

幾何学 C

ホモロジー論入門

福井 敏純

2019 年 7 月 18 日

目次

第 1 章	単体と複体	7
1.1	単体	7
1.2	複体	11
1.3	例	12
	1.3.1 正 4 面体	12
	1.3.2 正 8 面体	15
	1.3.3 正 6 面体 (立方体)	18
	1.3.4 正方形の貼り合わせ	19
1.4	完全列の例	22
1.5	有限生成アーベル群	24
第 2 章	代数学から	31
2.1	R 加群とその複体	31
	2.1.1 R 加群とその射の定義	31
	2.1.2 完全列	33
	2.1.3 完全列の Hom とテンソル積	38
	2.1.4 複体のホモロジー	39
	2.1.5 鎖写像と鎖ホモトピー	40
2.2	自由分解と Tor, Ext	41
	2.2.1 自由分解	41
	2.2.2 Tor と Ext	43
	2.2.3 加群の拡大	46
第 3 章	複体とホモロジー群	49
3.1	単体複体	49
3.2	ホモトピーと鎖写像	52
	3.2.1 ホモトピー	52

3.2.2	鎖写像	53
3.3	複体の完全列	58
3.3.1	複体の完全列	58
3.3.2	マイヤー・ビートルスの完全列	59
3.3.3	複体の対	59
3.3.4	単体複体と特異ホモロジー群	61
3.3.5	胞体複体とホモロジー群	63
3.4	係数変更とコホモロジー	64
3.4.1	係数変更	64
3.4.2	コホモロジー	65
3.4.3	積空間のホモロジー	67
3.5	固有写像とホモロジー	68
3.5.1	固有写像	68
3.5.2	局所コンパクト距離空間のホモロジー	69
3.5.3	閉台を持つ無限鎖のホモロジー	72
3.6	双対性	77
3.6.1	ポアンカレの双対定理	77
3.6.2	レフシェッツの双対定理	81
3.7	レフシェッツの不動点公式	82
	索引	86

はじめに

トポロジー（位相幾何学）の理論はポアンカレの論文

Analysis Situs, Journal de l'École Polytechnique (2), 1, pp.1–123, 1895,

及びそれを補足した5つの論文、に始まる^{*1}。ポアンカレは、現代の言葉で言えば、多面体から胞体鎖を構成し、その境界の間の関係を行列を用いて表示し、行列の簡約操作を行い、ベッチ数や振れ係数を発見し、ポアンカレの双対定理を示したのである。多様体の向きづけ可能性や、多様体における交点理論に相当することも述べている。

以降のトポロジーの発展を簡単に復習してみよう。1913年にはベブレンやアレキサンダーが $\mathbb{Z}/2$ 係数のホモロジーのベッチ数を定義し、1923年にキュネスが多様体の積のベッチ数と振れ係数を計算する公式を発表した。今日ではキュネスの公式と呼ばれる公式である。1925年にエミー・ネーターがホモロジーをアーベル群として認識する事の重要性を指摘してから、ホモロジーはホモロジー群になり、その後のホモロジーに関する理解の進展に大いに寄与した。1929年にはメイヤー (Mayer) が純粋に代数的な概念として複体を定義し、輪体や境界はその部分群として純粋に代数的な考察が可能になった。1930年にアレキサンダーが余鎖の概念を導入、1931年にド・ラームがホモロジーを微分形式と関連付けド・ラームの定理を示し、1935年にコルモゴルフとアレキサンダーがコホモロジーの概念の導入し、1944年にはアイレンベルグが特異コホモロジー群を導入した。1956年に出版されたカルタンとアイレンベルグの著書「Homological Algebra」は「革命」と呼ぶ研究者もいる程の大きな変革で、射影加群、入射加群、導来関手の概念が定義され、導来関手として Tor, Ext 等が導入された。この本が嚆矢となり広くホモロジー代数が浸透しその重要性が認識されるようになった。

本稿の狙いは、種々の図形のホモロジーを計算するための最低限の知識を短時間に修得してもらおうという点にあるのであるが、以上の様な歴史も念頭に置いている。ポアンカレ以降のトポロジーの発展史やトポロジーの理論の全体像を俯瞰するのは本稿の目的では

^{*1} ポアンカレの原論文はフランス語であるが、John Stillwell により英訳され Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements, AMS, 2010 として出版されている。また、斎藤利弥による日本語訳が「ポアンカレ トポロジー (数学史叢書)」朝倉書店 1996 として出版されている。

ないし、そのような能力は筆者にはない事をお断りしておく。

本稿の第1章の内容は、ポアンカレのアイデアをエミー・ネーターの指摘以降の整理された形での説明とほぼ同じであると思う。第2章にはカルタンとアイレンベルグ以降整備されたホモロジー代数の基礎的な部分の紹介になっている。第3章で、第2章で準備された言葉を使って、図形から特異ホモロジー群や胞体から決まるホモロジー群などいろいろなホモロジー群を定義し、それらを計算する事に主眼をおいている。それらは本質的に同じものであり、図形の位相的性質を代数的に抽象化して計算したものであると理解することが出来る。ポアンカレ双対定理が第3章の目標と言えよう。本稿で紹介するのは現代的な一般的定式化であるが、その証明のアイデアは、実は第1章で述べた多面体の双対を考えたときの複体の具体例の計算にある。ポアンカレは現代的な意味での多様体の概念がない時代に、この定理の基となる事実（ベッチ数と振れ係数の関係）に気がついている。トポロジーの理論の発展は、ポアンカレが当初構想したアイデアを実現しそれをできるだけ一般化するために整備されてきたとも思えるのであって、ポアンカレの慧眼恐るべしと思う。

なお、双対性を講義等で説明する際などは議論を簡単にするためコンパクトな多様体に話を限ってしまう事も多い。コンパクトな多様体に話を限ってしまうえば、3.5節で説明する閉台をもつ無限鎖のホモロジーは普通のホモロジーと同じものであり、この節の内容は不要となる。

ホモロジーについて良書はたくさんある。本稿の特徴は具体例に説明を割いたこと、100ページに満たない短い説明であること、くらいであろうか？手っ取り早く必要な事項を知るには本稿のような短い原稿も役に立つであろう。原稿が短いことの宿命として、種々の重要事項を網羅する事ができないのは止むを得ないと思う。読者は必要な知識を他の書籍から習得されたい。他の書籍を探索する際の出発点として、次の2冊のテキストを挙げておく。

- 田村一郎著「トポロジー」岩波全書
- V. V. Prasolov, Elements of Homology theory, AMS

第 1 章

単体と複体

単体とは 3 角形を一般化した概念で、多面体等の図形を構成する際、基本となる言葉である。本章では、単体から構成される図形について複体を作り、ホモロジー群を計算する過程を説明する。図形から複体を作り、複体からホモロジー群と呼ばれる群を計算する過程は、本稿の鍵となるアイデアである。

1.1 単体

実ベクトル空間 V の部分集合 C が凸集合であるとは次の性質を満たす時を言う。

$$p, q \in C, t \in [0, 1] \implies (1-t)p + tq \in C$$

これは、2 点 p, q が C の元ならば p, q の作る線分 $[p, q]$ が C に入ると言う条件である。

ベクトル空間 V の点 v_0, v_1, \dots, v_n が一般の位置にあるとは $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ が 1 次独立のときを言う。このとき次が成り立つ。

$$c_1(v_1 - v_0) + \dots + c_n(v_n - v_0) = 0 \implies c_1 = \dots = c_n = 0$$

$c_0 = -c_1 + \dots - c_n$ と置けば、これは次の条件と同値である事がわかる。

$$c_0 v_0 + c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0, c_0 + c_1 + \dots + c_n = 0 \implies c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0 \quad (1.1)$$

よって σ を $\{0, 1, \dots, n\}$ の置換とすれば、 v_0, v_1, \dots, v_n が一般の位置のとき、 $v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}$ も一般の位置にある。

実ベクトル空間の元 v_0, v_1, \dots, v_n に対して、その凸包 (convex hull) を次で定める。

$$\text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n c_i v_i : c_i \geq 0, \sum_{i=0}^n c_i = 1 \right\}$$

これは v_0, v_1, \dots, v_n を含む最小の凸集合である。これを示すには、次の 2 条件を示せばよい。

- $\text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_n)$ が凸集合
- 凸集合 C が v_0, v_1, \dots, v_n を含めば $\text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_n) \subset C$

実ベクトル空間 V の点 v_0, v_1, \dots, v_n が一般の位置にあるとき $\text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_n)$ の元 v を

$$v = \sum_{i=0}^n c_i v_i, \quad c_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n c_i = 1$$

と表す表し方はただ一通りである。実際

$$v = \sum_{i=0}^n c_i v_i = \sum_{i=0}^n c'_i v_i, \quad \sum_{i=0}^n c_i = 1, \quad \sum_{i=0}^n c'_i = 1$$

と表すと

$$\sum_{i=0}^n (c_i - c'_i) v_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n (c_i - c'_i) = 0$$

であり、 v_0, v_1, \dots, v_n が一般の位置にあるので、 $c_i = c'_i$ がわかる。

定義 1.1.1 (n 単体). v_0, v_1, \dots, v_n が一般の位置にあるとき、

$$[v_0, v_1, \dots, v_n] = \{(1 - t_1 - \dots - t_n)v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1\}$$

を n 単体 (n -simplex) という。

$[v_0, v_1, \dots, v_n]$ は集合としては凸包 $\text{conv}(v_0, v_1, \dots, v_n)$ と同じものであるが、以下、 $\Delta = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1\}$ として、 n 単体は写像

$$\varphi : \Delta \rightarrow V, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (1 - t_1 - \dots - t_n)v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n$$

の像であるとする。 n 単体には $\{0, 1, \dots, n\}$ の置換 σ が次で作用する。

$$\sigma([v_0, v_1, \dots, v_n]) = [v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}]$$

$[v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}]$ は集合としては $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ と同じものであるが、写像

$$\phi : \Delta \rightarrow V, \quad (s_1, \dots, s_n) \mapsto (1 - s_1 - \dots - s_n)v_{\sigma(0)} + s_1 v_{\sigma(1)} + \dots + s_n v_{\sigma(n)}$$

の像を見ると、単に集合と見るより、より多くの情報を持っている。以下、写像 φ と ϕ を比較する事によりこれを説明しよう。 $s_0 = 1 - s_1 - \dots - s_n$, $t_0 = 1 - t_1 - \dots - t_n$ とおくと

$$t_0 v_0 + t_1 v_1 + \dots + t_n v_n = s_{\sigma^{-1}(0)} v_0 + \dots + s_{\sigma^{-1}(n)} v_n$$

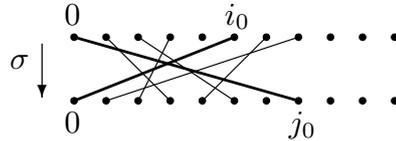
なので $s_{\sigma^{-1}(j)} = t_j$, すなわち $s_i = t_{\sigma(i)}$ である. つまり $\sigma(i_0) = 0$ とすると

$$s_i = \begin{cases} 1 - t_1 - \cdots - t_n, & i = i_0, \\ t_{\sigma(i)}, & i \neq i_0. \end{cases}$$

となる. $\sigma(0) = j_0$ とおくと $s_0 = t_{j_0}$ であり, s_1, \dots, s_n のうち t_{j_0} に依存するのは s_{i_0} のみなので $\frac{\partial s_{i_0}}{\partial t_{j_0}} = -1$, $\frac{\partial s_i}{\partial t_{j_0}} = 0$ ($i \neq i_0$) であり

$$\frac{\partial(s_1, \dots, s_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} = -(-1)^{i_0+j_0} \frac{\partial(s_1, \dots, \widehat{s_{i_0}}, \dots, s_n)}{\partial(t_1, \dots, \widehat{t_{j_0}}, \dots, t_n)} = \varepsilon(\sigma)$$

但し $\varepsilon(\sigma)$ は σ の符号数. 下図で太線の関わる交点の数は $i_0 + j_0 + 1$ 個であることに注意.



ヤコビ行列式の符号は, 体積などを計算する際重要であるので, 単体を考える際は次のように, 符号付き (通常向きをつけて, という) で考える.

$$[v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}] = \varepsilon(\sigma)[v_0, v_1, \dots, v_n]$$

例えば $[v_1, v_0] = -[v_0, v_1]$,

$$[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_0] = [v_0, v_1, v_2] = -[v_1, v_0, v_2] = -[v_0, v_2, v_1] = -[v_2, v_1, v_0]$$

である.

補題 1.1.2. v_0, v_1, \dots, v_n が一般の位置にあれば, $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ ($0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$) も一般の位置にある.

証明. (1.1) より明らか. □

従って, $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ が n 単体ならば $[v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ ($0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$) は k 単体である.

定義 1.1.3 (境界作用素). 境界作用素 ∂ を次で定める.

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_n] = [v_1, \dots, v_n] - [v_0, v_2, \dots, v_n] + \cdots + (-1)^n [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}]$$

これは次のように書いてもよい.

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n] \quad (1.2)$$

特に $\partial[ab] = [b] - [a]$ で $\partial[abc] = [bc] - [ac] + [ab]$ である. $\partial[abc] = [ab] + [bc] + [ca]$ と書いても良い.

n 単体を $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ と書かずに単に σ で表す事もある. このとき式 (1.2) を, 次の様に表す.

$$\partial\sigma = \sum_{\tau} \varepsilon_{\sigma,\tau} \tau$$

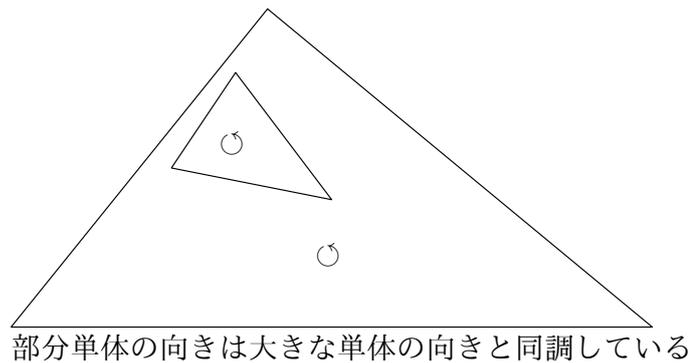
ここで τ は σ の境界に現れる $n-1$ 単体で $\varepsilon_{\sigma,\tau}$ は ± 1 である.

定義 1.1.4 (部分単体の向きと同調). n 単体 $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ がより大きな n 単体 $\tilde{\sigma} = [\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n]$ の部分集合であるとき, 単体を表す写像

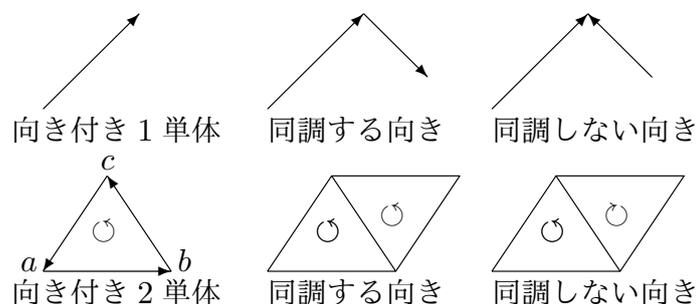
$$\varphi: \Delta \rightarrow V, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (1 - t_1 - \dots - t_n)v_0 + t_1v_1 + \dots + t_nv_n$$

$$\tilde{\varphi}: \Delta \rightarrow V, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto (1 - t_1 - \dots - t_n)\tilde{v}_0 + t_1\tilde{v}_1 + \dots + t_n\tilde{v}_n$$

を考える. 合成 $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi: \Delta \rightarrow \Delta$ のヤコビ行列式が正のとき n 単体 σ と n 単体 $\tilde{\sigma}$ の向きは同調するという.



定義 1.1.5 (隣接単体の向きと同調). 2つの n 単体 σ_1, σ_2 が $n-1$ 単体 τ を面として共有する時, $\varepsilon_{\sigma_1,\tau} + \varepsilon_{\sigma_2,\tau} = 0$ ならば σ_1, σ_2 の向きは同調するという.



隣接する 2つの n 単体の向きが同調するとは, その 2つの n 単体が大きな n 単体に入っている時, 大きな n 単体に 2つの n 単体と同調する向きが入るという事である.

例 1.1.6. 2 単体 $[abc]$ に境界を 2 回施すと 0 になる.

$$\partial \circ \partial[abc] = \partial([bc] - [ac] + [ab]) = ([c] - [b]) - ([c] - [a]) + ([b] - [a]) = 0$$

この事実は一般の n 単体に一般化される.

補題 1.1.7. $\partial \circ \partial[v_0, v_1, \dots, v_n] = 0$

証明. 計算であるので面倒臭がらずにやれば良い.

$$\begin{aligned} \partial \circ \partial[v_0, v_1, \dots, v_n] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n] \right) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

1.2 複体

アーベル群の準同型 (または射) $\alpha: M \rightarrow N$ とは, 次を満たすものを言う.

- 任意の $m, m' \in M$ に対し $\alpha(m + m') = \alpha(m) + \alpha(m')$
- 任意の整数 r と $m \in M$ に対し $\alpha(rm) = r\alpha(m)$

アーベル群の準同型 $\alpha: M \rightarrow N$ に対し, その核 (kernel) $\text{Ker } \alpha$ と像 (image) $\text{Im } \alpha$ を次で定義する.

$$\text{Ker } \alpha = \{m \in M : \alpha(m) = 0\}, \quad \text{Im } \alpha = \alpha(M)$$

$\text{Ker } \alpha$ は M の部分アーベル群, $\text{Im } \alpha$ は N の部分アーベル群となる.

定義 1.2.1 (複体). アーベル群の準同型の列

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

が複体 (complex) であるとは, すべての k について, 合成

$$\partial \circ \partial : C_{k+1} \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1}$$

が零写像である時を言う. このとき, C_k を k 鎖群, C_k の元を k 鎖 (k -chain) ^{チェイン}

$B_k = \text{Im}\{\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k\}$ は $Z_k = \text{Ker}\{\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}\}$ の部分群である.

B_k を k 境界群, B_k の元を k 境界 (k -boundary) ^{バウンダリー}, Z_k を k 輪体群, Z_k の元を k 輪体 (k -cycle) ^{サイクル} と呼び, ホモロジー群 H_k を次で定める.

$$H_k = Z_k / B_k$$

2つの輪体が同じホモロジー群の元を定めるとき、その2つの輪体はホモローガスであると言う。

定義 1.2.2 (完全列). アーベル群の準同型のなす列

$$M_n \xrightarrow{\partial} M_{n-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} M_1 \xrightarrow{\partial} M_0$$

が完全列 (exact sequence) であるとは、すべての k に対し次が成り立つときをいう。

$$\text{Im}\{\partial : M_{k+1} \rightarrow M_k\} = \text{Ker}\{\partial : M_k \rightarrow M_{k-1}\}$$

特に、次が成り立つ。

- $0 \rightarrow A \rightarrow B$ が完全 $\iff A \rightarrow B$ が単射
- $B \rightarrow C \rightarrow 0$ が完全 $\iff B \rightarrow C$ が全射
- $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ が完全 $\iff \begin{cases} A \rightarrow B \text{ が単射} \\ B \rightarrow C \text{ が全射} \\ \text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta \end{cases}$

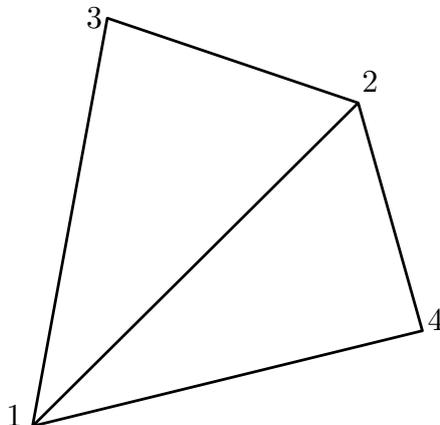
補題 1.2.3. 複体 (1.3) があれば、次の完全列がある。

$$0 \rightarrow Z_k \rightarrow C_k \xrightarrow{\partial} B_{k-1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow B_k \rightarrow Z_k \rightarrow H_k \rightarrow 0$$

1.3 例

1.3.1 正4面体

一般の位置にある \mathbb{R}^3 内の4点に 1,2,3,4 と番号を付ける。



4つの2単体 $[123]$, $[143]$, $[124]$, $[243]$ が生成する自由アーベル群を C_2 で表す。

$$C_2 = \langle [123], [142], [134], [243] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

アーベル群としては $C_2 = \mathbb{Z}^4$ である.

6つの1単体 $[12], [13], [14], [23], [42], [34]$ が生成する自由アーベル群を C_1 で表す.

$$C_1 = \langle [12], [13], [14], [23], [42], [34] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

アーベル群としては $C_1 = \mathbb{Z}^6$ である.

4つの0単体 $[1], [2], [3], [4]$ が生成する自由アーベル群を C_0 で表す.

$$C_0 = \langle [1], [2], [3], [4] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

アーベル群としては $C_0 = \mathbb{Z}^4$ である.

$k = 0, 1, 2$ 以外のとき, 便宜上 $C_k = 0$ としておく.

k 単体に対して定義された境界作用素 ∂ を, C_k 上に線形に拡張して線形写像 $C_k \rightarrow C_{k-1}$ を定める. これも境界作用素とよび ∂ で表す. 境界作用素が次の列を定める.

$$0 \xrightarrow{\partial} C_2 \xrightarrow{\partial} C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \xrightarrow{\partial} 0$$

境界作用素 $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ の定める行列を A_k で表すと補題 1.1.7 より $A_2 A_1 = O$ がわかる.

$B_2 = \text{Im}\{0 \rightarrow C_2\} = 0$ である. 境界作用素 $\partial : C_2 \rightarrow C_1$ を調べよう.

$$\begin{aligned} \partial[123] &= [23] - [13] + [12] & \partial[124] &= [24] - [14] + [12] \\ \partial[134] &= [34] - [14] + [13] & \partial[243] &= [43] - [23] + [24] \end{aligned}$$

なので, C_2 の元 $a[123] + b[124] + c[134] + d[243]$ の $\partial : C_2 \rightarrow C_1$ による, 像は次のように表せる.

$$(a \ b \ c \ d) \begin{pmatrix} \partial[123] \\ \partial[124] \\ \partial[134] \\ \partial[243] \end{pmatrix} = (a \ b \ c \ d) A_1 \begin{pmatrix} [12] \\ [13] \\ [14] \\ [23] \\ [42] \\ [34] \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & 1 & \\ & 1 & -1 & & & 1 \\ & & & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

従って、境界作用素 $\partial: C_2 \rightarrow C_1$ を行列表示すると次の様^{*1}になる。

$$\begin{aligned} C_2 \rightarrow C_1, & \quad \begin{pmatrix} [123] \\ [124] \\ [134] \\ [243] \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial[123] \\ \partial[124] \\ \partial[134] \\ \partial[243] \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} [12] \\ [13] \\ [14] \\ [23] \\ [42] \\ [34] \end{pmatrix} \\ \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^6, & \quad (a \ b \ c \ d) \mapsto (a \ b \ c \ d)A_1 \end{aligned}$$

行列 A_1 の階数は3で行ベクトルをすべて足すと0である。即ち $Z_2 = \text{Ker}\{\partial: C_2 \rightarrow C_1\}$ は $[1, 2, 3] + [1, 4, 2] + [1, 3, 4] + [2, 4, 3]$ で生成されている。これは次のように見ても良い。 $\alpha = a[123] + b[142] + c[134] + d[243] \in C_2$ とする。

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= a([23] - [13] + [12]) + b([42] - [12] + [14]) + c([34] - [14] + [13]) + d([43] - [23] + [24]) \\ &= (a - b)[12] + (c - a)[13] + (b - c)[14] + (a - d)[23] + (b - d)[42] + (c - d)[34] \end{aligned}$$

より $\alpha \in Z_2$ は $a = b = c = d$ と同値である事がわかる。 $B_2 = 0$ なので

$$H_2 = Z_2/B_2 = Z_2 = \langle [1, 2, 3] + [1, 4, 2] + [1, 3, 4] + [2, 4, 3] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

次に、境界作用素 $\partial: C_1 \rightarrow C_0$ を行列表示すると次の様になる。

$$\begin{aligned} C_1 \rightarrow C_0, & \quad \begin{pmatrix} [12] \\ [13] \\ [14] \\ [23] \\ [42] \\ [34] \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial[12] \\ \partial[13] \\ \partial[14] \\ \partial[23] \\ \partial[42] \\ \partial[34] \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ -1 & & 1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}^4, & \quad (p \ q \ r \ s \ t \ u) \mapsto (p \ q \ r \ s \ t \ u)A_1 \end{aligned}$$

$\beta = p[12] + q[13] + r[14] + s[23] + t[42] + u[34] \in C_1$ とする。

$$\partial\beta = -(p + q + r)[1] + (p - s + t)[2] + (q + s - u)[3] + (r - t + u)[4] \quad (1.4)$$

なので、 $\beta \in Z_1$ であることは $r = -p - q, t = s - p, u = q + s$ と同値。従って

$$\beta \in Z_1 \iff \beta = p([12] - [14] - [42]) + q([13] - [14] + [34]) + s([23] + [42] + [34])$$

^{*1} \mathbb{Z}^n の基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, \mathbb{Z}^m の基底 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, \mathbb{Z}^p の基底 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p$ を取り、線形写像 $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m, g: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^p$ に対し $f \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_p \end{pmatrix}$ で行列 A, B を定めると、 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_n\mathbf{u}_n$ の像は

$$g \circ f(\mathbf{x}) = (x_1 \ \dots \ x_n)AB \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_p \end{pmatrix}$$

なので合成 $g \circ f$ が定める係数の間の変換式は $(x_1 \ \dots \ x_n) \mapsto (x_1 \ \dots \ x_n)AB$ である。全体を転置して書くこともある。それでも実質同じであるが、行列の掛け算の順序が逆になる事に注意しておく。

$$= \partial(p[124] + q[134] + s[234]) \implies \beta \in B_1$$

なので $H_1 = Z_1/B_1 = 0$ がわかる.

$\gamma = x[1] + y[2] + z[3] + w[4] \in C_0$ とする. $\partial\gamma = 0$ であり, $Z_0 = C_0$. $\gamma \in B_0$ となる条件を調べてみよう. $\gamma = \partial\beta$ となる条件は $(p \ q \ r \ s \ t \ u)A_2 = (x \ y \ z \ w)$ なる (p, q, r, s, t, u) が存在することである. 行列 A_2 の階数は 3 で, すべての行を足せば 0 となるので, 拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & & & x \\ 1 & & & -1 & 1 & y \\ & 1 & & 1 & & -1 \\ & & 1 & & -1 & 1 \\ & & & & & w \end{pmatrix}$$

の階数が 3 となければならず, $x + y + z + w = 0$ がわかる. このとき

$$\gamma = x([1] - [4]) + y([2] - [4]) + z([3] - [4]) = \partial(x[41] + y[42] + z[43]) \in B_0$$

がわかる. よって

$$B_0 = \{x[1] + y[2] + z[3] + w[4] : x + y + z + w = 0\}$$

$Z_0 = C_0 = \langle [0], [1], [2], [3] \rangle_{\mathbb{Z}}$ なので, 写像

$$Z_0 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x[0] + y[1] + z[2] + w[3] \mapsto x + y + z + w$$

の核が B_0 である. 以上の計算で次が成立することがわかった.

$$H_2 = Z_2/B_2 = Z_2 = \mathbb{Z}, \quad H_1 = Z_1/B_1 = 0, \quad H_0 = Z_0/B_0 = \mathbb{Z}$$

要約すると, 複体 $0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ は

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{A_2} \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{A_1} \mathbb{Z}^4 \rightarrow 0$$

であり, このホモロジー (H_2, H_1, H_0) は $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$ である.

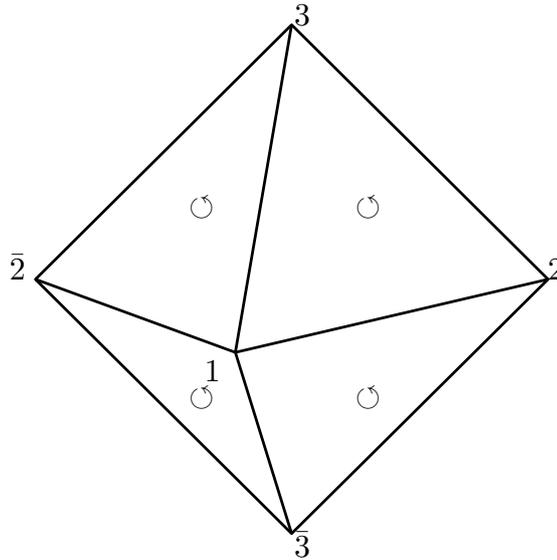
上の表示を見ればわかるように, 行列 A_1 と行列 A_2 は良く似ている. 互いに転置ではないがほぼそれに近い性質を持っている事に注意しておこう.

