

解析概論 A

目次

1	数列の極限	2
2	実数の構成	6
3	実数の連続性	11
4	実数の完備性	15
5	関数の極限, 連続関数	19
6	一様連続性と定積分の存在	24
7	無限級数	28
8	対数判定法	33
9	絶対収束, 条件収束	37
10	関数列の極限, 一様収束	41
11	冪級数	46
12	Fourier 級数	50

1 数列の極限

まずは ε を使った論理の練習から始めよう.

命題 1.1. $\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \text{ ならば } a < b + \varepsilon) \iff a \leq b.$

証明. \Leftarrow は明らか \Rightarrow を示す. $a > b$ とすると $a > b + \varepsilon$ をみたす ε が存在する. これは左の条件文の否定である. \square

条件文 $\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \text{ ならば } a < b + \varepsilon)$

を簡単のため, 次のように書くことが多い.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a < b + \varepsilon$$

以後このような略記をしばしば用いる.

問 1. 上の証明にならって次を示せ.

- (i) $\forall \varepsilon > 0, a \leq b + \varepsilon \iff a \leq b.$
- (ii) $\forall \varepsilon \geq 0, a \leq b + \varepsilon \iff a \leq b.$
- (iii) $\forall \varepsilon \geq 0, a < b + \varepsilon \iff a < b.$

命題 1.2. $\forall \varepsilon > 0 \quad |a - b| < \varepsilon \iff a = b.$

証明. \Leftarrow は明らか. \Rightarrow を示す. $\forall \varepsilon > 0, \quad |a - b| < \varepsilon$ を仮定すると

$$\forall \varepsilon > 0, \quad b - \varepsilon < a < b + \varepsilon.$$

よって $\forall \varepsilon > 0, \quad b < a + \varepsilon, \quad a < b + \varepsilon.$ 命題 1.1 より $b \leq a$ かつ $a \leq b$, よって $a = b$ を得る. \square

これは不等式から等式を導く手品である. 手品の種は正の数 ε をいくらでも小さくにとってよいというところにある.

問 2. 上の証明にならって次を示せ.

- (i) $\forall \varepsilon > 0, |a - b| \leq \varepsilon \iff a = b.$
- (ii) $\forall \varepsilon \geq 0, |a - b| \leq \varepsilon \iff a = b.$

集合 $U_\varepsilon(\alpha) = \{x \mid |x - \alpha| < \varepsilon\}$ を α の ε -近傍 (ε -neighborhood) (または ε -開近傍) という.

定義 1.3 (ε - N 法による数列の極限). 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の条件を満たす番号 N が存在するときをいう.

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

このとき次のように表す.

$$a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

ε - N 法による数列の収束の定義は慣れないと戸惑うかもしれないので少し説明しておく. 数列 $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき α に限りなく近づくという状況を考えてみよう. この状況は $\{a_n\}$ の最初の有限項はどこをほつつき歩いても構わないが番号 n が十分が大きくなると a_n はすべて α の周りに集まってくるということである. つまり番号 n をどんどん大きくすると $|a_n - \alpha|$ は 0 に限りなく近付くと考えられる. これをもう少し正確にいうと, どんなに小さい正の数 ε をとつてもある番号 N があって

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできるということである. どんなに正の数 ε を小さくとつてもある番号から先はすべて ε -近傍にはいってしまうことだと言い替えてもよい. この定義の意味はそんなところである. それから任意にとる ε がどんなに小さくともよいということは (気分的にはともかく) 数学的には意味がないので, 任意の ε に対してという表現で十分なのである.

例 1.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+3}$ を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{n})} = \frac{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} = \frac{3}{2}$$

である. この計算は後ほどの定理 1.9 によって合理化されるが, ここではこれを直接 ε - N 法で確かめてみよう.

$$a_n = \frac{3n+1}{2n+3}, \quad \alpha = \frac{3}{2} \quad \text{と} \quad \text{おいて} \quad |a_n - \alpha| = \left| \frac{3n+1}{2n+3} - \frac{3}{2} \right| = \frac{7}{2(2n+3)} < \varepsilon$$

とするには $7 < 2\varepsilon(2n+3)$, すなわち $n > \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} - 3 \right)$, ならばよいので $N > \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} - 3 \right)$ なる自然数 N をとればよい.

問 3. 次を満たす自然数 N を求めよ.

$$n > N \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{1000}.$$

問 4. 次を ε - N 法で示せ.

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ のとき } a_n \rightarrow 0. \quad (2) \quad a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{ のとき } a_n \rightarrow 0.$$

$$(3) \quad a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \text{ のとき } a_n \rightarrow 1/2. \quad (4) \quad 0 < r < 1 \text{ のとき } r^n \rightarrow 0.$$

定理 1.5. 数列の極限值は, 存在するとすれば, ただ一つである. すなわち $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \alpha$ かつ $a_n \rightarrow \beta$ ならば $\alpha = \beta$.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 N_1, N_2 があって

$$n \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon/2, \quad n \geq N_2 \quad \text{ならば} \quad |a_n - \beta| < \varepsilon/2.$$

よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば $n \geq N$ のとき

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ε は任意なので命題 1.2 より $\alpha = \beta$. □

任意の定数 K に対しある番号 N が存在して

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad a_n > K$$

がなりたつとき数列 $\{a_n\}$ は 正の無限大に発散するといひ

$$a_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{または} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

とかく. 同様にして $a_n \rightarrow -\infty$ も定義できる.

問 5. 同様にして $a_n \rightarrow -\infty$ の定義を書け.

定義 1.6. すべての n に対し

$$|a_n| \leq K$$

をみたす 定数 K が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ は有界であるという.

定理 1.7. 数列 $\{a_n\}$ は収束すれば有界である.

証明. $a_n \rightarrow \alpha$ とする. 定義より定数 $\varepsilon = 1$ に対して, ある番号 N が存在して

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < 1$$

よって $n \geq N$ のとき.

$$|a_n| < |a_n - \alpha| + |\alpha| \leq 1 + |\alpha|.$$

したがって $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |\alpha| + 1\}$ とおけばすべての n に対して $|a_n| \leq K$. □

定理 1.8. $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ で $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば $\alpha \leq \beta$.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 N_1, N_2 があって

$$n \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon/2, \quad n \geq N_2 \quad \text{ならば} \quad |b_n - \beta| < \varepsilon/2.$$

よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば

$$\alpha - \varepsilon/2 < a_N \leq b_N < \beta + \varepsilon/2.$$

よって $\alpha < \beta + \varepsilon$. ε は任意なので命題 1.1 より $\alpha \leq \beta$. □

問 6. $\lim x_n = \alpha$ で $a \leq x_n \leq b$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば $a \leq \alpha \leq b$ を示せ.

問 7. $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ で $a_n < b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) ならば $\alpha < \beta$ といえるか?

問 8 (はさみうちの原理). $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) で $\{a_n\}, \{c_n\}$ が同じ値 α に収束するとき $\{b_n\}$ も α に収束することを示せ.

定理 1.9. $\lim a_n = \alpha, \lim b_n = \beta$ のとき次が成り立つ.

- (i) $\lim(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$. (複号同順)
- (ii) $\lim(cb_n) = c\alpha$ (c は定数).
- (iii) $\lim(a_nb_n) = \alpha\beta$.
- (iv) $\lim(a_n/b_n) = \alpha/\beta$. (ただし $b_n \neq 0, \beta \neq 0$ のとき).

証明. (i),(iii) のみ示す. (i): 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす N_1, N_2 が存在する.

$$n \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon/2, \quad n \geq N_2 \quad \text{ならば} \quad |b_n - \beta| < \varepsilon/2.$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ に対し

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

より $\lim(a_n + b_n) = \alpha + \beta$. $a_n - b_n$ のときも同様にして示せる.

(iii): N_1, N_2 を (i) と同様にとる.

$$|a_nb_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| < |a_n|\varepsilon/2 + |\beta|\varepsilon/2$$

数列 $\{a_n\}$ は収束するので有界. よって $|a_n| \leq K$ ($n = 1, 2, \dots$) なる定数 K がある. よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば $n \geq N$ のとき

$$|a_nb_n - \alpha\beta| \leq K\varepsilon/2 + |\beta|\varepsilon/2 = \frac{K + |\beta|}{2}\varepsilon$$

となる. $\frac{K+|\beta|}{2}$ は定数で ε は任意だから $a_nb_n \rightarrow \alpha\beta$. □

問 9. (ii) と (iv) を示せ. (iv) の証明には次を用いよ.

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| \leq \frac{1}{|\beta b_n|} \{ |\beta(a_n - \alpha)| + |\alpha(b_n - \beta)| \}$$

ε - N 式による数列の収束の定義を採用すると次のようなことを示すことができる.

定理 1.10. $a_n \rightarrow \alpha$ のとき, 次の数列 $\{b_n\}$ も α に収束する.

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たす N が存在する.

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon/2.$$

$n \geq N$ のとき

$$\begin{aligned} |b_n - \alpha| &= \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \alpha \right| = \left| \frac{(a_1 - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \leq \frac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_n - \alpha|}{n} \\ &< \frac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_N - \alpha|}{n} + \frac{n - N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_N - \alpha|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

ここで N より大きい N_1 を次を満たす様にとる.

$$n \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad \frac{|a_1 - \alpha| + \cdots + |a_N - \alpha|}{n} < \varepsilon/2.$$

すると $n \geq N_1$ のとき $|b_n - \alpha| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ となって証明が終る. □

2 実数の構成

2つの自然数の和はいつでも自然数であるが差をとると負の自然数が出てくる. そこでいつでも減法ができるように自然数を拡張して整数を考えた. 2つの整数の積はいつでも整数だか整数の範囲では割算はいつでもできるとは限らない. 0でない数での除法ができるようにするには数を有理数まで拡張する必要があった. 解析学では数列や関数の極限を考えるが, 極限操作を考えると有理数では十分とはいえない. 例えば

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で決まる有理数の数列を考える. これは 有界単調増加数列であるが極限值は有理数ではない. ($n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow \alpha$, とすると 上式より $\alpha = \frac{3\alpha+2}{\alpha+3}$ なので $\alpha = \sqrt{2}$ となる.) よって数列 $\{a_n\}$ は有理数の範囲では収束しない. このような数列を収束しないとするのでは解析学を展開

するのには不都合なので有理数をさらに拡張して数列や関数の収束などの極限概念が扱いやすいような数体系 (通常はこれを実数の体系とよぶ) を考えたい.

有理数については既知として実数の理論的構成を行なうのが本節の目的である. 実数の構成にはいくつかの方法が知られているがここでは Dedekind による有理数の切断による方法で導入する.

有理数全体の集合を \mathbb{Q} で表す. \mathbb{Q} の部分集合 A に対しその補集合 $\mathbb{Q} - A$ を A' とかく.

定義 2.1. 集合の対 $(A|A')$ が次の 2 条件を満たすとき, 切断 (cut) であるという.

- (i) $a \in A, a' \in A'$ ならば $a < a'$.
- (ii) $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$.

注意 2.2. $(A|A')$ が切断であれば次が成り立つ.

- (i) $a \in A, b < a$ ならば $b \in A$.
- (ii) $a' \in A', a' < b'$ ならば $b' \in A'$.

問 10. これを証明せよ.

例 2.3. 以下切断の例をあげる.

- (i) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}, A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}$.
- (ii) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 1\}, A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}$.
- (iii) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ または } x^2 < 2\}, A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 > 2\}$.

集合 A の最大元 $\max A$ の定義を復習しておこう.

$$a = \max A \iff a \in A \ \forall x \in A \quad x \leq a.$$

問 11. 集合 A の最小元 $\min A$ の定義を書け.

切断 $(A|A')$ が与えられたとき, 次の 4 つの場合が一応は考えられる.

- (1) A に最大の有理数なく, A' に最小の有理数なし.
- (2) A に最大の有理数なく, A' に最小の有理数あり.
- (3) A に最大の有理数あり, A' に最小の有理数なし.
- (4) A に最大の有理数あり, A' に最小の有理数あり.

ところが, 実際には (4) は起こり得ない. なぜなら A に最大の有理数 a があり, A' に最小の有理数 b があるとすると $a < b$ であり, $a < \frac{a+b}{2} < b$ なので有理数 $\frac{a+b}{2}$ が A にも A' にも属さないことになって矛盾.

(2) のとき, $a = \max A$ とおくと a は有理数で, 切断 $(A|A')$ は $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$, $A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq a\}$ と表される. このとき切断 $(A|A')$ は有理数 a を定義するという. 同様に (3) のときも, 切断 $(A|A')$ は $a = \min A'$ とおけば $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq a\}$, $A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\}$ と表される. このときも切断 $(A|A')$ は有理数 a を定義するという.

(1) のとき切断 $(A|A')$ は無理数を定義するという.

(1) または (2) のタイプの切断を実数という. 実数全体の集合を \mathbb{R} であらわす.

(3) のタイプの切断 $(A|A')$ に対しては $a = \max A$ として $(A - \{a\}, A' \cup \{a\})$ を考えるとこれは (2) 型の切断になる. この切断のことを切断 $(A|A')$ の定める実数 (実際には有理数) ということにする.

問 12. 実数を一つ決めることは次を満たす \mathbb{Q} の部分集合 A を決めることと同じであることを示せ.

- (i) $A \neq \emptyset, A \neq \mathbb{Q}$.
- (ii) $a \in A, b < a$ ならば $b \in A$.
- (iii) $\max A$ は存在しない. (i.e. $\forall a \in A, \exists b \in A$ s.t. $a < b$.)

有理数 m と $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < m\}$ とおいて決まる切断 $(A|A')$ を同一視することによりしばしば \mathbb{Q} を \mathbb{R} の部分集合とみなす. \mathbb{Q} では四則演算 (加減乗除) ができるが現時点では \mathbb{R} にはまだ何も演算を考えていない. \mathbb{Q} での四則演算を \mathbb{R} 迄延長できることを示すのを当面の目標としよう.

