1 点で光的な曲線

数学特別講義 XX（2019 年 12 月 20 日）福井敏純

1　ミンコフスキー空間

$\mathbb{R}^3_1$ で 3 次元ミンコフスキー空間を表す．3 次元ミンコフスキー空間とは $\mathbb{R}^3$ に擬内積

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2.x_3),\ \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

を入れたものである．擬内積はユークリッドの内積とよく似ているが，正定値でないので，変な現象も起こる．ベクトル $\boldsymbol{x}$ が空間的，光的，時間的であることを次で定める．

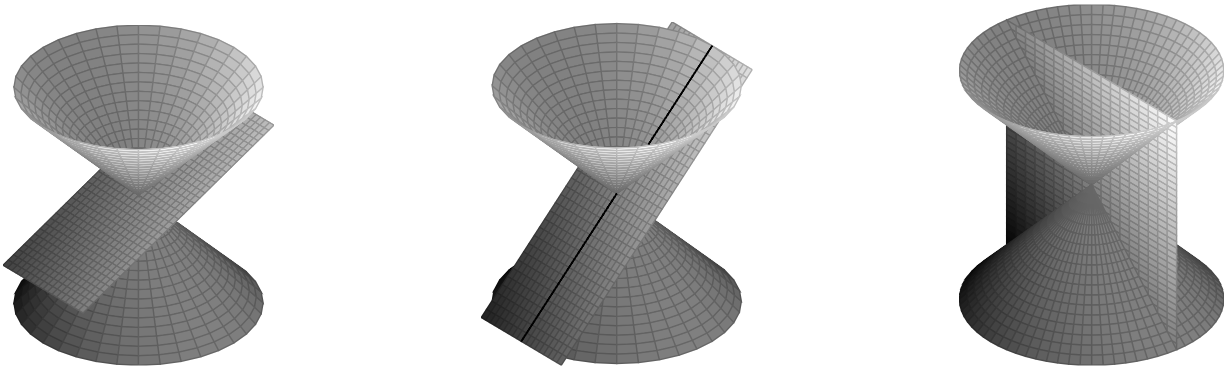
$$\text{ベクトル } \boldsymbol{x} \text{ が } \begin{array}{ccc} \text{空間的} & \Longleftrightarrow & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0 \\ \text{光的} & \Longleftrightarrow & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \\ \text{時間的} & \Longleftrightarrow & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle < 0 \end{array}$$

次でベクトルの長さを定義する．

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle|}$$

$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$ なる $\boldsymbol{y}$ 全体をベクトル $\boldsymbol{x}$ に擬直交する平面というが，$\boldsymbol{x}$ が光的ベクトルであれば，その擬直交平面は $\boldsymbol{x}$ 自身を含む．

時間的ベクトルに擬直交する平面を**空間的平面**，光的ベクトルに擬直交する平面を**光的平面**，空間的ベクトルに擬直交する平面を**時間的平面**という．



L と空間的平面　　L と光的平面　　L と時間的平面

ただし L は $L = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3_1 \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0\}$ で定義され**光錐**という名前がついている．

2　ミンコフスキー空間の曲線

曲線 $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^3_1, \boldsymbol{0})$ の接ベクトルが光的でなければ，曲線のパラメーターとして $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \pm 1$ なるものを取ることができる．すると $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$ であるから γ'' は γ' と擬直交する．γ'' が

光的ベクトルでなければ，$\boldsymbol{t} = \gamma'$, γ'' 方向の長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{n}$ を取ることができ，次の関係式を満たす．

$$\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} \rangle = \varepsilon_1,\ \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = \varepsilon_2$$

ただし $\varepsilon_1 = \pm 1$ で $\varepsilon_2 = \pm 1$ で符号はそれぞれ $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ が空間的であるか時間的であるかで決めている．

$$\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b} \rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = -\varepsilon_1 \varepsilon_2$$

なるベクトル $\boldsymbol{b}$ を一意的に定めることができるので $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ は 3 次元ユークリッド空間のフレネ枠とよく似た枠になる．

$$\kappa = \langle \boldsymbol{t}', \boldsymbol{n} \rangle, \quad \tau = \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{b} \rangle$$

と置くと，次の関係式を満たす．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{n}' \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau \\ 0 & -\varepsilon_2 \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

すると空間曲線の基本定理の類似が成立する．すなわち正値関数 κ と関数 τ を実現し $\gamma' = \boldsymbol{t}$, $\gamma'' = \kappa \boldsymbol{n}$ を満たす $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ と曲線 γ を $\mathbb{R}^3_1$ の等長変換を除いて一意的に定めることができる．

3　新しい事実

ここまではよく知られた事実であるが，1 点で接ベクトルが光的となる曲線については類似は成立するだろうかを考えてみたい．例えば $\langle \gamma', \gamma' \rangle = sg(s)$, $g(s) > 0$, となる曲線についてはどうであろうか?

このときは，パラメーター s として $\langle \gamma', \gamma' \rangle = s$ なるものを取ることができる．

γ' と γ'' の張る平面は時間的平面であり，次のような枠 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が一意的に存在する．

- $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は共に光的ベクトルで γ' と γ'' の張る平面を張り，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2} \rangle = 1$.
- $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に擬直交する空間的単位ベクトル．
- $\boldsymbol{v}_1(0) = \gamma'(0)$, $\gamma' = \boldsymbol{v}_1 + s\boldsymbol{v}_2$.

$\alpha = \langle \boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2 \rangle$ $\beta = \langle \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_4 \rangle$ とおけばフレネ・セレの公式は次のようになる．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1' \\ \boldsymbol{v}_2' \\ \boldsymbol{v}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -s\beta \\ 0 & -\alpha & \beta \\ -\beta & s\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$$

初期値を与えれば，この方程式を $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の微分方程式と見て一意的に解くことができ $\boldsymbol{v}_1 + s\boldsymbol{v}_2$ を積分すれば γ が復元できるので，この場合も曲線の基本定理の類似が成立する．

課題: 3 次元ミンコフスキー空間空間的ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ について，次の 3 角不等式が成立するかどうか考察しなさい．

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$$