1.3.2 正 8 面体

\mathbb{R}^3 の 6 点

$$(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)$$

を順に $1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 3, \bar{3}$ と書く. この 6 点を頂点とする正 8 面体を考える.



$$C_2 = \langle [123], [1\bar{3}2], [13\bar{2}], [1\bar{2}\bar{3}], [\bar{1}32], [\bar{1}\bar{2}\bar{3}], [\bar{1}\bar{2}3], [\bar{1}\bar{3}\bar{2}] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$C_1 = \langle [12], [1\bar{2}], [\bar{1}2], [\bar{1}\bar{2}], [13], [1\bar{3}], [\bar{1}3], [\bar{1}\bar{3}], [23], [2\bar{3}], [\bar{2}3], [\bar{2}\bar{3}] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$C_0 = \langle [1], [\bar{1}], [2], [\bar{2}], [3], [\bar{3}] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

線形写像 $\partial : C_2 \rightarrow C_1$ を表す行列は次の様になる。

	[12]	[1 $\bar{2}$]	[$\bar{1}$ 2]	[$\bar{1}\bar{2}$]	[31]	[$\bar{3}$ 1]	[3 $\bar{1}$]	[$\bar{3}\bar{1}$]	[23]	[2 $\bar{3}$]	[$\bar{2}$ 3]	[$\bar{2}\bar{3}$]
[123]	1				1				1			
[1 $\bar{3}$ 2]	-1					-1				-1		
[13 $\bar{2}$]		-1			-1						-1	
[1 $\bar{2}\bar{3}$]		1				1						1
[$\bar{1}$ 32]			-1				-1		-1			
[$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$]			1					1		1		
[$\bar{1}\bar{2}$ 3]				1			1				1	
[$\bar{1}\bar{3}\bar{2}$]				-1				-1				-1

この行列を A_2 と書く。階数は7で、すべての行ベクトルの和は0となっている。

つまり $\text{Ker}\{\partial : C_2 \rightarrow C_1\}$ は $[123] + [1\bar{3}2] + [13\bar{2}] + [1\bar{2}\bar{3}] + [\bar{1}32] + [\bar{1}\bar{2}\bar{3}] + [\bar{1}\bar{2}3] + [\bar{1}\bar{3}\bar{2}]$ で生成される。

$$Z_2 = \langle [123] + [1\bar{3}2] + [13\bar{2}] + [1\bar{2}\bar{3}] + [\bar{1}32] + [\bar{1}\bar{2}\bar{3}] + [\bar{1}\bar{2}3] + [\bar{1}\bar{3}\bar{2}] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

よって $H_2 = Z_2/B_2 = Z_2 \simeq \mathbb{Z}$ を得る。

線形写像 $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ を表す行列 (の転置) は次の様になる。

	[12]	[1 $\bar{2}$]	[$\bar{1}2$]	[$\bar{1}\bar{2}$]	[31]	[$\bar{3}1$]	[3 $\bar{1}$]	[$\bar{3}\bar{1}$]	[23]	[2 $\bar{3}$]	[$\bar{2}3$]	[$\bar{2}\bar{3}$]
[1]	-1	-1			1	1						
[2]	1		1						-1	-1		
[3]					-1		-1		1		1	
[$\bar{1}$]			-1	-1			1	1				
[$\bar{2}$]		1		1							-1	-1
[$\bar{3}$]						-1		-1	1			1

この行列（の転置）を A_1 と書く．

$\alpha \in Z_1$ ($\partial\alpha = 0$) とする．

$\alpha = a[12] + b[1\bar{2}] + c[\bar{1}2] + d[\bar{1}\bar{2}] + e[31] + f[\bar{3}1] + g[3\bar{1}] + h[\bar{3}\bar{1}] + i[23] + j[2\bar{3}] + k[\bar{2}3] + l[\bar{2}\bar{3}]$
とおくと

$$\begin{aligned} \partial\alpha = & (e + f - a - b)[1] + (a + c - i - j)[2] + (i + k - e - g)[3] \\ & + (g + h - c - d)[\bar{1}] + (b + d - k - l)[\bar{2}] + (j + l - f - h)[\bar{3}] \end{aligned}$$

なので、これの係数が零とおいて得られる連立1次方程式を解くと次を得る．

$$\begin{cases} f = a + b - e, \\ h = c + d - i, \\ j = a + c - i, \\ k = e + j - i, \\ l = b + d - e - g - i \end{cases}$$

これらを α に代入して少し整理すると、次を得る．

$$\begin{aligned} \alpha = & \partial(a[12\bar{3}] + b[1\bar{2}\bar{3}] + c[\bar{1}2\bar{3}] + d[\bar{1}\bar{2}\bar{3}]) + e([\bar{2}31] - [\bar{2}\bar{3}1]) + g([\bar{2}3\bar{1}] - [\bar{2}\bar{3}\bar{1}]) \\ & + i([23] + [3\bar{2}] + [\bar{2}\bar{3}] + [\bar{3}2]) \end{aligned}$$

$[23] + [3\bar{2}] + [\bar{2}\bar{3}] + [\bar{3}2] = \partial([123] + [13\bar{2}] + [1\bar{2}\bar{3}] + [1\bar{3}2])$ なので $\alpha \in B_1$ を得る．よって $H_1 = Z_1/B_1 = 0$ ．

A_1 の階数は5で、すべての行ベクトルの和は0となっている．即ちこの行列に左から $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ をかけると零行列、言い換えると次の合成は零写像．

$$\mathbb{Z}^{12} = C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 = \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}$$

A_1 の5次の小行列式でその値が ± 1 になるものが存在するので $C_1 \xrightarrow{\partial} C_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ は完全列で次がわかった．

$$H_0 = C_0/B_0 \simeq \mathbb{Z}$$

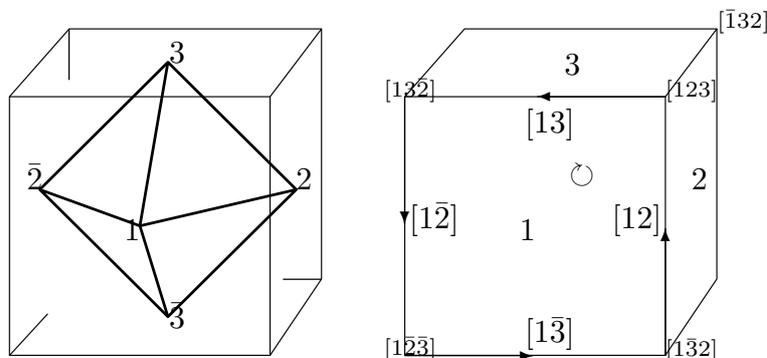
要約すると、複体 $0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ は

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^8 \xrightarrow{A_2} \mathbb{Z}^{12} \xrightarrow{A_1} \mathbb{Z}^6 \rightarrow 0$$

であり、このホモロジー (H_2, H_1, H_0) をとると $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$ である。

1.3.3 正6面体（立方体）

正8面体の双対をとると正6面体を得る。正6面体の各面と各辺に図の様に向きを定めておく。（面には8面体の頂点を外向き法ベクトルの様に思っ左ねじ、辺には90度回転で）



正8面体の記号を流用して、正6面体の複体を記述しよう。[1], [2], [3] 等で正6面体の面を表し $[123]$, $[12\bar{3}]$ 等で頂点を表す。

$$C_2 = \langle [1], [\bar{1}], [2], [\bar{2}], [3], [\bar{3}] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$C_1 = \langle [12], [1\bar{2}], [\bar{1}2], [\bar{1}\bar{2}], [13], [1\bar{3}], [\bar{1}3], [\bar{1}\bar{3}], [23], [2\bar{3}], [\bar{2}3], [\bar{2}\bar{3}] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$C_0 = \langle [123], [1\bar{3}2], [13\bar{2}], [1\bar{2}3], [\bar{1}32], [\bar{1}2\bar{3}], [\bar{1}\bar{3}2], [\bar{1}\bar{2}3] \rangle_{\mathbb{Z}}$$

ちょっと見づらいが、上の絵を見ながら計算する。すると前例の行列が、境界写像 $C_1 \rightarrow C_0, C_2 \rightarrow C_1$ を表現する行列になっている。実際

$$\partial[1] = -[12] + [31] - [1\bar{2}] + [\bar{3}1] \quad \partial[\bar{1}] = -[\bar{1}2] - [\bar{1}\bar{2}] + [3\bar{1}] + [\bar{3}\bar{1}]$$

$$\partial[2] = [12] - [23] + [\bar{1}2] - [2\bar{3}] \quad \partial[\bar{2}] = [1\bar{2}] + [\bar{1}\bar{2}] - [23] - [2\bar{3}]$$

$$\partial[3] = -[31] + [23] - [3\bar{1}] + [\bar{2}3] \quad \partial[\bar{3}] = -[\bar{3}1] - [\bar{3}\bar{1}] + [2\bar{3}] + [\bar{2}\bar{3}]$$

であり、写像 $C_2 \rightarrow C_1$ の表現行列は次のようになる。

	[12]	[1 $\bar{2}$]	[$\bar{1}2$]	[$\bar{1}\bar{2}$]	[31]	[$\bar{3}1$]	[3 $\bar{1}$]	[$\bar{3}\bar{1}$]	[23]	[2 $\bar{3}$]	[$\bar{2}3$]	[$\bar{2}\bar{3}$]
[1]	-1	-1			1	1						
[2]	1		1						-1	-1		
[3]					-1	-1			1		1	
[$\bar{1}$]			-1	-1			1	1				
[$\bar{2}$]		1		1							-1	-1
[$\bar{3}$]						-1	-1		1			1

$$\begin{aligned}
\partial[12] &= [123] - [1\bar{3}2], & \partial[31] &= [123] - [13\bar{2}], & \partial[23] &= [123] - [\bar{1}32], \\
\partial[1\bar{2}] &= [1\bar{2}3] - [13\bar{2}], & \partial[\bar{3}1] &= [\bar{1}23] - [\bar{1}32], & \partial[2\bar{3}] &= [\bar{1}23] - [13\bar{2}], \\
\partial[\bar{1}2] &= [\bar{1}23] - [\bar{1}32], & \partial[3\bar{1}] &= [1\bar{2}3] - [13\bar{2}], & \partial[\bar{2}3] &= [\bar{1}23] - [13\bar{2}], \\
\partial[\bar{1}\bar{2}] &= [\bar{1}23] - [\bar{1}3\bar{2}], & \partial[\bar{3}\bar{1}] &= [\bar{1}23] - [\bar{1}3\bar{2}], & \partial[2\bar{3}] &= [123] - [\bar{1}3\bar{2}].
\end{aligned}$$

より，写像 $C_1 \rightarrow C_0$ の表現行列（の転置）は次のようになる．

	[12]	[1 $\bar{2}$]	[$\bar{1}2$]	[$\bar{1}\bar{2}$]	[31]	[$\bar{3}1$]	[3 $\bar{1}$]	[$\bar{3}\bar{1}$]	[23]	[2 $\bar{3}$]	[$\bar{2}3$]	[$\bar{2}\bar{3}$]
[123]	1				1				1			
[1 $\bar{3}2$]	-1					-1				-1		
[13 $\bar{2}$]		-1			-1						-1	
[1 $\bar{2}3$]		1				1						1
[$\bar{1}32$]			-1				-1		-1			
[$\bar{1}2\bar{3}$]			1					1		1		
[$\bar{1}\bar{2}3$]				1			1				1	
[$\bar{1}3\bar{2}$]				-1				-1				-1

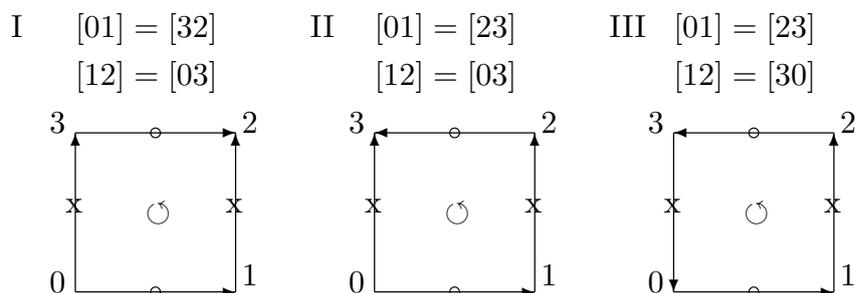
ここに表れた行列は，正 8 面体から作った複体の行列の転置である．要約すると，正 8 面体のときの行列 A_2, A_1 を使えば複体 $0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ は

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^8 \xrightarrow{A_1} \mathbb{Z}^{12} \xrightarrow{A_2} \mathbb{Z}^6 \rightarrow 0$$

であり，ホモロジー (H_2, H_1, H_0) を計算すると（詳細は省略するが） $(\mathbb{Z}, 0, \mathbb{Z})$ である事がわかる．

1.3.4 正方形の貼り合わせ

正方形を境界で貼り合わせて曲面を作る．ここでは次の 3 通りを考えよう．上辺と下辺，左辺と右辺をそれらの向きが図に指定した方法で重なるように同一視する．



I, II では $[0] = [1] = [2] = [3]$ で, III では $[0] = [2], [1] = [3]$ である.

$$C_2 = \langle \square \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad C_1 = \langle [01], [12] \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad C_0 = \begin{cases} \langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{(I, II)} \\ \langle [0], [1] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{(III)} \end{cases}$$

まず $B_2 = \text{Im}\{0 \rightarrow C_2\} = 0$ に注意する. 次に $\partial \square$ を計算する. $\square = [012] + [023]$ と思って, $\partial \square = \partial[012] + \partial[023]$ を計算すると,

$$\partial \square = [01] + [12] + [23] + [30] = \begin{cases} [01] + [12] - [32] - [03] = 0 & \text{I} \\ [01] + [12] + [23] - [03] = 2[01] & \text{II} \\ 2[01] + 2[12] & \text{III} \end{cases}$$

なので次を得る.

$$Z_2 = \{a\square : \partial(a\square) = 0\} = \begin{cases} \langle \square \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{I,} \\ 0 & \text{II,} \\ 0 & \text{III.} \end{cases} \quad B_1 = \begin{cases} 0 & \text{I,} \\ \langle 2[01] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{II,} \\ \langle 2([01] + [12]) \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{III.} \end{cases}$$

$\partial[01] = [1] - [0], \partial[12] = [2] - [1]$ なので, I, II のときこれは 0, III のときはこれは零でなく $\partial([01] + [12]) = [1] - [0] + [2] - [1] = [2] - [0] = 0$ なので次を得る.

$$Z_1 = \begin{cases} \langle [01], [12] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{I,} \\ \langle [01], [12] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{II,} \\ \langle [01] + [12] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{III.} \end{cases} \quad B_0 = \begin{cases} 0 & \text{I,} \\ 0 & \text{II,} \\ \langle [1] - [0] \rangle_{\mathbb{Z}} & \text{III.} \end{cases}$$

従って複体 $0 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ は, I, II, III の場合に応じて

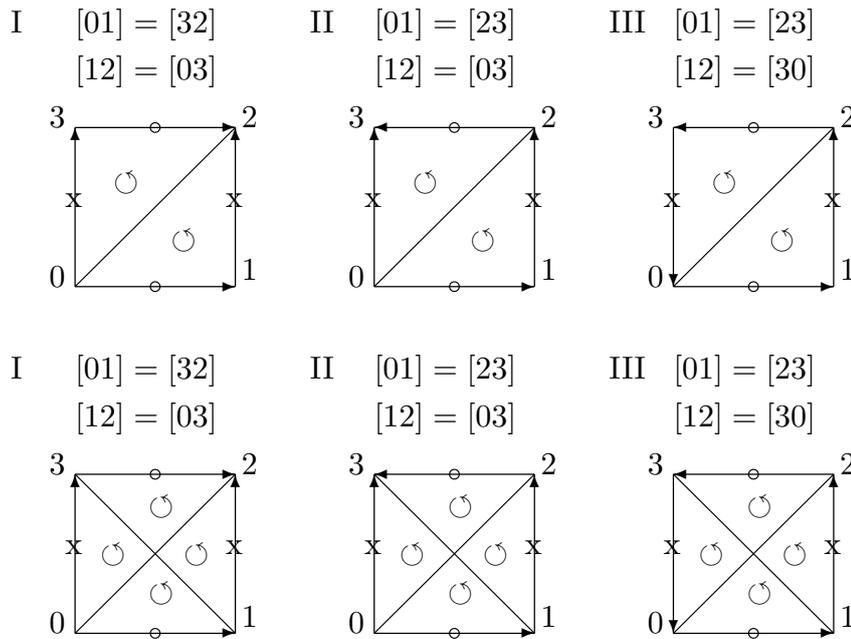
$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(2,0)} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(2,2)} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0$$

となり, ホモロジー群 (H_2, H_1, H_0) はそれぞれ次で与えられる.

	$H_2 = Z_2$	$H_1 = Z_1/B_1$	$H_0 = C_0/B_1$
I	$\langle \square \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$	$\langle [01], [12] \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}^2$	$\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$
II	0	$\langle [01], [12] \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$	$\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$
III	0	$\langle [01] + [12] \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/2$	$\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}$

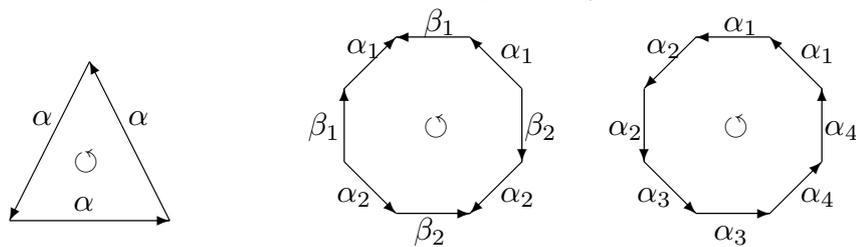
I の貼り合わせでできるのはトーラス, II の貼り合わせでできるのはクラインの壺, III の貼り合わせでできるのは実射影平面である.

演習 1.3.1. 次の図で示された分割から複体を作りホモロジー群を計算せよ.



下段 III は 3 三角形が埋め込まれているが, それ以外はどの 3 三角形も異なる 2 頂点が同一視されていて 3 三角形は埋め込まれているわけではない.

演習 1.3.2. 次の図に示されたデータから複体を構成し, そのホモロジー群を計算せよ.



これらの貼り合わせを, 順に $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$, $\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2\alpha_3\alpha_3\alpha_4\alpha_4$ と書く.

演習 1.3.3. $4g$ 角形を考え, 各辺を $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\cdots\alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1}$ で貼り合わせて得られる図形 (種数 g の閉曲面である) のホモロジー群を求めよ.

演習 1.3.4. $2g$ 角形を考え, 各辺を $\alpha_1\alpha_1\cdots\alpha_g\alpha_g$ で貼り合わせて得られる図形のホモロジー群を求めよ.

局所的には \mathbb{R}^n の開集合と同一視出来るような図形を n 次元多様体と言う. 多様体につ

いて正確な説明を与えるのは本稿の目的でないので詳細は省くが、今後時々「多様体」と言う言葉を使う。 \mathbb{R}^n の開集合を上手に貼り合わせて作ったハウスドルフ位相空間と置いていけばよい。

注意 1.3.5 (正 12 面体空間). 正 12 面体の向かい合う面を $\pi/5$ 回転させて貼り合わせてできる 3 次元多様体をポアンカレの正 12 面体空間という。正 12 面体空間は S^3 と同じホモロジー群を持つが、 S^3 と位相同型でないことが知られている。これは、ポアンカレが Analysis Situs の 2 番目の補足の末尾に証明なしに述べた「 $H_1 = 0$ となる 3 次元閉多様体は S^3 に限る」という「定理」の、ポアンカレ自身による反例で、Analysis Situs の 5 番目の補足に述べられている。因みにこの主張は、後にポアンカレ予想と呼ばれる予想「単連結な 3 次元閉多様体は S^3 に限る」の発端となった主張である。

注意 1.3.6 (レンズ空間). $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ と置く、 $0 < p < q$ なる互いに素な自然数 p, q を取り ξ を 1 の原始 p 乗根とする。 $(x, w) \sim (\xi z, \xi^q w)$ で生成される同値関係で S^3 を同一視して得られる空間をレンズ空間といい $L(p, q)$ で表す。 $L(p, q)$ のホモロジー群を計算するにはレンズ空間を S^3 の群 \mathbb{Z}/p の作用に依る商空間とみて、群作用付きの複体を考え、そのホモロジー群 (群作用付きホモロジー群) を計算し、そのホモロジー群の群作用で不変な部分 $H_*(L(p, q), \mathbb{Z}) = H_*(S^3, \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/p}$ を取れば良い。 $(H_0, H_1, H_2, H_3) = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p, 0, \mathbb{Z})$ となる。

1.4 完全列の例

複体からホモロジーを計算する際、完全列の例を承知していると役に立つことが多い。ここでは完全列の例をいくつか紹介する。

補題 1.4.1. $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \rightarrow 0$ が完全列のとき、次は完全列。

$$0 \rightarrow \boxed{A_n} \xrightarrow{(\partial_n \begin{smallmatrix} (-1)^n \end{smallmatrix})} \boxed{A_{n-1} \oplus A_n} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_{n-1} & (-1)^{n-1} \\ 0 & \partial_n \end{pmatrix}} \boxed{A_{n-2} \oplus A_{n-1}} \rightarrow \dots \\ \rightarrow \boxed{A_1 \oplus A_2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \partial_1 & -1 \\ 0 & \partial_2 \end{pmatrix}} \boxed{A_0 \oplus A_1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ \partial_1 \end{pmatrix}} \boxed{A_0} \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

ここで各 A_i は適当に基底をとって \mathbb{Z}^{a_i} と同型であるとし、 A_i の元 α を \mathbb{Z}^{a_i} の元 (横ベクトル) と同一視する。これらの基底に関して境界作用素 ∂_i を表す行列を、記号を濫用して、 ∂_i で表すと、 α の境界 $\partial_i \alpha$ は、 \mathbb{Z}^{a_i} の元とみた α に行列 ∂_i を右からかけた $\alpha \partial_i$ で表示される。

証明. (1.5) が複体であることの証明: $(\alpha, \beta) \in A_{i-1} \oplus A_i$ に対して

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} \partial_{i-1} & (-1)^{i-1} \\ 0 & \partial_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{i-2} & (-1)^{i-2} \\ 0 & \partial_{i-1} \end{pmatrix} = (\partial_{i-1}\alpha, (-1)^{i-1}\alpha + \partial_i\beta) \begin{pmatrix} \partial_{i-2} & (-1)^{i-2} \\ 0 & \partial_{i-1} \end{pmatrix} = 0.$$

(1.5) が完全列であることの証明: $(\alpha, \beta) \in A_{i-1} \oplus A_i$ が輪体であると仮定すると, $\partial_{i-1}\alpha = 0, (-1)^{i-1}\alpha + \partial_i\beta = 0$ である. $(\alpha', \beta') \in A_{i+1} \oplus A_i$ で

$$(\alpha', \beta') \begin{pmatrix} \partial_i & (-1)^i \\ 0 & \partial_{i+1} \end{pmatrix} = (\partial_i\alpha', (-1)^i\alpha' + \partial_{i+1}\beta') = (\alpha, \beta)$$

なるものを見つきたい. $\partial_i\alpha' = \alpha$ なる $\alpha' \in A_i$ の存在は (A_\bullet) が完全列であることよりわかる. $\partial_{i+1}\beta' = \beta - (-1)^i\alpha'$ なる $\beta' \in A_{i+1}$ の存在は, (A_\bullet) が完全列なので, $\partial_i[\beta - (-1)^i\alpha'] = \partial_i\beta - (-1)^i\alpha = 0$ よりわかる. \square

演習 1.4.2. 上の (1.5) で, 行列を $\begin{pmatrix} -\partial_i & -1 \\ 0 & \partial_{i-1} \end{pmatrix}$ に変えても完全列である事を確かめよ.

例 1.4.3. 完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ に例 1.4.1 の構成を施すと次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

この完全列に, 再度例 1.4.1 の構成を施すと, 次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

この完全列に, 更に例 1.4.1 の構成を施すと, 次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1.8)$$

この構成を繰り返して次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{2}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{2}} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

演習: 複体 (1.8) の写像の行列を書き下せ.

例 1.4.4. n 次元単体 Δ^n の面が作る自由アーベル群を考え, それから複体を作ると

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{n+1}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{n}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{n-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{2}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{1}} \rightarrow 0 \quad (1.10)$$

となる. Δ^n の i 次元の面は Δ^n の $n+1$ 個の頂点から $i+1$ 個の点を選ぶことで定まるからである. ホモロジー群を H_i と書くと, $H_0 = \mathbb{Z}, H_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) である.

$n = 1$ の時 $\partial[01] = [1] - [0]$ より複体は次のようである.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2 \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

ただし \mathbb{Z}^2 の基底を $[1], [0]$ の順に並べて行列を書いている.

$n = 2$ の時 $\partial[012] = [01] - [02] + [12]$ より複体は次のようである.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^3 \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

ただし 0 鎖群の基底を $[2], [1], [0]$ の順に並べ 1 鎖群の基底を $[12], [02], [01]$ の順に並べ行列を書いている.

これらの複体は (1.6), (1.7) の右端の \mathbb{Z} を 0 に変えて得られる複体である. 一般に複体 (1.10) は, 複体 (1.9) の右端の \mathbb{Z} を 0 に変えて得られる複体である.

実際, $C_i = \langle [k_0, k_1, \dots, k_i] : 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_i \leq n \rangle_{\mathbb{Z}}$ とおく.

$$\begin{aligned} C'_i &= \langle [k_0, k_1, \dots, k_i] : 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_i \leq n-1 \rangle_{\mathbb{Z}}, \\ C''_i &= \langle [k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, n] : 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{i-1} < n \rangle_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

と置くと, C'_i, C''_i はそれぞれ複体となり, $C_i = C''_i \oplus C'_i$ であり, 複体 (C_\bullet) は次の図式で表せる.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & C''_n & \xrightarrow{\partial''} & C''_{n-1} & \xrightarrow{\partial''} & \cdots & \xrightarrow{\partial''} & C''_2 & \xrightarrow{\partial''} & C''_1 & \xrightarrow{\partial''} & C''_0 & \longrightarrow & 0 & & (C''_\bullet) \\ & & & \searrow \delta & & \searrow \delta & & & & \searrow \delta & & \searrow \delta & & & & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{\partial'} & C'_{n-2} & \xrightarrow{\partial'} & \cdots & \xrightarrow{\partial'} & C'_1 & \xrightarrow{\partial'} & C'_0 & \longrightarrow & 0 & & (C'_\bullet) \end{array}$$

境界写像を具体的に書き下して, 主張を得る.

$$\partial'[k_0, k_1, \dots, k_i] = \sum_{j=0}^i (-1)^j [k_0, k_1, \dots, \widehat{k}_j, \dots, k_i], \quad 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_i < n$$

$$\delta[k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, n] = (-1)^i [k_0, k_1, \dots, k_{i-1}], \quad 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_{i-1} < n$$

$$\partial''[k_0, k_1, \dots, k_{i-1}, n] = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [k_0, k_1, \dots, \widehat{k}_j, \dots, k_{i-1}, n], \quad 0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_i < n$$

例 1.4.5. n 次元単体 Δ^n の境界 $\partial\Delta$ に含まれる面のみを考え, それから複体を作ると n 次元単体の生成するアーベル群は 0 でそれ以外は前例と変わらないから

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \binom{n+1}{n} \rightarrow \mathbb{Z} \binom{n+1}{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{Z} \binom{n+1}{2} \rightarrow \mathbb{Z} \binom{n+1}{1} \rightarrow 0 \quad (1.13)$$

となる. ホモロジーを計算すると, $(H_{n-1}, \dots, H_0) = (\mathbb{Z}, 0, \dots, 0, \mathbb{Z})$ となる.

1.5 有限生成アーベル群

可換な群のことをアーベル群または加群と言うのであった. ここでは, 有限生成アーベル群に関する基本事項をまとめておく.

行列の基本変形として次の操作を考える.

