

# 関数の特異点論の話題から

福井敏純

2016年10月24日

## 目次

1	特異点の分類と判定	3
1.1	$A_k$ 特異点	5
1.2	$D_k$ 特異点	8
1.3	$E_6, E_7, E_8$ 特異点	10
2	微分幾何への応用	11
2.1	$\mathbb{R}^3$ 内の曲面	12
2.2	$\mathbb{R}^4$ 内の曲面	13
2.3	$\mathbb{R}^5$ 内の曲面	14
2.4	$\mathbb{R}^6$ 内の曲面	14
2.5	$\mathbb{R}^7$ 内の曲面	15
2.6	$\mathbb{R}^8$ 内の曲面	16
2.7	$\mathbb{R}^9$ 内の曲面	17
2.8	$\mathbb{R}^{10}$ 内の曲面	18
2.9	要約	19
3	分類の障害とブローアップ	20
3.1	非調和比	20
3.2	ホイットニーの例	21
3.3	ブローアップ	22
3.4	ブロー解析同値	24
4	実代数的構成可能集合の不変量	26
4.1	位相空間論から	26

4.2	弧対称集合 . . . . .	27
4.3	仮想ポアンカレ多項式 . . . . .	28
4.4	弧解析的写像 . . . . .	31
5	弧空間の解析 . . . . .	33
5.1	弧空間 . . . . .	33
5.2	解析写像の誘導する弧空間の写像のファイバー . . . . .	34
5.3	モチーフ測度 . . . . .	36
5.4	モチーフ的ゼータ関数 . . . . .	37
5.5	ニュートン図形を用いた弧空間の計算 . . . . .	40
6	リプシッツ性とブロー解析性 . . . . .	44

## 準備

関数  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  が右同値 ( $\mathcal{R}$  同値) であるとは、 $f \circ h = g$  を満たす微分同相芽  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  が存在する時を言う。

関数  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  が  $\mathcal{K}$  同値であるとは、 $f \circ h = \varphi(x)f(x)$  を満たす微分同相芽  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ,  $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^*$  が存在する時を言う。

関数を研究する時は、同値関係としては右同値を、関数の零点集合を調べる時は同値関係として  $\mathcal{K}$  同値を用いる。

解析関数  $f(x) = \sum_{\nu} c_{\nu} x^{\nu}$  に対し、ニュートン図形  $\Gamma_+(f)$  を次で定める。

$$\Gamma_+(f) = \{\nu + \mathbb{R}_{\geq}^n : c_{\nu} \neq 0\} \text{ の凸包}$$

ニュートン図形  $\Gamma_+(f)$  は多面体であり、 $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  に対し

$$\langle a, \nu \rangle = a_1 \nu_1 + \dots + a_n \nu_n$$

とにおいて

$$m_f(a) = \min\{\langle a, \nu \rangle : \nu \in \Gamma_+(f)\}$$
$$\gamma(a) = \{\nu \in \Gamma_+(f) : \langle a, \nu \rangle = m_f(a)\}$$

と定める。 $\gamma(a)$  はベクトル  $a$  の支持する  $\Gamma_+(f)$  の面である。

$\gamma \subset \mathbb{R}^n$  に対し、 $f_{\gamma} = \sum_{\nu \in \gamma} c_{\nu} x^{\nu}$  と置く。 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  が非退化とは、 $\Gamma_+(f)$  の各コンパクト面  $\gamma$  に対し次を満たす時を言う。

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \text{grad } f_{\gamma}(x) = 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \cdots x_n = 0\}$$

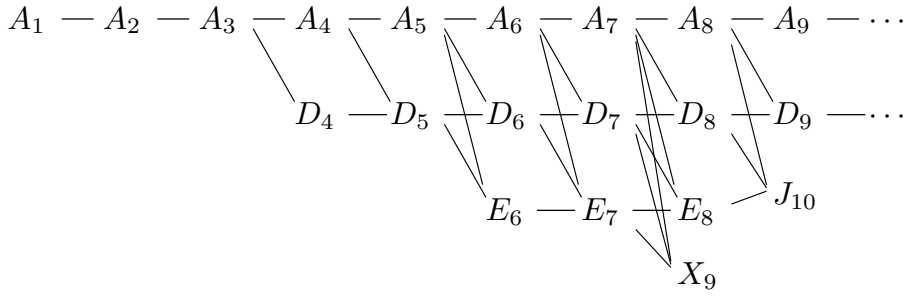
$X_{\gamma} = \{x \in (\mathbb{R}^*)^n : f_{\gamma}(x) = 0\}$ ,  $X_{\gamma}^{\pm} = \{x \in (\mathbb{R}^*)^n : f_{\gamma}(x) = \pm 1\}$  とおくと、非退化ならば、これらは非特異代数多様体であることがわかる。更に  $(\mathbb{R}^*)^{\dim \gamma}$  内の非特異代数多様体  $\widehat{X}_{\gamma}$  が存在して

$$X_{\gamma} = \widehat{X}_{\gamma} \times (\mathbb{R}^*)^{n - \dim \gamma}$$

となる。

## 1 特異点の分類と判定

$(u, v)$  を変数とする 2 変数関数  $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  を考える。 $f$  の特異点の階層は次のグラフで説明される。



