \mathcal{AS}$, $\Gamma_{\mathbb{R}^* \times X \to X} \in \mathcal{AS}$ et $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda^n \varphi(x)$ pour un certain n, modulo les relations

- $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\text{bij. équiv.}", "\mathcal{AS}"'] \arrow[dr, "\varphi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_Y"] \\ & \mathbb{R}^* & \end{tikzcd} \Rightarrow \left[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circlearrowright X \to \mathbb{R}^*\right] = \left[\varphi_Y : \mathbb{R}^* \circlearrowright Y \to \mathbb{R}^*\right]$
- Si $Y \subset X$ est $\mathcal{AS}$-fermé et invariant par l'action alors $\left[\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*\right] = \left[\varphi_{X|X\setminus Y} : X \setminus Y \to \mathbb{R}^*\right] + \left[\varphi_{X|Y} : Y \to \mathbb{R}^*\right]$
- $[\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*, \sigma] = [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*, \sigma']$ si $\lambda \cdot_{\sigma'} x = \lambda^k \cdot_\sigma x$
- $[Y \times \mathbb{R}^m \to Y \to \mathbb{R}^*, \sigma] = [Y \times \mathbb{R}^m \to Y \to \mathbb{R}^*, \sigma']$ si σ et σ' relèvent la même action sur Y.

Structure d'anneau induite par le produit fibré :

- $[\varphi_X \times_{\mathbb{R}^*} \varphi_Y] = [\varphi_X][\varphi_Y]$

Structure de $K_0(\mathcal{AS})$-algèbre induite par le produit cartésien :

- $\overline{[A]}[\varphi_X] = [A \times X \to X \to \mathbb{R}^*]$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Soit K_0 le groupe libre abélien engendré par les symboles $\left[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circlearrowright X \to \mathbb{R}^*\right]$ où $X \in \mathcal{AS}$, $\Gamma_{\varphi_X} \in \mathcal{AS}$, $\Gamma_{\mathbb{R}^* \times X \to X} \in \mathcal{AS}$ et $\varphi(\lambda \cdot x) = \lambda^n \varphi(x)$ pour un certain n, modulo les relations

- $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\text{bij. équiv.}", "\mathcal{AS}"'] \arrow[dr, "\varphi_X"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_Y"] \\ & \mathbb{R}^* & \end{tikzcd} \Rightarrow \left[\varphi_X : \mathbb{R}^* \circlearrowright X \to \mathbb{R}^*\right] = \left[\varphi_Y : \mathbb{R}^* \circlearrowright Y \to \mathbb{R}^*\right]$$
- Si $Y \subset X$ est $\mathcal{AS}$-fermé et invariant par l'action alors $\left[\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*\right] = \left[\varphi_{X|X\setminus Y} : X \setminus Y \to \mathbb{R}^*\right] + \left[\varphi_{X|Y} : Y \to \mathbb{R}^*\right]$
- $[\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*, \sigma] = [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*, \sigma']$ si $\lambda \cdot_{\sigma'} x = \lambda^k \cdot_\sigma x$
- $[Y \times \mathbb{R}^m \to Y \to \mathbb{R}^*, \sigma] = [Y \times \mathbb{R}^m \to Y \to \mathbb{R}^*, \sigma']$ si σ et σ' relèvent la même action sur Y.

Structure d'anneau induite par le produit fibré :

- $[\varphi_X \times_{\mathbb{R}^*} \varphi_Y] = [\varphi_X][\varphi_Y]$

Structure de $K_0(\mathcal{AS})$-algèbre induite par le produit cartésien :

- $\overline{[A]}[\varphi_X] = [A \times X \to X \to \mathbb{R}^*]$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Notations

- $0 = [\varnothing]$
- $\mathbb{1} = [\mathrm{id} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{AS}} \cdot \mathbb{1} = [\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathcal{M} = K_0\left[\mathbb{L}^{-1}\right]$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Notations

- $0 = [\varnothing]$
- $\mathbb{1} = [\mathrm{id} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{AS}} \cdot \mathbb{1} = [\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathcal{M} = K_0 \left[\mathbb{L}^{-1}\right]$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Notations

- $0 = [\varnothing]$
- $\mathbb{1} = [\mathrm{id} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{AS}} \cdot \mathbb{1} = [\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathcal{M} = K_0\left[\mathbb{L}^{-1}\right]$

Un anneau de Grothendieck à la Guibert–Loeser–Merle

Notations

- $0 = [\varnothing]$
- $\mathbb{1} = [\mathrm{id} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathcal{AS}} \cdot \mathbb{1} = [\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^*} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*]$
- $\mathcal{M} = K_0\left[\mathbb{L}^{-1}\right]$