したがって、線形写像 $A: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ の表現行列が B であるような $\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n$ の基底が存在する事がわかる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{Z}^m \\ Q \downarrow \simeq & & \simeq \uparrow P \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z}^m \end{array}$$

証明するため、基本変形に関する簡単な事実から説明を始める. $A = (a_{i,j})$ として,

$$\alpha(A) = \min\{|a_{i,j}| : a_{i,j} \neq 0\}$$

と置く. $\alpha(A)$ が A のすべての要素を割り切れれば、上の基本変形で $\alpha(A)$ を小さくすることはできないので、上の基本変形で $\alpha(A)$ を小さくできれば行列 A に $\alpha(A)$ で割り切れない要素がある事になる. 実はこの逆が成立する.

補題 1.5.2. 行列 A に $\alpha(A)$ で割り切れない要素があると、上の基本変形で $\alpha(A)$ を小さくできる.

証明. $a_{i,j} = \alpha(A)$ として、 $a_{p,q}$ が $a_{i,j}$ で割り切れないとする.

$q = j$ のとき、即ち $a_{i,j} \nmid a_{p,j}$ のとき

$$\frac{a_{p,j}}{a_{i,j}} = q + \frac{r}{a_{i,j}}, \quad 0 < |r| < \alpha(A)$$

と書くと $a_{p,j} - qa_{i,j} = r$ であり対応する基本変形で $\alpha(A)$ は $|a_{i,j}|$ より小さくなる.

$p = i$ のとき、即ち $a_{i,j} \nmid a_{i,q}$ のときも同様である.

i 行の元も j 列の元もすべて $a_{i,j}$ で割り切れるが $a_{i,j} \nmid a_{p,q}$ なる $a_{p,q}$ があるとする. $a_{p,j} = la_{i,j}$ と書くと、行基本変形で次の行列にできる.

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,q} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & 0 & \cdots & a_{p,q} - la_{i,q} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} i \text{ 行} \\ p \text{ 行} \end{array}$$

ここで i 行に p 行を加えれば、 $a_{i,j}$ で割り切れない要素が i 行にある状況になり、前の論法が使えて証明が終わる. \square

定理 1.5.1 の証明. $m = 1$ または $n = 1$ のとき、まず示す. 基本変形では $\alpha(A)$ がより小さくならないと仮定して良い. $a_{1,1} = \alpha(A)$ としてよく、 $\alpha(A)$ が A の他の要素を割り切るから、基本変形で $a_{1,1}$ 以外の要素を 0 にすることができる.

A を $m \times n$ 行列として、 $(m-1) \times (n-1)$ 行列について定理が証明された仮定する.

行列 A に $\alpha(A)$ で割れない要素があれば基本変形で $\alpha(A)$ を小さくできるので, $\alpha(A)$ が A のすべての要素を割るとして良い. 行と列を入れ替えて $\alpha(A) = a_{1,1}$ と仮定して良い. 行基本変形で $a_{1,1}$ 以外の第 1 列の元は 0 にでき, また列基本変形で $a_{1,1}$ 以外の第 1 行の元は 0 にできる. よって第 1 行と第 1 列を除いた行列に対して帰納法の仮定を適用すれば証明は終わる.

以上は行列 A を (1.14) の形の行列に還元するアルゴリズムを与えるが, $b_1|b_2\cdots|b_t$ は確認していない. しかしながら $b_1 = \alpha(A)$ であり, 他の要素がすべて b_1 で割れることを思い起こせば直ちに従うことがわかる. \square

演習 1.5.3. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ を, 標準形に直せ. (解: 順に $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$)

補題 1.5.4. 階数 n の自由アーベル群の部分群は自由アーベル群でその階数は n 以下である.

証明. G を \mathbb{Z}^n の部分群とする. $n = 1$ のとき, G は \mathbb{Z} の部分群で, G の元で正かつ最小のものを a とすると $G = \{ka : k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$ である. $n - 1$ まで証明されたとして n のときを示す.

$$\pi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_n,$$

と書くと $\pi(G) = \{\pi(a) : a \in G\}$ は \mathbb{Z} の部分群になる. $\pi(G) = 0$ ならば, G は \mathbb{Z}^{n-1} の部分群と見ることができ帰納法の仮定より主張は成立するので, $\pi(G) \neq 0$ として示す.

$\pi(G)$ は \mathbb{Z} の部分群なので $\pi(G) = \langle \pi(b) \rangle$ を満たす $b \in G$ が存在する. 必要なら b の符号を変えて $\pi(b) > 0$ と仮定して良い. $H = G \cap (\mathbb{Z}^{n-1} \times 0)$ とおく. 任意の $a \in G$ に対し

$$a - bq = (a_1, \dots, a_n) - (b_1, \dots, b_n)q = (c_1, \dots, c_{n-1}, 0) \in H$$

を満たすように q をとれる. またこのような q は a に対して一意に定まる. H は \mathbb{Z}^{n-1} の部分群と見れるので, 帰納法の仮定より自由アーベル群である. よって基底 h_1, \dots, h_s ($s \leq n - 1$) をとって

$$a - bq = p_1 h_1 + \cdots + p_s h_s, \quad p_1, \dots, p_s \in \mathbb{Z}$$

と書ける. このような p_1, \dots, p_s は一意に定まる事にも注意. よって

$$a = bq + p_1 h_1 + \cdots + p_s h_s, \quad p_1, \dots, p_s \in \mathbb{Z}$$

となり, p_1, \dots, p_s, q の一意性より証明を完了する. \square

注意 1.5.5. 一般に集合 S に対し, S の元の整数係数の 1 次結合 (有限和に限る) 全体を S が生成する自由アーベル群といい $\langle S \rangle_{\mathbb{Z}}$ で表す. 自由アーベル群の部分群は自由アーベル群であることが知られている.

定理 1.5.6. 有限生成アーベル群は巡回群の直積である. 実は, 有限生成アーベル群 G は

$$\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/b_t, \quad b_i > 1$$

と同型である. なお $b_1|b_2|\cdots|b_t$ とできる.

r を G の階数 (rank) といい (b_1, \dots, b_t) を G の捩れ係数 (torsion coefficients) という. $G \simeq \mathbb{Z}^r$ のとき G は有限自由アーベル群という. 自由アーベル群は捩れのないアーベル群である. $G \simeq \mathbb{Z}/b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/b_t$ のとき G は捩れ (有限アーベル) 群という.

定理 1.5.6 の証明. 有限生成アーベル群 G の生成元を g_1, \dots, g_n とする. 準同型

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \rightarrow G, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1g_1 + \cdots + a_ng_n,$$

は全射であり, その核 $\text{Ker } \varphi$ は \mathbb{Z}^n の部分群であるから有限自由アーベル群である. したがって $\text{Ker } \varphi$ の生成元 h_1, \dots, h_m をとれば, 同型

$$\mathbb{Z}^m \rightarrow \text{Ker } \varphi, \quad (c_1, \dots, c_m) \mapsto c_1h_1 + \cdots + c_mh_m,$$

が定まる. $\text{Ker } \varphi \subset \mathbb{Z}^n$ なので, 次の完全列が得られた.

$$\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$$

ここに現れた準同型写像は $\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}^n$ の基底 (即ち生成元) を取り替えて (1.14) の形であるとして良い. すると

$$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{B} \mathbb{Z}^n \rightarrow G \rightarrow 0$$

なので主張が従う. □

非零定数倍が 0 であるようなアーベル群の非零元をそのアーベル群の捩れ (torsion) という. 捩れを持たない有限生成アーベル群は自由アーベル群である事がわかる.

定理 1.5.7. 各 C_k が有限生成自由アーベル群であるような複体 (C_\bullet, ∂) に対し, 次を満たす有限生成自由アーベル群 U_k, V_k, W_k が存在する.

$$C_k = U_k \oplus V_k \oplus W_k, \quad \partial V_k = 0, \quad \partial W_k = 0, \quad \partial U_k \subset W_{k-1}$$

で, 写像 $\partial: U_k \rightarrow W_{k-1}$ は次の行列で表される基底を持つ.

$$\mathcal{B}_k = \begin{pmatrix} b_1^{(k)} & & & \\ & b_2^{(k)} & & \\ & & \cdots & \\ & & & b_{t_k}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad b_i^{(k)} \geq 1, \quad b_1^{(k)}|b_2^{(k)}|\cdots|b_{t_k}^{(k)}$$

証明. $B_k = \text{Im}\{\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k\}$, $Z_k = \text{Ker}\{\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}\}$ と置く.

非零定数倍が B_k に入るような C_k の元全体を W_k と書く.

$$B_k \subset W_k \subset Z_k \subset C_k$$

C_k は自由アーベル群なので捩れは持たず W_k は Z_k の直和因子である.

T_k を H_k の捩れ部分アーベル群とすると, 合成 $Z_k \rightarrow H_k \rightarrow H_k/T_k$ の核は W_k なので $Z_k/W_k \simeq H_k/T_k$ は自由アーベル群. $c_1 + W_k, \dots, c_p + W_k$ が Z_k/W_k の基底で d_1, \dots, d_q が W_k の基底なら $c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_q$ は Z_k の基底で, c_1, \dots, c_p の生成する部分アーベル群を V_k とすると, $Z_k = V_k \oplus W_k$.

定理 1.5.1 より, $C_1 \rightarrow C_0$ に対して求める基底が取れることは明らかである.

$C_{k-1} \rightarrow C_{k-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ まで求める基底が取れたとする. これが $C_k \rightarrow C_{k-1}$ に延長される事を見よう. C_k の基底 e_1, \dots, e_n と C_{k-1} の基底 e'_1, \dots, e'_m を $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ が次で表されるようにとる.

$$\begin{pmatrix} b_1^{(k)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & b_{t_k}^{(k)} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 1, \quad b_1^{(k)} | b_2^{(k)} | \dots | b_{t_k}^{(k)}$$

このように取れるためには, B_{k-1} 上境界写像 $C_{k-1} \rightarrow C_{k-2}$ は零写像であるので C_{k-1} の基底のうち Z_{k-1} の基底を変換しても $C_{k-1} \rightarrow C_{k-2}$ の行列表示は変わらないと言う事実を用いている. すると

- (i) e_{t_k+1}, \dots, e_n は Z_k の基底
- (ii) e'_1, \dots, e'_{t_k} は W_{k-1} の基底
- (iii) $b_1^{(k)} e'_1, \dots, b_{t_k}^{(k)} e'_{t_k}$ は B_{k-1} の基底

(i): $c_p = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ とおくと $\partial c_p = \sum_{i=1}^{t_k} b_i^{(k)} a_i e_i$ なので $c_p \in Z_k \iff a_1 = \dots = a_{t_k} = 0$.

(iii): $\partial c_p \in \langle b_1^{(k)} e'_1, \dots, b_{t_k}^{(k)} e'_{t_k} \rangle$ で $b_1^{(k)} e'_1, \dots, b_{t_k}^{(k)} e'_{t_k}$ は 1 次独立なので (iii) は従う.

e_1, \dots, e_{t_k} の生成する C_k の部分加群を U_k とすると $C_k = U_k \oplus Z_k$ なので結果を得る. □

この定理は $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ が次の行列で表される様に C_k の基底を選べる事を主張している.

$$\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ B_k & O & O \end{pmatrix} : U_k \oplus V_k \oplus W_k \rightarrow U_{k-1} \oplus V_{k-1} \oplus W_{k-1}$$

この文脈ではホモロジー群も次のように表示される.

$$H_k = Z_k/B_k \simeq V_k \oplus (W_k/B_k) \simeq (Z_k/W_k) \oplus (W_k/B_k)$$

ここで Z_k/W_k は自由アーベル群で, $W_k/B_k = \mathbb{Z}/b_1^{(k)} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/b_{t_k}^{(k)}$

H_k の階数 (即ち, Z_k/W_k の階数) を複体 (C_\bullet) の k 次のベッチ数 (Betti number) と
言う. W_k/B_k を k 次の捩れ (torsion), $b_1^{(k)}, \dots, b_{t_k}^{(k)}$ で 1 でないものを k 次の捩れ係数
(torsion coefficients) とする.

注意 1.5.8. $b_1^{(k)} = \cdots = b_{s_k}^{(k)} = 1 < b_{s_k+1}^{(k)}$ と仮定する. 直和分解 $U_k = U'_k \oplus U''_k$,
 $W_{k-1} = W'_{k-1} \oplus W''_{k-1}$ をうまく選んで $\partial(U'_k) = W'_{k-1}$, $\partial(U''_k) \subset W''_{k-1}$ で $\partial : U'_k \rightarrow$
 W'_{k-1} が同型で, $U''_k \rightarrow W''_{k-1}$ が $b_{s_k+1}^{(k)}, \dots, b_{t_k}^{(k)}$ を成分とする対角行列 \mathcal{B}''_k で表せるとし
て良い. このとき,

$$C_k = U'_k \oplus U''_k \oplus V_k \oplus W'_k \oplus W''_k$$

で, 境界写像の行列表示は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}''_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : U'_k \oplus U''_k \oplus V_k \oplus W'_k \oplus W''_k \rightarrow U'_{k-1} \oplus U''_{k-1} \oplus V_{k-1} \oplus W'_{k-1} \oplus W''_{k-1}$$

$C'_k = U'_k \oplus W'_k$, $C''_k = U''_k \oplus V_k \oplus W''_k$ と置くと,

$$H_k = V_k \oplus (W''_{k-1}/\partial U''_k)$$

なので, 複体

$$C_\bullet : 0 \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

は, 完全列

$$C'_\bullet : 0 \rightarrow U'_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}} U'_{n-1} \oplus W'_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & Q \end{pmatrix}} \cdots \rightarrow U'_2 \oplus W'_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & Q \end{pmatrix}} U'_1 \oplus W'_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}} W'_0 \rightarrow 0$$

と複体

$$\begin{aligned} C''_\bullet : 0 \rightarrow U''_n \oplus V_n &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{B}''_n & 0 \end{pmatrix}} U''_{n-1} \oplus V_{n-1} \oplus W''_{n-1} &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}''_{n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdots \\ &\rightarrow U''_2 \oplus V_2 \oplus W''_2 &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}''_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}} U''_1 \oplus V_1 \oplus W''_1 &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}''_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} V_0 \oplus W''_0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

の直和に分解する. $H_k = H''_k$ である.

第 2 章

代数学から

前節では鎖の係数環として考えたのは整数環 \mathbb{Z} であった。本節では係数を一般の環 R で議論する。位相幾何学の文脈で重要となるのは R が \mathbb{Z} , 標数 2 の体 $\mathbb{Z}/2$, 有理数体 \mathbb{Q} , 実数体 \mathbb{R} 等である。複素多様体や代数幾何では複素数体 \mathbb{C} や関数環 \mathcal{O}_X , 更にはより一般に層を係数とする場合も重要になる。本章では, 一般の可換環を係数環として, ホモロジーを考える際に基礎となる知識を紹介する。

2.1 R 加群とその複体

2.1.1 R 加群とその射の定義

以下の議論では, R は可換環とするが, 本節では実は加法群である事しか使わない。以下, $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/2$ 等を想定すればよい。 R を係数環という。

以下, R 加群の概念を定義する。 R 加群の概念はベクトル空間を一般化した概念で, R が体のときは R 加群とは R 上のベクトル空間のことである。

定義 2.1.1 (R 加群). M が R 加群 (R -module) であるとは M に加法が定義されていて加法に関して可換群, すなわち

- $(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$
- $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$
- 零元 0 が存在して $m + 0 = 0 + m = m$
- 各 m に対し反元 $-m$ が存在して $m + (-m) = (-m) + m = 0$

を満たし, M の元に R の元を掛ける操作が定義されていて, 次を満たす時をいう。

- $1m = m, m \in M$

- $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m), r_1, r_2 \in R, m \in M$
- $r(m_1 + m_2) = r m_1 + r m_2, r \in R, m_1, m_2 \in M$
- $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m, r_1, r_2 \in R, m \in M$

R 加群を係数 R を省略して単に加群と呼ぶこともある。 \mathbb{Z} 加群はアーベル群と同じものである。

定義 2.1.2 (部分加群, 剰余加群). R 加群 M の部分集合 N が M の加法, 係数倍で R 加群になっているとき, N を M の部分 R 加群という. このとき M の元 m, m' に対し同値関係 \sim を次で定める.

$$m \sim m' \iff m - m' \in N$$

この同値関係による $m \in M$ の同値類を $[m]$ または \bar{m} で表す. このとき $\{[m] : m \in M\}$ に R 加群の構造が定まる.

- $[m] + [m'] = [m + m'], m, m' \in M.$
- $r[m] = [rm] \quad r \in R, m \in M.$

この R 加群を M/N で表す. M の N による剰余加群である.

例 2.1.3 (自由加群とその剰余加群). $M = R^n$ と置くと M は R 加群になる. 有限自由 R 加群である. より一般に, 集合 S に対し, S の元の間にかなる関係式もないとして

$$\left\langle \sum_i r_i s_i \text{ (有限和)} \mid r_i \in R, s_i \in S \right\rangle$$

の形の R 加群を自由 R 加群という. 自由加群の間の R 線形写像 $\varphi : N \rightarrow M$ を考えると, $M/\varphi(N)$ にも R 加群の構造が定まる.

R 加群に対しても射の概念及び射を用いて定義される概念を一般化することができる.

定義 2.1.4 (射). R 加群の間の写像 $\varphi : M \rightarrow N$ が射 (morphism) であるとは次を満たすときをいう.

- $\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2), m_1, m_2 \in M$
- $\varphi(rm) = r\varphi(m), r \in R, m \in M.$

射 φ が全単射であるとき, φ は同型写像であると言い, φ により M と N は同型であると言う.

R 加群 M, N 間の射 $\varphi : M \rightarrow N$ 全体も R 加群になる. $r \in R$ に対し $r\varphi : m \mapsto r\varphi(m)$, で r 倍を定められるからである. この加群を $\text{Hom}_R(M, N)$ で表す.

演習 2.1.5. $\text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \varphi \mapsto \varphi(1)$, は同型であることを示せ.

R 加群の射 $\varphi : M \rightarrow N$ に対し, その核 (kernel) $\text{Ker } \varphi$ と像 (image) $\text{Im } \varphi$ を次で定義する.

$$\text{Ker } \varphi = \{m \in M : \varphi(m) = 0\}, \quad \text{Im } \varphi = \varphi(M)$$

$\text{Ker } \varphi$ は M の部分 R 加群, $\text{Im } \alpha$ は N の部分 R 加群となる.

定義 2.1.6 (有限生成). R 加群 M が有限生成であるとは, M の有限個の元 m_1, \dots, m_n の R 係数線型結合によって M の任意の元が書き表されるときを言う. 特に, 唯一つの元で生成される R 加群を巡回加群 (cyclic module) という.

一般に R 加群 M の部分集合 S に対し, S の有限個の元の R 係数 1 次結合全体を S の生成する M の部分加群といい $\langle S \rangle_R$ (または係数環 R を省略して $\langle S \rangle$) で表す.

2.1.2 完全列

定義 2.1.7 (完全列). R 加群の射の列

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

が完全 (exact) であるとは $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$ を満たすときをいう. 列

$$\cdots \rightarrow A_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} A_k \xrightarrow{\alpha_k} A_{k-1} \rightarrow \cdots \quad (2.1)$$

が完全であるとは, 各 k について $\text{Im } \alpha_k = \text{Ker } \alpha_{k-1}$ を満たすときをいう.

例 2.1.8. N が R 加群 M の部分 R 加群ならば次は完全列である.

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

例 2.1.9. $K_k = \text{Ker}\{A_k \rightarrow A_{k-1}\}$ と置けば, 完全列 (2.1) は次の短完全列になる.

$$0 \rightarrow K_k \rightarrow A_k \rightarrow \text{Im } \alpha_k = K_{k-1} \rightarrow 0 \quad (\forall k)$$

定理 2.1.10 (分裂短完全列). R 加群の完全列 $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} P \rightarrow 0$ について次は同値.

- (1) R 準同型 $\alpha' : M \rightarrow N$ が存在して $\alpha' \circ \alpha$ が恒等写像.
- (2) R 準同型 $\beta' : P \rightarrow M$ が存在して $\beta \circ \beta'$ が恒等写像.
- (3) 次の図式を可換にする R 同型写像 $\theta : M \rightarrow N \oplus P$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & P \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow \theta & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \oplus P & \longrightarrow & P \longrightarrow 0
\end{array}$$

これらの同値な条件が成立するとき，完全列 $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} P \rightarrow 0$ は分裂する (split) と言い， α', β' を分裂射 (splitting morphism) と言う。

証明. (1) \implies (3): 写像 $\theta : M \rightarrow N \oplus P$ を $\theta(m) = (\alpha'(m), \beta(m))$ で定めるとこれは R 準同型.

θ の単射性. $\theta(m) = 0$ とすると $\alpha'(m) = 0, \beta(m) = 0$. $\alpha(n) = m$ なる $n \in N$ があるが, $0 = \alpha'(m) = \alpha'(\alpha(n)) = n$ なので $m = \alpha(n) = \alpha(0) = 0$ を得る.

θ の全射性. $(n, p) \in N \oplus P$ に対し β の全射性より $\beta(m) = p$ なる $m \in M$ がある. すると次の計算より θ は全射であることがわかる.

$$\begin{aligned}
\theta(m + \alpha(n - \alpha'(m))) &= (\alpha'(m + \alpha(n - \alpha'(m))), \beta(m + \alpha(n - \alpha'(m)))) \\
&= (\alpha'(m) + (n - \alpha'(m)), \beta(m)) = (n, p)
\end{aligned}$$

(3) \implies (1): $\theta : M \rightarrow N \oplus P$ に対し $\theta(m) = (\alpha'(m), \beta(m))$ と置けばよい.

(2) \iff (3) の証明では, $\theta' = \theta^{-1}$ として得られる次の図式について調べる.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & P \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \uparrow \theta' & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N \oplus P & \longrightarrow & P \longrightarrow 0
\end{array}$$

(2) \implies (3): $\theta' : N \oplus P \rightarrow M$ を $\theta'(n, p) = \alpha(n) + \beta'(p)$ と置く. これは R 準同型.

θ' の単射性: $\theta'(n, p) = 0$ と仮定して $(n, p) = (0, 0)$ を示す.

$$0 = \beta(0) = \beta(\theta'(n, p)) = \beta(\alpha(n) + \beta'(p)) = \beta(\beta'(p)) = p$$

で $0 = \theta'(n, 0) = \alpha(n) + \beta'(0) = \alpha(n)$ なので α の単射性より $n = 0$.

θ' の全射性: $m \in M$ に対し,

$$\beta(m - \beta'(\beta(m))) = \beta(m) - \beta(\beta'(\beta(m))) = \beta(m) - \beta(m) = 0$$

より $m - \beta'(\beta(m)) = \alpha(n)$ なる $n \in N$ が存在する. 全射性は次より従う.

$$\theta'(n, \beta(m)) = \alpha(n) + \beta'(\beta(m)) = m$$

図式の可換性の確認は簡単である.

(3) \implies (2): $\beta' : P \rightarrow M, \beta'(p) = \theta'(0, p)$ と置けばよい. □

非可換な群については, 条件 (1) は成立すれば $\text{Ker } \alpha'$ は正規部分群であり, (1) は直積の条件である. しかし条件 (2) が成立しても $\text{Im } \beta'$ は正規部分群とは限らず, (2) は半直積の条件で, (1) とは異なる条件である. (2) が成立するときは M は N と P の半直積

例 2.1.11. 次の \mathbb{Z} 加群の完全列は分裂しない.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$$

例 2.1.12 (余核). R 加群の射 $\varphi : M \rightarrow N$ に対して $\text{Coker } \varphi = N/\text{Im } \varphi$ で余核 (cokernel) を定める. この時次の完全列がある.

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow 0$$

これは次の 2 つの完全列に分解される.

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varphi \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} \text{Im } \varphi \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \text{Im } \varphi \rightarrow N \rightarrow \text{Coker } \varphi \rightarrow 0$$

演習 2.1.13. 一般に R 加群の完全列 $\cdots \rightarrow A_{k+1} \rightarrow A_k \xrightarrow{\alpha} A_{k-1} \rightarrow A_{k-2} \rightarrow \cdots$ に対し, 射 $\alpha' : A_{k-1} \rightarrow A_k$ が存在して

- $\alpha\alpha' = 1_{A_{k-1}}$ ならば, 完全列は $\cdots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow 0, 0 \rightarrow A_{k-2} \rightarrow \cdots$ に分解する.
- $\alpha'\alpha = 1_{A_k}$ ならば, 完全列は $\cdots \rightarrow A_k \rightarrow 0, 0 \rightarrow A_{k-1} \rightarrow \cdots$ に分解する.

定理 2.1.14 (スネークレンマ スネークレンマ). 次の R 加群の可換図式で, 横方向の列が完全列とする.

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 \end{array}$$

すると次の完全列がある.

$$\text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2 \rightarrow \text{Coker } f_3 \quad (2.2)$$

証明. 次の R 加群の可換図式があり, 縦横の直線上の列は完全である.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Ker } f_1 & \rightarrow & \text{Ker } f_2 & \rightarrow & \text{Ker } f_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{Coker } f_1 & \rightarrow & \text{Coker } f_2 & \rightarrow & \text{Coker } f_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Ker $f_i \rightarrow \text{Ker } f_{i+1}$, $i = 1, 2$, の定義 $a \in \text{Ker } f_i$ の A_{i+1} への像を a' と書くと $f_{i+1}(a')$ は $f_i(a) = 0$ の B_{i+1} への像なので $a' \in \text{Ker } f_{i+1}$.

Ker $f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker } f_3$ の完全性 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3$ の完全性より合成は零写像. $a_2 \in \text{Ker } f_2$ の $\text{Ker } f_3$ への像が 0 であるとする. a_2 の A_3 の像が 0 なので a_2 は A_1 の元 a_1 の像. a_1 の B_2 への像は $f_2(a_2) = 0$ なので $B_1 \rightarrow B_2$ の 0 の像であり $a_1 \in \text{Ker } f_1$ がわかる.

Coker $f_i \rightarrow \text{Coker } f_{i+1}$, $i = 1, 2$, の定義 $b, \bar{b} \in B_i$ が $\text{Coker } f_i$ の同じ元を表すとする. $b - \bar{b} = f_i(a)$ なる $a \in A_i$ が存在する. a の A_{i+1} への像を a' , b, \bar{b} の B_{i+1} への像を b', \bar{b}' で表すと $b - \bar{b} = f_i(a)$ の B_{i+1} への像は $b' - \bar{b}' = f_{i+1}(a')$ なので, b', \bar{b}' は同じ $\text{Coker } f_{i+1}$ の元を表す.

Coker $f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2 \rightarrow \text{Coker } f_3$ の完全性 $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3$ の完全性より合成は零写像. $b_2 \in B_2$ の $\text{Coker } f_3$ への像が 0 であるとする. b_2 の B_3 への像は f_3 の像 $f_3(a_3)$ である. a_3 の A_2 への持ち上げを a_2 とすると $b_2 - f_2(a_2)$ の B_3 への像は 0 なので $b_2 - f_2(a_2)$ はある $b_1 \in B_1$ の像である. b_1 の表す $\text{Coker } f_1$ の類を $\text{Coker } f_2$ に送ると, $b_2 - f_2(a_2)$ の表す類でありこれは b_2 の表す類でもある.

$\delta : \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1$ の定義 $\text{Ker } f_3$ の元 $a_3 \in A_3$ をとり, それを A_2 の元 a_2 に持ち上げると $f_2(a_2)$ の B_3 への像は 0 なので, $f_2(a_2)$ はある $b_1 \in B_1$ の像である. $B_1 \rightarrow B_2$ は単射なのでこのような b_1 は一意に定まっている. b_1 の $\text{Coker } f_1$ への像で $\delta : \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1$ を定める.

$\delta : \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1$ の定義が持ち上げ a_2 に依存しない事 元 $a_3 \in A_3$ を別の A_2 の元 a'_2 に持ち上げて B_2 への像が $f_2(a'_2)$ になる $b'_1 \in B_1$ をとる. $a_2 - a'_2$ は A_1 の元 a_1 の像なので $f_2(a_2) - f_2(a'_2)$ は $f_1(a_1) \in B_1$ の像である. 従って $f_2(a'_2) = f_2(a_2) + f_2(a'_2 - a_2)$ は $b'_1 = b_1 - f_1(a_1)$ の像である. よって b_1 と $b'_1 = b_1 - f_1(a_1)$ は $\text{Coker } f_1$ の同じ類を定めるので δ は a_3 の A_2 への持ち上げのとり方に依らずに定まっている.