ここで各記号は次の表に示す特異点を表す。

$A_k$	$\pm x^{k+1} \pm y^2$	
$D_k$	$x^2 y \pm y^{k-1}$	$k \geq 4$
$E_6$	$x^3 \pm y^4$	
$E_7$	$x^3 + xy^3$	
$E_8$	$x^3 + y^5$	
$X_9$	$\pm x^4 \pm y^4 \pm ax^2 y^2$	$a^2 \neq 4$
$X_{10}$	$y^4 + ax^2 y^2 + x^5$	$a \neq 0$
$J_{10}$	$x^3 \pm y^6 \pm ax^2 y^4$	$4a^3 + 27 \neq 0$

このグラフはよく知られているが、ここでは与えられた  $f$  がどの特異点であるかを明示的に示す判定法を与える。以下では  $A_k$  ( $1 \leq k \leq 5$ ),  $D_5, D_6, E_6, E_7, E_8$  について説明するが、 $X_9$  や  $J_{10}$  についても同様である。

■記号 原点での  $f(u, v)$  のテイラー展開を

$$\sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{i!j!} u^i v^j, \quad c_{ij} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial u^i \partial v^j}(0, 0).$$

とし、 $H_k(u, v)$  を次で定める。

$$H_k(u, v) = H_k(f)(u, v) = \sum_{i+j=k} \frac{c_{ij}}{i!j!} u^i v^j.$$

$du, dv$  を定数として、次のように置く。

$$\begin{aligned} c_k &= c_k(f) = H_k(f)(du, dv), \\ c_{ku} &= c_{ku}(f) = \frac{\partial H_k(f)}{\partial u}(du, dv), \\ c_{kv} &= c_{kv}(f) = \frac{\partial H_k(f)}{\partial v}(du, dv), \\ c_{k uu} &= c_{k uu}(f) = \frac{\partial^2 H_k(f)}{\partial u^2}(du, dv), \end{aligned}$$

$$c_{kuv} = c_{kuv}(f) = \frac{\partial^2 H_k(f)}{\partial u \partial v}(du, dv),$$

$$c_{kvv} = c_{kvv}(f) = \frac{\partial^2 H_k(f)}{\partial v^2}(du, dv), \quad \dots$$

## 1.1 $A_k$ 特異点

$f(u, v)$  が  $(0, 0)$  で特異点をもつと仮定する。(i.e.,  $c_{10} = c_{01} = 0$ ). 次の条件が同値である事はよく知られている。

- $f(u, v)$  は  $(0, 0)$  で  $A_1$  特異点。
- 行列  $\begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}$  は最大階数。

ヘッセ行列の階数が 1 の時はどうであろうか？これについては次の条件が同値であることを示せる。

- 行列  $\begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}$  は階数 1
- $c_{2u} = c_{2v} = 0$  を満たす、零でない  $(du, dv)$  が存在する。

$$(du \ dv) \begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix} = (0 \ 0).$$

- 次を満たす、零でない  $(du, dv)$  と  $s$  が存在する。

$$\begin{pmatrix} c_{20} & c_{11} \\ c_{11} & c_{02} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} dv^2 & -du \ dv \\ -du \ dv & du^2 \end{pmatrix}.$$

この条件が成立するとき、 $f$  が有限決定であれば  $f$  は  $A_k$  ( $k \geq 2$ ) 特異点である。以下この条件を仮定して、 $f$  が実際にどの  $A_k$  特異点であるかを明示的に判定する方法を ( $k$  が小さい時に) 与える。まず、次の関係式に注意する。

$$c_{20}u^2 + 2c_{11}uv + c_{0,2}v^2 = s(dv \ u - du \ v)^2$$

**定理 1.1.** もし  $(du, dv)$  が  $H_3(u, v) = 0$  の解でなければ (すなわち  $c_3 \neq 0$  ならば)  $f$  は  $A_2$  特異点である。

**定理 1.2.** 次の条件は同値である。

- $f$  は  $(0, 0)$  で  $A_3$  特異点である。
- $c_3 = 0$  かつ次のいずれかが成立。  
 $-dv \neq 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s \ dv^2} \neq 0.$

$$- du \neq 0, c_4 + \frac{c_{3v}^2}{2s du^2} \neq 0.$$

$$\bullet c_3 = 0, \text{ かつ } s c_4 - \frac{1}{8} \begin{vmatrix} c_{30} & c_{21} & dv^2 \\ c_{21} & c_{12} & -du dv \\ c_{12} & c_{03} & du^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