Une fonction zêta motivique

Définition : fonction zêta

À $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash, on associe

$$Z_f(T) = \sum_{n\geq 1} \left[\mathrm{ac}_f^n : \mathbb{R}^* \circlearrowright \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^*\right] \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}[[T]]$$

Remarque

- $\overline{\cdot} : K_0 \to K_0(\mathcal{AS}), [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*] \mapsto \overline{[X]}$
- $F^\varepsilon : K_0 \to K_0(\mathcal{AS}), [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*] \mapsto \overline{[\varphi_X^{-1}(\varepsilon 1)]}, \varepsilon = +, -$

Une fonction zêta motivique

Définition : fonction zêta

À $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash, on associe

$$Z_f(T) = \sum_{n \geq 1} \left[\mathrm{ac}_f^n : \mathbb{R}^* \circlearrowright \mathfrak{X}_n(f) \to \mathbb{R}^* \right] \mathbb{L}^{-nd} T^n \in \mathcal{M}[[T]]$$

Remarque

- $\overline{\cdot} : K_0 \to K_0(\mathcal{AS}),\ [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*] \mapsto \overline{[X]}$
- $F^\varepsilon : K_0 \to K_0(\mathcal{AS}),\ [\varphi_X : X \to \mathbb{R}^*] \mapsto \overline{[\varphi_X^{-1}(\varepsilon 1)]},\ \varepsilon = +, -$

Rationalité et équivalence arc-analytique

Proposition : rationalité de la fonction zêta

Soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash.
Soit $\sigma : (Y, \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ une application Nash propre génériquement injective telle que $(f \circ \sigma)^{-1}(0) = \cup_{i \in A} E_i$ soit à croisements normaux.
Posons $N_i = \operatorname{ord}_{E_i} f \circ \sigma$ et $\nu_i - 1 = \operatorname{ord}_{E_i} \operatorname{Jac} \sigma$. Alors

$$Z_f(T) = \sum_{\varnothing \neq I \subset A} \left[\widetilde{U_I}\right] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}{\mathbb{1} - \mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}$$

Théorème : invariance arc-analytique

Soient $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ deux germes Nash. Alors

$$f \underset{\text{a-a}}{\sim} g \Rightarrow Z_f(T) = Z_g(T)$$

Rationalité et équivalence arc-analytique

Proposition : rationalité de la fonction zêta

Soit $f : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ un germe Nash.
Soit $\sigma : (Y, \sigma^{-1}(0)) \to (\mathbb{R}^d, 0)$ une application Nash propre génériquement injective telle que $(f \circ \sigma)^{-1}(0) = \cup_{i \in A} E_i$ soit à croisements normaux.
Posons $N_i = \operatorname{ord}_{E_i} f \circ \sigma$ et $\nu_i - 1 = \operatorname{ord}_{E_i} \operatorname{Jac} \sigma$. Alors

$$Z_f(T) = \sum_{\emptyset \neq I \subset A} \left[\widetilde{U_I}\right] \prod_{i \in I} \frac{\mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}{\mathbb{1} - \mathbb{L}^{-\nu_i} T^{N_i}}$$

Théorème : invariance arc-analytique

Soient $f, g : (\mathbb{R}^d, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ deux germes Nash. Alors

$$f \underset{\text{a-a}}{\sim} g \Rightarrow Z_f(T) = Z_g(T)$$

Convolution

Définition : produit de convolution

$* : K_0 \times K_0 \to K_0$

$[X_1, \varphi_1] * [X_2, \varphi_2] = -[Z_1, f_1] + [Z_2, f_2]$

où

$Z_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)^{-1}(\mathbb{R}^*),\ f_1 = \varphi_1 + \varphi_2,$

et

$Z_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)^{-1}(0) \times \mathbb{R}^*,\ f_2 = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^*},$

Proposition

Le produit $*$ est commutatif, associatif, $K_0(\mathcal{AS})$-bilinéaire et admet $\mathbb{1}$ comme unité.

Convolution

Définition : produit de convolution

$* : K_0 \times K_0 \to K_0$

$[X_1, \varphi_1] * [X_2, \varphi_2] = -[Z_1, f_1] + [Z_2, f_2]$

où

$Z_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)^{-1}(\mathbb{R}^*),\ f_1 = \varphi_1 + \varphi_2,$

et

$Z_2 = (\varphi_1 + \varphi_2)^{-1}(0) \times \mathbb{R}^*,\ f_2 = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^*},$

Proposition

Le produit $*$ est commutatif, associatif, $K_0(\mathcal{AS})$-bilinéaire et admet $\mathbb{1}$ comme unité.