定義 2.4 (実数の相等, 大小). $\alpha = (A|A')$ と $\beta = (B|B')$ を実数とする. このとき $\alpha = \beta$ を次で定義する.

$$\alpha = \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} A = B$$

また 大小関係を次で定義する.

$$\alpha \leq \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} A \subset B$$

$$\alpha < \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha \leq \beta, \alpha \neq \beta \iff A \subsetneq B$$

有理数 a, b に対応する切断をそれぞれ $(A|A'), (B|B')$ とすると有理数として $a < b$ であることと

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\} \subsetneq B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < b\}$$

が同値であるのでこの大小関係の定義は有理数の大小関係の延長になっている.

問 13. 実数 $\alpha = (A|A')$ と有理数 m に対して次が成り立つことを示せ.

- (i) $m \in A$ ならば $m < \alpha$.

(ii) $m \in A'$ ならば $\alpha \leq m$.

定理 2.5 (実数の全順序性). 実数 α, β に対し $\alpha < \beta, \alpha = \beta, \alpha > \beta$ のどれか一つ (だけ) が成立する.

定理 2.6. 3つの実数 α, β, γ に対し, $\alpha < \beta, \beta < \gamma$ ならば $\alpha < \gamma$.

問 14. これらを証明せよ.

定義 2.7 (実数の加法). 2 実数 $\alpha = (A|A'), \beta = (B|B')$ に対して,

$$C = \{c \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in A, \exists b \in B \text{ s.t. } c = a + b\}, C' = \mathbb{Q} - C$$

とおくと, $(C|C')$ は有理数の切断になる. この切断 $(C|C')$ の定義する実数を α と β の和といひ $\alpha + \beta$ で表す.

問 15. $(C|C')$ が切断になっていることを確かめよ.

有理数 a, b に対応する切断 $(A|A'), (B|B')$ を考える.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}, A' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq a\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < b\}, B' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq b\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in A, \exists y \in B \text{ s.t. } z = x + y\}, C' = \mathbb{Q} - C$$

とおくとき, $(C|C')$ は有理数の和 $a + b$ に対応する切断になっている. したがって有理数 a, b に対しては和 $a + b$ を有理数の和と思って計算しても実数と思って切断を用いて和を計算しても同じことになる.

実数の加法については次の交換法則, 結合法則が成り立つ.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

問 16. これらのことを確かめよ.

定義 2.8 (零元). $O = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}, O' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ とおき切断 $(O|O')$ の定める実数を零元とよび 0 とかく. このとき $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ が成り立つ.

定義 2.9 (反元). 実数 $\alpha = (A|A')$ に対し,

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in A' \text{ s.t. } x = -a\}, B' = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in A \text{ s.t. } x = -a\}$$

とおくとこれは切断になる. 切断 $(B|B')$ の定める実数を α の反元とよび $-\alpha$ とかく. $((A|A')$ が (2) 型の切断のときは $(B|B')$ は (3) 型の切断になる. このときは $b = \max B$ において切断 $(B - \{b\}|B' \cup \{b\})$ を $-\alpha$ とする.) このとき $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ が成り立つ.

問 17. これらのことを確かめよ.

$\alpha > 0$ のとき α は正であるという. $\alpha < 0$ のとき α は負であるという.

問 18. $\alpha > 0 \iff -\alpha < 0$ を示せ.

定義 2.10 (実数の減法). 実数 α, β に対して $\alpha - \beta$ を次で定義する. $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$.

定義 2.11 (実数の絶対値). 実数 α に対しその絶対値 $|\alpha|$ を次で定義する.

$$\alpha = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \text{ のとき} \\ -\alpha & \alpha < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

問 19 (三角不等式). $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ を示せ. 等号成立はどのようなときか?

定義 2.12 (実数の乗法). 正の実数 $\alpha = (A|A')$, $\beta = (B|B')$ に対し

$$C' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = ab, \exists a \in A' \exists b \in B'\}, \quad C = \mathbb{Q} - C'$$

とおく. このとき $(C|C')$ は切断になる. この切断 $(C|C')$ が定める実数を α と β の積といい $\alpha\beta$ (または $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \times \beta$ など) とかく. α, β が有理数のとき上の $(C|C')$ は有理数としての積 $\alpha\beta$ に対応する切断になっている.

問 20. このことを確かめよ.

正でない実数についてはその積を次のように定義する.

- (i) $\alpha > 0, \beta < 0$ のとき $\alpha\beta := -\alpha(-\beta)$.
- (ii) $\alpha < 0, \beta > 0$ のとき $\alpha\beta := -((-\alpha)\beta)$.
- (iii) $\alpha < 0, \beta < 0$ のとき $\alpha\beta := (-\alpha)(-\beta)$.
- (iv) $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ のとき $\alpha\beta := 0$.

実数の積については 次の交換法則, 結合法則, 分配法則が成り立つ.

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

問 21. このことを確かめよ.

定義 2.13 (単位元). $U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$, $U' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}$ とおき, 切断 $(U|U')$ の定める実数を 1 とかく. このとき 任意の実数 α に対し $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$ が成り立つ.

問 22. このことを確かめよ.

定義 2.14 (逆元). 正の実数 $\alpha = (A|A')$ に対し

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ または } 1/x \in A'\}, \quad B' = \mathbb{Q} - B$$

とおくと, $(B|B')$ は切断である. この切断が定める実数を β とかくと $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$. この β を α の逆元といい α^{-1} で表す.

$\alpha < 0$ のときは $\alpha^{-1} := -(-\alpha)^{-1}$ で α の逆元 α^{-1} を定義する. $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$ が成り立つ.

問 23. このことを確かめよ.

定義 2.15 (実数の除法). 実数 $\alpha, \beta \neq 0$ に対し次で α/β を定義する. $\alpha/\beta := \alpha\beta^{-1}$

3 実数の連続性

有理数の切断を考えて新たに実数を作ったように, 実数の切断を考えてさらに新しい数ができないだろうか? ここで実数の切断とは次を満たすような $(X|X')$ のことである.

- (o) X は \mathbb{R} の部分集合で, $X' = \mathbb{R} - X$.
- (i) $x \in X, x' \in X'$ ならば $x < x'$.
- (ii) $X \neq \emptyset, X' \neq \emptyset$.

次の定理によると実数の切断からは新しい数は生まれてこない.

定理 3.1 (実数の連続性). 実数の切断 $(X|X')$ は次のいずれかを満たす.

- (i) X に最大数あり, X' に最小数なし.
- (ii) X に最大数なく, X' に最小数あり.

補題 3.2. 実数 α, β が $\alpha < \beta$ を満たせば $\alpha < m < \beta$ なる有理数 m が (無数に) 存在する.

証明. $\alpha = (A|A'), \beta = (B|B')$ とする. $\alpha < \beta$ より $A \subset B$. よって $\exists c \in A' \cap B$. B には最大数がないので $c < m \in B$ なる有理数 m は無数にある. このとき $\alpha < m < \beta$. □

実数の連続性定理の証明. $A = X \cap \mathbb{Q}, A' = X' \cap \mathbb{Q}$ とすると $(A|A')$ は有理数の切断であるからこの切断が定める実数を α とかく. $\alpha \in X$ または $\alpha \in X'$ である. $\alpha \in X$ とすると α は X の最大数であることが次のようにしてわかる. $\alpha < \beta$ なる実数 β をとると前補題より $\alpha < m < \beta$ なる有理数 m がある. $m \in A$ とすると $m < \alpha$ なので $m \in A'$ でなければならない, したがって $\beta \in X'$. つまり α より大なる実数 β は X' に属するので α は X の最大数でなければならない. 同様にして, $\alpha \in X'$ ならば α は X' の最小数であることが示せる. □

定義 3.3 (有界). \mathbb{R} の部分集合 E に対し

$$\begin{aligned} E \text{ が上に有界} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists K \text{ s.t. } \forall x \in E \quad x \leq K \\ E \text{ が下に有界} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists K \text{ s.t. } \forall x \in E \quad K \leq x \\ E \text{ が有界} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists K \text{ s.t. } \forall x \in E \quad |x| \leq K \end{aligned}$$

定義 3.4. $E \subset \mathbb{R}$ に対し次を満たす α を E の上限 (supremum) といい $\sup E$ であらわす.

- (i) $\forall x \in E \quad x \leq \alpha$.
- (ii) $\forall y < \alpha \quad \exists x \in E \text{ s.t. } y < x$.

問 24. $\alpha = \max E$ と $\alpha = \sup E$, $\alpha \in E$ は同値であることを示せ.

定義 3.5. $E \subset \mathbb{R}$ に対し次を満たす α を E の下限 (infimum) といい $\inf E$ であらわす.

- (i) $\forall x \in E \quad x \geq \alpha$.
- (ii) $\forall y > \alpha \quad \exists x \in E \text{ s.t. } y > x$.

問 25. $\alpha = \min E$ と $\alpha = \inf E$, $\alpha \in E$ は同値であることを示せ.

上限の定義を次のように言い替えることもできる.

$\alpha = \sup E$ は次の 2 条件が成立することと同値.

- (i) $\forall x \in E \quad x \leq \alpha$.
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < x$.

問 26. 下限の定義を同様に言い替えよ.

例 3.6. $E = \{\frac{n}{n+1} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ とおく. $\sup E = 1$, $\max E$ は存在しない. $\inf E = 1/2 = \min E$.

定理 3.7. 上に有界な集合には上限が存在する. 下に有界な集合には下限が存在する.

証明. E を上に有界な集合とする.

$$\begin{aligned} X' &= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in E \quad y \leq x\} \\ X &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in E \quad y > x\} \end{aligned}$$

とおくと $(X|X')$ は実数の切断になっている. この切断が定義する実数を α とかくと実数の連続性より α は X の最大数か X' の最小数である. α が X の最大数であるとする $\alpha \in X$ なので X の条件から $\beta > \alpha$ なる $\beta \in E$ が存在する.

$$\frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \quad \text{より} \quad \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \in X$$

これは α が X の最大値であることに矛盾する.

よって α は X' の最小値でなければならない. この α が E の上限になる. 実際, 上限の定義の (i) は X' の定義から明らか. (ii) を示す. $y < \alpha$ なる y をとると α は X' の最小値だから $y \in X$. X には最大値はないから $y < x$ なる $x \in E$ が存在する.

下に有界な集合の下限の存在も同様であるので演習に残す. □

問 27. 下に有界な集合には下限が存在することを示せ.

定義 3.8. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加 とはすべての n について $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つときをいう. 数列 $\{a_n\}$ が単調減少 とはすべての n について $a_n \geq a_{n+1}$ が成り立つときをいう.

定理 3.9. 有界な単調増加数列は収束する. 有界な単調減少数列は収束する.

証明. $\{a_n\}$ を有界な単調増加数列とする. $E = \{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ とおくと前定理より上限 $\alpha = \sup E$ が存在する. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\alpha - \varepsilon < \alpha$ なので上限の定義より $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq \alpha$ なる n_0 が存在する. $\{a_n\}$ は単調増加なので $n \geq n_0$ のとき $a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha$ よって $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ ($n \geq n_0$). □

問 28. 有界な単調減少数列は収束することを示せ.

定義 3.10 (ε -近傍, 集積点). $U_\varepsilon(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \alpha| < \varepsilon\}$ を α の ε -近傍という. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon(\alpha) \cap E$ が α 以外に点をふくむとき α は E の集積点 (accumulation point) であるという.

補題 3.11. 次は同値.

- (i) α が E の集積点.
- (ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon(\alpha) \cap E$ は無限集合.

問 29. このことを示せ.

- 例 3.12.**
- (i) $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ とすると 0 は E の集積点. 他には集積点はない.
 - (ii) $E = (0, 1]$ とすると α は E の集積点 $\iff 0 \leq \alpha \leq 1$.
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $E = \{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ とすると α は E の集積点. 他には集積点はない.

問 30. 次の集合の集積点を求めよ

- (i) $E = \{\frac{n}{n+1} \mid n = 1, 2, \dots\}$.
- (ii) $E = \mathbb{Z}$ (整数全体の集合).
- (iii) $E = \{m + \frac{1}{n} \mid m, n \text{ は正の整数}\}$.

問 31. $E = \{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ に対し次は同値であることを示せ.

- (i) $\{a_n\}$ の部分列で α に収束するものが存在する.
- (ii) α は E の集積点である.

定理 3.13. 有界な無限集合は少なくとも一つの集積点をもつ.

証明. E を有界な無限集合とする. 有界性より $E \subset [-K, K]$ をみたす定数 K が存在する. ここで有界閉区間 $[-K, K]$ を 2 等分すると $[-K, 0], [0, K]$ の 2 つにわかれるがこのうちどちらかは E の元を無限個含む. その区間を $[a_1, b_1]$ とする. (両方無限個含むときはどちらをとってもよい.) 次に $[a_1, b_1]$ を 2 等分し E の元を無限個含む方を $[a_2, b_2]$ とする. 以下これを繰り返して E の元を無限個含むような閉区間列 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$ ができて

$$-K \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq K$$

となる. $b_n - a_n = \frac{K}{2^{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$) にも注意しておこう. $\{a_n\}$ は有界な単調増加数列だから極限值 (かつ上限) α が存在する.

α は E の集積点である事を示そう.

$\{a_n\}$ は α に収束するから任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 N_1 が存在して

$$n \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad \alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$$

とできる. ところで

$$b_n - a_n = \frac{K}{2^{n-1}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

より次を満たす番号 N_2 が存在する.

$$\begin{aligned} n \geq N_2 \quad \text{ならば} \quad b_n - a_n &< \varepsilon \\ \text{よって} \quad n \geq N_2 \quad \text{ならば} \quad b_n &< a_n + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon. \end{aligned}$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} \alpha &< a_n < b_n < \alpha + \varepsilon \\ \text{よって} \quad [a_n, b_n] &\subset U_\varepsilon(\alpha) = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \end{aligned}$$

$[a_n, b_n]$ には E の元が無限個含まれているので $U_\varepsilon(\alpha) \cap E$ は無限集合. よって α は E の集積点である. □

定理 3.14. 有界な数列は収束する部分列をもつ.