定理 1.3. 次の条件は同値である。

- $f$  は  $(0, 0)$  で  $A_4$  特異点である。
- $c_3 = 0$  であり、次のいずれかが成立する。
  - $dv \neq 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3u}c_{4u}}{dv^2 s} + \frac{c_{3uu}c_{3u}^2}{2dv^4 s^2} \neq 0.$
  - $du \neq 0, c_4 + \frac{c_{3v}^2}{2s du^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3v}c_{4v}}{du^2 s} + \frac{c_{3vv}c_{3v}^2}{2du^4 s^2} \neq 0.$

定理 1.4. 次の条件は同値である。

- $f$  は  $A_5$  特異点である。
- $c_3 = 0$  であり、次のいずれかが成立する。
  - $dv \neq 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3u}c_{4u}}{dv^2 s} + \frac{c_{3uu}c_{3u}^2}{2dv^4 s^2} = 0,$ 

$$c_6 - \frac{2c_{3u}c_{5u} + c_{4u}^2}{2dv^2 s} + \frac{2c_{3u}(c_{3uu}c_{4u} + c_{3u}c_{4uu})}{2dv^4 s^2} + \frac{c_{3u}^2(c_{21}^2 - c_{12}c_{30} - 7c_{3uu}^2)}{12dv^6 s^3} \neq 0.$$
  - $du \neq 0, c_4 + \frac{c_{3v}^2}{2s du^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3v}c_{4v}}{du^2 s} + \frac{c_{3vv}c_{3v}^2}{2du^4 s^2} = 0,$ 

$$c_6 - \frac{2c_{3v}c_{5v} + c_{4v}^2}{2du^2 s} + \frac{c_{3v}(2c_{3vv}c_{4v} + c_{3v}c_{4vv})}{2du^4 s^2} + \frac{c_{3v}^2(c_{21}^2 - c_{12}c_{30} - 7c_{3vv}^2)}{12du^6 s^3} \neq 0$$

証明を与えよう。まず次の補題を準備する。

補題 1.5.  $C^\infty$  関数  $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  に対し、 $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  ならば、任意の  $R \in \mathfrak{m}^{k+1}$  に対して、 $g$  と  $g + R$  は右同値である。

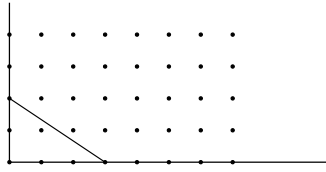
定理 1.1 の証明.  $dv \neq 0$  として証明する。(  $du \neq 0$  の時も同様であるので詳細は略す。 )  
 $x = dvu - dvv, y = v$  と置くと、

$$u = \frac{x + du y}{dv}, \quad v = y,$$

であり、次を得る。

$$f = \frac{s}{2}x^2 + \frac{c_3}{dv^3}y^3 + \frac{c_{3u}}{dv^3}xy^2 + \frac{c_4}{dv^4}y^4 + \frac{c_5}{dv^5}y^5 + \frac{c_{4u}}{dv^4}xy^3 + \frac{c_6}{dv^6}y^6 + \dots \quad (1.1)$$

もし  $c_3 \neq 0$  ならば、 $f$  のニュートン図形は次で与えられる。



$g = x^2 + y^3$  と置くと、 $Jg = \langle x, y^2 \rangle \cap \langle x, y \rangle^2$  より、 $k = 3$  について  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たす。よって  $j^3 f(0) = j^3 g(0)$  ならば、 $f$  と  $g$  は右同値。

適当な座標変換で  $x^3, x^2y, xy^2$  の係数を 0 にすることが出来れば補題 1.5 より証明が終わる。 $x$  を  $x\sqrt{U}$ ,  $U$  は単元、に取り替えることにより、 $x^3, x^2y$  の係数を 0 にすることが出来る。(1.1) で  $x$  を  $x + cy^2$  に置き換えると次を得る。

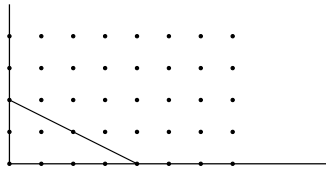
$$f = \frac{s}{2}x^2 + \left(sc + \frac{c_{3u}}{dv^3}\right)xy^2 + \frac{c_3}{dv^3}y^3 + \left(\frac{sc^2}{2} + \frac{c_{c_{3u}}}{dv^3} + \frac{c_4}{dv^4}\right)y^4 + \dots$$

$c = -\frac{c_{3u}}{sdv^3}$  とおけば、 $xy^2$  の係数は 0 となり、次を得る。

$$f = \frac{s}{2}x^2 + \frac{c_3}{dv^3}y^3 + \frac{1}{dv^4}\left(c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2}\right)y^4 + \frac{1}{dv^5}\left(c_5 + \frac{c_{3u}c_{4u}}{dv^2s} + \frac{c_{3uu}c_{3u}^2}{2dv^4s^2}\right)y^5 + \dots \quad (1.2)$$

