数学特別講義 **XX**（**2018** 年 **12** 月 **7** 日（金）担当　福井）

ミルナー束

複素係数多項式の定める写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ のトポロジーを紹介する．

多項式 $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3$ が定める写像 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を考える．

問題 $f^{-1}(y)$ はどんな図形か？

$f_{x_1} = -3x_1^2$, $f_{x_2} = 2x_2$ なので，f の特異点集合

$$\Sigma(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^n : f_{x_1}(x_1, x_2) = f_{x_2}(x_1, x_2) = 0\}$$

は原点のみである．従って陰関数定理より原点以外の点の近傍ではレベル集合

$$f^{-1}(t_0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : f(x_1, x_2) = t_0\},$$

は非特異である，すなわち $\mathbb{C}$ のある開集合と同型である．では $f^{-1}(0)$ は原点近傍ではどうなっているのか？

$S_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : \|(x_1, x_2)\| = \varepsilon\}$ とおくとこれは 3 次元球面である．$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ とするとこれは集合 $T = \{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : |x_1| = \varepsilon_1, |x_2| = \varepsilon_2\}$ を含むがこれはトーラスである．

$$S_1 = \{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : |x_1| \leq \varepsilon_1, |x_2| = \varepsilon_2\}, \quad S_2 = \{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : |x_1| = \varepsilon_1, |x_2| \leq \varepsilon_2\}$$

はそれぞれ T を境界とする中身の詰まったトーラスで，これが境界 T で貼り合って 3 次元球面 S_ε ができている．

$K = f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ は S_ε^3 内の結び目を定める．

実際，写像 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ を $\varphi(y) = (t^2, t^3)$ で定めると $r = r^2 + r^3 = \varepsilon$ なる正の数 r を選ぶと $r^2 = \varepsilon_1$, $r^3 = \varepsilon_2$ なる ε_1, ε_2 と置くと円 $\{t \in \mathbb{C} : |t| = r\}$ の φ による像は T の中に入る．定義より，これは三葉結び目 (trefoil knot) である．$f^{-1}(y) \cap \overline{B}_\varepsilon$ は K（と同型な図形）を境界に持つ．

集合 X の錐 $C_0(X)$ を次で定める．

$$C_0(X) = X \times [0, 1]/((x, 0) \sim (x', 0))$$

$C_0(S_\varepsilon) = B_\varepsilon$ である．

錐構造定理 $(B_\varepsilon, B_\varepsilon \cap f^{-1}(0))$ は $(C_0(S_\varepsilon), C_0(K))$ と同相

射影 $p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(x_1, x_2) \mapsto x$, を $f^{-1}(y)$ に制限するとその特異点集合は

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : f(x_1, x_2) = y, f_{x_2}(x_1, x_2) = 0\}$$

であるが，これは $x^3 = y$, $y = 0$ で定まる集合で，3 点である．射影 p による像は 3 点なので $f^{-1}(y)$ は 3 点で分岐する $\mathbb{C}$ の分岐 2 重被覆で，位相的には穴あきトーラスである．

ミルナー束定理 I 写像 $\varphi : S_\varepsilon \to S^1$, $x \mapsto f(x_1, x_2)/|f(x_1, x_2)|$ は局所自明ファイバー束

ミルナー束定理 II 写像 $f : B_\varepsilon \cap f^{-1}(S^1_\delta) \to S^1_\delta$, $x \mapsto f(x_1, x_2)$ は上と位相的に同型な局所自明ファイバー束

この 2 つの同型なファイバー束を**ミルナー束** (Milnor fibration) という．

f の**ミルナー数**を次で定義する．

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, x_2\}/\langle f_{x_1}, f_{x_2} \rangle$$

$0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ のとき $|y| = \delta$ なる y に対し，$f^{-1}(y) \cap B_\varepsilon$ を**局所レベル集合** (local level set) という．

定理 $f^{-1}(y) \cap B_\varepsilon$ のオイラー数は $1 - \mu(f)$ で与えられる．

定理 f を摂動すると原点から $\mu(f)$ 個の特異点が現れる．

$f_u(x_1, x_2) = {x_2}^2 - {x_1}^3$ の摂動 $f_u(x_1, x_2) = {x_2}^2 - {x_1}^3 + 3ux_1$ を考える．$(f_u)_{x_1} = 3u(1 - {x_1}^2)$, $(f_u)_{x_2} = 2x_2$ なので

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, x_2\}/\langle f_{x_1}, f_{x_2} \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, x_2\}/\langle {x_1}^2, x_2 \rangle = 2$$

で，f_u の特異点集合は

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : (f_u)_{x_1} = 3(u - {x_1}^2) = 0, (f_u)_{x_2} = 2x_2 = 0\} = \{(\pm u^{1/2}, 0) : u \in \mathbb{C}\}$$

となり，原点近傍にちょうど 2 つの特異点が現れている事がわかる．

$f^{-1}(\delta e^{\sqrt{-1}\theta}) \cap B_\varepsilon$ は $f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$ と同型．S^1_δ の接ベクトル $\sqrt{-1} w \partial_w$ の $B_\varepsilon \cap f^{-1}(S^1_\delta)$ への持ち上げの積分曲線は $f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$ から $f^{-1}(\delta e^{\theta\sqrt{-1}}) \cap B_\varepsilon$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ への同型を与える．この同型が定める同型写像

$$f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon \longrightarrow f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon = f^{-1}(\delta e^{2\pi\sqrt{-1}}) \cap B_\varepsilon$$

をモノドロミー写像という．