Convolution

Définition : fonction zêta modifiée

$$\tilde{Z}_f(T) = Z_f(T) - \frac{\mathbb{1} - Z_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{1} - T} + \mathbb{1}$$

Théorème : formule de convolution

Soient $f_i : (\mathbb{R}^{d_i}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, 2$, deux germes Nash.
Posons $f_1 \oplus f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) : (\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$.
Alors :

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}(T) = -\tilde{Z}_{f_1}(T) \circledast \tilde{Z}_{f_2}(T)$$

Proposition

$$Z_f(T) = \tilde{Z}_f(T) + \frac{\mathbb{L} - \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{L} - T} - \mathbb{1}$$

Convolution

Définition : fonction zêta modifiée

$$\tilde{Z}_f(T) = Z_f(T) - \frac{\mathbb{1} - Z_f^{\mathrm{naive}}(T)}{\mathbb{1} - T} + \mathbb{1}$$

Théorème : formule de convolution

Soient $f_i : (\mathbb{R}^{d_i}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, 2$, deux germes Nash.
Posons $f_1 \oplus f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) : (\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$.
Alors :

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}(T) = -\tilde{Z}_{f_1}(T) \circledast \tilde{Z}_{f_2}(T)$$

Proposition

$$Z_f(T) = \tilde{Z}_f(T) + \frac{\mathbb{L} - \tilde{Z}_f^{\mathrm{naive}}(T)}{\mathbb{L} - T} - \mathbb{1}$$

Convolution

Définition : fonction zêta modifiée

$$\tilde{Z}_f(T) = Z_f(T) - \frac{\mathbb{1} - Z_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{1} - T} + \mathbb{1}$$

Théorème : formule de convolution

Soient $f_i : (\mathbb{R}^{d_i}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, $i = 1, 2$, deux germes Nash.
Posons $f_1 \oplus f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) : (\mathbb{R}^{d_1+d_2}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$.
Alors :

$$\tilde{Z}_{f_1 \oplus f_2}(T) = -\tilde{Z}_{f_1}(T) \circledast \tilde{Z}_{f_2}(T)$$

Proposition

$$Z_f(T) = \tilde{Z}_f(T) + \frac{\mathbb{L} - \tilde{Z}_f^{\text{naive}}(T)}{\mathbb{L} - T} - \mathbb{1}$$

Polynômes de Brieskorn–Pham

Définition : polynômes de Brieskorn–Pham

$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i^{k_i}$ où $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et $2 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_d$.

$$\tilde{Z}_{\varepsilon x^k}(T) = -T - \cdots - T^{k-1} - \alpha \mathbb{L}^{-1} T^k - \mathbb{L}^{-1} T^{k+1} - \cdots - \mathbb{L}^{-1} T^{2k-1} - \alpha \mathbb{L}^{-2} T^{2k} - \mathbb{L}^{-2} T^{2k+1} - \cdots$$

Si $\forall i,\ k_i \nmid n$ alors le coefficient devant T^n est de la forme

$$-\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{n}{k_i} \right\rfloor}$$

Polynômes de Brieskorn–Pham

Définition : polynômes de Brieskorn–Pham

$f(x_1,\dots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}\varepsilon_i x_i^{k_i}$ où $\varepsilon_i\in\{\pm1\}$ et $2\le k_1\le\dots\le k_d$.

$\tilde{Z}_{\varepsilon x^k}(T)=$
$-T-\dots-T^{k-1}-\alpha\mathbb{L}^{-1}T^k-\mathbb{L}^{-1}T^{k+1}-\dots-\mathbb{L}^{-1}T^{2k-1}-\alpha\mathbb{L}^{-2}T^{2k}-\mathbb{L}^{-2}T^{2k+1}-\dots$

Si $\forall i,\ k_i\nmid n$ alors le coefficient devant T^n est de la forme

$$-\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^{d}\left\lfloor\frac{n}{k_i}\right\rfloor}$$

Polynômes de Brieskorn–Pham

Définition : polynômes de Brieskorn–Pham

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i^{k_i} \text{ où } \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \text{ et } 2 \leq k_1 \leq \dots \leq k_d.$$

$$\tilde{Z}_{\varepsilon x^k}(T) =$$
$$-T - \dots - T^{k-1} - \alpha \mathbb{L}^{-1} T^k - \mathbb{L}^{-1} T^{k+1} - \dots - \mathbb{L}^{-1} T^{2k-1} - \alpha \mathbb{L}^{-2} T^{2k} - \mathbb{L}^{-2} T^{2k+1} - \dots$$

Si $\forall i,\ k_i \nmid n$ alors le coefficient devant T^n est de la forme

$$-\mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{n}{k_i} \right\rfloor}$$

Polynômes de Brieskorn–Pham

Théorème

Soient $f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i^{k_i}$ et $g(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} \eta_i x_i^{l_i}$ où $\varepsilon_i, \eta_i \in \{\pm 1\}$, $2 \leq k_1 \leq \dots \leq k_d$ et $2 \leq l_1 \leq \dots \leq l_d$.

Si f et g sont arc-analytiquement équivalents alors $\forall i,\ k_i = l_i$.