Corrigé de l'interrogation n°2

Exercice 1

1. On utilise l'algorithme d'Euclide :
$$\begin{aligned} 97 &= 22\times 4+9\\ 22 &= 9\times 2+4\\ 9 &= 4\times 2+1\\ 4 &= 1\times 4+0 \end{aligned}$$
Donc $\mathrm{pgcd}(97,22)=1$.

2. On remonte l'algorithme d'Euclide :
$$\begin{aligned} 1 &= 9-4\times 2\\ &= 9-(22-9\times 2)\times 2 = 9\times 5-22\times 2\\ &= (97-22\times 4)\times 5-22\times 2 = 97\times 5-22\times 22 \end{aligned}$$
Donc $u=5$ et $v=-22$ convient.

Exercice 2

Notons $d=\mathrm{pgcd}(3^{2012}-5,25)$. Alors $d|25$ et les diviseurs (positifs) de 25 sont 1, 5 et 25.
Si $d=5$ ou $d=25$, alors $5|d$ et comme $d|3^{2012}-5$, $5|3^{2012}-5$. Donc $5|3^{2012}$. Ce qui n'est pas possible.
Donc $d=1$.

Exercice 3

Commençons par remarquer que $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.
Premier cas : n impair. Alors $n+1$ est pair, donc $\frac{n+1}{2}$ est un entier, et $n|S_n$. Donc le reste est nul.
Second cas : n est pair. Alors $n=2k$, donc $S_n=\frac{2k(2k+1)}{2}=k(2k+1)=2k\times k+k=n\times k+\frac{n}{2}$ avec $0\le\frac{n}{2}<n$. Donc le reste est $\frac{n}{2}$.

Exercice 4

1. $29=3\times 9+2\Rightarrow\dfrac{29}{3}=9+\dfrac{2}{3}=9+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}$.
$3=2\times 1+1\Rightarrow\dfrac{3}{2}=1+\dfrac{1}{2}$.
Donc $\dfrac{29}{3}=9+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=[9,1,2]$.

2. $189=70\times 2+49\Rightarrow\dfrac{189}{70}=2+\dfrac{49}{70}=2+\dfrac{1}{\frac{70}{49}}$.
$70=49\times 1+21\Rightarrow\dfrac{70}{49}=1+\dfrac{21}{49}=1+\dfrac{1}{\frac{49}{21}}$. Donc $\dfrac{189}{70}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{49}{21}}}$.
$49=21\times 2+7\Rightarrow\dfrac{49}{21}=2+\dfrac{7}{21}=2+\dfrac{1}{\frac{21}{7}}=2+\dfrac{1}{3}$.
Donc $\dfrac{189}{70}=2+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}=[2,1,2,3]$.
On aurait pu simplifier les calculs en remarquant que $\frac{189}{70}=\frac{27}{10}$ *ou même que* $\frac{49}{21}=\frac{7}{3}$.

Exercice 5

1. On a $x^2=p^2+1(>0)$, donc les solutions sont $\pm\sqrt{p^2+1}$. La solution positive est $x=\sqrt{p^2+1}$.
2. x vérifie $x^2-(p^2+1)=0\Leftrightarrow 1=x^2-p^2=(x-p)(x+p)$. Comme $x+p>0$, on peut diviser par $x+p$, et x vérifie $x-p=\frac{1}{p+x}$.

Donc $x = p + \frac{1}{p+x} = p + \frac{1}{2p+\frac{1}{p+x}} = p + \frac{1}{2p+\frac{1}{2p+\dots}} = [p, \overline{2p}]$.

3. Donc $x = \sqrt{p^2+1}$ est irrationnel (son développement en fraction continue est infini).
4. Il suffit de remarquer que $5 = 2^2 + 1$, donc on applique la question 2. avec $p = 2$: $\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$.

Exercice 6

Il suffit de remarquer que le discriminant est inchangé par les deux opérations (c'est donc un *invariant*). Or les deux polynômes proposés ont des discriminants différents : on ne peut donc pas passer de l'un à l'autre avec les opérations autorisées.