Ker $f_2 \rightarrow \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1$ の完全性 $\text{Ker } f_2$ の元の B_2 への像は 0 であり, これは B_1 の零元の像である. よってこの $\text{Coker } f_1$ の像も零. $\text{Ker } f_3$ の元 $a_3 \in A_3$ をとり, $\delta(a_3) = 0$ とする. 前の記号 b_1 を用いると $b_1 = f_1(a_1)$ なる $a_1 \in A_1$ が存在するので, a_1 の A_2 への像を \bar{a}_2 とすれば $f_2(a_2) = f_2(\bar{a}_2)$. 従って $a_2 - \bar{a}_2 \in \text{Ker } f_2$. a_2 の A_3 への像は a_3 であったから $a_2 - \bar{a}_2$ の A_3 への像も a_3 で, a_3 は $\text{Ker } f_2$ の元の像であることがわかる.

Ker $f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2$ の完全性 $a_3 \in \text{Ker } f_3$ を A_2 に持ち上げると, その $\text{Coker } f_2$ への像は零である. B_1 の元 b_1 をとり $\text{Coker } f_2$ への像が 0 であったとする. b_1 の B_2 への像が f_2 の像となっているので, その元は $f_2(a_2)$ と書ける. 元 a_2 の B_3 への像は b_1 の B_3 への像でもあるので 0 であり, 元 a_2 の A_3 への像は $\text{Ker } f_3$ の元であることが分かる. □

蛇の補題^{*1}には次のような若干仮定を強めたものもある。

演習 2.1.15. 定理 2.1.14 で $A_1 \rightarrow A_2$ が単射かつ $B_2 \rightarrow B_3$ は全射とする。即ち次の R 加群の可換図式があり、横方向の列が完全列とする。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

すると完全列 (2.2) は次の完全列に伸びる。

$$0 \rightarrow \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1 \rightarrow \text{Coker } f_2 \rightarrow \text{Coker } f_3 \rightarrow 0$$

1980 年の映画 *It's My Turn* の最初に蛇の補題の証明シーンが収録されている。

定理 2.1.16 (5 補題). 次の可換図式で、横が完全列で、縦が中央を除いて同型ならば、中央の縦矢印も同型である。

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \rightarrow & A_2 & \rightarrow & A_3 & \rightarrow & A_4 & \rightarrow & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 & \rightarrow & B_4 & \rightarrow & B_5 \end{array}$$

証明. $A_3 \rightarrow B_3$ の単射性 $a_3 \in A_3$ をとり $f_3(a_3) = 0$ とする。 a_3 の A_4 への像 a_4 は $\text{Ker } f_4$ に入る。 f_4 は同型なので、 $a_4 = 0$ で、 $A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4$ の完全性より、 a_3 は A_2 の元 a_2 の像である。 仮定より a_2 の B_3 への像は 0 であるから $f_2(a_2)$ は $B_2 \rightarrow B_3$ の核で、 $B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3$ の完全性より $f_2(a_2)$ は B_1 のある元 b_1 の像である。 f_1 が全射なので $f_1(a_1) = b_1$ なる $a_1 \in A_1$ が存在する。 a_1 の A_3 への像が a_3 なので、これは零。

$A_3 \rightarrow B_3$ の全射性 $b_3 \in B_3$ をとる。 b_3 の B_4 への像を b_4 と書くと、 b_4 は $B_4 \rightarrow B_5$ の核の元。 $a_4 \in A_4$ を $f_4(a_4) = b_4$ なるようにとると f_5 の単射性より、 a_4 の A_5 への像も 0 。 $A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5$ の完全性より、 a_4 は A_3 のある元 a_3 の像。 $b_3 - f_3(a_3)$ は $B_3 \rightarrow B_4$ の核に入るの、 $B_2 \xrightarrow{\beta} B_3$ と書くと $b_3 - f_3(a_3) = \beta(b_2)$ なる B_2 の元 b_2 が存在する。 $f_2(a_2) = b_2$ なる $a_2 \in A_2$ をとる。 $A_2 \xrightarrow{\alpha} A_3$ と書くと、 $b_3 = f_3(a_3) + \beta(b_2) = f_3(a_3) + \beta(f_2(a_2)) = f_3(a_3) + f_3(\alpha(a_2)) = f_3(a_3 + \alpha(a_2)) \in \text{Im } f_3$. \square

^{*1} 完全列 (2.2) が長いから蛇の補題の名がある。上の証明中に現れた長い矢印の部分をとぐるを巻いた蛇に見立る事もある。

2.1.3 完全列の Hom とテンソル積

演習 2.1.17 ($\text{Hom}(M, -)$, $\text{Hom}(-, M)$ の左完全性). R 加群 M と R 加群の完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ があると次は完全列である.

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow \text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$$

定義 2.1.18 (テンソル積). R 加群 M, N に対し, そのテンソル積 $M \otimes_R N$ を次で定める.

$$\frac{\{\sum_i r_i(m_i \otimes n_i) \text{ (有限和)} : r_i \in R, m_i \in M, n_i \in N\}}{\left\langle \begin{array}{ll} m \otimes n + m' \otimes n - (m + m') \otimes n, & m, m' \in M \\ m \otimes n + m \otimes n' - m \otimes (n + n'), & n, n' \in N \\ r(m \otimes n) - (rm) \otimes n, r(m \otimes n) - m \otimes (rn), & r \in R \end{array} \right\rangle}$$

ここで $m \otimes n$ は単なる記号で, $\sum_i r_i(m_i \otimes n_i)$ (有限和) なる形の元が $M \otimes_R N$ の元で

$$m \otimes n + m' \otimes n = (m + m') \otimes n,$$

$$m \otimes n + m \otimes n' = m \otimes (n + n'),$$

$$r(m \otimes n) = (rm) \otimes n = m \otimes (rn)$$

なる計算が許される R 加群が $M \otimes_R N$ であると思えば良い.

記号の煩雑を避けるため, 文脈から R が明らかなき時はテンソル積 $M \otimes_R N$ を $M \otimes N$ と書く. $m \otimes n$ も本来は $m \otimes_R n$ と書くべきであるが, R を省略する事が多い.

例 2.1.19. R を R 加群と見ることが出来る. そのとき次の同型がある.

$$R \otimes_R M \simeq M, \quad r \otimes m \mapsto rm, \quad M \otimes_R R \simeq M, \quad m \otimes r \mapsto rm.$$

例 2.1.20. $M \otimes_R N, N \otimes_R M$ は異なる R 加群であるが, $m \otimes n \mapsto n \otimes m$ で定まる射で同型になる.

例 2.1.21. $R \rightarrow S$ を可換環の準同型とすると S は R 加群の構造を持つ. 従って R 加群 M に対し $R \otimes_R S$ は次で S 加群の構造を持つ.

$$S \times (M \otimes_R S) \rightarrow M \otimes_R S, \quad (s, m \otimes s') \mapsto s(m \otimes s') = m \otimes (ss')$$

例 2.1.22. R 加群の射 $\alpha : A \rightarrow B$ があれば, R 加群 M に対し, 誘導された射

$$R \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M, \quad a \otimes m \mapsto \alpha(a) \otimes m,$$

が存在する.

演習 2.1.23 ($- \otimes M$ の右完全性). R 加群 M と R 加群の完全列 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ があれば誘導される次の列は完全列である.

$$A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0$$

$A \rightarrow B$ が単射であっても, 誘導される $A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M$ は単射とは限らない. 実際, $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \alpha(n) = 2n$, は単射であるが, 誘導される写像

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2, \quad 1 \otimes \bar{1} \mapsto \alpha(1) \otimes \bar{1} = (2 \cdot 1) \otimes \bar{1} = 1 \otimes (2 \cdot \bar{1}) = 0$$

は単射でない. 但し $\bar{1}$ は 1 の表す $\mathbb{Z}/2$ の元.

2.1.4 複体のホモロジー

R を可換環とする. R 加群の複体 (complex) とは, 2 回合成が 0 となる加群の準同型の列

$$(C_\bullet) \quad \cdots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \rightarrow \cdots$$

の事を言う. C_k を k 鎖加群 ∂_k の核を k 輪体加群といい Z_k で表す, ∂_{k+1} の像を k 境界加群といい B_k で表す. $H_k = Z_k/B_k$ をホモロジー加群という. 次の完全列がある.

$$0 \rightarrow Z_k \rightarrow C_k \rightarrow B_{k-1} \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow B_k \rightarrow Z_k \rightarrow H_k \rightarrow 0$$

以後 C_k は自由加群と仮定する. すると B_k, Z_k ともに C_k の部分加群であるから自由加群である.

$$H_k(C_\bullet) = H_k = \frac{Z_k}{B_k} = \frac{\text{Ker}\{C_k \rightarrow C_{k-1}\}}{\text{Im}\{C_{k+1} \rightarrow C_k\}}$$

注意 2.1.24. 複体 (C_\bullet) に対し番号を k ずらして得られる複体を $(C_\bullet)[k]$ と書く事がある. $(C_\bullet[k])_n = C_{n+k}$ である.

注意 2.1.25 (オイラー数). R が体のとき, C_k, Z_k, B_k, H_k はベクトル空間である. C_k が有限次元ベクトル空間なら, Z_k, B_k もそうである. C_k, Z_k, B_k, H_k の次元をそれぞれ c_k, z_k, b_k, h_k で表すと,

$$c_k = z_k + b_{k-1} \quad z_k = b_k + h_k$$

となり c_k が有限個を除いて 0 ならば

$$\sum_k (-1)^k c_k = \sum_k (-1)^k (z_k + b_{k-1}) = \sum_k (-1)^k (z_k - b_k) = \sum_k (-1)^k h_k$$

を得る. この値を複体のオイラー数という.

$R = \mathbb{Z}$ のときを考える. C_k は有限自由 \mathbb{Z} 加群であるとする. 補題 1.5.4 より, C_k の部分加群である B_k, Z_k も有限自由 \mathbb{Z} 加群である. 従って, 上の議論は次元を階数と読み替えれば $R = \mathbb{Z}$ の場合もそのまま通用する.

注意 2.1.26. 複体 (C_\bullet) に対し, 輪体加群 Z_\bullet , 境界加群 B_\bullet も複体と見ることが出来る. 境界写像は零写像なので $H_k(B_\bullet) = B_k, H_k(Z_\bullet) = Z_k$ となる.

$$\begin{aligned} (B_\bullet): \quad & \cdots \xrightarrow{0} B_{k+1} \xrightarrow{0} B_k \xrightarrow{0} B_{k-1} \xrightarrow{0} \cdots \\ (Z_\bullet): \quad & \cdots \xrightarrow{0} Z_{k+1} \xrightarrow{0} Z_k \xrightarrow{0} Z_{k-1} \xrightarrow{0} \cdots \end{aligned}$$

注意 2.1.27. 複体 (C_\bullet) に対し $C^k = C_{-k}$ とおくと, 順に番号が増加する複体

$$(C^\bullet): \quad \cdots \longrightarrow C^{k-1} \longrightarrow C^k \longrightarrow C^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

を得る. このとき同様に

$$Z^k = \text{Ker}\{C^k \rightarrow C^{k+1}\} \quad B^k = \text{Im}\{C^{k-1} \rightarrow C^k\}$$

とおけばコホモロジー群^{*2}を $H^k = Z^k/B^k$ で定める事ができる. 次の完全列がある.

$$0 \rightarrow B^k \rightarrow C^k \rightarrow B^{k+1} \rightarrow 0 \quad 0 \rightarrow B^k \rightarrow Z^k \rightarrow H^k \rightarrow 0$$

演習 2.1.28. 前章で計算した複体は, $R = \mathbb{Z}$ であった. それらを $R = \mathbb{Z}/2$ としたら, ホモロジー群はどうなるかを調べよ.

2.1.5 鎖写像と鎖ホモトピー

定義 2.1.29 (鎖写像 (chain map)). $f_\bullet : (C_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet)$ が, 鎖写像であるとは, $f_k : C_k \rightarrow C'_k$ で, $\partial'_k \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k$ を満たすもの. 鎖写像 $f : (C_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet)$ は, 輪体の間の写像 $Z_k \rightarrow Z'_k$ と境界の間の写像 $B_k \rightarrow B'_k$ を誘導するので, ホモロジー群の間の写像 $f_{*,k} : H_k \rightarrow H'_k$ を誘導する.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1} \longrightarrow \cdots & & 0 \rightarrow B_k \rightarrow Z_k \rightarrow H_k \rightarrow 0 \\ & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & C'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & C'_{k-1} \longrightarrow \cdots & & 0 \rightarrow B'_k \rightarrow Z'_k \rightarrow H'_k \rightarrow 0 \end{array}$$

定理 2.1.30. 鎖写像 $f_\bullet : (C_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet)$, $g_\bullet : (C'_\bullet) \rightarrow (C''_\bullet)$ に対し $(g \circ f)_{k,*} = g_{k,*} \circ f_{k,*}$.

^{*2} 番号が順にあがる複体のときはホモロジーと言わずコホモロジーというのが習慣である.

証明. 次の可換図式を追い回せばよい.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & B_k & \rightarrow & Z_k & \rightarrow & H_k & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & B'_k & \rightarrow & Z'_k & \rightarrow & H'_k & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & B''_k & \rightarrow & Z''_k & \rightarrow & H''_k & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

□

定義 2.1.31 (鎖ホモトピー). 2つの鎖写像 $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ が鎖ホモトープとは次を満たす $h_k : C_k \rightarrow C'_{k+1}$ が存在するときを言う. h_k を鎖ホモトピー (chain homotopy) という.

$$g_k - f_k = \partial'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial_k$$

このとき次の図式がある.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \partial_{k+2} & & \partial_{k+1} & & \partial_k & & \partial_{k-1} & & \partial_{k-2} \\
 & & \rightarrow & C_{k+1} & \rightarrow & C_k & \rightarrow & C_{k-1} & \rightarrow & C_{k-2} & \rightarrow \\
 h_{k+1} & \swarrow & & \parallel & \swarrow & \parallel & \swarrow & \parallel & \swarrow & \parallel & \swarrow \\
 & & \partial'_{k+2} & & \partial'_{k+1} & & \partial'_k & & \partial'_{k-1} & & \partial'_{k-2} \\
 & & \rightarrow & C'_{k+1} & \rightarrow & C'_k & \rightarrow & C'_{k-1} & \rightarrow & C'_{k-2} & \rightarrow \\
 & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \partial'_{k+2} & & \partial'_{k+1} & & \partial'_k & & \partial'_{k-1} & & \partial'_{k-2}
 \end{array}$$

鎖写像 f_\bullet, g_\bullet が鎖ホモトープであれば, f_\bullet, g_\bullet はホモロジー群に同じ射を誘導する. 即ち $f_{*,k} = g_{*,k}$. 実際 $z_k \in Z_k$ に対し,

$$g_k(z_k) - f_k(z_k) = \partial'_{k+1} \circ h_k(z_k) + h_{k-1} \circ \partial_k(z_k) = \partial'_{k+1} \circ h_k(z_k) \in B'_k$$

2.2 自由分解と Tor, Ext

2.2.1 自由分解

R 加群 A に対し自由加群 F_k 達の作る完全列

$$\cdots \rightarrow F_k \rightarrow F_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

を A の自由分解と言う. これをしばしば省略して $F_\bullet \rightarrow A$ と書く.

任意の R 加群 A に対し A の自由分解が存在する.

演習 2.2.1. 自由 R 加群 F は次の性質を持つ. 任意の全射準同型 $M \xrightarrow{\phi} N$ と任意の準同型 $F \xrightarrow{\varphi} N$ に対し, $\varphi = \phi \circ \bar{\varphi}$ を満たすような準同型 $F \xrightarrow{\bar{\varphi}} M$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F & & \\
 & \swarrow & \downarrow & & \\
 M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

解: S を F の生成系とすると, F は自由加群なので, S の元の間に関係式はない. よって $s \in S$ に対し $\varphi(s) = \phi \circ \bar{\varphi}(s)$ を満たす $\bar{\varphi}(s)$ を指定すれば $\bar{\varphi}$ が定まる. (定義 2.2.10 も参照)

定理 2.2.2. 自由加群の複体

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{k+1}} F_k \xrightarrow{\varphi_k} F_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \rightarrow 0$$

と完全列

$$\cdots \xrightarrow{\phi_{k+1}} G_k \xrightarrow{\phi_k} G_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} \cdots \rightarrow G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_0 \rightarrow B \rightarrow 0$$

があれば, $A = \text{Coker } \varphi_1$ と置いて, 任意の射 $f: A \rightarrow B$ は鎖写像 $f_\bullet: F_\bullet \rightarrow G_\bullet$ から誘導される. 更に射 f_\bullet は f から鎖ホモトピーを除いて一意に定まる.

証明. 次の可換図式を満たすような縦の射が構成できる.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & F_k & \xrightarrow{\varphi_k} & \cdots & \xrightarrow{\varphi_2} & F_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_k & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\
 \cdots & \longrightarrow & G_k & \xrightarrow{\phi_k} & \cdots & \xrightarrow{\phi_2} & G_1 & \xrightarrow{\phi_1} & G_0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

f_0 の存在は演習 2.2.1 より従う. f_{k-1} まで存在するとすると f_{k-1} は $\text{Ker } \varphi_{k-1} \rightarrow \text{Ker } \phi_{k-1}$ を誘導するので次の図式を考えれば, 演習 2.2.1 より f_k の存在がわかる.

$$\begin{array}{ccc}
 F_k & \longrightarrow & \text{Ker } \varphi_{k-1} \\
 \downarrow f_k & & \searrow \\
 G_k & \longrightarrow & \text{Im } \phi_k = \text{Ker } \phi_{k-1}
 \end{array}$$

$f_\bullet, g_\bullet: F_\bullet \rightarrow G_\bullet$ が共に $f: A \rightarrow B$ を誘導するとする. f_\bullet と g_\bullet が鎖ホモトピーである事を示す. 即ち次を満たす $h_k: F_k \rightarrow G_{k+1}$ が存在する事を示せば良い.

$$f_k - g_k = \phi_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \varphi_k$$

$\alpha_k = f_k - g_k$ と置く. α_\bullet が誘導する写像 $\text{Coker } \varphi_0 \rightarrow \text{Coker } \phi_0$ は零写像 $A \rightarrow B$ なので $F_0 \rightarrow G_0 \rightarrow \text{Coker } \phi_0$ は零写像. よって $\text{Im } \alpha_0 \subset \text{Ker}\{G_0 \rightarrow \text{Coker } \phi_0\}$ より $h_0: F_0 \rightarrow G_1$ が存在して $\alpha_0 = \phi_1 \circ h_0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_{k+1} & \longrightarrow & F_k & \xrightarrow{\varphi_k} & F_{k-1} & \longrightarrow & \text{Coker } \varphi_k \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 G_{k+1} & \xrightarrow{\phi_{k+1}} & G_k & \xrightarrow{\phi_k} & G_{k-1} & \longrightarrow & \text{Coker } \phi_k \longrightarrow 0
 \end{array}$$

h_{k-1} まで構成できたとする. $\phi_k \circ h_{k-1} \circ \varphi_k = \alpha_{k-1} \circ \varphi_k = \phi_k \circ \alpha_k$ より

$$\phi_k \circ (h_{k-1} \circ \varphi_k - \alpha_k) = 0$$

$\text{Ker } \phi_k = \text{Im } \phi_{k+1}$ より $h_k : F_k \rightarrow G_{k+1}$ が存在して

$$h_{k-1} \circ \varphi_k - \alpha_k = \phi_{k+1} \circ h_k$$

を満たすようにできる. これで鎖ホモトピーの存在が証明できた. \square

2.2.2 Tor と Ext

R 加群 M の自由分解 $F_\bullet \rightarrow M$ をとる.

定義 2.2.3 (Tor). R 加群 N に対し, 次の複体を取る.

$$\cdots \rightarrow F_k \otimes_R N \rightarrow F_{k-1} \otimes_R N \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \otimes_R N \rightarrow F_0 \otimes_R N \rightarrow 0$$

この k 次のホモロジー群を $\text{Tor}_k^R(M, N)$ (または $\text{Tor}_k(M, N)$) と書く.

$$\text{Tor}_k^R(M, N) = \frac{\text{Ker}\{F_k \otimes_R N \rightarrow F_{k+1} \otimes_R N\}}{\text{Im}\{F_{k-1} \otimes_R N \rightarrow F_k \otimes_R N\}}$$

これは自由分解のとり方によらず, R 加群 M, N のみで定まる. よって, M が自由加群ならば $\text{Tor}_k^R(M, N) = 0$ ($k \geq 1$) である.

M の自由分解とり方に依らず $\text{Tor}_k^R(M, N)$ が決まることを示そう. F_\bullet, G_\bullet を M の自由分解とすると, 定理 2.2.2 より, 恒等写像 $M \rightarrow M$ は複体の射 $F_\bullet \rightarrow G_\bullet$ に持ち上がり, 互いに鎖ホモトピーである. これに $-\otimes_R N$ を施すと $F_\bullet \otimes_R N \rightarrow G_\bullet \otimes_R N$ は鎖ホモトピーであることがわかる.

定義 2.2.4 (Ext). R 加群 N に対し, 次の複体を取る.

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(F_0, N) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(F_1, N) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(F_k, N) \rightarrow \cdots$$

この k 次のコホモロジー群を $\text{Ext}_R^k(M, N)$ (または $\text{Ext}^k(M, N)$) と書く.

$$\text{Ext}_R^k(M, N) = \frac{\text{Ker}\{\text{Hom}_R(F_k, N) \rightarrow \text{Hom}_R(F_{k+1}, N)\}}{\text{Im}\{\text{Hom}_R(F_{k-1}, N) \rightarrow \text{Hom}_R(F_k, N)\}}$$

これは自由分解のとり方によらず, R 加群 A, M のみで定まる. よって, A が自由加群ならば $\text{Ext}_R^k(A, M) = 0$ ($k \geq 1$) である.

M の自由分解とり方に依らず $\text{Ext}_R^k(M, N)$ が決まることを示そう. F_\bullet, G_\bullet を M の自由分解とすると, 定理 2.2.2 より, 恒等写像の列 $M \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow M$ は複体の射 $F_\bullet \rightarrow G_\bullet \rightarrow F_\bullet \rightarrow G_\bullet$ に持ち上がる. これの 2 回合成は恒等写像に鎖ホモトープであるので, これに $\text{Hom}_R(-, N)$ を施して得られる列

$$\text{Hom}_R(F_\bullet, N) \leftarrow \text{Hom}_R(G_\bullet, N) \leftarrow \text{Hom}_R(F_\bullet, N) \leftarrow \text{Hom}_R(G_\bullet, N)$$

の 2 回合成は恒等写像にホモトープである. よって

$$H^k(\text{Hom}_R(F_\bullet, N)) \simeq H^k(\text{Hom}_R(G_\bullet, N))$$

がわかる.

定理 2.2.5. R 加群 M と R 加群の完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対し, 次の完全列がある.

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow \text{Tor}_k^R(A, M) \rightarrow \text{Tor}_k^R(B, M) \rightarrow \text{Tor}_k^R(C, M) \\ &\rightarrow \text{Tor}_{k-1}^R(A, M) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow \text{Tor}_1^R(A, M) \rightarrow \text{Tor}_1^R(B, M) \rightarrow \text{Tor}_1^R(C, M) \\ &\rightarrow A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

R 加群 M と R 加群の完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対し, 次の完全列がある.

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow \text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M) \\ &\rightarrow \text{Ext}_R^1(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, M) \\ &\rightarrow \cdots \\ &\rightarrow \text{Ext}_R^k(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^k(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^k(A, M) \\ &\rightarrow \text{Ext}_R^{k+1}(C, M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

証明. A, B, C の自由分解 $F_\bullet, G_\bullet, H_\bullet$ を次の可換図式を満たすようにとる.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & H_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & H_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

$A_\bullet = F_\bullet \otimes_R M, B_\bullet = G_\bullet \otimes_R M, C_\bullet = H_\bullet \otimes_R M$ において, 鎖写像のつくる完全列

$$0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$$

から, 次の図式があり横は完全列である.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{A_k}{\text{Im}\{A_{k+1} \rightarrow A_k\}} & \longrightarrow & \frac{B_k}{\text{Im}\{B_{k+1} \rightarrow B_k\}} & \longrightarrow & \frac{C_k}{\text{Im}\{C_{k+1} \rightarrow C_k\}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker}\{A_{k-1} \rightarrow A_{k-2}\} & \longrightarrow & \text{Ker}\{B_{k-1} \rightarrow B_{k-2}\} & \longrightarrow & \text{Ker}\{C_{k-1} \rightarrow C_{k-2}\}
\end{array}$$

これに蛇の補題を適用すれば、次の長完全列を得る。

$$\cdots \rightarrow H_k(A_\bullet) \rightarrow H_k(B_\bullet) \rightarrow H_k(C_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(A_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(B_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C_\bullet) \rightarrow \cdots$$

これが求める Tor の長完全列である。Ext の長完全列も同様なので ($- \otimes_R M$ の代わりに、 $\text{Hom}_R(-, M)$ を考え、番号が増える複体となるのでホモロジーでなくコホモロジーとなるが) 詳細は省略する。 \square

例 2.2.6. p を自然数とする。 \mathbb{Z} 加群 $A = \mathbb{Z}/p$ に対し、 \mathbb{Z} 加群としての自由分解

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow 0$$

に、 $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p$, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ を施せば、次の複体を得る。

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/p \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}/p \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

ここで $\times p$ を単に p と書いている。よって

$$\text{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p & k=0 \\ \mathbb{Z}/p & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases} \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^k(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \mathbb{Z}/p & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

演習 2.2.7. p, q を互いに素な自然数とする。 \mathbb{Z} 加群 $\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/q$ に対し

$\text{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/q) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を示せ。 p, q が互いに素でないときは、 p と q の最大公約数を d として $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/q) \simeq \mathbb{Z}/d$ となることを示せ。

複体 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ に $\otimes \mathbb{Z}/q$ して $0 \rightarrow \mathbb{Z}/q \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/q \rightarrow 0$ を得るがこれのホモロジー群を計算すれば $\text{Tor}_1(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/q) = \text{Ker } p \simeq \mathbb{Z}/d$ 。

演習 2.2.8. \mathbb{Z} 加群 $\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/q$ に対し次を示せ。但し d は p と q の最大公約数。

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^k(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/q) = \begin{cases} \mathbb{Z}/d & (k = 0, 1) \\ 0 & (k \geq 2) \end{cases}$$

完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$ より、

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q) \rightarrow 0$$

のホモロジーを計算すればよいが, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q) \cong \mathbb{Z}/q$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$, なので, 要は $\mathbb{Z}/q \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/q$ の核と余核である. 核を求めよう. $p = p_1d$, $q = q_1d$ と書くと p_1 と q_1 は互いに素である. $pa = qb$ とすると $p_1a = q_1b$ であり a は q_1 の倍数である. よって \mathbb{Z}/q の中で q_1 の生成する群が核であり, \mathbb{Z}/d と同型である. 群の位数の比較より, 余核は d 個の元からなり 1 元生成なので \mathbb{Z}/d に同型. 余核については次の様に考えても良い. $pa \equiv c \pmod{q}$ ならば $c = ap + bq$ と書けるので c は d の倍数. $ap + bq = d$ なる a, b が存在するので, $ap \equiv d \pmod{q}$. よって $\text{Im } p$ は d から生成されるので \mathbb{Z}/q を $\langle d \rangle$ で割ったものが余核で $0, 1, \dots, d-1$ の像が余核の元を表す.

演習 2.2.9. \mathbb{Z} 加群 M が有限生成であれば, \mathbb{Z} 加群 N が何であっても $k \geq 2$ のとき

$$\text{Tor}_k^{\mathbb{Z}}(M, N) = 0, \quad \text{Ext}_k^{\mathbb{Z}}(M, N) = 0.$$

解: 定理 1.5.6 より有限生成 \mathbb{Z} 加群はたかだか長さ 1 の自由分解を持つので明らか.

2.2.3 加群の拡大

余談であるが, $\text{Ext}_R^1(A, B)$ を加群の拡大との関係を少し説明しよう. まず射影加群を定義する.

定義 2.2.10 (射影加群). R 加群 P が射影的 (projective) である (または P が射影 R 加群である) とは, $M \rightarrow N$ が全射ならば $\text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N)$ も全射である時をいう.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

自由加群は射影加群である. 自由加群の生成元の N への像を M に持ち上げれば M への射になるからである.