ここで数列 $\{a_n\}$ の部分列というのは $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ なるように番号 n_1, n_2, \dots をきめ $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ で決まる数列 $\{a_{n_k}\}$ のことであった.

証明. $\{a_n\}$ のなかに同じ値のものが無数にあるときはそれを

$$a_{n_1} = a_{n_2} = a_{n_3} = \cdots = \ell$$

とすれば部分列 $\{a_{n_k}\}$ は ℓ に収束する. よって $\{a_n\}$ のなかに同じ値のものは無数にはないとする. すると $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ は無限集合なので集積点 α が存在する. 集積点の定義より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる n が無限個存在する.

$\varepsilon = 1$ に対しても $|a_n - \alpha| < 1$ なる n が無限個存在するのでその 1 つを n_1 とする.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ に対しても $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ なる n が無限個存在するので n_1 より大きいものを一つ選びそれを n_2 とする.

以下同様にして $\varepsilon = \frac{1}{k}$ に対しても $|a_n - \alpha| < \frac{1}{k}$ なる n が無限個存在するので n_{k-1} より大きいものを一つ選びそれを n_k とする. このようにして n_1, n_2, \dots を選べば

$$|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

なので $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha$ がわかる. □

問 32. 次の集合の上限, 下限, 集積点を求めよ.

- (i) $E = \{\sin x \mid x \text{ は実数}\}$.
- (ii) $E = \{\frac{m}{n} \mid m, n \text{ は自然数, } m \geq n > 0\}$.
- (iii) $E = \{n + \frac{1}{n} \mid n \text{ は正の整数}\}$.

4 実数の完備性

定義 4.1. $\{a_n\}$ が **Cauchy 列** (または**基本列**) であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し 次を満たす番号 N が存在するときをいう.

$$m > n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

定理 4.2 (実数の完備性). 実数列 $\{a_n\}$ について次は同値.

- (i) $\{a_n\}$ は収束する.
- (ii) $\{a_n\}$ は Cauchy 列.

証明. (i) \implies (ii): (i) より $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) とすると任意の $\varepsilon > 0$ に対しある番号 N が存在して

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$m > n$ とすると $|a_m - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$. よって

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

よって $\{a_n\}$ は Cauchy 列.

(ii) \implies (i): まず $\{a_n\}$ は有界であることを示す.

$\{a_n\}$ は Cauchy 列だから $\varepsilon = 1$ に対しある番号 N があって

	$m > n \geq N$	ならば	$ a_m - a_n < 1.$
特に	$m > N$	ならば	$ a_m - a_N < 1.$
つまり	$m > N$	ならば	$a_N - 1 < a_m < a_N + 1.$
よって	$m > N$	ならば	$ a_m < a_N + 1$

ここで $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a_N| + 1\}$ とおくとすべての n に対し $|a_n| \leq K$ となるので $\{a_n\}$ は有界である.

有界数列 $\{a_n\}$ は収束する部分列を含むのでそれを $\{a_{n_k}\}$ としその収束先を α とする. すると収束の定義より任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 M が定まり

$$k \geq M \quad \text{ならば} \quad |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

ところで $\{a_n\}$ は Cauchy 列なので上の ε に対してある番号 N_1 があって

$$m > n \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

$N = \max\{N_1, n_M\}$ として $m = n_k$ とおけば

$$n > N \quad \text{ならば} \quad |a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

を得るので $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) となる. □

この定理は収束先の予想がつかない数列の収束の判定に使うことができる.

例 4.3. 次は収束するか?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ において $\{a_n\}$ の収束を判定すればよいが, それには $\{a_n\}$ が Cauchy 列かどうかを見ればよい. $a_m = 1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m}$ より $m > n$ のとき次が成り立つ.

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + (-1)^{m-n+1} \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

よって任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$ (つまり $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$) なる N をとれば

$$m > n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_m - a_n| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

となるので $\{a_n\}$ は Cauchy 列である.

問 33. $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$, $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) のとき次は収束することを示せ.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

(ヒント: 部分和の列 $\{S_n\}$ が Cauchy 列であることを示せ.) この級数を交項級数という.

問 34 (無限小数). $\{b_n\}$ を 0 以上 9 以下の自然数からなる数列とする. これから無限小数 $0.b_1b_2b_3\dots$ を次の様にして作る.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b_1}{10} \\ a_2 &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} \\ a_3 &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} \\ &\dots \\ a_n &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \end{aligned}$$

このとき $\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ. (従って $\{a_n\}$ は収束する. この極限値のことを通常 $0.b_1b_2b_3\dots$ と書いているのである.)

問 35. $\{b_n\}, \{b'_n\}$ を 0 以上 9 以下の自然数からなる数列, $\{a_n\}, \{a'_n\}$ を対応する無限小数とする. $\lim a_n = \lim a'_n$ となるための必要十分条件を求めよ. (ヒント: $0.5 = 0.49999\dots$)

問 36. 有理数の切断 $(A|A')$ の表す実数を α とするとき α に収束する無限小数をつくれ.

我々は有理数の切断を使って実数の集合 \mathbb{R} を構成し, 実数に関する基本的な性質を証明してきた. それをここでまとめておこう.

I: 演算規則 $a, b \in \mathbb{R}$ に対しそれらの和 $\alpha + \beta$, 積 $\alpha\beta$ が定義され次をみます.

- (i) $a + b = b + a$ (和に関する交換法則)
- (ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (和に関する結合法則)
- (iii) すべての $a \in \mathbb{R}$ について $a + 0 = 0 + a = a$ なる元 0 (加法に関する単位元) が存在する.
- (iv) すべての $a \in \mathbb{R}$ について $a + (-a) = (-a) + a = 0$ となる実数 $-a$ (加法に関する逆元) が存在する.

- (v) $ab = ba$ (積に関する交換法則)
- (vi) $(ab)c = a(bc)$ (積に関する結合法則)
- (vii) すべての $a \in \mathbb{R}$ について $1a = a1 = a$ なる元 1 (乘法に関する単位元) が存在する.
- (viii) すべての $a \in \mathbb{R}$ について $a(a^{-1}) = (a^{-1})a = 1$ となる実数 a^{-1} (乘法に関する逆元) が存在する.
- (ix) $a(b+c) = ab+ac$ (分配法則)

II: 順序に関する規則 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

のうちどれか一つが成り立ち, 次の性質を満たす.

- (i) $a < b$ かつ $b < c$ ならば $a < c$
- (ii) $a < b$ ならば $a + c < b + c$
- (iii) $a < b, c > 0$ ならば $ac < bc$

III: 実数の連続性 実数の切断 $(A|A')$ には $\max A$ が存在するか $\min A'$ が存在する.

これらを総称して 実数の公理 ということがある. 我々は有理数の切断としてこれら実数の公理を満たす数体系を構成したのだが他の方法で実数の公理を満たす体系を構成することも可能である.

問 37. 正確にいうと上記順序に関する規則 (i), (ii), (iii) はまだ証明してなかった. 有理数の切断で実数を定義したとしてそれらを示せ.

我々は実数の連続性の公理を仮定して次の集合に関する基本性質を証明してきた.

上に有界な集合の上限の存在 下に有界な集合の下限の存在

実はこれらは実数の連続性と同値な命題であることが知られている.

実数の連続性を仮定すれば次の Archimedes の原理が証明できる.

定理 4.4 (Archimedes の原理). a, b を正の実数とすると, $na > b$ なる自然数 n が存在する.

証明. これが成り立たないとするとすべての自然数 n について $n \leq \frac{b}{a}$ となる. つまりすべての自然数の集合は有界. 従ってその集合に上限 α がある. ここで $\alpha - 1 < n \leq \alpha$ なる自然数 n をとると $\alpha < n + 1$. これは矛盾. □

数列については次の性質が基本的であった.

上に有界な単調増加数列の収束性
 下に有界な単調減少数列の収束性
 有界な数列には収束する部分列が存在する
 完備性 (Cauchy 列の収束性)

これらに Archimedes の原理を仮定したものは実数の連続性の公理と同値であることが知られている。

数列の収束を議論する際、次の上極限・下極限の概念を知っていると記述に便利ことが多い。

定義 4.5 (上極限, 下極限). 数列 $\{a_n\}$ にたいし $E = \{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ とおき E の集積点全体の集合を E^a と書く.

$$\overline{\lim} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup E^a$$

$$\underline{\lim} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf E^a$$

をそれぞれ $\{a_n\}$ の上極限, 下極限という

明らかに次が成り立つ.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

問 38. $E_n = \{a_m \mid m = n, n+1, n+2, \dots\}$ とおくとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup E_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf E_n$$

問 39. 次を示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ が存在する} \iff \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

5 関数の極限, 連続関数

定義 5.1 (ε - δ 法による関数の極限). 任意に (小さく) 選んだ正の数 ε に対し次をみたす正の数 δ が存在するとき $x \rightarrow a$ のとき関数 $f(x)$ が b に収束するという。

$$|x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

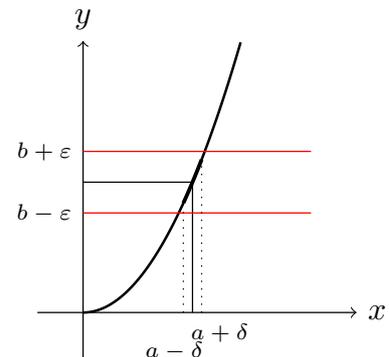
このとき, 次のように書く.

$$f(x) \rightarrow b \quad (x \rightarrow a) \quad \text{または} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ε - δ 法による極限の定義を理解する為に次のように考えてみる. 関数 $y = f(x)$ に対し $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ かどうかを調べたいとする.

- (i) まず関数 $y = f(x)$ のグラフをかく. $x \rightarrow a$ としたときの $f(x)$ の振舞に注目するので $x = a$ の近くのグラフの拡大図を書くといよい. このとき $f(a)$ は定義されていても定義されていなくてもよい.
- (ii) 正の数 ε に対して $|y - b| < \varepsilon$ なる条件を考える. この条件は幅 2ε の x 軸に平行な領域を定義するがこの領域にある $y = f(x)$ のグラフの部分を赤線で表しておく. 赤線部分は ε に依存していることに注意. ついでに赤線部分に対応する x 軸内の部分も赤線で表しておこう.
- (iii) 正の数 δ に対して $|x - a| < \delta$ なる条件を考える. この条件は幅 2δ の y 軸に平行な領域を定義するがこの領域にある $y = f(x)$ のグラフの部分を太線で表しておく. 太線部分は δ に依存していることに注意.
- (iv) $f(x) \rightarrow b$ ($x \rightarrow a$) であるということは ε - δ 法によると, どんなに小さく ε を選んでもうまく δ を選べば (δ できる) 太線部分が (ε できる) 赤線部分に含まれるようにできるということである.

- (iv) $f(x) \rightarrow b$ ($x \rightarrow a$) であるということは ε - δ 法によると, どんなに小さく ε を選んでもうまく δ を選べば (δ できる) 太線部分が (ε できる) 赤線部分に含まれるようにできるということである.



問 40. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ をこの方法で確かめよ.

問 41. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ の定義にあらわれた条件の否定をつくれ.

定理 5.2 (離散的極限と連続的極限の関係).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff a \text{ に収束するすべての数列 } \{x_n\} \text{ に対し } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

証明. \implies の証明: $f(x) \rightarrow b$ ($x \rightarrow a$) より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } |x - a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - b| < \varepsilon$$

仮定より $x_n \rightarrow a$ なので番号 N を十分大きく選べば

$$n \geq N \text{ ならば } |x_n - a| < \delta \text{ よって } |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

\impliedby の証明: 対偶を示す. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq b$ とすると

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta, |f(x) - b| \geq \varepsilon_0.$$

とくに $\delta = 1/n$ に対し, 次を満たす x_n が存在する.

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$$

x_1, x_2, \dots は $|x_n - a| < 1/n$ をみたすので $x_n \rightarrow a$. $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$ より $\{f(x_n)\}$ は b に収束しない. □

定理 5.3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ のとき次が成り立つ.

- (i) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$. (複号同順)
- (ii) $\lim cf(x) = c\alpha$. (c は定数.)
- (iii) $\lim f(x)g(x) = \alpha\beta$.
- (iv) $\lim f(x)/g(x) = \alpha/\beta$. (ただし $\beta \neq 0$ のとき).

証明. 定理 1.9 と離散的極限と連続的極限の間の関係より明らかである. もちろん定理 1.9 の証明と同じようにして示すこともできる. □

問 42. 定理 1.9 の証明と同じようにしてこの定理を証明せよ.

定理 5.4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ が存在し $x = a$ の近傍で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

問 43 (はさみうちの原理). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$ で $x = a$ の近傍で $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ならば $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ であることを示せ.

これらの定理も離散的極限と連続的極限の間の関係を用いて数列の極限に関する定理から直ちにしよう.

定理 5.5. $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow b$ で $t \rightarrow b$ のとき $g(t) \rightarrow c$ ならば, $x \rightarrow a$ のとき $g(f(x)) \rightarrow c$ となる.

証明. $t \rightarrow b$ のとき $g(t) \rightarrow c$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta_1 > 0$ が存在して次を満たす.

$$|t - b| < \delta_1 \quad \text{ならば} \quad |g(t) - c| < \varepsilon.$$

$x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow b$ よりこの $\delta_1 > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して次を満たす.

$$|x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - b| < \delta_1.$$

よって $|x - a| < \delta$ ならば $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$. □

定義 5.6 (連続の定義). $x = a$ の近傍で定義されている関数 $y = f(x)$ を考える. $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限值が存在して

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

となるとき $y = f(x)$ は $x = a$ で連続 (continuous) であるという. ε - δ 法で書けば任意の $\varepsilon > 0$ に対し次を満たすような $\delta > 0$ が存在するときである.

$$|x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

区間 I の各点で $f(x)$ が連続となるとき, $f(x)$ は区間 I で連続であるという.