よって  $c_3 \neq 0$  ならば  $f$  は  $A_2$  特異点である。  $\square$

**定理 1.2** の証明. 前証明の状況を引き継ぐ。 $c_3 = 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2} \neq 0$ , ならば  $f$  のニュートン図形は次のようになる。

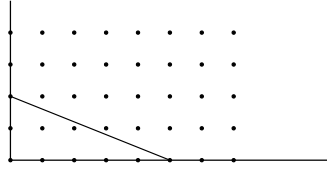


$g = \pm x^2 \pm y^4$  と置くと、 $Jg = \langle x, y^3 \rangle \cap \langle x, y \rangle^3$  より、 $k = 4$  について  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たす。よって  $j^4 f(0) = j^4 g(0)$  ならば、 $f$  と  $g$  は右同値。よって、適当な座標変換によって  $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3$  の係数を 0 に出来ればよい。 $x$  を  $x\sqrt{U}$ ,  $U$  は単元、に取り替えることにより、 $x^4, x^3y$  の係数を 0 にすることが出来る。 $x$  を  $x + cy^3$  に取り替えることにより、 $xy^3$  の係数も 0 とする事が出来る。最後の条件は次の等式の帰結である。

$$\frac{1}{8} \begin{vmatrix} c_{30} & c_{21} & dv^2 \\ c_{21} & c_{12} & -du dv \\ c_{12} & c_{03} & du^2 \end{vmatrix} + \frac{c_{3u}^2}{2dv^2} = \frac{3}{4}(c_{30}du + c_{21}dv)c_3.$$

$\square$

**定理 1.3** の証明. 前証明の状況を引き継ぐ。 $c_3 = 0, c_4 + \frac{c_{3u}^2}{2s dv^2} = 0, c_5 + \frac{c_{3u}c_{4u}}{dv^2s} + \frac{c_{3uu}c_{3u}^2}{2dv^4s^2} \neq 0$ , ならば  $f$  のニュートン図形は次のようになる。



$g = \pm x^2 + y^5$  と置くと、 $Jg = \langle x, y^4 \rangle \supset \langle x, y \rangle^3$  より、 $k = 5$  について  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たす。よって  $j^5 f(0) = j^5 g(0)$  ならば、 $f$  と  $g$  は右同値。よって、適当な座標変換によって  $x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4$  の係数を 0 に出来ればよい。 $x$  を  $x\sqrt{U}$ ,  $U$  は単元、に取り替えることにより、 $x^5, x^4y, x^3y^2$  の係数を 0 にすることが出来る。(1.2) で  $x$  を  $x + cy^3$  に取り替えると

$$f = \frac{s}{2}x^2 + \left( cs + \frac{c_{4u}}{dv^4} - \frac{c_{3u}c_{3uu}}{dv^6s} \right)xy^3 + *y^6 + \dots$$

となるので、 $c$  を  $cs + \frac{c_{4u}}{dv^4} - \frac{c_{3u}c_{3uu}}{dv^6s} = 0$ , 満たすように取れば

$$f = \frac{s}{2}x^2 + \left( \frac{c_6}{dv^6} - \frac{2c_{3u}c_{5u} + c_{4u}^2}{2dv^8s} + \frac{c_{3u}(2c_{3uu}c_{4u} + c_{3u}c_{4uu})}{2dv^{10}s^2} + \frac{c_{3u}^2(c_{21}^2 - c_{12}c_{30} - 7c_{3uu}^2)}{12dv^{12}s^3} \right)y^6 + \dots$$

を得る。よって  $f$  は  $A_5$  特異点である。 □

## 1.2 $D_k$ 特異点

ヘッセ行列の階数が 0 であると仮定しよう。すなわち  $c_{10} = c_{01} = c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$ . すると  $f(u, v)$  は  $(0, 0)$  で少なくとも  $D_4$  特異点を持つ。

$g = (x^2 \pm y^2)y$  と置く。 $Jg = \langle xy, x^2 + 3y^2 \rangle \supset \langle x, y \rangle^2$  なので  $k = 3$  に対して  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  つまり、 $j^3 f(0) = j^3 g(0)$  ならば  $f$  と  $g$  は右同値である。

もし方程式  $H_3(u, v) = 0$  が重解を持たなければ、線形変換で  $j^3 f(0)$  は  $(x^2 \pm y^2)y$  の形に直せるので、関数  $f$  は  $(0, 0)$  で  $D_4$  特異点である。すなわち

$$\begin{vmatrix} c_{30} & 2c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{30} & 2c_{21} & c_{12} \\ c_{21} & 2c_{12} & c_{03} & 0 \\ 0 & c_{21} & 2c_{12} & c_{03} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.3)$$