R 加群 A, B に対し, 完全列 $0 \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow 0$ を A の B に依る拡大 (extension) とする. F_{\bullet} を A の自由分解とすると, 次の可換図式を構成できる.

$$\begin{array}{ccccccccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & F_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & M & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

合成 $F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow B$ は $F_2 \rightarrow 0 \rightarrow B$ と一致するので 0 であり, 射 $F_1 \rightarrow B$ は余輪体とな

るので, この射 $F_1 \rightarrow B$ は

$$\frac{\text{Ker}\{\text{Hom}_R(F_1, B) \rightarrow \text{Hom}_R(F_2, B)\}}{\text{Im}\{\text{Hom}_R(F_0, B) \rightarrow \text{Hom}_R(F_1, B)\}} = \text{Ext}_R^1(A, B) \quad (2.3)$$

の元を表す. $K = \text{Ker } \varphi_0$ と置いて次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & F_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\phi} & M & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

すると $F_0 \oplus B \rightarrow M$, $(f, b) \mapsto \gamma(f) + \phi(b)$, は全射で, 次の完全列が構成できる.

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{(\alpha, -\beta)} F_0 \oplus B \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

逆に (2.3) の元を与えて, それを表現する $\beta : F_1 \rightarrow B$ を取れば (2.4) で拡大 $0 \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow 0$ が定まる.

2つの拡大 $0 \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow 0, 0 \rightarrow B \rightarrow M' \rightarrow A \rightarrow 0$ が同値というのを次の可換図式の存在で定義する.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & M & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

2つの拡大 $0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} A \rightarrow 0, 0 \rightarrow B' \xrightarrow{\beta'} M' \xrightarrow{\alpha'} A \rightarrow 0$ に対しそれらの和を次で定める.

$$0 \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow A \rightarrow 0, \quad b \mapsto (\beta(b), 0) = (0, \beta'(b)), \quad (m, m') \mapsto \alpha(m) = \alpha'(m')$$

但し

$$Y = X / \{(\beta(b), 0) - (0, \beta'(b)) : b \in B\}, \quad X = \{(m, m') \in M \oplus M' : \alpha(m) = \alpha'(m')\}.$$

拡大の和の同値類は同値類の代表元の選び方に依らず定まるので, 拡大の同値類全体に群の構造が定義される. 自明な拡大 $0 \rightarrow B \rightarrow A \oplus B \rightarrow A \rightarrow 0$ はこの和の単位元であり, $0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} A \rightarrow 0$ の逆元は $0 \rightarrow B \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{-\alpha} A \rightarrow 0$ である. A の B のよる拡大と $\text{Ext}_R^1(A, B)$ の元は 1 対 1 に対応している.

完全列 $0 \rightarrow B \rightarrow M_k \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow A \rightarrow 0$ を, A の B による k 次の拡大という. F_\bullet を A の自由分解とすると, 次の可換図式を構成できる.

$$\begin{array}{ccccccccccc} F_{k+1} & \longrightarrow & F_k & \longrightarrow & F_{k-1} & \xrightarrow{\varphi_{k-1}} & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & M_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

余輪体 $F_k \rightarrow B$ は

$$\frac{\text{Ker}\{\text{Hom}_R(F_k, B) \rightarrow \text{Hom}_R(F_{k+1}, B)\}}{\text{Im}\{\text{Hom}_R(F_{k-1}, B) \rightarrow \text{Hom}_R(F_k, B)\}} = \text{Ext}_R^k(A, B) \quad (2.5)$$

の元を表す. 逆に (2.5) の元を与えて, それを表現する $\beta_k : F_k \rightarrow B_k = B$ をとる. $\beta_i : F_i \rightarrow B_i$ があるとして $K_i = \text{Ker } \varphi_{i-1}$, $\alpha_i : K_i \rightarrow F_{i-1}$ を包含写像と置いて, 次で M_i を定める.

$$0 \rightarrow K_i \xrightarrow{(\alpha_i, -\beta_i)} F_{i-1} \oplus B_i \rightarrow M_i \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

自然な写像 $B_i \rightarrow M_i$ の余核として B_{i-1} を定めると, 完全列 $0 \rightarrow B_i \rightarrow M_i \rightarrow B_{i-1} \rightarrow 0$ があり, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_i & \xrightarrow{\alpha} & F_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & K_{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta_i & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta_{i-1} \\ 0 & \longrightarrow & B_i & \xrightarrow{\phi} & M_i & \longrightarrow & B_{i-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

これで次の可換図式が構成でき A の B による k 次拡大が構成できた.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & F_{k-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & M_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

第3章

複体とホモロジー群

本章では、まずホモロジー群が持つ基本性質であるホモトピー不変性も示す。続いて、単体分割から構成した複体、特異単体を基に構成した複体、胞体分割から構成した複体等を紹介し、ホモロジー群をとるとそれらが本質的には同じものであることを紹介する。続いて計算上の技巧である、係数変更、コホモロジー、Künneth 公式を紹介して、応用としてポアンカレ双対性を紹介する。

3.1 単体複体

定義 3.1.1. k 次元標準単体 $\Delta = \Delta^k$ を次で定める。

$$\Delta^k = \{(t_0, t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k : t_i \geq 0, t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1\} \quad (3.1)$$

連続写像 $\varphi : \Delta^k \rightarrow X$ を、特異 k 単体という。連続写像 $\varphi : \Delta^k \rightarrow X$ が、同相写像 $\Delta^k \rightarrow \sigma = \varphi(\Delta)$ を定めるとき $\varphi : \Delta \rightarrow X$ (またはその像 σ) を X の k 単体^{*1}という。標準単体 Δ の頂点 $(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ の φ による像を v_0, v_1, \dots, v_k とするとき、 $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ で σ の事を表す。標準単体の面の φ による像を、単体の面という。

標準開 k 単体 $\overset{\circ}{\Delta} = \overset{\circ}{\Delta}^k$ を次で定める。

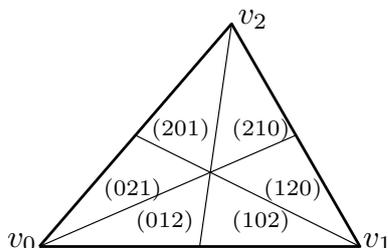
$$\overset{\circ}{\Delta}^k = \{(t_0, t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^n : t_i > 0, t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1\}$$

$\overset{\circ}{\sigma} = \varphi(\overset{\circ}{\Delta})$ を開単体という。

例 3.1.2 (重心細分). k 単体 $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ を考える。 $\{0, 1, \dots, k\}$ の置換 σ に対し $[v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}] = \varepsilon(\sigma)[v_0, v_1, \dots, v_k]$ であった。 $[v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(i)}]$ の重心

^{*1} 正則 k 単体と呼んでもよいであろう。

を $b_{\sigma,i}$ と書く. k 単体 $\Delta_\sigma = [b_{\sigma,0}, b_{\sigma,1}, \dots, b_{\sigma,k}]$ の向きは, $[v_{\sigma(0)}, v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}]$ と一致するので, $\varepsilon(\sigma)$ と定める. k 単体 Δ を $(k+1)!$ 個の小単体 Δ_σ (σ は置換) に分ける事を重心細分という.



定義 3.1.3 (単体分割). X の単体分割 (simplicial decomposition) とは, 次を満たす単体の族 $\{\varphi_\lambda : \Delta_\lambda \rightarrow X\}$ の事を言う.

- $X = \bigcup_\lambda \overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ (互いに素な和集合) ただし $\sigma_\lambda = \varphi_\lambda(\Delta_\lambda)$.
- Δ_λ の面 $\Delta_{\lambda'}$ に対しても $\varphi_{\lambda'} : \Delta_{\lambda'} \rightarrow X$ があり, $\varphi_\lambda(\Delta_{\lambda'}) = \sigma_{\lambda'}$.
- 任意の λ, λ' に対し $\sigma_\lambda \cap \sigma_{\lambda'} = \sigma_\mu$ なる μ が存在する.
- σ_λ を面とする σ_μ は有限個である.

定義 3.1.4 (鎖). k 単体の R 係数 1 次結合を k 単体鎖という. 特異 k 単体の R 係数 1 次結合を特異 k 単体鎖という. $\xi = \sum \xi_\lambda \varphi_\lambda$ に対し, その台 $|\xi|$ を次で定める.

$$|\xi| = \bigcup_{\xi_\lambda \neq 0} \text{Im } \varphi_\lambda = \bigcup_{\xi_\lambda \neq 0} \sigma_\lambda$$

定理 3.1.5 (特異単体複体). 特異 k 単体 $\varphi : \Delta^k \rightarrow X$ の境界を $\partial\varphi = \sum_{i=0}^k (-1)^i \varphi_i$ で定める. ただし

$$\varphi_i(t_0, \dots, \widehat{t}_i, \dots, t_k) = \varphi_i(t_0, \dots, t_{i-1}, \overset{i}{0}, t_{i+1}, \dots, t_k)$$

特異 k 単体全体を $C_k(X)$ で表すと, ここで定めた境界作用素について, これは複体をなす.

証明. 特異鎖の群 $C_\bullet(X)$ が複体をなすことを証明するのだが, これは本質的に補題 1.1.7 の証明と同じであるが, 記号が異なるので以下説明する.

特異 1 単体 $[(t_0, t_1) \mapsto \varphi(t_0, t_1)]$ の境界は, 次式で表される.

$$\partial[(t_0, t_1) \mapsto \varphi(t_0, t_1)] = [t_1 \mapsto \varphi(0, t_1)] - [t_0 \mapsto \varphi(t_0, 0)]$$

特異 2 単体 $[(t_0, t_1, t_2) \mapsto \varphi(t_0, t_1, t_2)]$ の境界は

$$[(t_1, t_2) \mapsto \varphi(0, t_1, t_2)] - [(t_0, t_2) \mapsto \varphi(t_0, 0, t_2)] + [(t_0, t_1) \mapsto \varphi(t_0, t_1, 0)]$$

であるから

$$\begin{aligned} \partial\partial[(t_0, t_1, t_2) \mapsto \varphi(t_0, t_1, t_2)] &= \partial \begin{pmatrix} [(t_1, t_2) \mapsto \varphi(0, t_1, t_2)] \\ -[(t_0, t_2) \mapsto \varphi(t_0, 0, t_2)] \\ +[(t_0, t_1) \mapsto \varphi(t_0, t_1, 0)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial[(t_1, t_2) \mapsto \varphi(0, t_1, t_2)] \\ -\partial[(t_0, t_2) \mapsto \varphi(t_0, 0, t_2)] \\ +\partial[(t_0, t_1) \mapsto \varphi(t_0, t_1, 0)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [t_1 \mapsto \varphi(0, t_1, 0)] - [t_2 \mapsto \varphi(0, 0, t_2)] \\ -[t_0 \mapsto \varphi(t_0, 0, 0)] + [t_2 \mapsto \varphi(0, 0, t_2)] \\ +[t_0 \mapsto \varphi(t_0, 0, 0)] - [t_1 \mapsto \varphi(0, t_1, 0)] \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

特異 $k+1$ 単体 $[(t_0, t_1, \dots, t_{k+1}) \mapsto \varphi(t_0, t_1, \dots, t_{k+1})]$ の境界は

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i [(t_0, \dots, \widehat{t}_i, \dots, t_{k+1}) \mapsto \varphi(t_0, t_1, \dots, \overset{i}{0}, \dots, t_{k+1})]$$

である。これに更に境界射 ∂ を施すと

$$\begin{aligned} &\sum_{j<i}^k (-1)^{i+j} [(t_0, \dots, \widehat{t}_j, \dots, \widehat{t}_i, \dots, t_{k+1}) \mapsto \varphi(t_0, t_1, \dots, \overset{j}{0}, \dots, \overset{i}{0}, \dots, t_{k+1})] \\ &+ \sum_{i<j}^k (-1)^{i+j-1} [(t_0, \dots, \widehat{t}_i, \dots, \widehat{t}_j, \dots, t_{k+1}) \mapsto \varphi(t_0, t_1, \dots, \overset{i}{0}, \dots, \overset{j}{0}, \dots, t_{k+1})] \end{aligned}$$

で、これは 0 となる。よって特異鎖群 $C_\bullet(X)$ は複体をなす事がわかった。 \square

補題 1.1.7 をこのように読み替える事により、単体に関する式から特異単体の式を得ることができる。以後このような読み替えをしばしば行う。

定義 3.1.6 (特異ホモロジー群). 特異単体の鎖のなす複体のホモロジー群を特異ホモロジー群といい $H_k(X)$ で表す。係数環 R を明示したいときは $H_k(X; R)$ と書く。 Y を X の部分位相空間とする。 $C_k(Y)$ は自然に $C_k(X)$ の部分群であり $C_k(X)/C_k(Y)$ を複体と見てホモロジーをとることができる。このホモロジー群を $H_k(X, Y)$ と書く。係数環 R を明示したいときは $H_k(X, Y; R)$ と書く。

例 3.1.7 (単体複体). X の単体分割 T があるとき、 T の k 単体の R 係数 1 次結合全体を $C_k^T(X)$ と書けば、境界作用素 $\partial_k : C_k^T(X) \rightarrow C_{k-1}^T(X)$ が定まり、

$$C_\bullet^T(X) \quad \cdots \rightarrow C_{k+1}^T(X) \rightarrow C_k^T(X) \rightarrow C_{k-1}^T(X) \rightarrow \cdots$$

が定まる。これを単体複体 (simplicial complex) という。 $H_k^T(X) = H_k(C_\bullet^T(X))$ と書く。単体 $[v_0, v_1, \dots, v_k]$ に対する境界準同型は次のようになる。

$$\partial[v_0, v_1, \dots, v_k] = \sum_{j=0}^k (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k]$$

注意 3.1.8. X に単体分割 T があるとき, 自然な写像 $i_k : C_k^T(X) \rightarrow C_k(X)$ は単体的ホモロジー群と特異ホモロジー群の同型を誘導する. この事実は, 定理 3.3.4 で示す. 例えば, c を位相空間 X の弧状連結成分の個数とすると $H_0^T(X) = H_0(X) = R^{\oplus c}$ である.

3.2 ホモトピーと鎖写像

3.2.1 ホモトピー

定義 3.2.1 (ホモトピー). 位相空間 X から位相空間 Y への写像のホモトピー (homotopy) とは, 連続写像 $F : X \times I \rightarrow Y$ のことである. 但し $I = [0, 1]$ である. 写像 $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ に対し $f_0(x) = F(x, 0), f_1(x) = F(x, 1) (x \in X)$ となるホモトピー F が存在するとき, f_0 と f_1 はホモトピック (homotopic) であるという.

f と g がホモトピックであるという関係は, X から Y へのすべての連続写像全体の同値関係であり, $f \simeq g$ と書く. その同値類を写像のホモトピー類 (homotopy class) という. 写像 f のホモトピー類を $[f]$ で表す. X から Y への連続写像のホモトピー同値類の集合を $[X, Y]$ で表す.

定義 3.2.2 (空間のホモトピー型). 連続写像 $f : X_1 \rightarrow X_2$ がホモトピー同値 (homotopy equivalence) とは, ある連続写像 $g : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して, $f \circ g \simeq 1_{X_1}, g \circ f \simeq 1_{X_2}$ となるときをいう. このとき g を f のホモトピー逆写像 (homotopy inverse) という. またこのとき $X_1 \sim X_2$ と書き, X_1 と X_2 は同じホモトピー型を持つ (same homotopy type) という.

定義 3.2.3 (可縮空間). 1 点にホモトピー同値な空間を可縮 (contractible) な空間, 又はその空間は可縮であるという.

命題 3.2.4. 位相空間 X が可縮であることと, 恒等写像 $1_X : X \rightarrow X$ が定値写像 $r : X \rightarrow X, x \mapsto x_0$, とホモトピー同値である事は同値である.

証明. 演習問題

□

例 3.2.5. $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, t) \mapsto tx$, はユークリッド空間 \mathbb{R}^n の恒等写像と定値写像を結ぶホモトピーである. 特にユークリッド空間 \mathbb{R}^n は可縮である.

例 3.2.6. Δ^k は可縮である. (3.1) の記号のもとで点 $(1, 0, \dots, 0)$ を P と書くと,

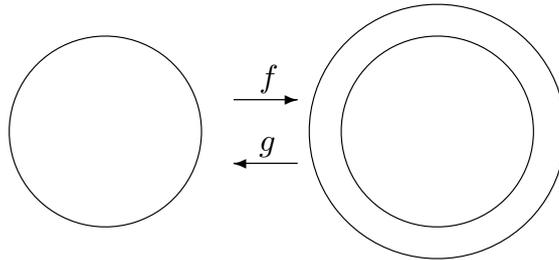
$$\Delta^k \times I \rightarrow \Delta^k, (t_0, t_1, \dots, t_k) \times t \mapsto (1 + t(t_0 - 1), tt_1, \dots, tt_k)$$

は点 P に潰すホモトピーである。

例 3.2.7. 自然な埋込 $\iota: S^1 \rightarrow S^1 \times I, \theta \mapsto (\theta, 0)$, と自然な射影 $p: S^1 \times I \rightarrow S^1$ を考える. $p \circ \iota = 1_{S^1}$ で

$$F: (S^1 \times I) \times I \rightarrow S^1 \times I, \quad (\theta, s, t) \mapsto (\theta, st)$$

は $\iota \circ p$ と $1_{S^1 \times I}$ を結ぶホモトピーなので, $S^1 \times I \sim S^1$ である.



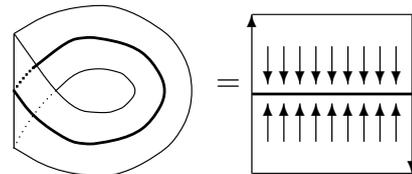
例 3.2.8. 自然な埋込 $\iota: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と写像 $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto x/\|x\|$, を考える. $r \circ \iota = 1_{S^{n-1}}$ で

$$F: (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (x, t) \mapsto tx - (1-t) \frac{x}{\|x\|}$$

は, $\iota \circ r$ と $1_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ をつなぐホモトピーである. よって $S^{n-1} \sim \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

例 3.2.9. メビウスの帯 M と S^1 も同じホモトピー型をもつ. $g: S^1 \rightarrow M$ を中心軸に埋め込む写像, $f: M \rightarrow S^1$ を中心軸に潰す写像とすればよい.

$M = \frac{[-1,1] \times [-1,1]}{(1,y) \sim (-1,-y)}, S^1 = \frac{[-1,1]}{-1 \sim 1}$ とおけば $f: M \rightarrow S^1$ は $(x,y) \mapsto x$ で表され $g: S^1 \rightarrow M$ は $x \mapsto (x,0)$ で表される. $f \circ g = 1_{S^1}$ であり, $F: M \times I \rightarrow M, (x,y) \times t \mapsto (x,ty)$ は $g \circ f$ と 1_M をつなぐホモトピーである.



3.2.2 鎖写像

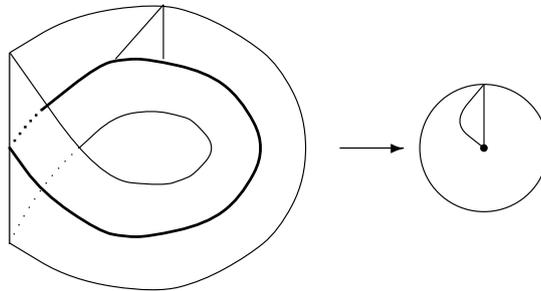
例 3.2.10. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は特異鎖複体の間の鎖写像 $C_\bullet(X) \rightarrow C_\bullet(Y)$ を定める.

例 3.2.11. X の単体分割 T, Y の単体分割 U があるとき $f: X \rightarrow Y$ が単体写像とは f が T の単体を U の単体に写すときをいう. 単体写像 f は鎖写像 $C_\bullet^T(X) \rightarrow C_\bullet^U(Y)$ を定める. 実際, 単体 $[v_0, \dots, v_k]$ に対し $f([v_0, \dots, v_k]) = [f(v_0), \dots, f(v_k)]$ と定める. ただし $f(v_i)$ 達の間と同じものがあれば, 右辺は 0 とみなす. 単体写像 f については,

$f \circ \partial = \partial \circ f$ である。実際,

$$\begin{aligned} f(\partial[v_0, \dots, v_k]) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i f([v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k]) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_k)] = \partial[f(v_0), \dots, f(v_k)] \end{aligned}$$

例 3.2.12. M をメビウスの帯とし, 中心の P^1 を 1 点につぶす写像 $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. このとき π が単体写像であるような M と \mathbb{R}^2 の単体分割は存在しない.



ホモトピーの計算をするため, 積の境界に関する補題を用意する.

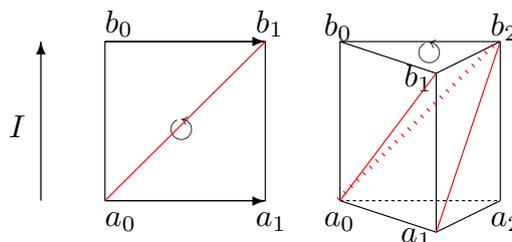
補題 3.2.13. $\partial(\Delta^k \times [0, 1]) = (\partial\Delta^k \times [0, 1]) + (-1)^k [\Delta^k \times (\partial[0, 1])]$

これは次の帰結である.

補題 3.2.14. 向きを考慮した次の単体分割がある.

$$\Delta^k \times I = (-1)^k \sum_{i=0}^k (-1)^i [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k]$$

証明. $k = 1, 2$ の場合は次図を睨んで了解されたい.



では, 一般の k に対し証明しよう. $\mathbf{p} = (t_0 a_0 + t_1 a_1 + \dots + t_k a_k, u) \in \Delta^k \times I$ に対し

$$\begin{aligned} 0 \leq u \leq t_k & \quad \text{ならば} \quad \mathbf{p} \in [a_0, \dots, a_k, b_k] \\ t_k \leq u \leq t_{k-1} + t_k & \quad \text{ならば} \quad \mathbf{p} \in [a_0, \dots, a_{k-1}, b_{k-1}, b_k] \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

補題 3.2.13 の証明. 前補題を用いて, 境界を計算すればよい. $k = 1$ の場合は易しい.

$$\begin{aligned}
\partial(\Delta^1 \times I) &= -\partial([a_0 b_0 b_1] - [a_0 a_1 b_1]) \\
&= -[b_0 b_1] + [a_0 b_1] - [a_0 b_0] + [a_1 b_1] - [a_0 b_1] + [a_0 a_1] \\
&= -[b_0 b_1] - [a_0 b_0] + [a_1 b_1] + [a_0 a_1] \\
&= [a_1 b_1] - [a_0 b_0] + [a_0 a_1] - [b_0 b_1] \\
&= (\partial\Delta^1) \times I - \Delta^1 \times (\partial I)
\end{aligned}$$

$k = 2$ の場合の証明は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\partial(\Delta^2 \times I) &= \partial([a_0 b_0 b_1 b_2] - [a_0 a_1 b_1 b_2] + [a_0 a_1 a_2 b_2]) \\
&= ([b_0 b_1 b_2] - [a_1 b_1 b_2] + [a_1 a_2 b_2]) - ([a_0 b_1 b_2] - [a_0 b_1 b_2] + [a_0 a_2 b_2]) \\
&\quad + ([a_0 b_0 b_2] - [a_0 a_1 b_2] + [a_0 a_1 a_2]) - ([a_0 b_0 b_1] - [a_0 a_1 b_1] + [a_0 a_1 a_2]) \\
&= ([b_0 b_1 b_2] - [a_1 b_1 b_2] + [a_1 a_2 b_2]) - [a_0 a_2 b_2] + [a_0 b_0 b_2] - ([a_0 b_0 b_1] - [a_0 a_1 b_1] + [a_0 a_1 a_2]) \\
&= -[a_1 b_1 b_2] + [a_1 a_2 b_2] - [a_0 a_2 b_2] + [a_0 b_0 b_2] - [a_0 b_0 b_1] + [a_0 a_1 b_1] + ([b_0 b_1 b_2] - [a_0 a_1 a_2]) \\
&= (\partial\Delta^2) \times I + \Delta^2 \times (\partial I)
\end{aligned}$$

一般の k で証明をしよう.

$$\begin{aligned}
\partial(\Delta^k \times I) &= (-1)^k \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial[a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} [a_0, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] + \sum_{j=i}^k (-1)^{i+j+1} [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b_j}, \dots, b_k] \right) \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} [a_0, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] + \sum_{j=i+1}^k (-1)^{i+j+1} [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b_j}, \dots, b_k] \right) \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{1+i+j} [a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b_j}, \dots, b_k] + \sum_{i=j+1}^k (-1)^{i+j} [a_0, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_i, b_i, \dots, b_k] \right) \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j [a_0, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_k] \times I + (-1)^k ([b_0, b_1, \dots, b_k] - [a_0, a_1, \dots, a_k]) \\
&= [\partial\Delta \times I] + (-1)^k (\Delta^k \times \partial[0, 1])
\end{aligned}$$

4 番目の等号は足し算の順序の入れ替えであるが, 次の表を見ればわかる.

$i \setminus j$	0	1	2	...	k
0	*	1	-1	...	$(-1)^{k+1}$
1	-1	*	1	...	$(-1)^{k+2}$
2	1	-1	*	...	$(-1)^{k+3}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
k	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$	$(-1)^{k+2}$...	*

□

例 3.2.15 (ホモトピーと鎖ホモトピー). 単体写像 $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ がホモトピー $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ で結べていてこれらが単体写像であれば k 単体 Δ に対し,

$$\begin{aligned}\partial(F(\Delta \times [0, 1])) &= F(\partial(\Delta \times [0, 1])) \\ &= F(\partial\Delta \times [0, 1] + (-1)^k \Delta \times \partial[0, 1]) \\ &= F(\partial\Delta \times [0, 1]) + (-1)^k (f_1(\Delta) - f_0(\Delta))\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}f_1(\Delta) - f_0(\Delta) &= (-1)^k [\partial(F(\Delta \times [0, 1])) - F(\partial\Delta \times [0, 1])] \\ &= \partial((-1)^k F(\Delta \times [0, 1])) + (-1)^{k-1} F(\partial\Delta \times [0, 1])\end{aligned}$$

となり $h_k(\Delta) = (-1)^k F(\Delta \times [0, 1])$ は鎖ホモトピーを定める. よって f_0 と f_1 は同じ写像 $H_k(X) \rightarrow H_k(Y)$ を誘導する.

定理 3.2.16 (ホモロジー群のホモトピー不変性). X と Y が同じホモトピー型をもてば, $H_k(X) \simeq H_k(Y)$ である.

証明. X と Y が同じホモトピー型をもつので, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ があって $f \circ g$ 及び $g \circ f$ は恒等写像にホモトープである. よって特異ホモロジー群の写像 $(f \circ g)_*, (g \circ f)_*$ が恒等写像であり, $f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y), g_* : H_k(Y) \rightarrow H_k(X)$ が互いに逆写像であることがわかる. \square

特に, X が可縮ならば,

$$H_k(X) = \begin{cases} R & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

X に単体分割 K があれば, 各単体を重心細分することにより, 単体分割 K の重心細分を考える事ができる.

定理 3.2.17. X の単体分割 K とその重心細分 K' に対し $H_k(C_\bullet(K)) = H_k(C_\bullet(K'))$.

証明. 鎖写像 $i_k : C_k(K) \rightarrow C_k(K')$ を自然な埋め込みとする. すなわち $i_0(v) = v, i_1([v_0, v_1]) = [v_0, b] + [b, v_1] = [b, \partial[v_0, v_1]]$ (b は単体 $[v_0, v_1]$ の重心) とする. $k \geq 1$ に対し K の k 単体 Δ の重心を b とすると, i_k を次で定める.

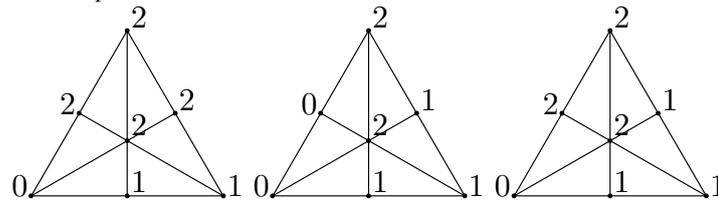
$$i_k(\Delta) = [b, i_{k-1}(\partial\Delta)]$$

i_k は鎖写像である. 実際

$$\begin{aligned}\partial_k \circ i_k(\Delta) &= \partial_k [b, i_{k-1} \partial_k \Delta] \\ &= i_{k-1} \partial_k \Delta - [b, \partial_{k-1} i_{k-1} \partial_k \Delta]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i_{k-1} \partial_k \Delta - [b, i_{k-1} \partial_{k-1} \partial_k \Delta] \quad k \text{ による帰納法の仮定} \\
 &= i_{k-1} \partial_k \Delta
 \end{aligned}$$

K' の頂点はある K の k 単体 Δ の面 $[v_0, v_1, \dots, v_p]$ の重心に対応するが, この K' の頂点に頂点 v_0, v_1, \dots, v_p のいずれかを対応させる.