問 44. 連続の定義にあらわれた条件を否定することにより $f(x)$ が $x = a$ で連続でないこと conditions を書け.

以下連続関数の基本性質をいくつか示す.

定理 5.7 (近傍における同符号性). $f(x)$ が $x = a$ の近傍で連続で $f(a) \neq 0$ ならば a のある近傍で $f(x)$ は $f(a)$ と同符号をとる.

証明. $f(x)$ が $x = a$ で連続なので任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

とできる. よって

$$|x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

となるが $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)|$ にとれば $f(a) \pm \varepsilon$ は $f(a)$ と同符号. よって $(a - \delta, a + \delta)$ で $f(x)$ は $f(a)$ と同符号. □

定理 5.8 (中間値の定理). $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ において連続で, $f(a) \neq f(b)$ ならば, $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 k に対して, $f(c) = k$ ($a < c < b$) となる c が少なくとも一つ存在する.

証明. $f(a) < f(b)$ として示す. $F(x) = f(x) - k$ とおく.

$$E = \{x \in [a, b] \mid F(y) \leq 0 \forall y \in [a, x]\}$$

とおくと E は上に有界だから上限が存在する. $c = \sup E$ とおく. $F(c) = 0$ を示せばよい.

$F(c) < 0$ とすると近傍における同符号性より c のある近傍 $(c - \delta, c + \delta)$ 上 $F(x) < 0$ とくに $c < x < c + \delta$ なる x について $F(x) < 0$ だから c は E の上限であることに矛盾する.

$F(c) > 0$ とすると近傍における同符号性より c のある近傍 $(c - \delta, c + \delta)$ 上 $F(x) > 0$ とくに $c - \delta < x < c$ なる x について $F(x) > 0$ だから c は E の上限であることに矛盾する.

よって $F(c) = 0$ でなければならない. □

定理 5.9 (最大値・最小値の定理). 有界閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は最大値および最小値を $[a, b]$ のどこかでとる. とくに $f(x)$ は有界となる.

証明. $E = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ とおく. E は上に有界であることを示す.

E が上に有界でないとする. $[a, b]$ 内の数列 $\{x_n\}$ で

$$f(x_k) > k, \quad k = 1, 2, \dots$$

なるものが存在する. $\{x_n\}$ は有界なので収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) とすると $x_0 \in [a, b]$. x_0 において $f(x)$ は連続なので

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(x_0)$$

となる. これは $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty$ に矛盾する.

E は上に有界だから上限 $\alpha = \sup E$ が存在する. 上限の性質から任意の自然数 n に対して

$$\alpha - \frac{1}{n} < f(x'_n) \leq \alpha$$

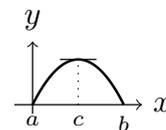
なる x'_n が存在する. この不等式より $f(x'_n) \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) である. 数列 $\{x'_n\}$ は有界なので収束する部分列 $\{x'_{n_k}\}$ が存在する. その収束先を ξ とすると $\xi \in [a, b]$. $f(x)$ は連続なので

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}) = f(\xi)$$

よって $f(x)$ は点 ξ で最大値 α をとることがわかった. 最小値についても同様に示せる. \square

定理 5.10 (Rolle の定理). $f(x)$ が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能とする.

このとき $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ ($a < c < b$) なる c が存在する.



証明. $f(a) = f(b) = k$ とおく. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続なので最大値の定理より最大値 $f(c)$ ($a \leq c \leq b$) が存在する.

(i): $f(c) > k$ のとき, $c \neq a, b$ より $a < c < b$. このとき $f'(c) = 0$ を示す. $x = c$ のとき $f(x)$ は最大値なので $h > 0$ に対して $f(c+h) \leq f(c)$, $f(c-h) \leq f(c)$.

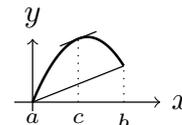
$$\text{よって} \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{h} \geq 0$$

$f(x)$ は微分可能なので $h \rightarrow +0$ とすれば $f'(c) \leq 0$, $f'(c) \geq 0$ をえるので結局 $f'(c) = 0$ となる.

(ii): $f(c) = k$ のとき $f(x)$ の最小値 $f(d)$ を考え $f(d) < k$ ならば (i) と同様にして $f'(d) = 0$ を得る.

(iii): $f(x)$ の最大値も最小値も k に等しいときは $f(x)$ は $[a, b]$ で恒等的に k に等しいから $[a, b]$ で恒等的に $f'(x) = 0$. \square

定理 5.11 (平均値の定理). $f(x)$ が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能とする.
 このとき $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ($a < c < b$) なる c が存在する.



証明. 定数 k を $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ で定める. $g(x) = f(x) - f(a) - k(x-a)$ とすると, $g(x)$ は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能である. $g(a) = g(b) = 0$ なので Rolle の定理が適用でき, $g'(c) = 0$ なる c ($a < c < b$) が存在する. $g'(x) = f'(x) - k$ なので

$$0 = f'(c) - k = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となり, 証明が完了する. □

6 一様連続性と定積分の存在

$f(x)$ が区間 I で連続であることは次の条件が成り立つ事であった.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in I, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (1)$$

例 6.1. 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ が区間 $(0, 1]$ で連続であることの証明を復習してみよう. $a \in (0, 1]$ をとる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$|x - a| < \delta \text{ ならば } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon \quad (*)$$

をみたすように $\delta > 0$ を選べばよい. $|x - a| \leq \delta$ なる x のうち $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right|$ の最大値を与えるのは $x = a - \delta$ のときでかつそのときに限り, そのとき

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{\delta}{a(a - \delta)}$$

これを ε に等しいとおき δ についてとくと

$$\delta = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} = a - \frac{a}{1 + \varepsilon a}$$

よって ε に対し上式で δ を定めれば, (*) を満たす. さて ε を一定にして $a \rightarrow 0$ とすると $\delta \rightarrow 0$ である. したがって ε に対して正の数 δ を a に無関係に決めることはできない.

定義 6.2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 区間 I の点 a に依存しないある $\delta > 0$ が存在して次を満たすとき $f(x)$ は区間 I で一様連続であるという.

$$|x - a| < \delta \text{ ならば } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

前の例 $f(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $(0, 1]$ で一様連続でない。

論理記号で書けば $f(x)$ の区間 I での一様連続性は

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in I \text{ s.t. } |x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (2)$$

となる。 $f(x)$ の区間 I での連続性の条件 (1) との微妙な違いに注意してほしい。

問 45. (1) と (2) はどこが違うか?

定理 6.3. $f(x)$ が区間 I で C^1 かつ $f'(x)$ が I で有界ならば $f(x)$ は区間 I で一様連続である。

証明. 平均値の定理より

$$f(x) - f(a) = f'(a + \theta(x - a))(x - a) \quad (0 < \theta < 1)$$

なる θ が存在する。 θ は a, x に依存していることに注意。 $f'(x)$ は有界だから $|f'(x)| \leq M$ ($x \in I$) なる定数 M をとれば

$$|f(x) - f(a)| = |f'(a + \theta(x - a))| \cdot |x - a| \leq M|x - a|$$

なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M\delta < \varepsilon$ を満たす様に $\delta > 0$ をとれば, 任意の $a \in I$ に対して

$$|x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| \leq M|x - a| < M\delta < \varepsilon$$

となる。□

例 6.4. 1 次関数 $f(x) = ax + b$ は \mathbb{R} 上一様連続である。

問 46. $f(x) = x^2$ は次の区間 I で一様連続か? $I = [0, 1], I = (-1, 1), I = \mathbb{R}$.

定理 6.5 (一様連続). $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続ならば $[a, b]$ で一様連続である。

証明. $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で一様連続でないとする。すると (2) を否定して

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, \exists x' \in [a, b] \text{ s.t. } |x - x'| < \delta, \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0$$

が成り立つ。よって $\delta = \frac{1}{n}$ に対しても,

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0$$

となる $x_n, x'_n \in [a, b]$ が存在する。 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ は ($[a, b]$ に含まれるので) 有界数列。 $\{x_n\}$ の収束部分列を $\{x_{n_k}\}$, その収束先を x_0 とすると, $a \leq x_{n_k} \leq b$ より $a \leq x_0 \leq b$. このとき

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0.$$

が成立する. なぜなら任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$k \geq K_1 \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{n_k} < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

なるように K_1 をとれば

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

となるからである.

$f(x)$ は $x = x_0$ で連続なので

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \text{s.t.} \quad |x - x_0| < \delta_0 \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

よって

$$k \geq K \quad \text{ならば} \quad |x_{n_k} - x_0| < \delta_0, \quad |x'_{n_k} - x_0| < \delta_0$$

なるように K を選べば

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'_{n_k})| < \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \varepsilon_0$$

これは最初の x_n, x'_n の選びかたに矛盾する. □

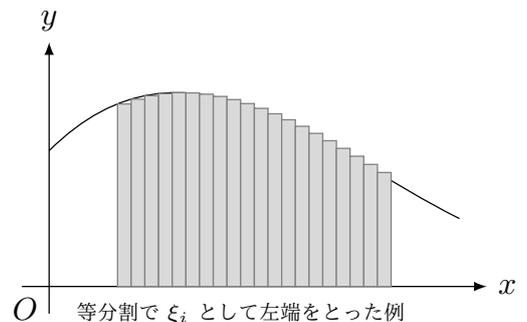
$[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ の定積分が存在するための条件を考えよう. 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ に対し

$$|\Delta| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\},$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおく.

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を任意にとり Riemann 和

$$S_\Delta = S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum f(\xi_i) \Delta x_i$$



を考える. ある定数 I があって, 任意の正の数 ε に対し次を満たす正の数 δ が存在するとき $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能であるという.

$$|\Delta| < \delta \quad \text{なる任意の分割 } \Delta \text{ と } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{に対し} \quad |S(\Delta, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon$$

このとき $I = \int_a^b f(x) dx$ と書く. $f(x)$ が $[a, b]$ で積分可能であるための条件を調べてみよう.

小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ での $f(x)$ の上限を M_k , 下限を m_k と書く.

$$\underline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad \overline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

とおく. Δ' の分点が Δ の分点をすべて含むとき Δ' は Δ の細分であるというが, このとき

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S}(\Delta') \leq \overline{S}(\Delta') \leq \overline{S}(\Delta)$$

が成立する. $\underline{S} = \sup_{\Delta} \underline{S}(\Delta)$, $\overline{S} = \inf_{\Delta} \overline{S}(\Delta)$ と定義すると, 定義より明らかに

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}(\Delta)$$

が成り立つ.

定理 6.6 (Darboux の定理). $[a, b]$ 上の有界関数 $f(x)$ に対し

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \underline{S}(\Delta) = \underline{S}, \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \overline{S}(\Delta) = \overline{S}.$$

証明. \underline{S} についても同様なので \overline{S} についてのみ示す.

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

とおく. $\overline{S} = \sup_{\Delta} \overline{S}(\Delta)$ より任意の正の数 ε について $S(\Delta_{\varepsilon}) < \overline{S} + \varepsilon$ なる分割 Δ_{ε} が存在する. δ を Δ_{ε} の各小区間の幅の最小値とすると $|\Delta| < \delta$ なる任意の分割 Δ に対して Δ の各小区間は Δ_{ε} の分点を高々一つしか含まない. Δ の分点に Δ_{ε} の分点を付け加えてできる分割を Δ_1 として

$$\overline{S}(\Delta) - \overline{S}(\Delta_1) \tag{*}$$

を考える. Δ の小区間で Δ_{ε} の分点を含まないものに対応する (*) の項は相殺される. Δ_{ε} の分点を含む Δ の小区間に対応する項は $[x_{k-1}, x_k]$ が Δ_{ε} の分点 y を含むとすれば $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\delta_1 = y - x_{k-1}$, $\delta_2 = x_k - y$ として

$$M_k \Delta x_k - (M'_1 \delta_1 + M'_2 \delta_2) = (M_k - M'_1) \delta_1 + (M_k - M'_2) \delta_2 \leq (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) |\Delta|$$

となる. ただし $M'_1 = \sup_{x \in [x_{k-1}, y]} f(x)$, $M'_2 = \sup_{x \in [y, x_k]} f(x)$ である. よって

$$\overline{S}(\Delta) - \overline{S}(\Delta_1) \leq (M - m)p|\Delta| \tag{**}$$

ここで p は Δ_{ε} の分点の個数. 従って分割 Δ を $|\Delta| < \min\{\delta, \varepsilon/(M - m)p\}$ なるようにとれば (**) $< \varepsilon$. 一方 $\overline{S}(\Delta_1) \leq \overline{S}(\Delta_{\varepsilon})$ より $\overline{S}(\Delta_1) - \overline{S} \leq \overline{S}(\Delta_{\varepsilon}) - \overline{S} < \varepsilon$. よって

$$\overline{S}(\Delta) - \overline{S} = (\overline{S}(\Delta) - \overline{S}(\Delta_1)) + (\overline{S}(\Delta_1) - \overline{S}) < 2\varepsilon$$

これは $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \overline{S}(\Delta) = \overline{S}$ を示している. □

系 6.7. $f(x)$ が $[a, b]$ で積分可能 $\iff \underline{S} = \overline{S}$.

証明. \implies は明らか. \impliedby を示す. $I = \underline{S} = \overline{S}$ とおく. $\underline{S}(\Delta) \leq S_\Delta \leq \overline{S}(\Delta)$ より

$$\underline{S}(\Delta) - \underline{S} \leq S_\Delta - I \leq \overline{S}(\Delta) - \overline{S}$$

任意の正の数 ε に対し, ある正の数 δ があって

$$|\Delta| < \delta \quad \text{ならば} \quad |\underline{S}(\Delta) - \underline{S}| < \varepsilon, |\overline{S}(\Delta) - \overline{S}| < \varepsilon,$$

となるので $|S_\Delta - I| < \varepsilon$ となる. □

分割 Δ の各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ に対して,

$$\omega_k = M_k - m_k, \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

とおくと $\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$ となる.

定理 6.8. 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は $[a, b]$ で積分可能である.

