Université Nice Sophia Antipolis 2012–2013

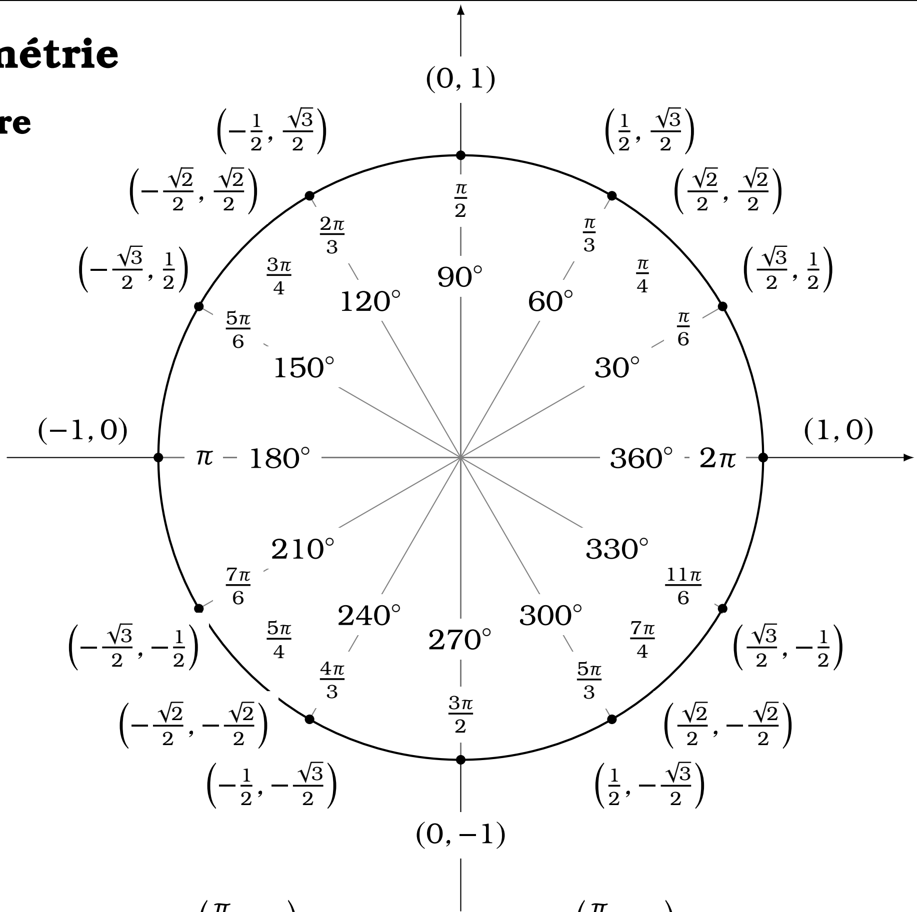
L1 PC - Analyse Jean-Baptiste Campesato

TD N°1

Rappels : trigonométrie, valeur absolue et inégalités

1 Trigonométrie

1.1 Formulaire



Angles associés :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$

Relations entre cos**,** sin **et** tan **:**

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Formules d'addition :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

En particulier :

- $$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \end{aligned}$$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

Produit en somme :

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a + b) + \cos(a - b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a - b) - \cos(a + b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a + b) + \sin(a - b)\right)$

Somme en produit :

- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a + b}{2}\right)\cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a + b}{2}\right)\sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a + b}{2}\right)\cos\left(\frac{a - b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a + b}{2}\right)\sin\left(\frac{a - b}{2}\right)$

Avec la tangente de l'arc moitié ($\vartheta = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$) :

- $\sin(x) = \dfrac{2\vartheta}{1 + \vartheta^2}$
- $\cos(x) = \dfrac{1 - \vartheta^2}{1 + \vartheta^2}$
- $\tan(x) = \dfrac{2\vartheta}{1 - \vartheta^2}$

Pour les équations :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2n\pi$ ou $x = -a + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2n\pi$ ou $x = \pi - a + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

1.2 Exercices

Exercice 1

1. Rappeler la définition des fonctions sin, cos et tan et expliquer le lien avec le cercle trigonométrique (en particulier, donner la lecture graphique de ces fonctions sur le cercle trigonométrique).
2. Observer sur le cercle unité les formules d'angles associés.
3. Donner le lien entre sin, cos et tan et en déduire des formules d'angles associés pour tan.
4. Expliquer la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
5. Comment obtenir les formules de transformation de somme en produit à partir des formules de transformation de produit en somme ?
6. Démontrer l'expression de tan et de cos avec ϑ et en déduire l'expression de sin avec ϑ.

À faire chez soi : comprendre comment retrouver toutes les formules à partir des formules des angles associés et de la formule $\cos(a + b)$.

Exercice 2

Soient α et β deux réels tels que $\alpha^2+\beta^2 = 1$, montrer qu'il existe φ tel que $\alpha\sin(x)+\beta\cos(x) = \sin(x+\varphi)$.

Remarque : ce résultat se généralise pour α et β quelconques : $\alpha\sin(x)+\beta\cos(x) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sin(x+\varphi)$ *où* $\varphi = \arctan(\beta/\alpha)$ *si α est positif et* $\varphi = \arctan(\beta/\alpha) + \pi$ *sinon.*

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$:

$\sin(x) = 0$	$\sin(x) = 1$	$\sin(x) = -1$	$\sin(x) = \dfrac{1}{2}$	$\sin(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos(x) = 0$	$\cos(x) = 1$	$\cos(x) = -1$	$\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan(x) = 0$	$\tan(x) = 1$	$\tan(x) = -1$	$\tan(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cos(x) = \dfrac{3}{2}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I :

1. $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$
2. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$
3. $\cos(2x) = \cos^2(x)$, $I = [0, 2\pi]$
4. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$, $I = [0, 2\pi]$
5. $\cos(nx) = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$
6. $|\sin(nx)| = 1$
7. $\sin(x) = \tan(x)$, $I = [0, 2\pi]$
8. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$, $I = [0, 2\pi]$
9. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$, $I = [-\pi, \pi]$

Exercice 5

Calculer : 1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ 2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ 3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ 4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

2 Valeur absolue

Rappels : **Définition :** si $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

Propriétés : $|x| = \max(x, -x)$, $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $|xy| = |x||y|$.

Exercice 6

Montrer :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ *(inégalité triangulaire renversée).*

Exercice 7

1. Montrer que $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ et que $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.
2. Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 8 : Inégalité de BERNOULLI

1. *(Version large)* Montrer que, pour $x \geq -1$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. *(Version stricte)* Montrer que, pour $x \geq -1$ avec $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Remarque : pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a plus simplement $(1+x)^n = (1+x)\cdots(1+x) = 1+nx+\cdots \geq 1+nx$.

3 Inéquations

Exercice 9

Rappeler les règles opératoires des inéquations.

Exercice 10

Résoudre :

$$\frac{(1 + x)^2(5 - x)}{(1 - 2x)} \leq 0 \qquad \frac{(x + 1)^2(x - 2)}{(2 - x)(3 - 2x)} \geq 0 \qquad \frac{x - 1}{x + 1} > 2$$

$$\frac{-5x + 2}{2x + 1} \geq 2 \qquad \frac{4}{(x - 1)^2} \geq 1 \qquad (x - 2)(\pi - x)(3x + 5) \leq 0$$

Exercice 11

Résoudre : $|x - 2| \leq 3$ $\qquad |3 - x| \leq 4$ $\qquad |x - 1| \leq -\sqrt{2}$