これによって K' の単体は K の単体に移り, 写像 $j : C_\bullet(K') \rightarrow C_\bullet(K)$ が誘導される. K の k 単体 $\Delta = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ の重心 b が v_k に移るとする. Δ 内の K' の k 単体 Δ' は b を頂点として Δ のある $k-1$ 次元面 $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ 内の $(k-1)$ 単体 S 上の錐体であるとする. S の各頂点に $v_j, j \neq i$, を対応させるので,

- $i \neq k$ なら $(k-1)$ 単体 S の各頂点に $v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k$ を対応させる事になり Δ' の像は k 単体でない.
- $i = k$ なら $(k-1)$ 単体 S の各頂点に v_0, \dots, v_{k-1} が対応していて, 帰納法の仮定より, 唯一つの S だけが各頂点に v_0, \dots, v_{k-1} すべてが割り当てられている. よって各頂点に v_0, \dots, v_k すべてが割り当てられている K' の k 単体が唯一つだけある.

構成より $j \circ i : C_\bullet(K) \rightarrow C_\bullet(K)$ は恒等写像である.

$$i_* \circ j_* : H_*(C'_\bullet) \rightarrow H_*(C_\bullet) \rightarrow H_*(C'_\bullet)$$

が恒等写像である事を示す. j の構成より, ある輪体の Δ の重心細分に現れる単体の係数は同じでなければならず Z'_k に $i_k \circ j_k$ を制限すると恒等写像である事がわかる. \square

多面体 X に対し単体分割を定め単体複体を考えるとそのホモロジー群は単体分割によらずに定まる. そのホモロジー群を $H_k(X; R)$ または $H_k(X)$ で表す.

3.3 複体の完全列

3.3.1 複体の完全列

$A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet$ を複体とする. 鎖写像のつくる完全列

$$0 \rightarrow A_k \rightarrow B_k \rightarrow C_k \rightarrow 0 \quad (\forall k)$$

があるとき, 複体の完全列

$$0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$$

があるという. 複体の完全列があれば, 次の図式があり横は完全列である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & A_k & & B_k & & C_k & & 0 \\
 & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} \\
 \text{Im}\{A_{k+1} \rightarrow A_k\} & & \text{Im}\{B_{k+1} \rightarrow B_k\} & & \text{Im}\{C_{k+1} \rightarrow C_k\} & & & \\
 \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & & \\
 0 \rightarrow \text{Ker}\{A_{k-1} \rightarrow A_{k-2}\} & \longrightarrow & \text{Ker}\{B_{k-1} \rightarrow B_{k-2}\} & \longrightarrow & \text{Ker}\{C_{k-1} \rightarrow C_{k-2}\} & & &
 \end{array}$$

これに蛇の補題を適用すれば、次のホモロジー群の完全列を得る。

$$\dots \rightarrow H_k(A_\bullet) \rightarrow H_k(B_\bullet) \rightarrow H_k(C_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(A_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(B_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C_\bullet) \rightarrow \dots$$

3.3.2 マイヤー・ビートルスの完全列

$X = X_1 \cup X_2$ として、 X の単体分割 T で $X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ の単体分割を誘導するものを取る。単体分割 T が定める、 $X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2$ の単体分割はそれぞれの複体を定める。それを $C_\bullet(X), C_\bullet(X_1), C_\bullet(X_2), C_\bullet(X_1 \cap X_2)$ と書くと、完全列

$$0 \rightarrow C_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow C_k(X_1) \oplus C_k(X_2) \rightarrow C_k(X) \rightarrow 0$$

がある。ここで $C_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow C_k(X_1) \oplus C_k(X_2)$ は $\sigma \mapsto (\sigma, -\sigma)$ で定まる写像である。これは鎖写像であり、次のホモロジー群の完全列を定める。

$$\dots \rightarrow H_k^T(X_1 \cap X_2) \rightarrow H_k^T(X_1) \oplus H_k^T(X_2) \rightarrow H_k^T(X) \rightarrow H_{k-1}^T(X_1 \cap X_2) \rightarrow \dots$$

これをマイヤー・ビートルス (Mayer-Vietoris) の完全列という。

3.3.3 複体の対

複体 (C_\bullet) の部分複体

$$(C'_\bullet) \quad \dots \rightarrow C'_{k+1} \rightarrow C'_k \rightarrow C'_{k-1} \rightarrow \dots$$

があるとき、 $\bar{C}_k = C_k/C'_k$ とおくと、次の完全列がある。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow C'_{k+1} & \rightarrow & C_{k+1} & \rightarrow & \bar{C}_{k+1} & \rightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow C'_k & \rightarrow & C_k & \rightarrow & \bar{C}_k & \rightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 \rightarrow C'_{k-1} & \rightarrow & C_{k-1} & \rightarrow & \bar{C}_{k-1} & \rightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & &
 \end{array}$$

$C'_\bullet, \bar{C}_\bullet$ に輪体加群, 境界加群を同様に定めると, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccccc} C'_k/B'_k & \longrightarrow & C_k/B_k & \longrightarrow & \bar{C}_k/\bar{B}_k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z'_{k-1} & \longrightarrow & Z_{k-1} & \longrightarrow & \bar{Z}_{k-1} \end{array}$$

この可換図式に蛇の補題を適用すると, 次の完全列を得る.

$$\cdots \rightarrow H'_k \rightarrow H_k \rightarrow \bar{H}_k \rightarrow H'_{k-1} \rightarrow H_{k-1} \rightarrow \bar{H}_{k-1} \rightarrow \cdots$$

定義 3.3.1 (位相空間対のホモロジー). $Y \subset X$ なる位相空間対 (X, Y) に対し, X の特異単体複体を $C_\bullet(X)$, Y の特異単体複体を $C_\bullet(Y)$ とする. $C_k(X)/C_k(Y)$ は自由加群である. Y と両立する X の単体分割 T をとり, X の単体分割 T の作る単体複体を $C_\bullet^T(X)$ とし, Y の単体分割 $T \cap Y$ の作る単体複体を $C_\bullet^T(Y)$ とする. $C_k^T(X)/C_k^T(Y)$ も自由加群である. 自然な準同型 $i_k : C_k^T(X) \rightarrow C_k(X)$ は次の可換図式を定める.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & C_k^T(Y) & \rightarrow & C_k^T(X) & \rightarrow & C_k^T(X)/C_k^T(Y) & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & C_k(Y) & \rightarrow & C_k(X) & \rightarrow & C_k(X)/C_k(Y) & \rightarrow 0 \end{array}$$

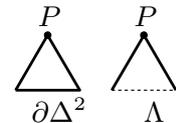
複体 $(C_\bullet^T(X)/C_\bullet^T(Y))$ のホモロジー群を $H_k^T(X, Y)$ と書き, 複体 $(C_\bullet(X)/C_\bullet(Y))$ のホモロジー群を $H_k(X, Y)$ と書く. 次の完全列の存在がわかる.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{k+1}^T(X, Y) &\rightarrow H_k^T(Y) \rightarrow H_k^T(X) \rightarrow H_k^T(X, Y) \rightarrow H_{k-1}^T(Y) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_{k+1}(X, Y) &\rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, Y) \rightarrow H_{k-1}(Y) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

演習 3.3.2. $Z \subset Y \subset X$ なる位相空間 3 対 (X, Y, Z) に対し, (X, Y, Z) と両立する単体分割をとれば, 次の完全列が存在する.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_k^T(Y, Z) &\rightarrow H_k^T(X, Z) \rightarrow H_k^T(X, Y) \rightarrow H_{k-1}^T(Y, Z) \rightarrow H_{k-1}^T(X, Z) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_k(Y, Z) &\rightarrow H_k(X, Z) \rightarrow H_k(X, Y) \rightarrow H_{k-1}(Y, Z) \rightarrow H_{k-1}(X, Z) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

注意 3.3.3. Δ^n の境界 $\partial\Delta^n$ は $n+1$ 個の $(n-1)$ 単体の和集合である. Δ^n の頂点 P を含む $(n-1)$ 次元面は n 個あるがその n 個の和集合を Λ と書く. Δ^n も Λ も 1 点 P に可縮なので $H_k(\Delta^n) \simeq H_k(P) \simeq H_k(\Lambda)$ で $k \neq 0$ ならば零である. 完全列



$$H_k(\Delta^n) \rightarrow H_k(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{k-1}(\Lambda) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(\Lambda) \rightarrow H_0(\Delta^n) \rightarrow H_0(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow 0$$

より $H_k(\Delta^n, \Lambda) = 0$ がわかる. 3 対 $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ の完全列

$$\cdots \rightarrow H_k(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow H_{k-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_{k-1}(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow \cdots$$

より $H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \simeq H_{k-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ がわかる. $H_{k-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \simeq H_{k-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ より*2, $H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \simeq H_{k-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ がわかる.

$$H_k(\Delta^0) = \begin{cases} R & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \quad \text{より} \quad H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \begin{cases} R & (k=n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases} \quad \text{を得る.}$$

3.3.4 単体複体と特異ホモロジー群

定理 3.3.4. $H_k^T(X, Y) = H_k(X, Y)$. 特に $Y = \emptyset$ とすれば $H_k^T(X) = H_k(X)$.

証明. まず, T を有限単体分割として示す. すると, $C_k^T(X)$ は有限生成自由加群であり, 有限個の $C_k^T(X)$ を除いて 0 である. $(C_\bullet^T(X)/C_\bullet^T(Y))$ の階数の総和を s として, s に関する帰納法で示す. $s = 1$ のときは, ある n が存在して

$$(C_k^T(X)/C_k^T(Y)) = \begin{cases} R & (k=n) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$$

となる. $n = 0$ の時は $(X, Y) = (*, \emptyset)$ であり主張は明らかである. $n > 0$ のときは, 複体 $(C_\bullet^T(X)/C_\bullet^T(Y))$ は $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ から作る複体であり, 注意 3.3.3 より, 主張は従う. $X \supset Z \supset Y$ とし, (X, Z, Y) に両立する単体分割 T を取る. $(C_\bullet^T(X), C_\bullet^T(Y))$ の階数の総和が s のとき, $(C_\bullet^T(X)/C_\bullet^T(Z))$ および $(C_\bullet^T(Z)/C_\bullet^T(Y))$ の階数の総和は s より小さいので, 帰納法の仮定が使える. よって, 次の完全列に 5 補題を適用すれば (X, Y) に関する主張を得る.

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{k+1}^T(X, Z) & \rightarrow & H_k^T(Z, Y) & \rightarrow & H_k^T(X, Y) & \rightarrow & H_k^T(X, Z) & \rightarrow & H_{k-1}^T(Z, Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{k+1}(X, Z) & \rightarrow & H_k(Z, Y) & \rightarrow & H_k(X, Y) & \rightarrow & H_k(X, Z) & \rightarrow & H_{k-1}(Z, Y) \end{array}$$

次に T が無限単体分割とする. $i_{*,k} : H_k^T(X, Y) \rightarrow H_k(X, Y)$ が全単射である事を示す. $\alpha \in H_k(X, Y)$ がその台に載る有限部分単体分割 S を取る. $|S|$ をその台とすると, α は $H_k(|S|, Y) \rightarrow H_k(X, Y)$ の像に含まれる. よって $H_k^T(X, Y) \rightarrow H_k(X, Y)$ は全射である.

*2 厳密には切除同型を使うがここでは詳細は略す. 特異ホモロジー群についてのマイヤー・ビートルス完全系列も切除同型を用いて証明できる.

$$\begin{array}{ccc} H_k^T(|S|, Y) & \longrightarrow & H_k^T(X, Y) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \\ H_k(|S|, Y) & \longrightarrow & H_k(X, Y) \end{array}$$

$\beta \in H_k^T(X, Y)$ が $i_{k,*}(\beta) = 0$ を満たすとする. β を表示する特異 k 鎖 c_k は, ある特異 $(k+1)$ 鎖 c_{k+1} の境界であることを示している. c_{k+1} がその台に載る有限部分単体分割 S をとる. c_k は $H_k(|S|, Y)$ の零ホモロジー類を表すので $\beta = 0$ がわかる. \square

例 3.3.5. n 次元閉球 \overline{B}^n に対し

$$\cdots \rightarrow H_k(\overline{B}^n) \rightarrow H_k(\overline{B}^n, S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(\overline{B}^n) \rightarrow H_{k-1}(\overline{B}^n, S^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

なる完全列がある. $H_k(\overline{B}^n) = 0$ ($k \neq 0$), $H_0(\overline{B}^n) = R$ より, $k = 2, 3, \dots$ に対し

$$H_k(\overline{B}^n, S^{n-1}) = H_{k-1}(S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ R & k = n \end{cases}$$

また $H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(\overline{B}^n)$ は同型で, 完全列

$$0 \rightarrow H_1(\overline{B}^n, S^{n-1}) \rightarrow H_0(S^{n-1}) \rightarrow H_0(\overline{B}^n) \rightarrow H_0(\overline{B}^n, S^{n-1}) = 0$$

より $H_0(\overline{B}^n, S^{n-1}) = H_1(\overline{B}^n, S^{n-1}) = 0$ もわかる.

位相空間が単体分割を許す時, そのホモロジー群が単体分割の選び方に依らないと期待するのは自然である. またすべての多様体が単体分割を持つことを期待するのも自然である.

位相空間が2つの単体分割を許す時, それぞれの単体分割に共通の細分が存在することを示してホモロジー群は単体分割に依存しないことを示そうとするのは自然なアイデアである. 共通細分の存在を問う問題を基本予想 (Hauptvermutung) という. この予想はポアンカレにその源があるといえる. ミルナー (J. Milnor) はこれが一般には否定的であることを示した. 2つ単体分割があったときそれらの共通細分の存在を示してホモロジー群の不変性を示すというアイデアはうまくいかないのである. 各点がユークリッド空間と同相な近傍を持つ位相空間を位相多様体といい, 単体分割出来る位相多様体は PL 多様体と言うが, 基本予想は位相多様体上の PL 構造は一意的かを問うものである. 現在では基本予想は3次元以下では正しく, 4次元以上では正しくないことが知られている.

位相多様体が単体分割を持てば, 単体分割から決まるホモロジー群は特異ホモロジー群と同型であり, ホモロジー群は単体分割の選び方に依存しないことがわかる. しかしながら, すべての位相多様体が単体分割を持つわけではない. 単体分割を持たない4次元位相多様体の例が知られている.

3.3.5 胞体複体とホモロジー群

連続写像 $\varphi : \overline{B^k} \rightarrow X$ で $\varphi|_{B^k} : B^k \rightarrow \varphi(B^k)$ が同相写像になるとき, $e^k = \varphi(B^k)$ を k 胞体 (cell) という.

X の胞体分割 (cell decomposition) K とは, 次を満たす連続写像の族 $\{\varphi_\lambda : \overline{B^{n_\lambda}} \rightarrow X\}$ の事を言う.

- 開球 B^{n_λ} と $e_\lambda^{n_\lambda} = \varphi_\lambda(B^{n_\lambda})$ は φ_λ によって同相になる.
- $X = \bigcup_\lambda \varphi_\lambda(B^{n_\lambda})$ (互いに素な和集合)
- $X^k = \bigcup_{n_\lambda \leq k} \varphi_\lambda(B^{n_\lambda})$ と置くと $\overline{\varphi_\lambda(B^{n_\lambda})} \setminus \varphi_\lambda(B^{n_\lambda}) \subset X^{n_\lambda-1}$

次の局所有限性も仮定する.

- 各点 $x \in X$ に対し, $\varphi_\lambda(B^{n_\lambda})$ の有限個の和集合は x を内点に含む.

X が胞体分割されているとする. k 次元以下の胞体の和集合を k 骨格といい X^k で表す. X の単体分割で X^k 達と両立するものを取る. 対応する X^k の単体複体を K_\bullet^k と書き, そのホモロジーを $H_\bullet(K^k)$ とする. $K_\bullet^k/K_\bullet^{k-1}$ のホモロジーを $H_\bullet(K^k, K^{k-1})$ と書く.

定理 3.3.6. $i \neq k$ のとき $H_i(K^k, K^{k-1}) = 0$. $H_k(K^k, K^{k-1})$ は k 胞体の生成する自由アーベル群である.

証明. 鎖 $c \in C_i(K^k, K^{k-1})$ は k 胞体 e_α^k の i 鎖 c_α^i を用いて $c = \sum_\alpha \xi_\alpha c_\alpha^i$ の形に一意的に書ける. $\partial c = \sum_\alpha \xi_\alpha \partial c_\alpha^i$ にも注意しておく. $C_i(e_\alpha^k, \partial e_\alpha^k)$ は $C_i(\overline{B^k}, S^{k-1})$ の形をしている. よって $H_i(K^k, K^{k-1})$ は $H_i(\overline{B^k}, S^{k-1})$ の直和である. \square

定義 3.3.7 (胞体複体). 胞体分割 K に対し $C_k^K = H_k(K^k, K^{k-1})$ とおき, 写像

$$C_k^K = H_k(K^k, K^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(K^{k-1}) \rightarrow H_{k-1}(K^{k-1}, K^{k-2}) = C_{k-1}^K$$

を ∂_k とする. (C_k, ∂_k) は複体をなす. この複体を胞体複体 (cell complex) とよぶ.

以後, 文脈から明らかなきとき, $C_k^K(X)$ を $C_k(X)$, $H_k^K(X)$ を $H_k(X)$ と略記する.

k 骨格 X^k も胞体複体となる. その複体を C_\bullet^k で表す. C_\bullet^k のホモロジーを $H_i(K^k)$ で, $C_\bullet^k/C_\bullet^{k-1}$ のホモロジーを $H_i(K^k, K^{k-1})$ で表す.

$$\begin{aligned} (C_\bullet) : & \quad \cdots \rightarrow C_{k+2} \rightarrow C_{k+1} \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \\ (C_\bullet^k) : & \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \\ (C_\bullet^k/C_\bullet^{k-1}) : & \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow C_k \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

定理 3.3.8. X の胞体分割 K をさらに細分して単体分割 T を得るとき, $H_k^K(X) = H_k^T(X)$.

証明. X の胞体分割 K をさらに細分した単体分割 T に対し, 対応する単体複体を X^k に制限したものを考えるその単体複体のホモロジーを添字 T をつけて表す. 次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_{i+1}^K(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_i^K(X^{k-1}) & \rightarrow & H_i^K(X^k) & \rightarrow & H_i^K(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{i-1}^K(X^{k-1}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & H_i(X^{k-1}) & & H_i(X^k) & & & & H_{i-1}(X^{k-1}) \\
 & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
 H_{i+1}^T(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_i^T(X^{k-1}) & \rightarrow & H_i^T(X^k) & \rightarrow & H_i^T(X^k, X^{k-1}) & \rightarrow & H_{i-1}^T(X^{k-1})
 \end{array}$$

構成より (X^k, X^{k-1}) のホモロジーの縦矢印は同型で, 次元に関する帰納法の仮定より X^{k-1} のホモロジーの縦矢印は同型としてよい. 5補題より, X^k のホモロジーの縦矢印は同型がわかる. \square

例 3.3.9 (球面 S^n のホモロジー). n 次元球面 ($n \geq 1$) は n 次元胞体 e^n と 0 次元胞体の和集合である. $S^n = e^0 \cup e^n$ よって

$$H_k(S^n) = \begin{cases} R & (k = 0, n) \\ 0 & (k \neq 0, n) \end{cases}$$

演習 3.3.10. μ 個の球面 S^n ($n \geq 1$) を考え, 各球面の 1 点を同一視して得られる図形を花束 (bouquet) といい $\vee^\mu S^n$ と書く. $\vee^\mu S^n$ のホモロジー群を計算せよ.

演習 3.3.11. トーラス $T = S^1 \times S^1$ から 1 点を除いて得られる空間 X のホモロジー群を求めよ.

3.4 係数変更とコホモロジー

3.4.1 係数変更

自由 R 加群の複体

$$(C_\bullet): \quad \cdots \rightarrow C_{k+1} \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots$$

に対し可換環 G への係数拡大

$$(C_\bullet) \otimes G: \quad \cdots \rightarrow C_{k+1} \otimes G \rightarrow C_k \otimes G \rightarrow C_{k-1} \otimes G \rightarrow \cdots$$

も複体であるから, ホモロジー群 $H_k((C_\bullet) \otimes G)$ が定義される.

定理 3.4.1. $R = \mathbb{Z}$ (またはより一般に PID) のとき, 次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow H_k \otimes G \rightarrow H_k((C_\bullet) \otimes G) \rightarrow \text{Tor}_1^R(H_{k-1}, G) \rightarrow 0$$

証明. 完全列 $0 \rightarrow Z_k \rightarrow C_k \rightarrow B_{k-1} \rightarrow 0$ に $\otimes G$ を施すと Z_k, B_k は自由加群だから, 次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow Z_k \otimes G \rightarrow C_k \otimes G \rightarrow B_{k-1} \otimes G \rightarrow 0$$

これを複体の完全列と見てホモロジーをとると, 次の完全列を得る.

$$B_k \otimes G \xrightarrow{\alpha_k} Z_k \otimes G \rightarrow H_k((C_\bullet) \otimes G) \rightarrow B_{k-1} \otimes G \xrightarrow{\alpha_{k-1}} Z_{k-1} \otimes G$$

よって

$$0 \rightarrow \text{Coker } \alpha_k \rightarrow H_k(C_\bullet \otimes G) \rightarrow \text{Ker } \alpha_{k-1} \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

が完全列となる. 完全列 $0 \rightarrow B_k \rightarrow Z_k \rightarrow H_k \rightarrow 0$ より

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1(H_k, G) \rightarrow B_k \otimes G \xrightarrow{\alpha_k} Z_k \otimes G \rightarrow H_k \otimes G \rightarrow 0$$

なので, $\text{Coker } \alpha_k = H_k \otimes G$, $\text{Ker } \alpha_k = \text{Tor}_1(H_k, G)$ となり, 完全列 (3.3) に代入すれば定理の主張を得る. \square

演習 3.4.2. 演習 1.3.1 のデータからできる複体について, 普遍係数定理を用いて $\mathbb{Z}/2$ 係数のホモロジーを計算せよ.

3.4.2 コホモロジー

自由 R 加群の複体

$$(C_\bullet): \quad \cdots \rightarrow C_{k+1} \rightarrow C_k \rightarrow C_{k-1} \rightarrow \cdots$$

に対し $C^k = \text{Hom}_R(C_k, R)$ と置き $\alpha \in C^k$ に対し, $d\alpha \in C^{k+1}$ を

$$d\alpha(\sigma) = \alpha(\partial\sigma) \quad \sigma \in C_{k+1}$$

で定めると, 番号が上がる複体 (余複体という)

$$(C^\bullet): \quad \cdots \rightarrow C^{k-1} \rightarrow C^k \rightarrow C^{k+1} \rightarrow \cdots$$

が定まる. C^k の元を k 余鎖 (k -cochain) という. $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$ の核を Z^k , $d: C^{k-1} \rightarrow C^k$ の像を B^k と書くと, コホモロジー群 H^k が次で定義される.

$$0 \rightarrow B^k \rightarrow Z^k \rightarrow H^k \rightarrow 0$$

Z^k の元を k 余輪体 (k -cocycle), B^k の元を k 余境界 (k -coboundary) という.

定理 3.4.3. $R = \mathbb{Z}$ (またはより一般に PID) のとき, 次の完全列が存在する.

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{k-1}, R) \rightarrow H^k \rightarrow \text{Hom}_R(H_k, R) \rightarrow 0$$

証明. 完全列 $0 \rightarrow Z_k \rightarrow C_k \rightarrow B_{k-1} \rightarrow 0$ に $\text{Hom}_R(-, R)$ を施すと B_{k-1} は自由加群なので, 次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(B_{k-1}, R) \rightarrow C^k \rightarrow \text{Hom}_R(Z_k, R) \rightarrow 0$$

これを複体の完全列と見て, コホモロジーをとると次の完全列を得る.

$$\text{Hom}_R(Z_{k-1}, R) \xrightarrow{\alpha_{k-1}} \text{Hom}_R(B_{k-1}, R) \longrightarrow H^k \longrightarrow \text{Hom}_R(Z_k, R) \xrightarrow{\alpha_k} \text{Hom}_R(B_k, R)$$

よって

$$0 \rightarrow \text{Coker } \alpha_{k-1} \rightarrow H^k \rightarrow \text{Ker } \alpha_k \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

が完全列となる. 完全列 $0 \rightarrow B_k \rightarrow Z_k \rightarrow H_k \rightarrow 0$ より

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(H_k, R) \longrightarrow \text{Hom}_R(Z_k, R) \xrightarrow{\alpha_k} \text{Hom}_R(B_k, R) \longrightarrow \text{Ext}_R^1(H_k, R) \longrightarrow 0$$

なので, $\text{Coker } \alpha_k = \text{Ext}_R^1(H_k, R)$, $\text{Ker } \alpha_k = \text{Hom}_R(H_k, R)$ となり, 完全列 (3.4) より, 定理の主張を得る. \square

例 3.4.4 (単体複体のコホモロジー). X の単体分割 T をとり, 単体複体 $C_k^T(X)$ の双対 $C_T^k(X) = \text{Hom}(C_k^T(X), R)$ をとると, 単体余鎖複体

$$(C_T^\bullet(X)) : \quad \cdots \rightarrow C_T^{k-1}(X) \rightarrow C_T^k(X) \rightarrow C_T^{k+1}(X) \rightarrow \cdots$$

を得る. このコホモロジー群 $H_T^k(X)$ を, 単体分割 T に対するコホモロジー群という.

例 3.4.5 (特異コホモロジー). 特異複体 $C_k(X)$ の双対 $C^k(X) = \text{Hom}_R(C_k(X), R)$ をとると, 特異余鎖複体

$$(C^\bullet(X)) : \quad \cdots \rightarrow C^{k-1}(X) \rightarrow C^k(X) \rightarrow C^{k+1}(X) \rightarrow \cdots$$

を得る. このコホモロジー群 $H^k(X)$ を, X の特異コホモロジー群という

例 3.4.6 (胞体複体のコホモロジー). 胞体複体 $(C_\bullet^K(X))$ に対しても, 双対 $C_K^k(X) = \text{Hom}(C_k^K(X), R)$ を考えれば, 胞体余鎖複体 $C_\bullet^K(X)$ を得るので, そのコホモロジー群 $H_K^k(X)$ を考える事ができる.