ならば、 $D_4$  特異点である。

これより、(1.3) の左辺の行列式が 0 ならば  $f$  は  $(0, 0)$  で少なくとも  $D_5$  特異点であることがわかる。以下、この状況の下、特異点の判定法を明示的に書き下す仕事を続けよう。

$c_{10} = c_{01} = c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$  かつ

$$H_3(u, v) = \frac{1}{6}(c_{30}u^3 + 3c_{21}u^2v + 3c_{12}uv^2 + c_{03}v^3) = 0$$



が 2 重根  $(du, dv)$  と単根  $(du_1, dv_1)$  を持つと仮定しよう。すると

$$c_3(u, v) = \frac{1}{6}(c_{30}u^3 + 3c_{21}u^2v + 3c_{12}uv^2 + c_{03}v^3) = (dvu - duv)^2(dv_1u - du_1v).$$

と仮定できる。これより次がわかる。

$$\begin{aligned} c_{30} &= 6dv^2dv_1 \\ c_{21} &= -2sdv(dvdu_1 + 2du dv_1) \\ c_{12} &= 2du(2dvdu_1 + dudv_1) \\ c_{03} &= -6du^2du_1. \end{aligned}$$

定理 1.6. 次の条件は同値である。

- 関数  $f$  は  $(0, 0)$  で  $D_5$  特異点である。

- $$\begin{vmatrix} c_{30} & 2c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{30} & 2c_{21} & c_{12} \\ c_{21} & 2c_{12} & c_{03} & 0 \\ 0 & c_{21} & 2c_{12} & c_{03} \end{vmatrix} = 0, c_4 \neq 0.$$

証明.  $f$  の 3 次部分は重根を持つ 3 次斉次式なので、座標変換で  $x^2y$  の形になる。

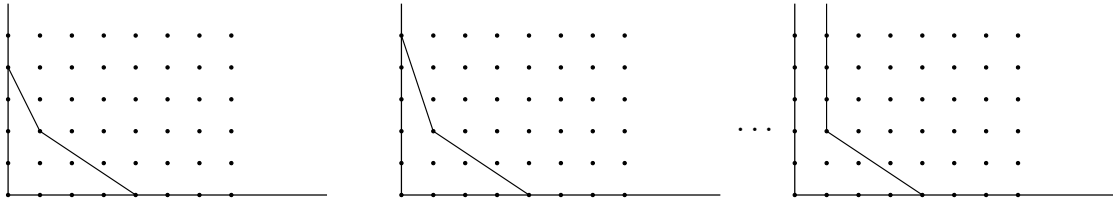
実際  $x = dvu - duv, y = dv_1u - du_1v$  と置けば

$$u = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} x & du \\ y & du_1 \end{vmatrix} \quad v = -\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} dv & x \\ dv_1 & y \end{vmatrix} \quad \text{但し} \quad \delta = \begin{vmatrix} dv & du \\ dv_1 & du_1 \end{vmatrix}$$

となり、次を得る。

$$f = x^2y + \frac{c_4}{\delta^4}y^4 - \frac{k}{\delta^4}xy^3 - \frac{c_5}{\delta^5}y^5 + \frac{c_6}{\delta^6}y^6 + \dots \quad (1.4)$$

ここで  $k = c_{4u}du_1 + c_{4v}dv_1$  である。もし  $c_4 \neq 0$  ならば  $f$  のニュートン図形は次のようになる。



$g = \pm xy^2 \pm y^4$  と置くと  $k = 4$  に対し  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たす。よって適当な座標変換で  $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3$  の係数を 0 に出来ればよい。□

定理 1.7. 次は同値である。

- $f$  は  $(0, 0)$  で  $D_6$  特異点である。

$$\bullet \begin{vmatrix} c_{30} & 2c_{21} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{30} & 2c_{21} & c_{12} \\ c_{12} & 2c_{21} & c_{03} & 0 \\ 0 & c_{12} & 2c_{21} & c_{03} \end{vmatrix} = 0, \quad c_4 = 0, \quad c_5 + \frac{(c_{4u} du_1 + c_{4v} dv_1)^2}{4 \begin{vmatrix} dv & du \\ dv_1 & du_1 \end{vmatrix}^3} \neq 0.$$

### 1.3 $E_6, E_7, E_8$ 特異点

$c_{10} = c_{01} = c_{20} = c_{11} = c_{02} = 0$  と仮定し

$$H_3(u, v) = \frac{1}{6}(c_{30}u^3 + 3c_{21}u^2v + 3c_{12}uv^2 + c_{03}v^3) = 0$$

が 3 重根  $(du, dv)$  をもつと仮定する。

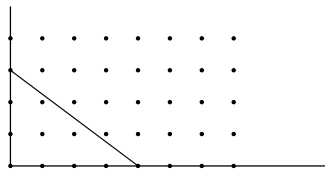
**定理 1.8.** 次が成り立つ。

- $(du, dv)$  が  $H_4(u, v) = 0$  の根でなければ (i.e.,  $c_4 \neq 0$ ),  $f$  は  $E_6$  特異点である。
- $(du, dv)$  が  $H_4(u, v) = 0$  の単根ならば  $f$  は  $E_7$  特異点である。
- $(du, dv)$  が  $H_4(u, v) = 0$  の重根で  $c_5 \neq 0$  ならば、 $f$  は  $E_8$  特異点である。