証明. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だからそこで一様連続. よって 任意の正の数 ε に対しある正の数 δ が存在して,

$$\forall x, x' \in [a, b], \quad |x - x'| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

よって $|\Delta| < \delta$ なる任意の分割 Δ に対し, $\omega_k \leq \varepsilon$.

$\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) = \sum \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon \sum \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$ なので $\overline{S} = \underline{S}$. □

$f(x)$ が単調増加とは, すべての x, y に対して $x < y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ が成り立つときをいう. $f(x)$ が単調減少とは, すべての x, y に対して $x < y$ ならば $f(x) \geq f(y)$ が成り立つときをいう. 単調増加または単調減少する関数を単調な関数という.

定理 6.9. $[a, b]$ で単調な関数は $[a, b]$ で積分可能である.

証明. $f(x)$ 増加として示す. $\omega_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$ より

$$\overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) = \sum \omega_k \Delta x_k \leq \sum \omega_k |\Delta| \leq |\Delta|(f(b) - f(a)).$$

よって任意の正の数 ε に対し, $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$ とおけばよい. □

7 無限級数

数列 $\{a_n\}$ に対し $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく. 数列 $\{S_n\}$ に極限值 S が存在するとき級数 $\sum a_n$ は収束するといふ

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と書く. S_n をこの級数の第 n 部分和という.

例 7.1 (無限等比級数).

$$a + ar + ar^2 + \dots = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & (0 \leq r < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (r \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明. $r = 1$ のときは明らかに発散. $r \neq 1$ とする. 等比数列の和の公式

$$a(1 + r + r^2 + \dots + r^n) = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

で $n \rightarrow \infty$ とすればよい. □

次の定理は明らかであろう.

定理 7.2. 級数 $\sum a_n$ から有限個の項をとり除いてもその収束性には影響しない.

定理 7.3. $\sum a_n$ が収束すれば $\lim a_n = 0$.

証明. $S = \sum a_n$ とおく. $a_n = S_n - S_{n-1}$ より

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0. \quad \square$$

定義 7.4. 第 n 部分和の列 $\{S_n\}$ が有界のとき級数 $\sum a_n$ は有界であるという.

定理 7.5. 正項級数 $\sum a_n$ について

- (i) $\sum a_n$ が有界ならば収束する.
- (ii) $\sum a_n$ が有界でなければ正の無限大に発散する.

証明. $S_n = a_1 + \dots + a_n$ で $a_n > 0$ なので $\{S_n\}$ は単調増加数列. よって有界ならば収束する. 有界でなければ発散する. □

次の定理は収束数列の有界性より明らかであろう.

定理 7.6. $\sum a_n$ が収束すれば $\{S_n\}$ は有界である.

正項級数の収束性の判定には次の定理が基本的である.

補題 7.7 (比較判定 1). 二つの正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対して, ある番号 N があって $a_n \leq b_n$ ($n \geq N$) が成り立つと仮定する.

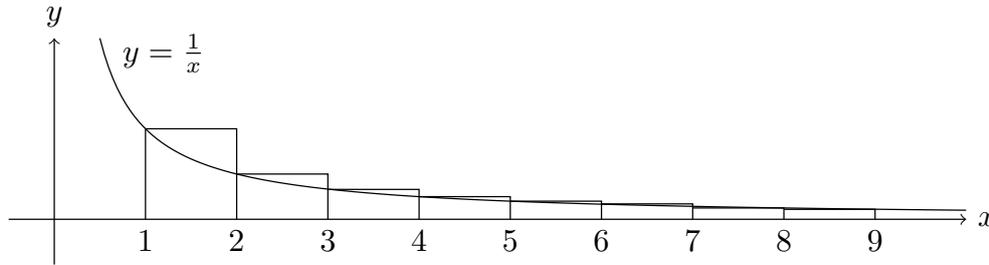
- (i) $\sum b_n$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する.
- (ii) $\sum a_n$ が正の無限大に発散すれば $\sum b_n$ も正の無限大に発散する.

証明. (ii) は (i) の対偶なので (i) だけ示せば十分. $T = \sum b_n$ とおく.

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n \leq T$$

なので $\{S_n\}$ は有界. よって $\{S_n\}$ は収束する. □

例 7.8 (調和級数). $\sum \frac{1}{n} = \infty$.

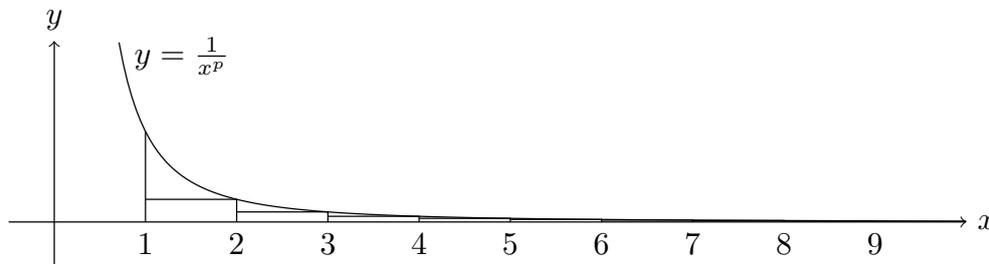


$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ より

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log n + 1 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

よって $\sum \frac{1}{n}$ は発散する.

例 7.9. $\sum \frac{1}{n^p}$ ($p > 1$).



$\frac{1}{k^p} < \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx$ より

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^p} dx + \int_2^3 \frac{1}{x^p} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x^p} dx < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = 1 + \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

よって $\{S_n\}$ は有界となり $\sum \frac{1}{n^p}$ は収束する.

例 7.10. $\sum \frac{1}{n^p}$ ($p < 1$).

$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, ($n = 1, 2, \dots$) で $\sum \frac{1}{n}$ は発散するので $\sum \frac{1}{n^p}$ も発散する.

わかったことを定理の形にまとめておこう.

定理 7.11 (一般調和級数). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は $\begin{cases} p < 1 \text{ のとき収束し,} \\ p \geq 1 \text{ のとき発散する.} \end{cases}$

問 47 (積分判定法, integral test). 上の例の証明をよく反省して, $[1, \infty)$ で定義された正値減少関数 $f(x)$ について次を示せ.

$$\sum f(n) \text{ が収束} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ が収束}$$

問 48. 上の論法を用いて次を示せ.

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

問 49. 次で決まる数列 $\{e_n\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示せ. (従って極限値が存在する. この極限値を **Euler** の定数といい γ で表す.)

$$e_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

定理 7.12 (比判定法, ratio test). 正項級数 $\sum a_n$ に対し $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく.

(i) $0 \leq r < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $r > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明. (i): $r < 1$ のとき $r < \rho < 1$ なる ρ をとる. 仮定より十分大きな N に対し

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho < 1 \quad (n \geq N) \tag{*1}$$

よって $a_{N+1} < \rho a_N, a_{N+2} < \rho a_{N+1} < \rho^2 a_N, \dots$ 一般に $a_{N+k} < \rho^k a_N$ が成り立つ. よって級数 $a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$ の各項は, 収束する級数

$$a_N + \rho a_N + \rho^2 a_N + \cdots = \frac{a_N}{1 - \rho}$$

の各項でおさえられる. よって $a_N + a_{N+1} + \cdots$ は収束. よって $\sum a_n$ も収束する.

(ii): $r > 1$ のとき $r > \rho > 1$ なる ρ をとると, 十分大きな N に対し,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho > 1 \quad (n \geq N). \tag{*2}$$

よって $a_{N+1} > \rho a_N, a_{N+2} > \rho a_{N+1} > \rho^2 a_N, \dots, a_{N+k} > \rho^k a_N$. よって発散する級数

$$a_N + \rho a_N + \rho^2 a_N + \cdots$$

と $a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$ を比較することにより $\sum a_n$ は発散することがわかる. \square

証明を見れば明らかなように $(*_1)$ (または $(*_2)$) をみたす様な N が存在すれば $\sum a_n$ の収束 (または発散) が判定できる.

例 7.13. $x > 0$ のとき $\sum \frac{1}{n!} x^n$ の収束性を判定せよ.

$$a_n = \frac{x^n}{n!} \text{ とおくと}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よってすべての $x > 0$ に対し収束する.

問 50. $x > 0$ のとき次の級数の収束発散を判定せよ.

- (1) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$
- (2) $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots + n!x^n + \cdots$
- (3) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$
- (4) $1 + x + \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}x^3 + \cdots + \frac{1}{n^2}x^n + \cdots$
- (5) $\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+4x^2} + \cdots + \frac{1}{1+2nx^2} + \cdots$

比判定法は本質的に無限等比級数と比較して判定する方法である. 比判定法で $r = 1$ の場合は収束する場合も発散する場合もある.

問 51. $\sum \frac{1}{n^p}$ のとき r を求めよ.

定義 7.14 (Landou の記号). Landou 記号 O (ラージオー), o (スモールオー) を次で定義する.

$$\beta_n = O(\alpha_n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad n \rightarrow \infty \text{ のとき } \alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} \text{ は有界.}$$

$$\beta_n = o(\alpha_n) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0.$$

$b_n - a_n = o(\alpha_n)$ のとき $b_n = a_n + o(\alpha_n)$ と書いたりする. また数列だけではなく, 関数 $f(x)$ に対しても同様の記号を用いる事がある.

比判定法で $r = 1$ のときは次の判定法が有効である.

定理 7.15 (Gauss の判定法). 正項級数 $\sum a_n$ について

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{k}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \quad (\delta > 0) \text{ のとき}$$

(i) $k > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $k \leq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明は次節にまわす.

ratio test が有効でない場合に次の root test が有効なことがある.

定理 7.16 (冪根判定法, root test). 正項級数 $\sum a_n$ について $r = \lim \sqrt[n]{a_n}$ とおく.

(i) $0 \leq r < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $r > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

問 52. 無限等比級数と比較することによりこれを示せ.

8 対数判定法

まず補題を用意する.

定理 8.1 (比較判定 2). 正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し, ある番号 N があって $n \geq N$ のとき次が成り立つとする.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \left(\text{または同じことだが} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}} \right)$$

(i) $\sum b_n$ が収束すれば, $\sum a_n$ も収束する.

(ii) $\sum a_n$ が発散すれば, $\sum b_n$ も発散する.

証明. (ii) は (i) の対偶だから (i) のみ示す. 仮定より

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \quad (n \geq N), \quad \text{よって} \quad \frac{a_N}{b_N} \geq \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \geq \frac{a_{N+2}}{b_{N+2}} \leq \dots$$

ここで $K = a_N/b_N$ とおけば $a_n \leq K b_n$ ($n \geq N$) となる. よって比較判定 1 (補題 7.7) より $\sum b_n$ が収束すれば $\sum K b_n$ も収束するので $\sum a_n$ も収束する. \square

Gauss の判定法で $k \neq 1$ のときは次の判定法より従う. これは本質的に一般調和級数と比較する方法である.

定理 8.2. 正項級数 $\sum a_n$ について, ある番号 N があって $n \geq N$ のとき

(i) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{p}{n}$, $p > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{p}{n}$, $p \leq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明. 平均値の定理より

$$(n+1)^p - n^p = px^{p-1} \quad (n < x < n+1) \quad (*)$$

をみたく x が存在することにまず注意しておく. $b_n = 1/n^p$ とおく.

(i): $p > 1$ のとき $\sum b_n$ は収束する. b_{n+1}/b_n を計算すると,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1 - \frac{(n+1)^p - n^p}{(n+1)^p}.$$

ここで (*) をもちいると

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{px^{p-1}}{(n+1)^p} \geq 1 - \frac{p(n+1)^{p-1}}{(n+1)^p} = 1 - \frac{p}{n+1} > 1 - \frac{p}{n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq N).$$

よって比較判定 2 (定理 8.1 (i)) より $\sum a_n$ は収束する.

(ii): $p \leq 1$ とすると $\sum b_n$ は発散する. b_n/b_{n+1} を計算すると,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{1/n^p}{1/(n+1)^p} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = 1 + \frac{(n+1)^p - n^p}{n^p}$$

ここで (*) をもちいると

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{px^{p-1}}{n^p} > 1 + \frac{pn^{p-1}}{n^p} = 1 + \frac{p}{n} > \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (n \geq N).$$

よって比較判定 2 (定理 8.1 (ii)) より $\sum a_n$ は発散する. □

系 8.3. 正項級数 $\sum a_n$ について $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{k}{n}(1 + o(1))$ のとき

(i) $k > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $k < 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明. (i): $k > p > 1$ なる p をとり $b_n = 1/n^p$ とおく. 前定理の証明より

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{p}{n}\right) - \left(1 - \frac{k}{n}(1 + o(1))\right) = \frac{k-p}{n}(1 + o(1))$$

よって 十分大きな n に対してはこれは正で前定理 (i) の仮定をみたく.

(ii): $k < p < 1$ なる p をとり $b_n = 1/n^p$ とおく. 前定理の証明より

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{a_{n+1}} &> 1 + \frac{p}{n} - \left(1 - \frac{k}{n}(1 + o(1))\right)^{-1} \\ &= 1 + \frac{p}{n} - \left(1 + \frac{k}{n}(1 + o(1)) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{p-k}{n}(1 + o(1)) \end{aligned}$$

よって 十分大きな n に対してはこれは正で前定理 (ii) の仮定をみたく. □

次の極限值は存在すれば系 8.3 の k と一致する.

$$k_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

$k_1 = 1$ の時はこの方法では収束性は不明だが次が成り立つ.

定理 8.4. a_n が次をみたせば $\sum a_n$ は発散する.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \left(1 + o \left(\frac{1}{\log n} \right) \right)$$

Gauss の判定法の $k = 1$ の場合はこれより直ちに従う. この証明には $r = k_1 = 1$ で発散のわかっている級数と比較する必要がある. $r = k_1 = 1$ で収束発散のわかっている級数に次のものがある.

例 8.5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ は $\begin{cases} p > 1 \text{ のとき収束し,} \\ p \leq 1 \text{ のとき発散する.} \end{cases}$

問 53. 積分判定法を用いてこれを示せ.

