

INTERROGATION N°1

Le 11/10/2012

Durée 1h

*Aucun document n'est autorisé.**Pas de calculatrice.**La note tiendra compte de la rédaction.***IL FAUT TOUT JUSTIFIER.***Bon courage.***Exercice 1**

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Montrer que, pour $x \geq -1$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.
(Inégalité large de Bernoulli)

Exercice 2

- Calculer le pgcd de 54 et de 34.
- En déduire leur ppcm.

Exercice 3

- Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b .
- Montrer que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.
 - Expliquer l'importance de cette propriété pour l'algorithme d'Euclide.

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Montrer, de deux manières différentes, que \sqrt{p} est irrationnel.

Exercice 5

- Convertir $\overline{203}^4$ en base 10.
- Convertir $\overline{105}^{10}$ en base 5.
- Calculer directement dans la base :
 - $\overline{10011}^2 + \overline{11001}^2$.
 - $\overline{1234}^9 + \overline{5678}^9$.

Exercice 6

Trouver le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et la relation $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Indication : on pourra commencer par étudier une suite géométrique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n + r$ pour un certain $r \in \mathbb{R}$.