**証明.**  $dv \neq 0$  として証明をしよう。  $x = dvu - duv, y = v$ , と置くと

$$f = \frac{1}{6}x^3 + \frac{c_4}{dv^4}y^4 + \frac{c_{4v}}{dv^4}xy^3 + \frac{c_5}{dv^5}y^5 + o(x^{1/3}, y^{1/5})^{15}$$

$c_4 \neq 0$  ならば  $f$  のニュートン図形は次図のようになる。



$g = x^3 + y^4$  と置くと、 $k = 4$  に対して  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たすので、うまく座標を変えて  $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3$  の係数を 0 に出来ればよい。

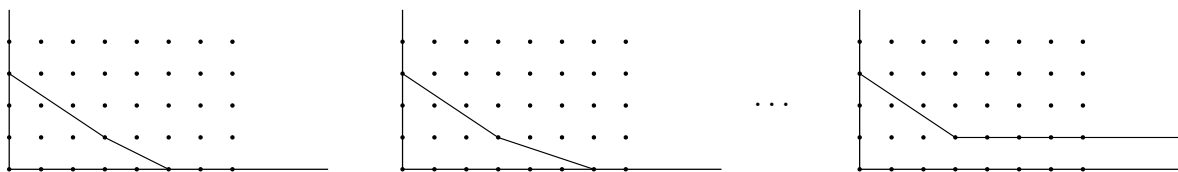
$y$  を  $y + cx$  に替えることにより、 $xy^4$  の係数を 0 にすることが出来る。

$x$  を単元倍することにより  $x^4, x^3y$  の係数を 0 にすることが出来る。

$x$  を  $x + cy^2$  に替えることにより、 $x^2y^2$  の係数を 0 にすることが出来る。

よって  $f$  は  $E_6$  特異点である。

$c_4 = 0, c_{4v} \neq 0$  ならば  $f$  のニュートン図形は次のようになる。



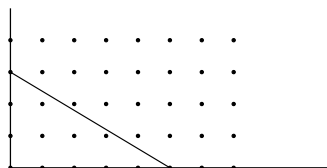
$(du, dv)$  は  $H_4(u, v) = 0$  の単根である。  $g = x^3 + xy^3$  と置くと、 $k = 4$  に<sup>\*1</sup>対して  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たすので、うまく座標を変えて  $x^4, x^3y, x^2y^2$  の係数を 0 に出来ればよい。

$x$  を単元倍することにより  $x^4, x^3y$  の係数を 0 にすることが出来る。

$x$  を  $x + cy^2$  に替えることにより、 $x^2y^2$  の係数を 0 にすることが出来る。

よって  $f$  は  $E_7$  特異点である。

$c_4 = c_{4v} = 0, c_5 \neq 0$  のとき、 $f$  のニュートン図形は次図のようになる。



$g = x^3 + y^5$  と置くと、 $k = 5$  に対して  $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}Jg + \mathfrak{m}^{k+1}$  を満たすので、うまく座標を変えて  $x^4, x^3y, x^2y^2, x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4$  の係数を 0 に出来ればよい。

$x$  を  $x + cy^2$  に替えることにより、 $x^2y^2$  の係数を 0 にすることが出来る。

$y$  を  $y + cx$  に替えることにより、 $xy^4$  の係数を 0 にすることが出来る。

$x$  を単元倍することにより  $x^4, x^3y, x^5, x^4y$  の係数を 0 にすることが出来る。

$x$  を  $x + cy^3$  に替えることにより、 $x^2y^3$  の係数を 0 にすることが出来る。

よって  $f$  は  $E_6$  特異点である。 □

## 2 微分幾何への応用

$C^\infty$  写像  $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  に対し

$$\text{高さ関数} \quad h_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle g(u, v), \mathbf{v} \rangle \quad \text{for } \mathbf{v} \in S^{n-1},$$

$$\text{距離二乗関数} \quad d_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto -\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - g(u, v)\|^2 \quad \text{for } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

を考える。  $g$  の点  $(u_0, v_0)$  での  $k$  次微分を

$$G_k = H_k(g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (du, dv) \mapsto \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} g}{\partial u^i \partial v^j} (u_0, v_0) du^i dv^j$$

で定める。すると高さ関数、距離二乗関数の  $k$  次微分は次で与えられる。

$$H_k(h_{\mathbf{v}})(u, v) = \langle G_k(u, v), \mathbf{v} \rangle$$

$$H_k(d_{\mathbf{y}})(u, v) = \langle G_k(u, v), \mathbf{y} - g(u_0, v_0) \rangle - I_k(u, v)$$