定理 8.6. 正項級数 $\sum a_n$ についてある番号 N があって $n \geq N$ のとき

- (i) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{p}{\log n} \right)$, $p > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.
- (ii) $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{p}{\log n} \right)$, $p \leq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明. $f(x) = x(\log x)^p$ とおくと平均値の定理より

$$f(n+1) - f(n) = f'(x) \quad (n < x < n+1) \tag{*}$$

をみたす x が存在する. $\log f(x) = \log x + p \log \log x$ を微分したものを $f(x)$ 倍すれば

$$f'(x) = (\log x)^p \left(1 + \frac{p}{\log x} \right)$$

でこれは $x \rightarrow \infty$ で増加関数である.

$b_n = 1/n^p$ とおく.

(i): $p > 1$ のとき $\sum b_n$ は収束する. b_{n+1}/b_n を計算すると,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n(\log n)^p}{(n+1)(\log(n+1))^p} = 1 - \frac{(n+1)(\log(n+1))^p - n(\log n)^p}{(n+1)^p}.$$

ここで (*) をもちいると

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{(\log x)^p}{(n+1)(\log(n+1))^p} \left(1 + \frac{p}{\log x} \right) > 1 - \frac{(\log(n+1))^p}{(n+1)(\log(n+1))^p} \left(1 + \frac{p}{\log n} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{p}{\log n}\right) > 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{p}{\log n}\right) \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq N).$$

よって比較判定 2 (i) より $\sum a_n$ は収束する.

(ii): $p \leq 1$ とすると $\sum b_n$ は発散する. b_n/b_{n+1} を計算すると,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)(\log(n+1))^p}{n(\log n)^p} = 1 + \frac{(n+1)(\log(n+1))^p - n(\log n)^p}{n(\log n)^p}$$

ここで (*) をもちいると

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= 1 + \frac{f'(x)}{n(\log n)^p} > 1 + \frac{f'(n)}{n(\log n)^p} = 1 + \frac{(\log n)^p}{n(\log n)^p} \left(1 + \frac{p}{\log n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{p}{\log n}\right) > \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (n \geq N). \end{aligned}$$

よって比較判定 2 (ii) より $\sum a_n$ は発散する. □

系 8.7. 正項級数 $\sum a_n$ について $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{k}{\log n} + o(1)\right)$ のとき

(i) $k > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $k < 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

証明. 系 8.3 の証明と同様なので省略する. □

次の極限值は存在すれば系 8.7 の k と一致する.

$$k_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \log n \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 \right).$$

$r = k_1 = k_2 = 1$ のときは $r = k_1 = k_2 = 1$ で収束発散のわかっている次の級数と比較すればよい.

例 8.8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^p}$ は $\begin{cases} p > 1 \text{ のとき収束し,} \\ p \leq 1 \text{ のとき発散する.} \end{cases}$

問 54. 積分判定法を用いてこれを示せ.

次の定理は前述の定理と全く同様に証明されるのでその証明は省略する.

定理 8.9. 正項級数 $\sum a_n$ に対しある番号 N があって $n \geq N$ のとき次が成り立つとする.

(i) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{p}{\log \log n}\right)\right)$, $p > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.

(ii) $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{p}{\log \log n}\right)\right)$, $p \leq 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

系 8.10. 正項級数 $\sum a_n$ について

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{k}{\log \log n} + o(1) \right) \right) \text{ のとき}$$

- (i) $k > 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する.
- (ii) $k < 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

次の極限值は存在すれば系 8.10 の k と一致する.

$$k_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \log n \left(\log n \left(n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right) - 1 \right).$$

9 絶対収束, 条件収束

必ずしも a_n が正とは限らないとき $\sum a_n$ の収束の判定には次が基本的である.

定理 9.1. $\sum |a_n|$ が収束すれば $\sum a_n$ も収束する.

証明. $K = \sum |a_n|$ とおく.

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

とおくと $\sum a_n^+$ は $\sum a_n$ の正項部分だけをとった級数, $\sum a_n^-$ は $\sum a_n$ の負項部分だけをとった級数 (の符号を変えたもの) である. $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ は非負項級数である.

$$\begin{aligned} S_n^+ &= a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+ \\ S_n^- &= a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^- \end{aligned}$$

とおくと

$$K_n := |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = S_n^+ + S_n^- \rightarrow K \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので $S_n^+ \leq K, S_n^- \leq K$ となり S_n^+, S_n^- は上に有界な単調増加数列となる. その極限值をそれぞれ S^+, S^- とすると $K = S^+ + S^-$ となる. 一方,

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n^+ - S_n^-$$

なので $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim S_n = \lim S_n^+ - \lim S_n^- = S^+ - S^-$$

なので $\sum a_n = \lim S_n$ は存在する. □

定義 9.2. $\sum |a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum a_n$ は絶対収束するという。収束する級数 $\sum a_n$ が絶対収束しないとき $\sum a_n$ は条件収束するという。

級数 $\sum a_n$ に対して a_n^+, a_n^- を上の証明と同じように

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

とおくと $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ は非負項級数であるから正項級数の理論が使えて有界ならば収束する。

- (i) $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ がともに収束すれば、 $\sum a_n$ は絶対収束で $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$.
- (ii) $\sum a_n^+$ が発散、 $\sum a_n^-$ が収束する場合は $\sum a_n = \infty$.
- (iii) $\sum a_n^+$ が収束、 $\sum a_n^-$ が発散する場合は $\sum a_n = -\infty$.
- (iv) $\sum a_n^+, \sum a_n^-$ がともに発散する場合は $\sum a_n$ が収束する場合としない場合がある。 $\sum a_n$ が収束する場合が条件収束である。

条件収束する場合は正項と負項が微妙に打ち消しあってやっと収束しているので項の順番を変えてしまうとそのバランスが崩れてしまい収束先が変わったり収束しなくなったりすることが考えられる。しかし絶対収束の場合はその心配はない。

定理 9.3. $\sum a_n$ が絶対収束するとき、 $\sum a_n$ の項の順序を入れ換えて得られた級数を $\sum b_n$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ここで $\sum b_n$ が $\sum a_n$ の項の順序を入れ換えて得られた級数であるというのは次のような意味である。

$$b_1 = a_{k_1}, \quad b_2 = a_{k_2}, \quad b_3 = a_{k_3}, \quad \dots, \quad b_n = a_{k_n}, \dots$$

と書け、 k_1, k_2, k_3, \dots には同じ数字は 2 度は現れず、かつ次を満たす。

$$\{k_1, k_2, k_3, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

証明. まず $\sum a_n$ が正項級数の場合に示す。

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

とおく。 $\lim S_n = \lim T_n$ を示せばよい。 $\{b_n\}$ は上の形に表されていると仮定する。 $K_n = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ とおくと

$$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n} \leq S_{K_n}$$

よって $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim T_n \leq \lim S_{K_n} = \lim S_n$

逆に $\sum a_n$ は $\sum b_n$ から項の順序を変えて得られた級数と見ることもできるから、同様にして $\lim T_n \geq \lim S_n$ を得る。よって $\lim S_n = \lim T_n$ 。

次に $\sum a_n$ が絶対収束する場合を考える。正項級数のときの証明より、 $\sum |a_n| = \sum |b_n|$ である。 $\sum b_n^+$ は $\sum a_n^+$ の項の順序を変えたものだから $\sum a_n^+ = \sum b_n^+$ 。同様にして $\sum a_n^- = \sum b_n^-$ 。よって

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum b_n^+ - \sum b_n^- = \sum b_n. \quad \square$$

定理 9.4. 条件収束する級数は加える順序を適当に変えればどんな値にでも収束することができる。

証明. $\sum a_n$ が条件収束をすると仮定する。 c を任意にとり c に収束するように $\sum a_n$ の加える順序を変更しよう。まず正項 a_1^+, a_2^+, \dots を順次に加えて $a_{n_1}^+$ まで加えたとき和が始めて c を越えたとしよう。次に負項 $-a_1^-, -a_2^-, \dots$ を順に加えていき $-a_{m_1}^-$ まで加えたとき和が始めて c より小さくなったとする。次にはまた和が c より大きくなるまで正項 $a_{n_1+1}^+, a_{n_1+2}^+, \dots$ を加え、次に和が c より小さくなるまで負項 $-a_{m_1+1}^-, -a_{m_1+2}^-, \dots$ を加える。 $\sum a_n^+$ も $\sum a_n^-$ もともに ∞ だからこの操作はどこまでも続けることができる。

このようにして作った級数

$$\begin{aligned} & a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - a_2^- - \cdots - a_{m_1}^- \\ & + a_{n_1+1}^+ + a_{n_1+2}^+ + \cdots + a_{n_2}^+ - a_{m_1+1}^- - a_{m_1+2}^- - \cdots - a_{m_2}^- + \cdots \end{aligned}$$

は c に収束する。なぜなら 二つの負項 $-a_{m_k}^-$ と $-a_{m_{k+1}}^-$ の間には含まれた正項 $a_{n_k+1}^+, a_{n_k+2}^+, \dots, a_{n_{k+1}}^+$ を考えると、作り方より

$$\begin{aligned} c & \geq a_1^+ + \cdots - a_{m_k}^- + a_{n_k+1}^+ \\ c & \geq a_1^+ + \cdots - a_{m_k}^- + a_{n_k+1}^+ + a_{n_k+2}^+ \\ & \dots \\ c & \geq a_1^+ + \cdots - a_{m_k}^- + a_{n_k+1}^+ + a_{n_k+2}^+ + \cdots + a_{n_{k+1}-1}^+ \\ c & < a_1^+ + \cdots - a_{m_k}^- + a_{n_k+1}^+ + a_{n_k+2}^+ + \cdots + a_{n_{k+1}}^+ \end{aligned}$$

これらの不等式の左辺と右辺の差は、作り方から最後の不等式を除いては $a_{m_k}^-$ を越えない。また最後の不等式についてはその差は $a_{n_{k+1}}^+$ を越えない。正項の間には含まれた負項までの部分 and 和についても同様のことが成立する。 $\sum a_n$ は収束するので番号 n が大きくなると a_n^+, a_n^- は 0 は限りなく小さくなる。よって $\sum a_n$ は c に収束する。

同様にして $\infty, -\infty$ に発散するように順序を入れ変えることもできる。 □

定義 9.5 (交項級数). 正負の項が交互にならんでいる級数を交項級数という. 交項級数

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \quad (a_n > 0)$$

において, $a_n > a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), $a_n \rightarrow 0$ ならば, もとの級数は収束する.

証明. $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ で括弧の中はすべて正だから $s_2 < s_4 < s_6 < \dots$ また $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$ で括弧の中はすべて正だから $s_{2n} < a_1$. よって $\{s_{2n}\}$ は上に有界な単調増加数列となり収束する. その収束先を α とすると $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ で $a_{2n+1} \rightarrow 0$ だから $s_{2n+1} \rightarrow \alpha$. よって $s_n \rightarrow \alpha$ を得る. \square

例 9.6. 次の級数は収束する. 絶対収束でないことに注意しておこう.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

今この級数の和の順序を変更してその和がどうなるか調べてみよう.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\ b_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ e_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \end{aligned}$$

とおけば, $\gamma = \lim e_n$ は Euler の定数.

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= e_{2n} + \log 2n \\ 2b_n &= e_n + \log n \end{aligned}$$

であるから $a_n = \log 2 + \frac{1}{2} \log n + e_{2n} - \frac{1}{2} e_n$

$$b_n = \frac{1}{2} e_n + \frac{1}{2} \log n$$

である. よって正の数 p, q に対し

$$\begin{aligned} a_{pn} &= \log 2 + \frac{1}{2} \log pn + e_{2pn} - \frac{1}{2} e_{pn} \\ b_{qn} &= \frac{1}{2} e_{qn} + \frac{1}{2} \log qn \end{aligned}$$

$$\text{となるので } a_{pn} - b_{qn} = \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q} + e_{2pn} - \frac{1}{2} (e_{pn} + e_{qn})$$

左辺は $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ から p 項, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ から q 項ずつ交互にとって得られる級数の $(p+q)n$ 項までの部分積である. ここで $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{pn} - b_{qn}) = \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q}$$

左辺の極限は最初の級数の項の順序を変えたものになっている. 特に $p = q = 1$ とおけば最初の級数の収束先は $\log 2$ であることがわかる.

無限級数 $\sum a_n$ の収束先 S を第 n 部分和 S_n で近似したときの誤差 (剰余) $R_n = S - S_n$ を考える.

定理 9.7 (誤差の評価 1). $n \geq N$ のとき $|a_n| \leq b_n$ をみたす収束数列 $\{b_n\}$ が存在すれば $T_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m$ とおくと

$$|R_n| \leq T_n \quad (n \geq N) \quad \text{で} \quad T_N \geq T_{N+1} \geq \dots$$

証明. $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| \\ &\leq b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+k} \leq T_n \end{aligned}$$

ここで $k \rightarrow \infty$ とすると $|R_n| \leq T_n$. □

定理 9.8 (誤差の評価 2). $n \geq N$ のとき $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq r < 1$ ならば

$$|R_n| \leq \frac{|a_{n+1}|}{1-r}, \quad (n \geq N).$$

証明. $n \geq N$ のとき $|R_n| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots \leq |a_{n+1}|(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{|a_{n+1}|}{1-r}$. □

問 55 (誤差の評価 3). 交項級数については $|R_n| < |a_{n+1}|$ であることを示せ.

10 関数列の極限, 一様収束

関数の列 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ がその定義域 I で $f(x)$ に収束するとは I の各点 x_0 で $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ が成立することである. このとき次のように表す.

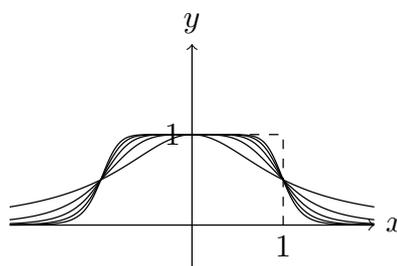
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

このことを論理記号で書けば次のようになる.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N \quad (n \geq N \text{ ならば } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \quad (*)$$

例 10.1. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$ おくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \text{ のとき} \\ 1/2 & |x| = 1 \text{ のとき} \\ 0 & |x| > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$



ε - N 法でこのことを証明してみよう.