3.4.3 積空間のホモロジー

積空間のホモロジーを計算する公式を前2小節と同様のアイデアで説明することができる。ここではそれを説明しよう。

2つの鎖複体 $(C'_\bullet), (C''_\bullet)$ を考える。

$$\begin{aligned} (C'_\bullet): & \quad \cdots \rightarrow C'_k \rightarrow C'_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C'_1 \rightarrow C'_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ (C''_\bullet): & \quad \cdots \rightarrow C''_k \rightarrow C''_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C''_1 \rightarrow C''_0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

テンソル積 $(C_\bullet) = (C'_\bullet) \times (C''_\bullet)$ を次で定める。

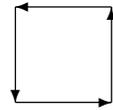
$$C_k = \bigoplus_{p+q=k} C'_p \otimes C''_q$$

次で境界作用素を定めると、テンソル積 (C_\bullet) は複体になる。

$$\partial(c'_p \otimes c''_q) = \partial' c'_p \otimes c''_q + (-1)^p c'_p \otimes \partial c''_q$$

例 3.4.7. $\partial[0, 1] = \{1\} - \{0\}$ なので

$$\partial([0, 1] \times [0, 1]) = (\{1\} - \{0\}) \times [0, 1] - [0, 1] \times (\{1\} - \{0\})$$



定理 3.4.8 (Künneth の公式). $R = \mathbb{Z}$ (またはより一般に PID) のとき、次の完全列がある。

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=k} H'_p \otimes H''_q \rightarrow H_k \rightarrow \bigoplus_{p+q=k-1} \text{Tor}_1^R(H'_p, H''_q) \rightarrow 0$$

証明. 完全列 $0 \rightarrow Z'_p \rightarrow C'_p \rightarrow B'_{p-1} \rightarrow 0$ より、完全列

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=k} Z'_p \otimes C''_q \rightarrow \bigoplus_{p+q=k} C'_p \otimes C''_q \rightarrow \bigoplus_{p+q=k} B'_{p-1} \otimes C''_q \rightarrow 0$$

を得るが、これを複体の完全列とみて、次の完全列を得る。

$$H_k(B'_* \otimes C''_*) \xrightarrow{\alpha_k} H_k(Z'_* \otimes C''_*) \rightarrow H_k(C'_* \otimes C''_*) \rightarrow H_{k-1}(B'_* \otimes C''_*) \xrightarrow{\alpha_{k-1}} H_{k-1}(Z'_* \otimes C''_*)$$

よって、次の完全列がある。

$$0 \rightarrow \text{Coker } \alpha_k \rightarrow H_k(C'_* \otimes C''_*) \rightarrow \text{Ker } \alpha_{k-1} \rightarrow 0 \tag{3.5}$$

ところで、

$$H_k(Z'_* \otimes C''_*) = \bigoplus_{p+q=k} Z'_p \otimes H''_q, \quad H_k(B'_* \otimes C''_*) = \bigoplus_{p+q=k} B'_p \otimes H''_q$$

なので, 完全列 $0 \rightarrow B'_p \rightarrow Z'_p \rightarrow H'_p \rightarrow 0$ より

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1(H'_p, H''_q) \rightarrow B'_p \otimes H''_q \xrightarrow{\alpha_{p,q}} Z'_p \otimes H''_q \rightarrow H'_p \otimes H''_q \rightarrow 0$$

となるので, $\text{Ker } \alpha_{p,q} = \text{Tor}_1(H'_p, H''_q)$, $\text{Coker } \alpha_{p,q} = H'_p \otimes H''_q$ となる. 完全列 (3.5) に, $\alpha_k = \bigoplus_{p+q=k} \alpha_{p,q}$ を勘案すれば結果を得る. \square

演習 3.4.9. $X = S^p \times S^q$ のホモロジーを計算せよ.

3.5 固有写像とホモロジー

3.5.1 固有写像

距離空間 X, Y の間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が固有写像 (proper map) であるとは, コンパクト集合の逆像がコンパクトであるときを言う.

定理 3.5.1. 距離空間 X, Y 間の連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について次は同値である.

- (i) f は固有写像.
- (ii) f は閉写像で, すべての $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクト.
- (iii) 点列 $(f(x_n))$ が収束する X の点列 (x_n) は, 収束する部分列をもつ.

証明. (i) \Rightarrow (ii): (i) を仮定する. 一点はコンパクトなので任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクト. 次に f が閉写像であることを示す. $C \subset X$ を閉集合とする. $y \in \overline{f(C)}$ をとると C の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ で $(f(x_n))_{n=1,2,\dots}$ が y に収束するものが存在する.

$$K = \{y\} \cup \{f(x_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$$

とおくと $((f(x_n)))$ は収束するので K はコンパクトよって $f^{-1}(K)$ もコンパクトである. $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ はコンパクト集合 $f^{-1}(K)$ の点列なので収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ を持つ. この部分列の収束先を x と書くと, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は閉集合 C の点列でもあるので C は x を含む. よって

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(C).$$

よって $f(C)$ は閉集合である.

(ii) \Rightarrow (iii): (ii) を仮定する. 次を満たすような X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ と $y \in Y$ があったとして矛盾を導けばよい.

- (1) $f(x_n) \rightarrow y \in Y$ ($n \rightarrow \infty$)
- (2) $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ は収束する部分列を持たない.

(2) より $E = \{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ は閉集合である. よって $f(E) = \{f(x_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ も閉集合である. (1) より $y \in f(E)$. したがって $f(x_n) = y$ となる番号 n が存在する. (x_n) の任意の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ に対しても, 同様の議論ができて, $f(x_{n_k}) = y$ なる番号 k が存在する. よって有限個の n を除いては $f(x_n) = y$ となる事がわかる. よってある番号 n_0 があって

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば} \quad y = f(x_n)$$

よって $f^{-1}(y)$ は集積点を持たない点列 $(x_n)_{n=n_0, n_0+1, \dots}$ を含むのでコンパクトになり得ず矛盾.

(iii) \Rightarrow (i): 対偶を示す. K を Y のコンパクト部分集合とし, $f^{-1}(K)$ がコンパクトでないとする. すると集積点を持たない $f^{-1}(K)$ の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ が存在し, $(f(x_n))_{n=1,2,\dots}$ はコンパクト集合 K の点列なので, 収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ をもつ. $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は集積点を持たないので, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ のどんな部分列も収束しない. \square

例 3.5.2 (固有写像の例). Y を距離空間, K をコンパクト距離空間とする. 射影 $p: Y \times K \rightarrow Y$ は固有写像である. X を $Y \times K$ の閉部分集合とすると射影 $p: Y \times K \rightarrow Y$ の X への制限 $f: X \rightarrow Y$ も固有写像である.

3.5.2 局所コンパクト距離空間のホモロジー

距離空間 X が局所コンパクトとは X の各点に対してコンパクト近傍が存在することを言う. \mathbb{R} は局所コンパクトであるがその部分空間として \mathbb{Q} は局所コンパクトでない. Y 局所コンパクト空間が重要なのは次の 1 点コンパクト化が存在するからである.

定理 3.5.3 (1 点コンパクト化). 局所コンパクト距離空間 X に対し, 新たに 1 点 ∞ を付け加えて

$$\bar{X} = X \cup \{\infty\}$$

とし, \bar{X} に位相を定めて, 次を満たすようにできる.

- (i) \bar{X} はコンパクト距離空間である.
- (ii) X の開集合は \bar{X} の開集合である.

特に X は \bar{X} の開集合であることに注意しよう.

定理 3.5.4. 局所コンパクト距離空間 X, Y に対し, その 1 点コンパクト化を \bar{X}, \bar{Y} とする. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ について次は同値.

- $f: X \rightarrow Y$ は固有写像

- $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$, $\bar{f}(x) = f(x)$, $x \in X$; $\bar{f}(\infty) = \infty$ は連続.

証明. (ii) \implies (i): f が固有写像でないとすると, 収束部分列を持たない X の点列 $\{x_n\}$ で $\{f(x_n)\}$ が $y_0 \in Y$ に収束するものが存在する. $\{x_n\}$ は \bar{X} の点列と見ると, \bar{X} のコンパクト性より $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ を持つ. 収束先は ∞ でなければならず, \bar{f} の連続性を仮定すると次の様に矛盾を生じる.

$$\infty = \bar{f}(\infty) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = y_0$$

(i) \implies (ii): ∞ に収束する X の点列 $\{x_n\}$ をとると $\{f(x_n)\}$ も ∞ に収束することを示す. $\{f(x_n)\}$ の点列とみて \bar{Y} の収束部分列 $\{f(x_{n_k})\}$ を取る. $f(x_{n_k}) \rightarrow y_0 \neq \infty$ ならば $\{f(x_{n_k})\}$ は Y の収束部分列で f が固有写像であることより $\{x_{n_k}\}$ に収束部分列がある. これは $\{x_n\}$ が ∞ に収束することに矛盾する. 従って $\{f(x_n)\}$ のどんな部分列も Y で収束することはない. つまり \bar{Y} での ∞ の開近傍 V を任意にとると $\bar{Y} \setminus V$ に無限個の $\{f(x_n)\}$ は存在しない. よって $f(x_n) \rightarrow \infty$. \square

X を局所コンパクト距離空間とし, X のコンパクト化を \bar{X} と表す. \bar{X} の単体分割 T で $B = \bar{X} \setminus X$ を複体にするものを取れば*3, 次の鎖の完全列を得る.

$$\cdots \rightarrow C_k^T(\bar{X} \setminus X) \rightarrow C_k^T(\bar{X}) \rightarrow C_k^T(\bar{X}, \bar{X} \setminus X) \rightarrow \cdots$$

$B = \bar{X} \setminus X$ は \bar{X} での開集合 X の補集合なので閉集合であり, 特にコンパクトである. $C_k^T(\bar{X}, \bar{X} \setminus X)$ の境界写像は $\bar{X} \setminus X$ に入る単体を無視することで計算されるので, コンパクト化に依らずにきまる. $\bar{C}_k^T(X) = C_k(\bar{X})/C_k(\bar{X} \setminus X)$ と置くと, $\bar{C}_k^T(X)$ のホモロジーはコンパクト化に依らないものになる. このホモロジー群を $\bar{H}_k^T(X)$ と書く.

$$\bar{H}_k^T(X) = \frac{\text{Ker}\{\bar{C}_k^T(X) \rightarrow \bar{C}_{k-1}^T(X)\}}{\text{Im}\{\bar{C}_{k+1}^T(X) \rightarrow \bar{C}_k^T(X)\}}$$

X がコンパクトならば $H_k(X) = \bar{H}_k(X)$ であることに注意しておく. 定義より得られる完全列

$$\cdots \rightarrow H_k^T(B) \rightarrow H_k^T(\bar{X}) \rightarrow \bar{H}_k^T(X) \rightarrow H_{k-1}^T(B) \rightarrow H_{k-1}^T(\bar{X}) \rightarrow \cdots$$

と対のホモロジー完全列

$$\cdots \rightarrow H_k(B) \rightarrow H_k(\bar{X}) \rightarrow \bar{H}_k(\bar{X}, B) \rightarrow H_{k-1}(B) \rightarrow H_{k-1}(\bar{X}) \rightarrow \cdots$$

を比較すると, 5 補題 (定理 2.1.16) より $\bar{H}_k^T(X)$ は単体分割 T に依らずに決まり, $H_k(\bar{X}, B)$ と同型であることがわかる. このホモロジー群を $\bar{H}_k(X)$ と書く.

*3 Goresky はこのようなコンパクト化の存在を simplicially compactifiable と呼んでいる. X の無限遠の位相が非常に病的ならば, このよう単体分割が存在しない可能性がある.

定理 3.5.5. X の閉部分集合 F に対し, 次の完全列がある.

$$\cdots \rightarrow \overline{H}_k(F) \rightarrow \overline{H}_k(X) \rightarrow \overline{H}_k(X \setminus F) \rightarrow \overline{H}_{k-1}(F) \rightarrow \overline{H}_{k-1}(X) \rightarrow \cdots$$

証明. 埋め込み $F \rightarrow X$ は固有写像であるので, 適当な X のコンパクト化 \overline{X} の単体分割 T に対し $\overline{C}_k^T(F) \rightarrow \overline{C}_k^T(X)$ が誘導される事に注意する. $B = \overline{X} \setminus X$ はコンパクトで, 次の完全列がある.

$$\cdots \rightarrow H_k(F \cup B, B) \rightarrow H_k(\overline{X}, B) \rightarrow H_k(\overline{X}, B \cup F) \rightarrow H_{k-1}(F, F \cup B) \rightarrow H_k(\overline{X}, B) \rightarrow \cdots$$

これと $\overline{H}_k(F) \simeq H_k(F \cup B, B)$, $\overline{H}_k(X) \simeq H_k(\overline{X}, B)$, $\overline{H}_k(X \setminus F) \simeq H_k(\overline{X}, F \cup B)$ を比較して, 主張を得る. □

例 3.5.6. 写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$ は (単体写像ではあるが) 固有写像でないので \mathbb{R} の 1 点コンパクト化 S^1 の単体分割 T で無限遠を頂点とするものをとると, f は鎖写像 $f_k : \overline{C}_k^T(\mathbb{R}) \rightarrow C_k(\{0\})$ を定めず, 誘導写像 $f_* : \overline{H}_k(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{H}_k(\{0\})$ は存在しない.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{C}_1^T(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial} & \overline{C}_0^T(\mathbb{R}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \text{ があるとすると矛盾!} & & \\ & & 0 & \longrightarrow & C_0(\{0\}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

実際 f_k が存在するとすると, 次の様に矛盾を帰結する.

$$R \simeq C_0(\{0\}) = f_0 \circ \partial(\overline{C}_1^T(\mathbb{R})) = \partial \circ f_1(\overline{C}_1^T(\mathbb{R})) = \partial(0) = 0$$

例 3.5.7. 定理 3.4.8 より $\overline{H}_k(\mathbb{R}^n) = 0$ ($k \neq n$), $H_n(\mathbb{R}^n) = R$ を得る.

この例よりホモロジー群 $\overline{H}_k(X)$ はホモトピー型で不変ではない事がわかる.

定義 3.5.8 (固有ホモトピー). 局所コンパクト距離空間 X から局所コンパクト距離空間 Y への写像の固有ホモトピー (proper homotopy) とは, 固有連続写像 $F : X \times I \rightarrow Y$ のことである. 但し $I = [0, 1]$ である. 写像 $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ に対し $f_0(x) = F(x, 0)$, $f_1(x) = F(x, 1)$ ($x \in X$) となるホモトピー F が存在するとき, f_0 と f_1 は固有ホモトピック (properly homotopic) であるという.

f と g が固有ホモトピックであるという関係は, 局所コンパクト距離空間 X から局所コンパクト距離空間 Y へのすべての固有連続写像全体の同値関係であり, $f \stackrel{\text{proper}}{\simeq} g$ と書く. その同値類を写像の固有ホモトピー類 (proper homotopy class) という.

定義 3.5.9 (空間の固有ホモトピー型). 固有連続写像 $f : X_1 \rightarrow X_2$ が固有ホモトピー同値 (proper homotopy equivalence) とは, ある固有連続写像 $g : X_2 \rightarrow X_1$ が存在して, $f \circ g \stackrel{\text{proper}}{\simeq} 1_{X_1}$, $g \circ f \stackrel{\text{proper}}{\simeq} 1_{X_2}$ となるときをいう. このとき g を f の固有ホモトピー逆

写像 (proper homotopy inverse) という. またこのとき $X_1 \overset{\text{proper}}{\sim} X_2$ と書き, X_1 と X_2 は同じ固有ホモトピー型を持つ (same proper homotopy type) という.

系 3.5.10. ホモロジー群 $\overline{H}_k(X)$ は固有ホモトピー型で不変である.

証明. X と Y が同じ固有ホモトピー型をもつと, X, Y の適当なコンパクト化 $\overline{X}, \overline{Y}$ $f : (\overline{X}, X) \rightarrow (\overline{Y}, Y), g : (\overline{Y}, Y) \rightarrow (\overline{X}, X)$ があって $f \circ g$ 及び $g \circ f$ は恒等写像にホモトープである. よってホモロジー群の写像 $(f \circ g)_*, (g \circ f)_*$ が恒等写像であり, $f_* : \overline{H}_k(X) \rightarrow \overline{H}_k(Y), g_* : \overline{H}_k(Y) \rightarrow \overline{H}_k(X)$ が互いに逆写像であることがわかる. \square

3.5.3 閉台を持つ無限鎖のホモロジー

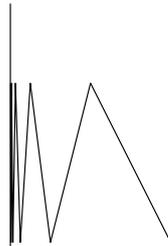
X に単体分割 T が与えられているとする. 鎖の形式的無限和 $\xi = \sum_{\sigma} \xi_{\sigma} \sigma$ に対し, その台 $|\xi|$ を次で定める.

$$|\xi| = \bigcup_{\xi_{\sigma} \neq 0} \sigma$$

$C_k^T((X))$ で閉台を持つ (同値であるが局所有限な) T の無限 k 鎖全体を表す.

$$\partial \xi = \sum_{\sigma} \xi_{\sigma} \partial \sigma, \quad |\partial \xi| = \bigcup_{\xi_{\sigma} \neq 0} \partial \sigma$$

なので, 単体分割の局所有限性より $|\partial \xi|$ は閉集合である事がわかる.



$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ での閉台をもつ鎖の例

T の細分に関する直極限

$$C_k((X)) = \varinjlim_T C_k^T((X))$$

を取る. $C_{\bullet}((X))$ のホモロジー群を $H_k((X))$ で表す.

例 3.5.11. X がコンパクトならば閉台はコンパクト台であり, $C_k((X))$ の元は有限鎖で表示されるから

$$H_k(X) = H_k((X)).$$

例 3.5.12. $I_i = [i, i + 1]$ とおくと $\xi = \sum_i \xi_i I_i$ は \mathbb{R} の局所有限な無限鎖である.

$$\xi = I_0 + I_1 + I_2 + \cdots \quad \text{とおくと} \quad \partial\xi = -\{0\} \quad \text{である.}$$

定理 3.5.13. 固有写像 $f : X \rightarrow Y$ は, 鎖写像 $C_\bullet((X)) \rightarrow C_\bullet((Y))$ を誘導し, ホモロジー群の準同型 $f_* : H_k((X)) \rightarrow H_k((Y))$ を誘導する.

証明. 固有写像が単体写像として示す. 単体写像でないときは単体写像で近似すればよい. 固有写像は閉写像なので, 写像 $C_k((X)) \rightarrow C_k((Y))$ が定まる. 無限鎖 $\xi = \sum_\sigma \xi_\sigma \sigma \in C_k((X))$ に対し, $|\partial(f(\xi))|$ が閉集合である事を示す. $|f(\partial\xi)|$ の点列 $\{y_i\}$ が y に収束するとして, $y \in |f(\partial\xi)|$ を示せばよい. $y_i = f(x_i)$ なる $x_i \in \partial\xi$ が存在する. $\{y_i = f(x_i)\}$ は収束するので, f が固有写像であることから, 部分列をとることにより $\{x_i\}$ は収束すると仮定してよい. 収束先 x は $|\partial\xi|$ が閉集合である事から $x \in |\partial\xi|$ であり $y = f(x) \in |f(\partial\xi)|$ がわかる. \square

実は X に関する比較的マイルドな条件の下で $H_q((X)) \simeq \overline{H}_q(X)$ であることがわかる. 本節の残りの部分では Charles A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press, 1994 に従ってこの事実を紹介する.

$C_q((X))$ の元で A に台をもつものを $C_q^X((A))$ と書く. $C_q^X((A, B)) = C_q^X((A))/C_q^X((B))$ と置く.

補題 3.5.14. $X \supset A \supset B$ で $A \setminus B$ の閉包がコンパクトならば

$$C_q^X((A, B)) \simeq C_q(A, B)$$

証明. $c = \sum_\sigma c_\sigma \sigma \in C_q^X((A, B))$ に対し $A \setminus B$ の閉包がコンパクトなので

$$\{\sigma : c_\sigma \neq 0, \sigma(\Delta^q) \cap (A \setminus B) \neq \emptyset\}$$

は有限である. 実際, $A \setminus B$ の閉包の点 p をとると, 点 p を含むある近傍 U_p で $\sigma(\Delta^q) \cap U_p \neq \emptyset$ となる σ は有限個. U_p 達は $A \setminus B$ の閉包を覆うが $A \setminus B$ の閉包はコンパクトなのでそのうち有限個で $A \setminus B$ の閉包を覆う.

従って, $C_q^X((A)) = C_q^X((B)) + C_q(A)$ を得る. これより

$$\begin{aligned} C_q^X((A, B)) &= \frac{C_q^X((A))}{C_q^X((B))} = \frac{C_q^X((B)) + C_q(A)}{C_q^X((B))} \\ &\simeq \frac{C_q(A)}{C_q^X((B)) \cap C_q(A)} = \frac{C_q(A)}{C_q(A)} = C_q(A, B) \end{aligned}$$

となり証明を完了する. \square

定義 3.5.15. R 加群の列 $\cdots \xrightarrow{f_3} A_2 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_0} A_0 \rightarrow 0$ (塔 (tower) という) に対し, δ を次で定める.

$$\delta: \prod_n A_n \rightarrow \prod_n A_n, \quad (a_n)_{n \geq 0} \mapsto (a_n - f_n(a_{n+1}))_{n \geq 0}$$

このとき $\varprojlim_n A_n, \varprojlim_n^1 A_n$ を次で定める.

$$\varprojlim_n A_n = \text{Ker } \delta, \quad \varprojlim_n^1 A_n = \text{Coker } \delta.$$

例 3.5.16. 各 $A_{i+1} \rightarrow A_i$ が全射ならば $\varprojlim_n^1 A_n = 0$.

補題 3.5.17. 加群の塔の完全列 (次の可換図式の横が完全列) があるとする.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & C_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & B_0 & \longrightarrow & C_0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

すると次の完全列がある.

$$0 \rightarrow \varprojlim_n A_n \rightarrow \varprojlim_n B_n \rightarrow \varprojlim_n C_n \rightarrow \varprojlim_n^1 A_n \rightarrow \varprojlim_n^1 B_n \rightarrow \varprojlim_n^1 C_n \rightarrow 0$$

証明. 次の可換図式に蛇の補題を適用すれば良い.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \prod_n A_n & \longrightarrow & \prod_n B_n & \longrightarrow & \prod_n C_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ 0 & \longrightarrow & \prod_n A_n & \longrightarrow & \prod_n B_n & \longrightarrow & \prod_n C_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

□

例 3.5.18. 素数 p に対し, $0 \rightarrow p^n \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \rightarrow 0$ を塔の完全列と見ると \mathbb{Z}_p を p 進体として次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \varprojlim_n^1 (p^n \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

塔 $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ が Mittag-Leffler の条件を満たすとは, 任意の k に対し $i \geq k$ なる i が存在して, $j \geq i$ なる j に対し $\text{Im}\{A_j \rightarrow A_k\} = \text{Im}\{A_i \rightarrow A_k\}$ となる時をいう.

補題 3.5.19. 塔 $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0$ が Mittag-Leffler の条件を満たせば $\varprojlim_n^1 A_n = 0$.

証明. 自然な写像を $f_{j,i} : A_j \rightarrow A_i, j \geq i$, と書く. 各 i に対し $j \geq i$ が存在して $A_j \rightarrow A_i$ が零写像ならば, 各 $b_k \in A_k$ に対し

$$a_i = \sum_{k \geq i} f_{k,i}(b_k) = b_i + f_{i+1,i}(b_{i+1}) + \cdots + f_{j-1,i}(b_{j-1})$$

と置くと $a_i - f_i(a_{i+1}) = \sum_{k \geq i} f_{k,i}(b_k) - \sum_{k > i} f_{k,i}(b_k) = b_i$ なので ∂ は全射である.

一般の場合 $B_i = \text{Im}\{A_j \rightarrow A_i\}, j \gg i$, と置くと $B_{i+1} \rightarrow B_i$ はすべて全射なので, $\varprojlim_n^1 B_n = 0$. A_i/B_i については $A_j/B_j \rightarrow A_i/B_i, j \gg i$, は零写像なので前の議論より $\varprojlim_n^1 A_n/B_n = 0$. 塔の完全列 $0 \rightarrow B_i \rightarrow A_i \rightarrow A_i/B_i \rightarrow 0$ に補題 3.5.17 を適用して $\varprojlim_n^1 A_n = 0$ がわかる. \square

演習 3.5.20. A_n が有限アーベル群の塔のとき $\varprojlim_n^1 A_n = 0$.

演習 3.5.21. A_n が体上の有限次元ベクトル空間の塔のとき $\varprojlim_n^1 A_n = 0$.

補題 3.5.22. R 加群の複体の塔 $\cdots \rightarrow C_{2,\bullet} \rightarrow C_{1,\bullet} \rightarrow C_{0,\bullet}$ が任意の m, k に対し $i \geq k$ なる i が存在して, $j \geq i$ なる j に対し $\text{Im}\{C_{j,m} \rightarrow C_{k,m}\} = \text{Im}\{C_{i,m} \rightarrow C_{k,m}\}$ を満たせば $\varprojlim_n^1 C_{n,m} = 0$ が成り立ち, 次の完全列がある.

$$0 \rightarrow \varprojlim_n^1 H_{q+1}(C_{n,\bullet}) \rightarrow H_q(\varprojlim_n C_{n,\bullet}) \rightarrow \varprojlim_n H_q(C_{n,\bullet}) \rightarrow 0$$

証明. 境界 $B_{n,\bullet}$ と輪体 $Z_{n,\bullet}$ は $B_{n,\bullet} \subset Z_{n,\bullet} \subset C_{n,\bullet}$ を満たす $C_{n,\bullet}$ の部分複体. 塔の完全列

$$0 \rightarrow Z_{n,\bullet} \rightarrow C_{n,\bullet} \rightarrow B_{n,\bullet}[-1] \rightarrow 0$$

より, $C_\bullet = \varprojlim_n C_{n,\bullet}, Z_\bullet = \varprojlim_n Z_{n,\bullet}$ と定めると, 次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow Z_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow \varprojlim_n B_{n,\bullet}[-1] \rightarrow \varprojlim_n^1 Z_{n,\bullet} \rightarrow \varprojlim_n^1 C_{n,\bullet} \rightarrow \varprojlim_n^1 B_{n,\bullet}[-1] \rightarrow 0$$

$B_\bullet = (C_\bullet/Z_\bullet)[1]$ と置くと, 仮定 $\varprojlim_n^1 C_{n,\bullet} = 0$ より次を得る.

$$0 \rightarrow B_\bullet[-1] \rightarrow \varprojlim_n B_{n,\bullet}[-1] \rightarrow \varprojlim_n^1 Z_{n,\bullet} \rightarrow 0, \quad \varprojlim_n^1 B_{n,\bullet} = 0 \quad (3.6)$$

塔の完全列

$$0 \rightarrow B_{n,\bullet} \rightarrow Z_{n,\bullet} \rightarrow H_\bullet(C_{n,\bullet}) \rightarrow 0$$

より次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \varprojlim_n B_{n,\bullet} \rightarrow Z_\bullet \rightarrow \varprojlim_n H_\bullet(C_{n,\bullet}) \rightarrow 0 \rightarrow \varprojlim_n^1 Z_{n,\bullet} \rightarrow \varprojlim_n^1 H_\bullet(C_{n,\bullet}) \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

$B_\bullet \subset \varprojlim_n B_{n,\bullet} \subset Z_\bullet \subset C_\bullet$ なるフィルトレーションがあるので,

$$0 \rightarrow (\varprojlim_n B_{n,q})/B_q \rightarrow Z_q/B_q \rightarrow Z_q/\varprojlim_n B_{n,q} \rightarrow 0$$

より, $H_q(C_\bullet) = Z_q/B_q$, (3.6), (3.7) を勘案すれば

$$0 \rightarrow \varprojlim_n^1 H_q(C_{n,\bullet})[1] \rightarrow H_q(C_\bullet) \rightarrow \varprojlim_n H_q(C_{n,\bullet}) \rightarrow 0$$

となり, 目的の完全列を得る. □

X が σ コンパクトであれば可算個のコンパクト集合の和集合で書ける. 次の定理は σ コンパクトな位相空間の閉台を持つ無限鎖のホモロジー群を計算するのに有益である.

定理 3.5.23. $X = \lim_n \text{int}(X_n)$ で各 X_n の閉包がコンパクトであるような増大列 $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ をとると, 次の完全列がある.

$$0 \rightarrow \varprojlim_n^1 H_{q+1}(X, X \setminus X_n) \rightarrow H_q((X)) \rightarrow \varprojlim_n H_q(X, X \setminus X_n) \rightarrow 0$$

特に, ある番号 n_0 が存在して

$$\begin{aligned} H_{q+1}(X, X \setminus X_n) &\simeq H_{q+1}(X, X \setminus X_{n_0}), & H_q(X, X \setminus X_n) &\simeq H_q(X, X \setminus X_{n_0}) \\ \text{ならば} & & H_q((X)) &\simeq H_q(X, X \setminus X_n) \quad (n \geq n_0). \end{aligned}$$

特に $\overline{X} \setminus X_n$ が $\overline{X} \setminus X$ の近傍で $\overline{X} \setminus X$ の変形レトラクト^{*4}であれば,

$$H_q((X)) \simeq \overline{H}_q(X)$$

であることがわかる.

証明. 各 n に対し商写像 $\tau_n : C_\bullet^X((X, X \setminus X_{n+1})) \rightarrow C_\bullet^X((X, X \setminus X_n))$ がある. また $\tau_n : C_\bullet((X)) \rightarrow C_\bullet^X((X, X \setminus X_n))$ があるので

$$\tau : C_\bullet((X)) \rightarrow \varprojlim_n C_\bullet^X((X, X \setminus X_n))$$

が定まるがこれは同型. X_n の閉包がコンパクトなので, 前補題より

$$C_\bullet(X, X \setminus X_n) \simeq C_\bullet^X((X, X \setminus X_n))$$

なので, 次の同型を得る.

$$C_\bullet((X)) \simeq \varprojlim_n C_\bullet(X, X \setminus X_n)$$

^{*4} 変形レトラクトの定義はしていないが, ここで必要なのは自然な包含写像 $\overline{X} \setminus X \rightarrow \overline{X} \setminus X_n$ がホモロジーの同型を誘導するということである.