---

<sup>\*1</sup>  $k = 5$  の誤り。後の議論も変える必要がある。このことを指摘くださった中村弥生氏に感謝します。

$I_k(u, v)$  はある対称  $k$  形式である。例えば  $I_2$  は次の第一基本形式である。

$$I_2(u, v) = I_{2,0}(u_0, v_0)u^2 + 2I_{1,1}(u_0, v_0)uv + I_{0,2}(u_0, v_0)v^2$$

但し  $I_{2,0} = \langle g_u, g_u \rangle$ ,  $I_{1,1} = \langle g_u, g_v \rangle$ ,  $I_{0,2} = \langle g_v, g_v \rangle$ .  $I_3$  は次で与えられる 3 次形式である。

$$I_3(u, v) = \frac{1}{6}(I_{3,0}(u_0, v_0)u^3 + 3I_{2,1}(u_0, v_0)u^2v + 3I_{1,2}(u_0, v_0)uv^2 + I_{0,3}(u_0, v_0)v^3),$$

し但  $I_{3,0} = 3\langle g_u, g_{uu} \rangle$ ,  $I_{2,1} = \langle g_v, g_{uu} \rangle + 2\langle g_u, g_{uv} \rangle$ ,  $I_{1,2} = \langle g_u, g_{vv} \rangle + 2\langle g_v, g_{uv} \rangle$ ,  $I_{0,3} = 3\langle g_v, g_{vv} \rangle$ .

## 2.1 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面

■高さ関数  $h_v$ . ジェネリックには  $h_v$  が少なくとも  $A_1$  特異点をもつような  $v \in S^2$  が存在する。これは次の条件で書かれる。

$$H_1(h_v)(u, v) \equiv 0,$$

核方向 (漸近方向)  $(du, dv)$  は次の方程式の解である。

$$H_2(h_v)(du, dv) = 0.$$

これを、(後々との比較のため) 次のように書いておく。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & \\ g_v & \\ G_2(du, dv) & \end{pmatrix} = 0$$

■距離二乗関数  $d_y$ . ジェネリックには  $d_y$  が少なくとも  $A_2$  特異点である  $y \in \mathbb{R}^3$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(d_y)(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(d_y) = 0, \quad c_{2v}(d_y) = 0.$$

これより核方向 (主方向)  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu}du + g_{uv}dv & I_{2,0}du + I_{1,1}dv \\ g_{uv}du + g_{vv}dv & I_{1,1}du + I_{0,2}dv \end{pmatrix} = 0.$$

## 2.2 $\mathbb{R}^4$ 内の曲面

■高さ関数  $h_{\mathbf{v}}$ . ジェネリックには  $h_{\mathbf{v}}$  が少なくとも  $A_2$  特異点である  $\mathbf{v} \in S^3$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(h_{\mathbf{v}})(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(h_{\mathbf{v}}) = 0, \quad c_{2v}(h_{\mathbf{v}}) = 0.$$

$$\begin{aligned} H_1(h_{\mathbf{v}})(u, v) &= \langle g_u u + g_v v, \mathbf{v} \rangle = \langle g_u, \mathbf{v} \rangle u + \langle g_v, \mathbf{v} \rangle v \\ c_{2u}(h_{\mathbf{v}}) &= \langle g_{uu} du + g_{uv} dv, \mathbf{v} \rangle \\ c_{2v}(h_{\mathbf{v}}) &= \langle g_{uv} du + g_{vv} dv, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

なので、核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & \\ g_v & \\ g_{uu} du + g_{uv} dv & \\ g_{uv} du + g_{vv} dv & \end{pmatrix} = 0 \quad (2.1)$$

■距離二乗関数  $d_{\mathbf{y}}$ . ジェネリックには  $d_{\mathbf{y}}$  が少なくとも  $A_3$  特異点である  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(d_{\mathbf{y}})(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(d_{\mathbf{y}}) = 0, \quad c_{2v}(d_{\mathbf{y}}) = 0, \quad H_3(d_{\mathbf{y}})(du, dv) = 0.$$

核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} du + g_{uv} dv & I_{2,0} du + I_{1,1} dv \\ g_{uv} du + g_{vv} dv & I_{1,1} du + I_{0,2} dv \\ G_3(du, dv) & I_3(du, dv) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

■モンジュ標準型 写像  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  が次で定義されているとする。

$$g(u, v) = \left( u, v, \sum_{i+j \geq 2} \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j, \sum_{i+j \geq 2} \frac{b_{ij}}{i!j!} u^i v^j \right).$$

すると、方程式 (2.1), (2.2) は  $(u, v) = (0, 0)$  でそれぞれ次の形になることに注意しておく。

$$\det \begin{pmatrix} a_{20} du + a_{11} dv & b_{20} du + b_{11} dv \\ a_{11} du + a_{02} dv & b_{11} du + b_{02} dv \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{20} du + a_{11} dv & b_{20} du + b_{11} dv & du \\ a_{11} du + a_{02} dv & b_{11} du + b_{02} dv & dv \\ A_3(du, dv) & B_3(du, dv) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ここで  $A_3(u, v) = \sum_{i+j=3} \frac{a_{ij}}{i!j!} u^i v^j$ ,  $B_3(u, v) = \sum_{i+j=3} \frac{b_{ij}}{i!j!} u^i v^j$ .