(i) $|x| < 1$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{1+x^{2n}} - 1 \right| = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} < \varepsilon \quad (1)$$

をみたす様な n を考える. $\varepsilon > 1$ のときは任意の n についてこれは成り立つ. $\varepsilon < 1$ のときは

$$\begin{aligned} (1) &\iff x^{2n} < \varepsilon(1+x^{2n}) \iff x^{2n} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ &\iff n > \log_{x^2} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{\log \varepsilon - \log(1-\varepsilon)}{\log x^2} \end{aligned}$$

よって N を $\frac{\log \varepsilon - \log(1-\varepsilon)}{2 \log x}$ より大きい整数とすれば $n \geq N$ のとき条件をみたす.

(ii) $|x| = 1$ のとき $|f_n(x) - f(x)| = |1/2 - 1/2| = 0$ ($\forall n$) より OK.

(iii) $|x| > 1$ のとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+1/x^{2n}} < \varepsilon \quad \left(\text{すなわち } \frac{1}{\varepsilon} < 1 + \frac{1}{x^{2n}} \right) \quad (2)$$

をみたす様な n を考える. $\varepsilon > 1$ のときは任意の n についてこれは成り立つ. $\varepsilon < 1$ のときは

$$(2) \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < x^{-2n} \iff n > \log_{x^2} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\log(1-\varepsilon) - \log \varepsilon}{\log x^2}$$

よって N を $\frac{\log(1-\varepsilon) - \log \varepsilon}{2 \log x}$ より大きい整数とすれば $n \geq N$ のとき条件をみたす.

これをみると $x \rightarrow \pm 1$ のとき $\log x^2 \rightarrow 0$ なので (*) の整数 N は ε, x 両方に依存してしか選べないことがわかる.

定義 10.2 (一様収束). 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で $f(x)$ に一様収束するとは任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x \in I$ に依存しない定数 N が存在して次の条件を満たすときをいう.

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

論理記号で書けば次のようになる.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x \in I \quad (n \geq N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) \quad (**)$$

例 10.1 は $x = 1$ なる点を含む任意の区間で $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束しない.

定理 10.3. 連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I で $f(x)$ に一様収束すれば $f(x)$ も連続関数である.

証明. $f_n(x)$ は $\forall x_0 \in I$ で連続であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して次を満たす.

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$$

また $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束するから, ある番号 N があって

$$\forall x \in I, n \geq N \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$n \geq N$ なる n をとれば, $|x - x_0| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

となる. よって $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である. □

系 10.4. $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) が連続で $\sum f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束すれば $f(x)$ は連続である.

定理 10.5 (優級数). 区間 I で $|f_n(x)| \leq c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) で $\sum c_n$ が収束するならば, $\sum f_n(x)$ は区間 I で絶対収束かつ一様収束し, 極限関数 $f(x)$ は連続である.

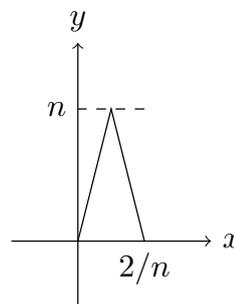
証明. $\sum c_n$ の第 n 部分和を s_n , $\sum c_n = c$ とすると $|f_1(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq c_1 + \dots + c_n = s_n \leq c$ よって $\sum |f_n(x)|$ は有界だから収束する. よって $\sum f_n(x)$ も収束する. $\sum c_n = c$ より任意の $\varepsilon > 0$ にたいし $n \geq N$ ならば $|c - s_n| < \varepsilon$ なので $\sum f_n(x)$ の第 n 部分和を $S_n(x)$ とすると

$$|f(x) - S_n(x)| \leq |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots = c - s_n$$

$n \geq N$ のとき 右辺 $< \varepsilon$. N は $x \in I$ に無関係にとれたので $\sum f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する. □

例 10.6 (積分と極限の順序が交換できない例).

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 2n - n^2x & (\frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$



とおくと

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1, \quad \text{なので} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

ところで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \text{なので} \quad \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

この例が示すように 積分と極限の順序を不用意に交換してはいけませんが一様収束する場合はそれが許される.

定理 10.7 (積分と極限の順序交換). 連続関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $[a, b]$ で $f(x)$ に一様収束すれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

証明. 仮定より任意の正の数 ε に対して N が決まり

$$n \geq N, x \in [a, b] \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

一様収束性より N は $x \in [a, b]$ に無関係にとることができる. よって $n \geq N$ ならば

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

よって定理は証明された. □

問 56. 前定理で $\int_a^b f_n(x) dx$ は $\int_a^b f(x) dx$ に一様収束することを確認せよ.

定理 10.8 (微分と極限の順序交換). $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束し $\{f'_n(x)\}$ が連続関数の列で一様収束すれば $f(x)$ は微分可能で

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

証明. $\{f'_n(x)\}$ が連続で一様収束するから $g(x) = \lim f'_n(x)$ とおくと $g(x) = f'(x)$ を示せばよい. 前定理より積分と極限の順序交換ができて

$$\int_a^x g(t) dt = \int_a^x \lim f'_n(t) dt = \lim \int_a^x f'_n(t) dt = \lim \{f_n(x) - f_n(a)\} = f(x) - f(a)$$

両辺を x で微分すると $g(x) = f'(x)$. □

定理 10.9 (級数の項別積分). $f_n(x)$ が連続で, $\sum f_n(x)$ が区間 $[a, b]$ で一様収束すれば $[a, b]$ で次が成り立つ.

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

証明. $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ が一様収束するから積分と極限の順序交換の定理を適用すればよい. □

定理 10.10 (級数の項別微分). $f'_n(x)$ が連続で, $\sum f_n(x)$ が収束し, $\sum f'_n(x)$ が一様収束すれば

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

証明. これも前の定理と同様にして微分と極限との順序交換の定理を適用すればよい. □

関数列 $f_n(x)$ の収束先の関数が不明の場合、一様収束するかどうかを判定するには次の判定法を使う。

定理 10.11 (Cauchy の判定条件). 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 I 上一様収束するための必要十分条件は、任意の正の数 ε に対し、ある N をとれば

$$m, n \geq N, x \in I \quad \text{ならば} \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (*)$$

とできることである。

証明. $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束したとする。任意の正の数 ε に対してある N をとれば

$$n \geq N, x \in I \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

となる。 $m > n \geq N$ なる m, n に対して

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

よって (*) が成り立つ。

逆に (*) が成り立つとする。すると $x \in I$ を固定すれば $\{f_n\}$ は Cauchy 列であるから収束する。収束先を $f(x)$ と書くと任意の正の数 ε に対し、 $x \in I$ に依存するかもしれない N_1 が存在して

$$m \geq N_1 \quad \text{ならば} \quad |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(*) より $n \geq N$ のとき $m \geq \max\{N_1, N\}$ なるように m をとれば

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

N は x に無関係なので $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束する。 □

例 10.12. 次の無限級数は収束するか？収束する場合、極限関数は連続か？また項別微分は可能かどうかを調べよ。

$$\begin{array}{lll}
 (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n & (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
 (4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} & (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} & (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \\
 (7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} & &
 \end{array}$$

11 冪級数

例 11.1. 次の式は無限等比級数の和の公式として広く知られている.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1) \quad (1)$$

例 11.2. (1) の x を $-x$ にかえると

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (|x| < 1) \quad (2)$$

これを項別積分して得られる次の級数の収束性を考えて見よう.

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\frac{1-(-t)^n}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} \text{ より}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \quad (3)$$

これを 0 から x まで積分すると

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}, \quad R_{n+1} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

$0 < t < x \leq 1$ のときは $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$ なので

$$|R_{n+1}| \leq \int_0^x t^n dt \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$-1 < x < t < 0$ のときは $|\frac{t^n}{1+t}| \leq |\frac{t^n}{1+x}| = \frac{(-t)^n}{1+x}$ なので

$$|R_{n+1}| \leq \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+x} dx = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって次の式が示された.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1) \quad (4)$$

例 11.3. (2) の t を t^2 に変えて次を得る.

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2} \quad (5)$$

これを 0 から x まで積分すると

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}, \quad R_{2n} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$0 < |t| < |x| \leq 1$ のとき $1 + t^2 > 1$ なので

$$|R_{2n}| \leq \int_0^{|x|} t^{2n} dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

よって次が得られた.

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (|x| \leq 1) \quad (6)$$

問 57. $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + \cdots + t^{2n-2} + \frac{t^{2n}}{1-t^2}$ をもちいて次を示せ.

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots \right) \quad (|x| < 1)$$

次の形の級数は解析学で重要な役割を果たす.

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

この形の級数を x の **冪級数** または **整級数** という. 冪の字が難しいので **巾級数** と書くこともある.

定理 11.4. 冪級数 $\sum a_n x^n$ について

- (i) $\sum a_n x_0^n$ が収束すれば, $|x| < |x_0|$ なる x について $\sum a_n x^n$ が収束する.
- (ii) $\sum a_n x_1^n$ が発散すれば, $|x| > |x_1|$ なる x について $\sum a_n x^n$ が発散する.

証明. (ii) は (i) の対偶だから (i) のみ示せばよい. $\sum a_n x_0^n$ が収束すれば, その各項は有界であるから $|a_n x_0^n| \leq K$ ($n = 1, 2, \dots$) なる定数 K が存在する.

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq K \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

なので $|x| < |x_0|$ のとき $\sum K \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ は収束し従って $\sum |a_n x^n|$ も収束する. よって $\sum a_n x^n$ は絶対収束するので収束する. \square

定義 11.5 (収束半径). 冪級数 $\sum a_n x^n$ について次を満たす R をその収束半径という.

- (i) $|x| < R$ のとき $\sum a_n x^n$ は絶対収束する.
- (ii) $|x| > R$ のとき $\sum a_n x^n$ は発散する.

定理 11.6. $\sum a_n x^n$ において

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \quad \text{ならば} \quad \text{収束半径 } R \text{ は } R = \frac{1}{r} \quad \text{で与えられる.}$$

証明. $\sum |a_n x^n|$ の収束性を調べればよい. $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| \rightarrow r|x|$ なので

$$|x| < \frac{1}{r} \quad \text{ならば} \quad r|x| < 1 \quad \text{となり} \quad \sum |a_n x^n| \text{ は収束}$$

$|x| > \frac{1}{r}$ ならば $r|x| > 1$ となり $\sum |a_n x^n|$ は発散 □

$\lim |a_{n+1}/a_n|$ を計算しさえすれば必ず収束半径が求まるというわけではない。この極限値が存在しないこともあるからである。 $\lim |a_{n+1}/a_n|$ が存在しない場合も $\sum a_n x^n$ の収束半径は確定しているのである。

問 58. (1), (2), (4), (6) の級数の収束半径を求めよ。

問 59. 次の冪級数の収束半径を求めよ。

$$\sum \frac{x^n}{n!}, \quad \sum \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum \frac{x^n}{2^n + 1}$$

問 60. 次の冪級数の収束域を求めよ。

$$\sum \frac{x^n}{2^{2n}}, \quad \sum (-1)^n \frac{x^n}{n^2}, \quad \sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n, \quad \sum \frac{x^n}{n\sqrt{n+1}}$$

定理 11.7 (広義一様収束). $\sum a_n x^n$ の収束半径を R とすると $0 < R_1 < R$ なる任意の R_1 に対して $\sum a_n x^n$ は $|x| \leq R_1$ で一様収束する。

証明. $R_1 < \alpha < \beta < R$ なるように α, β をとる。 $\sum a_n \beta^n$ は収束するので $|a_n \beta^n| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) なる定数 M が存在する。よって $|a_n| \leq M/\beta^n$ 。 $|x| \leq R_1$ なる x に対して

$$|a_n x^n| < \frac{M}{\beta^n} |x|^n = M \left(\frac{|x|}{\beta} \right)^n < M \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n$$

となるので $\sum M(\alpha/\beta)^n$ が $\sum a_n x^n$ の優級数となる。 □

級数 (2) と (4) とを比較すると収束半径は変わっていない。これは次の様に一般化される。

定理 11.8. $\sum a_n x^n$ の収束半径を R とするとそれを項別微分して得られた級数 $\sum n a_n x^{n-1}$ の収束半径も R である。

$\lim |a_{n+1}/a_n|$ が存在すれば

$$\lim \left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \lim \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

なので定理 11.6 によって $\sum n a_n x^{n-1}$ の収束半径と $\sum a_n x^n$ の収束半径は一致する。

極限 $\lim |a_{n+1}/a_n|$ が存在しない場合もこの 2 つの級数の収束半径は一致するというのがこの定理の主張である。

証明. $0 < |x| < R$ なる $|x|$ に対し $|x| < \alpha < R$ なる α をとる. $\sum a_n \alpha^n$ は収束するので, $|a_n \alpha^n| \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) なる定数 M が存在する.

$$|na_n x^{n-1}| \leq n \frac{M}{\alpha^n} |x|^{n-1} = \frac{nM}{\alpha} \left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{n-1}$$

よって

$$\sum |na_n x^{n-1}| \leq \sum \frac{nM}{\alpha} \left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{n-1} = \frac{M}{\alpha} \sum n \left(\frac{|x|}{\alpha}\right)^{n-1}$$

は $|x| < \alpha$ のとき収束する. 一方 $n \geq 2$ のとき $|a_n x^n| < |x| |na_n x^{n-1}|$ なので

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n x^n| < |x| \sum_{n=2}^{\infty} |na_n x^{n-1}|$$

となり $\sum |na_n x^{n-1}|$ が収束すれば, $\sum |a_n x^n|$ も収束しなければならない. よって $\sum a_n x^n$ と $\sum na_n x^{n-1}$ の収束半径は一致する. \square

定理 11.9. $f(x) = \sum a_n x^n$ の収束半径を R とする. このとき $f(x)$ は $|x| < R$ で微分可能で

$$f'(x) = \sum na_n x^{n-1}, \quad \int_0^x f(t) dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

証明. $|x| < \alpha < R$ なる α をとると $\sum a_n x^n$ は $|x| \leq \alpha$ で一様収束する. よってこの級数は $|x| < \alpha$ で微分可能でその導関数は項別微分した $\sum na_n x^{n-1}$ で与えられる. 積分の方も一様収束級数の項別積分可能性から従う. \square

(4), (6) で $x = 1$ とするのは次の定理の特別な場合である.