$C_\bullet(X, X \setminus X_{n+1}) \rightarrow C_\bullet(X, X \setminus X_n)$ は全射であり

$$\varprojlim^1 C_\bullet(X, X \setminus X_n) = 0$$

なので前補題より所要の完全列を得る. \square

3.6 双対性

鎖の係数環 R の積構造を本節では本質的に用いる.

3.6.1 ポアンカレの双対定理

X を n 次元多様体としその単体分割 T をとし, 向きつけられているとする. ここで, 向きというのは T の各 n 次元単体が正の向きか負の向きかが決まっていて, すべての正の向きの n 単体の和と境界がすべての負の向きの n 単体の和と境界になっているときをいう. このとき, 必要ならば T の n 単体の向きを変えて, T の n 単体はすべて正の向きと仮定できるが, それらすべての総和の境界は 0 である事がわかる.

T' を T の重心細分とする. 以下, 単体 σ の重心を $b(\sigma)$ で表す. T の k 単体 σ に対し σ の重心 $b(\sigma)$ だけで σ と交わる T' の単体の和集合は $(n-k)$ 胞体であり, それを σ^* で表す.

以下, 少し説明する. k 単体 $\sigma_k = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ に対し i 単体 $\sigma_i = [v_0, v_1, \dots, v_i]$ ($0 \leq i \leq k$) を固定し, さらに σ_k から始まる単体の増加列

$$\sigma_k < \sigma_{k+1} < \dots < \sigma_n$$

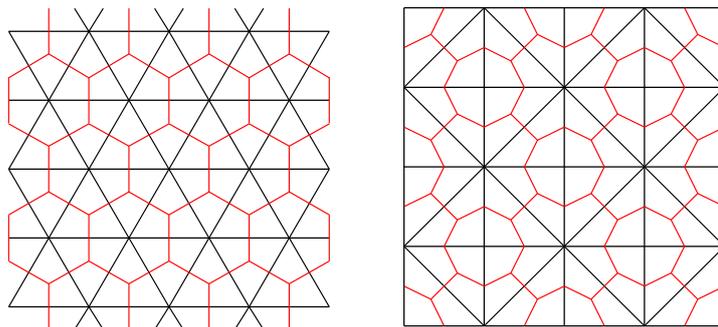
全体の集合を $\Sigma(\sigma_k)$ と書く. $[b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)]$ の向きを $\varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n)$ と書く. 即ち

$$\varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & [b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)] \text{ の向きが } T \text{ の向きと同調} \\ -1 & [b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)] \text{ の向きが } T \text{ の向きと同調しない} \end{cases}$$

σ_k^* を次で定める.

$$\sigma_k^* = \sum_{(\sigma_k, \dots, \sigma_n) \in \Sigma(\sigma_k)} \varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n) [b(\sigma_k), b(\sigma_{k+1}), \dots, b(\sigma_n)] \quad (3.8)$$

σ_k^* 達全体を T の双対胞体分割 (dual cell decomposition) といい, T^* で表す.



補題 3.6.1. σ_k^* の台は σ_k を面にもつ単体全部の和集合内にあり, (3.8) の右辺の単体は向きが同調する.

証明. (3.8) の右辺は σ_k を面にもつ単体内にあるから, σ_k^* の台は σ_k を面にもつ単体全部の和集合内にある. 右辺に現れる 2 つの $(n-k)$ 単体

$$\varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n)[b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)], \quad \varepsilon(\sigma_k, \sigma'_{k+1}, \dots, \sigma'_n)[b(\sigma_k), b(\sigma'_{k+1}), \dots, b(\sigma'_n)]$$

が共通の $(n-k-1)$ 面 τ を持てば

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\sigma_k, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_n)[b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k), b(\sigma_{k+1}), \dots, b(\sigma_n)], \\ & \varepsilon(\sigma_k, \sigma'_{k+1}, \dots, \sigma'_n)[b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k), b(\sigma'_{k+1}), \dots, b(\sigma'_n)] \end{aligned}$$

の向きは同調するので最後の主張がわかる. □

補題 3.6.2. k 単体 σ_k と $k-1$ 単体 τ_{k-1} に対し,

$$\partial\sigma_k = \sum_{\tau_{k-1}} \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k)\tau_{k-1} \quad \text{ならば} \quad \partial(\tau_{k-1}^*) = (-1)^k \sum_{\sigma_k} \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k)\sigma_k^*$$

証明. τ_{k-1} が σ_k の面でなければ $\varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k) = 0$ である.

$$\begin{aligned} & (-1)^k \sum_{\sigma_k} \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k)\sigma_k^* \\ &= (-1)^k \sum_{\sigma_k} \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k) \sum_{(\sigma_k, \dots, \sigma_n) \in \Sigma(\sigma_k)} \varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n)[b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)] \\ &= \sum_{(\tau_{k-1}, \sigma_k, \dots, \sigma_n) \in \Sigma(\sigma_{k-1})} (-1)^k \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k) \varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n)[b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)] \end{aligned}$$

なので $(-1)^k \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k) \varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n) = \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k, \dots, \sigma_n)$ を示せばよい.

$\sigma_k = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ であつた. $\tau_{k-1} = [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k]$ とすると

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k, \dots, \sigma_n)[b(\sigma_0), \dots, \widehat{b(\sigma_i)}, \dots, b(\sigma_{k-1}), b(\sigma_i), b(\sigma_k), \dots, b(\sigma_n)] \\ &= (-1)^{i+k} \varepsilon(\sigma_k, \dots, \sigma_n)[b(\sigma_0), \dots, b(\sigma_k), b(\sigma_{k+1}), \dots, b(\sigma_n)] \end{aligned}$$

かつ $\varepsilon(\tau_{k-1}, \sigma_k) = (-1)^i$ なので証明は終わる. □

σ_i, σ_j が共に k 鎖のとき, 構成より $\sigma_i \cap \sigma_j^* = \emptyset$ ($i \neq j$). k 鎖 $\sum a_i \sigma_i$ と $(n-k)$ 鎖 $\sum_j b_j \sigma_j^*$ の交点数を次で定める.

$$\left\langle \sum_i a_i \sigma_i, \sum_j b_j \sigma_j^* \right\rangle = \sum_i a_i b_i$$

すると, 補題 3.6.2 より次の関係式を得る.

$$\langle \partial \alpha, \beta \rangle = (-1)^k \langle \alpha, \partial \beta \rangle$$

k 鎖 $c_k = \sum_i a_i \sigma_i \in C_k^{T^*}(X)$ に対し $(n-k)$ 余鎖 $c^{n-k} \in C_{T^*}^{n-k}(X)$ を次で定める.

$$c^{n-k}(\sigma_i^*) = a_i, \quad \text{すなわち} \quad c^{n-k}\left(\sum_i b_i \sigma_i^*\right) = \sum_i a_i b_i = \langle c_k, \sum_i b_i \sigma_i \rangle$$

単体の台はコンパクトなので, この構成ではすべての $(n-k)$ 余鎖は得られず, コンパクト台を持つ余鎖のみが得られる. コンパクト台を持つ余鎖を $C_{c,T^*}^\bullet(X)$ と表すと,

$$C_k^T(X) = C_{c,T^*}^{n-k}(X),$$

を得る. $C_k^T(X) \rightarrow C_{k-1}^T(X)$ と $C_{c,T^*}^{n-k}(X) \rightarrow C_{c,T^*}^{n-k+1}(X)$ は符号のみが異なる. よって次の 2 つの複体のホモロジー群は同じものである.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C_n^T(X) \rightarrow C_{n-1}^T(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1^T(X) \rightarrow C_0^T(X) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow C_{c,T^*}^0(X) \rightarrow C_{c,T^*}^1(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_{c,T^*}^{n-1}(X) \rightarrow C_{c,T^*}^n T(X) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

すべての $(n-k)$ 余鎖を構成するには, 閉台を持つ無限鎖 $C_k((X))$ から同様の構成を考えればよい. 従って

$$C_k^T((X)) = C_{T^*}^{n-k}(X)$$

であり $C_k^T((X)) \rightarrow C_{k-1}^T((X))$ と $C_{T^*}^{n-k}(X) \rightarrow C_{T^*}^{n-k+1}(X)$ も符号のみが異なる. よって次の 2 つの複体のホモロジー群は同じものである.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C_n^T((X)) \rightarrow C_{n-1}^T((X)) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1^T((X)) \rightarrow C_0^T((X)) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow C_{T^*}^0(X) \rightarrow C_{T^*}^1(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_{T^*}^{n-1}(X) \rightarrow C_{T^*}^n T(X) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

従って, コンパクト台を持つ余鎖加群のコホモロジーを H_c^\bullet と表せば, 次の同型を得る.

$$H_k^T(X) \simeq H_{c,T^*}^{n-k}(X), \quad H_k^T((X)) \simeq H_{T^*}^{n-k}(X).$$

よって, 次の同型を得る.

$$H_k(X) \simeq H_c^{n-k}(X), \quad H_k((X)) \simeq H^{n-k}(X).$$

これらの同型をポアンカレ双対定理という. これはしばしば, 次の様に交点形式の言葉で述べられる.

定理 3.6.3 (ポアンカレ双対定理). X を向きつけられた n 次元多様体とすると, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は次の双一次形式を定義する.

$$H_k((X)) \times H_{n-k}(X) \rightarrow R$$

もし $H_{n-k-1}(X)$, $H_{k-1}((X))$ が振れを持たないならば, これは非退化である.

証明. 単体分割 T をとる. $\alpha \in Z_k^T((X))$, $\beta \in Z_{n-k}^T(X)$, $\alpha_1 \in C_{k+1}^T((X))$ とすると

$$\langle \alpha + \partial\alpha_1, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \partial\alpha_1, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + (-1)^{k-1} \langle \alpha, \partial\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

よって $\langle \alpha, \beta \rangle$ の値は α のホモロジー類で定まる. 同様に β のホモロジー類で $\langle \alpha, \beta \rangle$ の値定まることもわかる. よって, 双一次形式 $H_k^T((X)) \times H_{n-k}^T(X) \rightarrow R$ はうまく定義されている. 定理 3.4.3 より次の完全列がある.

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{n-k-1}(X), R) \rightarrow H_k((X)) = H^{n-k}(X) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}(H_{n-k}(X), R) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ext}_R^1(H_{k-1}((X)), R) \rightarrow H_{n-k}(X) = H_c^k(X) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}(H_k((X)), R) \rightarrow 0$$

非退化性を見るには φ が同型であることを言えばよいが $H_{n-k-1}(X)$, $H_{k-1}((X))$ が振れを持たないならば, Ext 加群は零なので非退化性がわかる. 後は T を細かくした極限をとれば定理の主張を得る. \square

演習 3.6.4. M を向きづけられたコンパクト n 次元多様体とし

$$H_k(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{a_k} \oplus T_k, \quad H^k(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k, \quad \text{但し } T_k, T^k \text{ は振れ群,}$$

とすると, $a_k = a_{n-k} = b_k = b_{n-k}$, $T^{n-k+1} \simeq T_{k-1} \simeq T^k \simeq T_{n-k}$ 特に $T_0 = T^1 = T_n = T^n = 0$.

前定理より $H_k(M, \mathbb{Z}) \simeq H^{n-k}(M, \mathbb{Z})$ なので, $a_k = b_{n-k}$, $T_k \simeq T^{n-k}$

定理 (3.4.3) より完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_R^1(H_{k-1}(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^k(M, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(H_k(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \text{Ext}_R^1(T_{k-1}, \mathbb{Z}) & & \mathbb{Z}^{b_k} \oplus T^k & & \mathbb{Z}^{a_k} \end{array}$$

があるので, $T_{k-1} \simeq T^k$, $a_k = b_k$. よって

$$T^{n-k+1} \stackrel{P.D.}{\simeq} T_{k-1} \simeq T^k \stackrel{P.D.}{\simeq} T_{n-k}$$

連結な向きつけられた n 次元多様体 M に対しては, $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ がわかる. \mathbb{Z} の生成元に対応する $H_n(M, \mathbb{Z})$ の元を X の基本類 (fundamental class) という. 生成元のと

方は一意的でないので、基本類は一意に定まるわけではない。符号のとり方の任意性がある。

基本類の定義は $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ なる X に対しても一般化される。即ち、 \mathbb{Z} の生成元 1 に対応する $H_n(X, \mathbb{Z})$ の元を X の基本類という。係数環 \mathbb{Z} を意識して \mathbb{Z} 基本類ということもある。

基本類の定義は係数環が \mathbb{Z} でない場合にも一般化される。 $H_n(X, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ なる X に対して、 $\mathbb{Z}/2$ の生成元 1 に対応する $H_n(X, \mathbb{Z}/2)$ の元を X の $\mathbb{Z}/2$ 基本類という。 $H_n(X, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ の同型は一意に定まるので $\mathbb{Z}/2$ 基本類は一意に定まる。

3.6.2 レフシェッツの双対定理

■被約ホモロジー (R_\bullet) を 0 次に R で他の次数は 0 の複体とする

$$(R_\bullet) \quad \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow 0$$

複体の射 $\varepsilon_\bullet : C_\bullet \rightarrow R_\bullet$ に対し $\tilde{H}_q(C_\bullet) = H_q(\text{Ker } \varepsilon_\bullet)$ を C_\bullet の被約ホモロジー群という。ここで、 $C_0 = R^n$ のとき $\varepsilon_0(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \sum a_i$ と定める。可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varepsilon_0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

より

$$\tilde{H}_q(C_\bullet) = H_q(C_\bullet) \quad (q \geq 1), \quad 0 \rightarrow \tilde{H}_q(C_\bullet) \rightarrow H_0(C_\bullet) \rightarrow R \rightarrow 0$$

である事がわかる。

■被約コホモロジー R^\bullet を 0 次に R で他の次数は 0 の余複体と見る。双対的に、余複体の射 $\varepsilon^\bullet : R^\bullet \rightarrow C^\bullet$ に対し $\tilde{H}^q(C^\bullet) = H^q(\text{Coker } \varepsilon^\bullet)$ を C^\bullet の被約コホモロジー群という。ここで $C^0 = R^n$ のとき $\varepsilon^0(a) = (a, \dots, a)$ と定める。可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^0 & \longrightarrow & C^1 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow \varepsilon^0 & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

より

$$\tilde{H}^q(C^\bullet) = H^q(C^\bullet) \quad (q \geq 1), \quad 0 \rightarrow R \rightarrow H_0(C^\bullet) \rightarrow \tilde{H}_0(C^\bullet) \rightarrow 0$$

である事がわかる。

応用上重要であるレフシェッツの双対定理を証明なしで述べておこう。

定理 3.6.5 (レフシェッツの双対定理). 有向 n 次元多様体 X 内のコンパクト集合 A と A 内の閉集合 B に対し

$$H_q(X \setminus B, X \setminus A) \simeq \tilde{H}^{n-q}(A, B)$$

注意 3.6.6. 任意の k に対し $H_k(X \setminus B, C) = 0$ となる $C \subset X \setminus A$ が存在すれば 3 対 $(X \setminus B, X \setminus A, C)$ のなす完全列

$$H_q(X \setminus B, C) \rightarrow H_q(X \setminus B, X \setminus A) \rightarrow H_{q-1}(X \setminus A, C) \rightarrow H_{q-1}(X \setminus B, C)$$

より, 次の同型を得る.

$$\tilde{H}^{n-q}(A, B) \simeq H_{q-1}(X \setminus A, C)$$

これをアレキサンダーの双対定理と言う. 例えば $X = S^n$, B, C を 1 点とすると次を得る.

$$\tilde{H}^{n-q}(A) \simeq H_{q-1}(S^n \setminus A)$$

$R = \mathbb{Z}$, $n = 3$, $q = 2$, A を S^3 内の結び目とすると $H^1(A) \simeq H_1(S^3 \setminus A)$ であり $\text{Ext}^1(H_1(A), \mathbb{Z}) = 0$ より $H^1(A) \simeq \text{Hom}(H_1(A), \mathbb{Z})$ であるから, 非退化双 1 次形式

$$H_1(A) \times H_1(S^3 \setminus A) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を得る. これは結び目 A と $S^3 \setminus A$ 内の結び目との絡み目数を与える双 1 次形式である.

3.7 レフシェッツの不動点公式

ホモロジーを用いてレフシェッツの不動点公式を定式化することが出来る. この節では, 鎖の係数 R を実数体 \mathbb{R} とする.

定理 3.7.1. コンパクト多様体 X が有限単体分割 T を持つとし写像 $f : X \rightarrow X$ と, T の有限単体細分 T' があり $f : X \rightarrow X$ が (T', T) に対して単体写像 (T' の単体を T の単体に移す写像) であるとする. このとき

$$L(f) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}\{(f_k)_* : H_k(X) \rightarrow H_k(X)\} \quad (3.9)$$

証明. $f : X \rightarrow X$ が (T', T) に対して単体写像なので, 鎖写像 $f_k : C_k^{T'}(X) \rightarrow C_k^T(X)$ が定義される. 自然な写像 $i_k : C_k^T(X) \rightarrow C_k^{T'}(X)$ を考える. Künneth の公式より次に注意する.

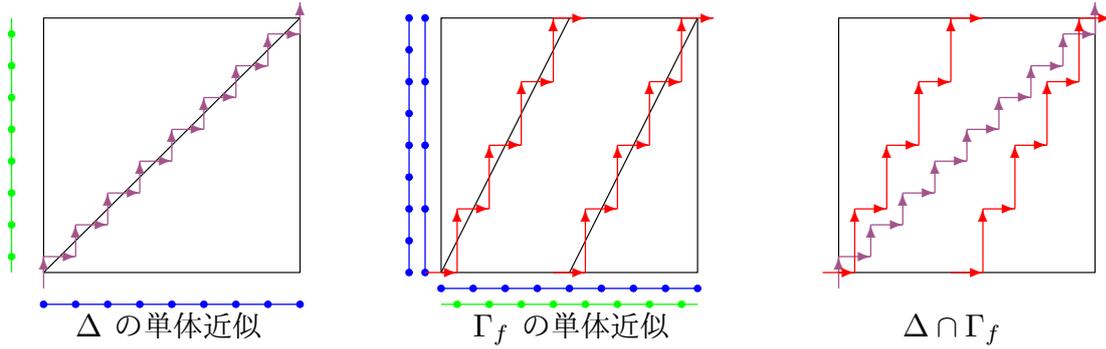
$$H_n(X \times X) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(X)$$

T の双対胞体分割を T^* とする.

補題 3.7.2. $H_n(X \times X)$ の中で Δ, Γ_f のホモロジー類は次のように表せる

$$[\Delta] = \sum_{p \geq 0} \sum_{\sigma_i^p \in C_p^T(X)} \sigma_i^p \times \sigma_i^{p*}, \quad [\Gamma_f] = \sum_{q \geq 0} (-1)^{q(n-q)} \sum_{\sigma_j^q \in C_q^T(X)} \sigma_j^{q*} \times f_q(\sigma_j^q)$$

例 3.7.3. $f: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, x \mapsto 2x$ の単体分割 $T \cdots$ と双対胞体分割 $T^* \cdots$ に関する対角線 Δ とグラフ Γ_f の近似とそれらの交点.



補題 3.7.2 の証明. まず右辺が輪体となる事を示そう. $\partial \sigma^k = \sum_{\sigma^{k-1}} \varepsilon(\sigma^{k-1}, \sigma^k) \sigma^{k-1}$ のとき $\partial[\sigma^{k-1*}] = (-1)^k \sum_{\sigma^k} \varepsilon(\sigma^{k-1}, \sigma^k) \sigma^{k*}$ なので

$$\begin{aligned} & \partial \left(\sum_{k=0}^n \sum_i \sigma_i^k \times \sigma_i^{k*} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_i [(\partial \sigma_i^k) \times \sigma_i^{k*} + (-1)^k \sigma_i^k \times \partial(\sigma_i^{k*})] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_j^{k-1}, \sigma_i^k) \sigma_j^{k-1} \times \sigma_i^{k*} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_i^k, \sigma_j^{k+1}) \sigma_i^k \times (\sigma_j^{k+1})^* \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_j^{k-1}, \sigma_i^k) \sigma_j^{k-1} \times \sigma_i^{k*} - \sum_{k=1}^n \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_j^{k-1}, \sigma_i^k) \sigma_j^{k-1} \times (\sigma_i^k)^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial \left[\sum_{k=0}^n (-1)^{k(n-k)} \sum_i \sigma_i^{k*} \times f(\sigma_i^k) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k(n-k)} \sum_i [\partial(\sigma_i^{k*}) \times f(\sigma_i^k) + (-1)^{n-k} \sigma_i^{k*} \times \partial f(\sigma_i^k)] \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{k(n-k)} \sum_i [\partial(\sigma_i^{k*}) \times f(\sigma_i^k) + (-1)^{n-k} \sigma_i^{k*} \times f(\partial(\sigma_i^k))] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k(n-k)+k+1} \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_j^k, \sigma_i^{k+1}) \sigma_j^{k+1*} \times f(\sigma_i^k) \\ & \quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{k(n-k)+n-k} \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_i^{k-1}, \sigma_j^k) \sigma_i^{k*} \times f(\sigma_i^{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{(k-1)(n-k+1)+k} \sum_{i,j} \varepsilon(\sigma_j^{k-1}, \sigma_i^k) \sigma_j^{k*} \times f(\sigma_i^{k-1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{(k+1)(n-k)} \sum_{i,j} (\varepsilon(\sigma_i^{k-1}, \sigma_j^k) \sigma_i^{k*} \times f(\sigma_i^{k-1})) = 0
\end{aligned}$$

単体分割 T を細かくしていけば、右辺が Δ または Γ_f を (必要なら向きをこめて) 近似することは明らかなので、十分細かい単体分割 T を考えればよい. なお、右辺のホモロジー類が単体分割の取り方によらない事を示せる筈 (だが面倒なので考えてない). \square

$\sigma_i^k \in C_k^T(X)$ に対し $f_k \circ i_k(\sigma_i^k) = \sum_j a_{i,j}^k \sigma_j^k$ とすると、

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma_f, \Delta \rangle &= \left\langle \sum_{q,j} (-1)^{q(n-q)} (\sigma_j^{q*} \times f(\sigma_j^q)), \sum_{p,i} (\sigma_i^p \times \sigma_i^{p*}) \right\rangle \\
&= \sum_{p,q,i,j} (-1)^{q(n-q)} \langle \sigma_j^{q*} \times f(\sigma_j^q), \sigma_i^p \times \sigma_i^{p*} \rangle \\
&= \sum_{p,q,i,j} (-1)^{q(n-q)+pq} \langle \sigma_j^{q*}, \sigma_i^p \rangle \langle f(\sigma_j^q), \sigma_i^{p*} \rangle \\
&= \sum_{p,q,i,j} (-1)^{(p+q)(n-q)+pq} \langle \sigma_j^p, \sigma_i^{q*} \rangle \langle f(\sigma_j^q), \sigma_i^{p*} \rangle \\
&= \sum_{q,i} (-1)^q \langle f(\sigma_i^q), \sigma_i^{q*} \rangle \quad \langle \sigma_j^p, \sigma_i^{q*} \rangle = 1 \ (p=q, i=j), \ 0 \ (\text{その他}) \\
&= \sum_{q,i} (-1)^q \left\langle \sum_{i,j} a_{i,j}^q \sigma_j^q, \sigma_i^{q*} \right\rangle \\
&= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \sum_i a_{i,i}^q = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \{ \text{tr}(f_q \circ i_q) : C_q^T(X) \rightarrow C_q^T(X) \}
\end{aligned}$$

よって次の補題より証明が終わる. \square

補題 3.7.4.

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \{ \text{tr}(f_k) : C_k^T(X) \rightarrow C_k^T(X) \} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \{ \text{tr}(f_k)_* : H_k^T(X) \rightarrow H_k^T(X) \}$$

証明. 次を示せば十分.

$$\text{tr}(f_k) = \text{tr}(f_k|_{B_k}) + \text{tr}(f_k)_* + \text{tr}(f_{k-1}|_{B_{k-1}})$$

$f_k(Z_k) \subset Z_k$ なので、 $f_k : C_k \rightarrow C_k$ は写像 $\tilde{f}_k : C_k/Z_k \rightarrow C_k/Z_k$ を誘導する. 写像 $\partial : C_k \rightarrow B_{k-1}$ は、同型 $C_k/Z_k \simeq B_{k-1}$ を誘導するので $\text{tr}(\tilde{f}_k) = \text{tr}(f_{k-1}|_{B_{k-1}})$ となり

$$\text{tr}(f_k) = \text{tr}(f_k|_{Z_k}) + \text{tr}(\tilde{f}_k) = \text{tr}(f_k|_{Z_k}) + \text{tr}(f_{k-1}|_{B_{k-1}})$$

を得る. $f_k(B_k) \subset B_k$ で $H_k = Z_k/B_k$ なので、 $f_k|_{Z_k} : Z_k \rightarrow Z_k$ は写像 $f_{k*} : H_k \rightarrow H_k$ を誘導し

$$\text{tr}(f_k|_{Z_k}) = \text{tr}(f_k|_{B_k}) + \text{tr}(f_k)_*$$

を得る. よって, 求める等式を得る. \square

上の証明を見れば, X が多様体でないときも, (3.9) の右辺は一定の幾何学的意味を持つことが予測される. 以下それを述べよう. 位相空間 X が有限単体分割 T をもつとし, T' をその有限細分 $f: X \rightarrow X$ が (T', T) に対して単体写像 (T' の単体を T の単体に移す写像) とすれば, $f_k: C_k^{T'}(X) \rightarrow C_k^T(X)$ が定義される. このとき補題 3.7.4 は成り立つ. $f_k(\sigma^k) \subset \pm\sigma^k$ となる T' の k 単体 $\sigma^k \in C_k^{T'}(X)$ の個数を符号込みで数えたものを Φ_k とすれば

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \Phi_k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \{ \text{tr}(f_k): H_k(X) \rightarrow H_k(X) \}$$

証明. 自然な埋込 $i_k: C_k^T(X) \rightarrow C_k^{T'}(X)$ に対し

$$C_k^T(X) \xrightarrow{i_k} C_k^{T'}(X) \xrightarrow{f_k} C_k^T(X)$$

$i_k(\sigma) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_s$ と書けば, $f_k \circ i_k(\sigma) = f(\sigma_1) + \cdots + f(\sigma_s)$ なので $f_k \circ i_k(\sigma)$ の σ の係数は, $\sigma \subset f(\sigma_i)$ なる σ_i の個数を向きから決まる符号付で数えたものであり, $\text{tr}(f_k \circ i_k) = \Phi_k$ となる. よって

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \Phi_k = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_k \circ i_k) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{tr}(f_k)_*$$

となり, 証明が終わる. \square

索引

Ext, 43

Mittag-Leffler の条件, 74

Tor, 43

アレキサンダーの双対定理, 81

一般の位置, 7

オイラー数, 39

階数, 27

拡大, 46

加群, 31

可縮空間, 52

絡み目数, 81

完全, 33

完全列, 12

基本類, 80

境界, 11

局所コンパクト, 68

コホモロジー群, 65

固有写像, 67

固有ホモトピー, 71

固有ホモトピー同値, 71

固有ホモトピー類, 71

固有ホモトピー型, 71

鎖, 11

鎖写像, 40

鎖ホモトピー, 41

射, 32

射影加群, 46

重心細分, 49, 50

自由分解, 41

単体, 8

単体写像, 53

塔, 73

特異単体鎖, 50

特異ホモロジー群, 51

凸集合, 7

凸包, 7

捩れ, 29

捩れ群, 27

花束, 63

複体, 11

分裂短完全列, 33

ベッチ数, 29

胞体, 62

胞体複体, 62

胞体分割, 62

ホモトピー, 52

ホモトピー逆写像, 52

ホモトピー同値, 52

ホモトピー類, 52

ホモトピー型, 52

ホモローガス, 12

ホモロジー群, 11

マイヤー・ビートルスの完全列, 59

向き, 9, 76

向きは同調, 10

有限生成アーベル群の基本定理, 27

余境界, 65

余鎖, 65

余複体, 65

余輪体, 65

輪体, 11

レフシェッツの双対定理, 81