定理 11.10 (Abel の連続性定理). $f(x) = \sum a_n x^n$ の収束半径を $R (\neq 0, \infty)$ とする. もし $x = R$ でこの級数が収束するならば, この級数は $[0, R]$ において一様収束し従って $f(x)$ は $[0, R]$ で連続である. すなわち

$$\lim_{x \rightarrow R-0} f(x) = f(R) = \sum a_n R^n.$$

$x = -R$ においても同様の定理が成り立つ.

証明. $R \neq 1$ のときは $y = x/R$ とおいて y についての級数と見れば収束半径は 1 となるので, $R = 1$ のとき示せば十分である. $f(1) = \sum a_n$ が収束すると仮定する. 任意の正の数 ε に対しある N があって

$$m > n \geq N \quad \text{ならば} \quad |a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$$

とできる. $\sigma_k = a_n + a_{n+1} + \dots + a_k$ ($k \geq n$) とおくと $m > n$ のとき $|\sigma_k| < \varepsilon$ ($k = n+1, n+2, \dots, m$) なので

$$|a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_m x^m|$$

$$\begin{aligned}
&= |\sigma_n x^n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)x^{n+1} + \cdots + (\sigma_m - \sigma_{m-1})x^m| \\
&= |(\sigma_n(x^n - x^{n+1}) + \sigma_{n+1}(x^{n+2} - x^{n+1}) + \cdots + \sigma_{m-1}(x^{m-1} - x^m) + \sigma_m x^m)| \\
&\leq \varepsilon ((x^n - x^{n+1}) + (x^{n+2} - x^{n+1}) + \cdots + (x^{m-1} - x^m) + x^m) \\
&= \varepsilon x^n \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

最後の不等式は $0 < x \leq 1$ を用いた。よって一様収束に関する Cauchy の判定法より $\sum a_n x^n$ は $[0, 1]$ で一様収束する。関数列の一様収束極限は連続なので $f(x)$ は連続となる。□

12 Fourier 級数

問 61. 三角関数の積和公式を用いて次を示せ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases} \quad (1)$$

いま周期 2π の (または $[-\pi, \pi]$ で定義された) 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

と展開できたと仮定する。もし右辺の級数が一様収束したとすると

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (3)$$

となる。これは (2) を右辺の積分に代入して項別積分して、(1) を使えば得られる。従って周期 2π の関数 $f(x)$ から (3) で a_n, b_n を定めれば (2) を満たすか? というのが問題になる。 a_n, b_n を $f(x)$ の **Fourier 係数** と呼び

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (4)$$

と書く。右辺の級数を $f(x)$ の **Fourier 級数** という。

例 12.1. $f(x) = x/2$ として a_n, b_n を求めてみよう。 $f(x)$ は奇関数だから $a_n = 0$ 。

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \left[x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) dx \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\pi \cos n\pi + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

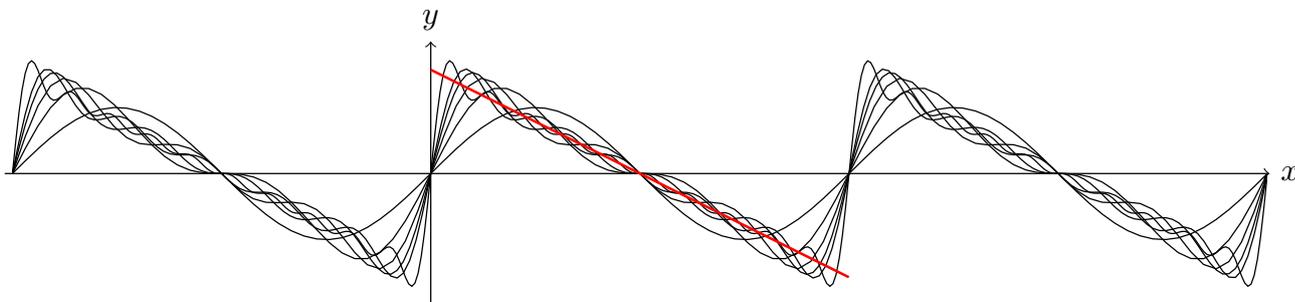
よって次を得た。

$$\frac{1}{2}x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

x を $\pi - x$ におきかえると

$$-\frac{1}{2}(x - \pi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi).$$

右辺の級数の部分和の定める関数のグラフと左辺の関数のグラフ（赤）を図に示す。



例 12.2. 次の展開式は前の例の形式的な項別積分であるが Fourier 係数を計算して得たものである。

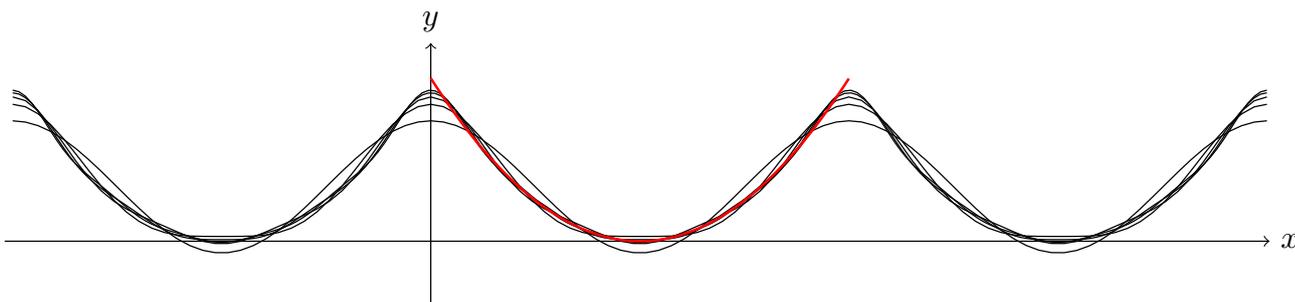
$$\frac{x^2}{4} \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \quad (-\pi < x < \pi),$$

x を $\pi - x$ におきかえれば

$$\frac{(\pi - x)^2}{4} \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (0 < x < 2\pi),$$

これらの右辺は 収束する級数 $\sum \frac{1}{n^2}$ が優級数になるので一様収束することがわかる。

右辺の級数の部分和の定める関数のグラフと左辺の関数のグラフ（赤）を図に示す。



例 12.3. 次の展開式は前の例の ($\frac{\pi^2}{12}$ の項を移項して) さらなる形式的な項別積分であるが Fourier 係数を計算して得ることができる。

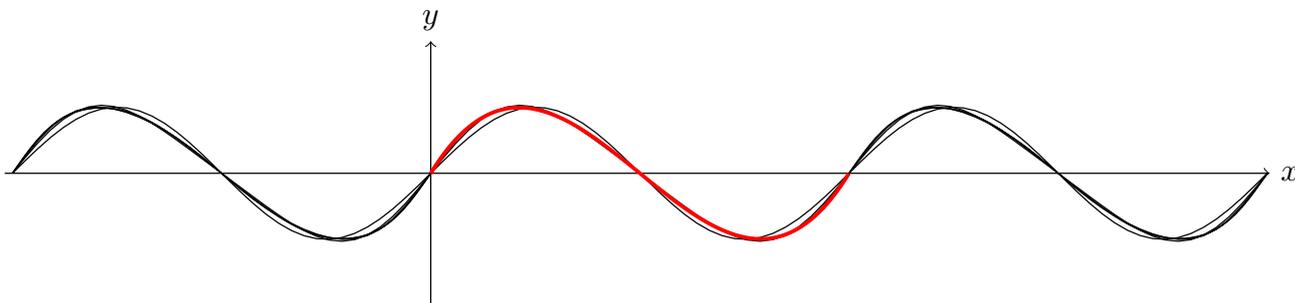
$$\frac{x(x^2 - \pi^2)}{12} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3} \quad (-\pi < x < \pi),$$

x を $\pi - x$ におきかえれば

$$\frac{(x - \pi)((\pi - x)^2 - \pi^2)}{12} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \quad (0 < x < 2\pi),$$

これらの右辺は 収束する級数 $\sum \frac{1}{n^3}$ が優級数になるので一様収束することがわかる.

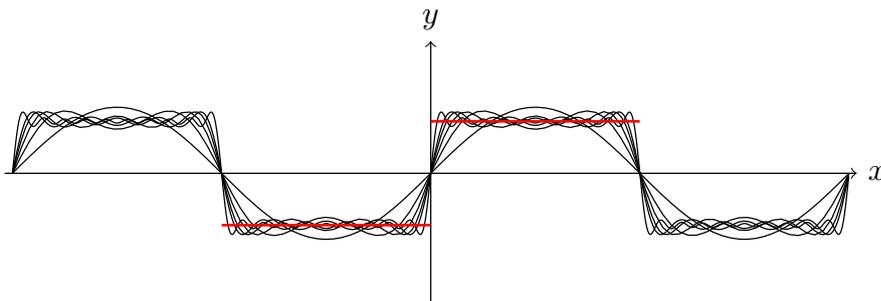
右辺の級数の部分和の定める関数のグラフと左辺の関数のグラフ (赤) を図に示す.



問 62. 次を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \sim \begin{cases} \pi/4 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/4 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

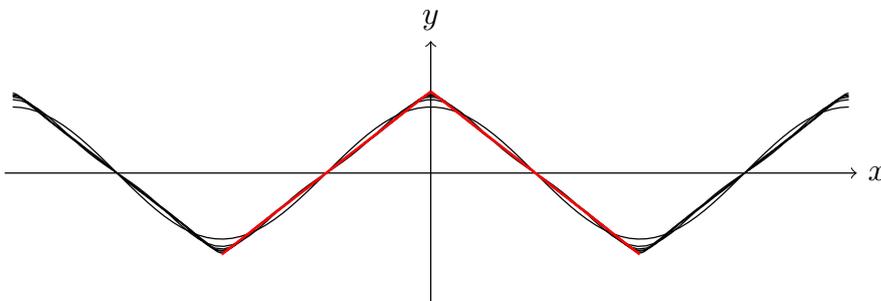
左辺の級数の部分和の定める関数のグラフと右辺の関数のグラフ (赤) を図に示す.



問 63. 次を示せ. これは前の級数の項別積分である.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \sim \begin{cases} \frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2} - x) & 0 \leq x < \pi \\ \frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2} + x) & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

左辺の級数の部分和の定める関数のグラフと右辺の関数のグラフ (赤) を図に示す.



$f(x)$ が $[-\pi, \pi]$ の有限個の点を除いて連続で, 各不連続点で右極限值, 左極限值が存在するとき $f(x)$ は区分的に連続であるという. $f(x+0) = \lim_{h \rightarrow +0} f(x+h)$, $f(x-0) = \lim_{h \rightarrow -0} f(x+h)$ とおく.

定理 12.4. $f(x)$ および $f'(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続ならば (4) の右辺は収束して

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

問 64. この定理を用いて上の例や問の \sim が等号になるかどうかを調べよ.

この定理はなかなか直接は証明できないので迂遠のようだがまず次の問題を考える.

$f(x)$ を三角級数

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad (\alpha_k, \beta_k \text{ は定数})$$

で近似したい. 次の自乗平均誤差 E_n が最小になるように定数 α_k, β_k を定めよ.

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - T_n(x)\}^2 dx$$

E_n の定義式に $T_n(x)$ を代入して計算する.

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_n(x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx + \frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{4} - \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

よって $\alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ のとき E_n は最小で最小値は

$$\min E_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

$E_n \geq 0$ より $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

を得る. これを **Bessel** の不等式という. $\lim a_n = \lim b_n = 0$ でなければならないこともわかる. また (2) が成立すれば Bessel の不等式は等式 (**Parseval** の等式) になる.

補題 12.5. $f(x)$ が区分的に連続ならば $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x dx \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

証明.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{f(x) \sin \frac{x}{2}\right\} \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left\{f(x) \cos \frac{x}{2}\right\} \sin nx dx$$

$f(x)$ が区分的に連続ならば $f(x) \sin \frac{x}{2}$, $f(x) \cos \frac{x}{2}$ とともに区分的に連続になり, それらの Fourier 係数である右辺の二項は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく. \square

定理 12.4 の証明. $F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ とおくと

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n f(y) (\cos ky \cos kx + \sin ky \sin kx) dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n f(y) \cos k(y-x) dy \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) \right) dy \end{aligned}$$

$z = y - x$ なる変数変換を行ない $D_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kz$ とおけば次を得る.

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(y-x) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz$$

$D_n(z)$ は偶関数であることを用いると

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) D_n(z) dz$$

がわかる. また三角関数の積和公式を使うと次が示せる.

$$D_n(z) \sin \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z$$

よって

$$\begin{aligned} & \pi \left(F_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right) \tag{*} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+z) + f(x-z)}{2} D_n(z) dz - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(f(x+z) - f(x+0)) + (f(x-z) - f(x-0))}{2} D_n(z) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} + \frac{f(x-z) - f(x-0)}{z} \right\} z D_n(z) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} + \frac{f(x-z) - f(x-0)}{z} \right\} \frac{z/2}{\sin \frac{z}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) z dz \end{aligned}$$

となるので, $f(x)$ および $f'(x)$ が区分的に連続であれば

$$\left\{ \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} + \frac{f(x-z) - f(x-0)}{z} \right\} \frac{z/2}{\sin \frac{z}{2}}$$

も区分的に連続となり, 補題 12.5 より $n \rightarrow \infty$ のとき $(*) \rightarrow 0$ となる. \square