### 2.3 $\mathbb{R}^5$ 内の曲面

■高さ関数  $h_v$ . ジェネリックには  $h_v$  が少なくとも  $A_3$  特異点である  $v \in S^4$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$$H_1(h_v)(u, v) \equiv 0, \quad c_{2u}(h_v) = 0, \quad c_{2v}(h_v) = 0, \quad H_3(h_v)(du, dv) = 0.$$

核方向  $(du, dv)$  の方程式は次のようになる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & & & & \\ & g_v & & & \\ g_{uu}du + g_{uv}dv & & & & \\ g_{uv}du + g_{vv}dv & & & & \\ & & G_3(du, dv) & & \end{pmatrix} = 0.$$

■距離二乗関数  $d_y$ . ジェネリックには  $d_y$  が少なくとも  $A_4$  および  $D_4$  特異点である  $y \in \mathbb{R}^5$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$D_4$  特異点の核方向は 1 つ又は 3 つでありその方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & & 0 & & & \\ & g_v & & 0 & & \\ g_{uu} & & I_{2,0} & & & \\ g_{uv} & & I_{1,1} & & & \\ g_{vv} & & I_{0,2} & & & \\ G_3(du, dv) & & I_3(du, dv) & & & \end{pmatrix} = 0.$$

$A_4$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式を書き下すのは紙面を要するので省略する。 $(du, dv)$  に関して 14 次の方程式である。

### 2.4 $\mathbb{R}^6$ 内の曲面

■高さ関数  $h_v$ . ジェネリックには  $h_v$  が少なくとも  $A_4, D_4$  特異点である  $v \in S^5$  が存在する。

$D_4$  特異点の核方向は 1 つ又は 3 つでありその方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & & & & & \\ & g_v & & & & \\ g_{uu} & & & & & \\ g_{uv} & & & & & \\ g_{vv} & & & & & \\ G_3(du, dv) & & & & & \end{pmatrix} = 0$$

$A_4$  特異点の核方向  $(du, dv)$  については前項とほぼ同じであるが省略する。

■距離二乗関数  $d_{\mathbf{y}}$ . ジェネリックには  $d_{\mathbf{y}}$  が少なくとも  $A_5$ , または  $D_5$  特異点である  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^6$  が存在する。

$D_5$  特異点の核方向は、主要項の重根の方向  $(du, dv)$  と単根の方向  $(du_1, dv_1)$  がある。重根方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ (G_3)_u(du, dv) & (I_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) & (I_3)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$A_5$  特異点の核方向  $(du, dv)$  については書き下すと複雑なので (78 次の方程式) 省略する。

## 2.5 $\mathbb{R}^7$ 内の曲面

■高さ関数  $h_{\mathbf{v}}$ . ジェネリックには  $h_{\mathbf{v}}$  が少なくとも  $A_5$ ,  $D_5$  特異点である  $\mathbf{v} \in S^6$  が存在する。

$D_5$  特異点の核方向は、主要項の重根の方向  $(du, dv)$  と単根の方向  $(du_1, dv_1)$  がある。重根方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ (G_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$A_5$  特異点の核方向は前項と同様なので省略する。

■距離二乗関数  $d_{\mathbf{y}}$ . ジェネリックには  $d_{\mathbf{y}}$  が少なくとも  $A_6$ ,  $D_6$ ,  $E_6$  特異点である  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^7$  が存在する。

$E_6$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & I_{3uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & I_{3uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & I_{3vv}(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$D_6$  特異点の核方向 (重根の方向) $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ (G_3)_u(du, dv) & (I_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) & (I_3)_v(du, dv) \\ G_4(du, dv) & I_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$A_6$  特異点の核方向はどのように記述されるかは (筆者には) わからない。

## 2.6 $\mathbb{R}^8$ 内の曲面

■高さ関数  $h_v$ . ジェネリックには  $h_v$  が少なくとも  $A_6, D_6, E_6$  特異点である  $v \in S^7$  が存在する。

$E_6$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv \end{pmatrix} = 0$$

$D_6$  特異点の核方向 (重根の方向) $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ (G_3)_u(du, dv) \\ (G_3)_v(du, dv) \\ G_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$A_6$  特異点の核方向はどのように記述されるかは (筆者には) わからない。

■距離二乗関数  $d_y$ . ジェネリックには  $d_y$  が少なくとも  $A_7, D_7, E_7$  特異点である  $y \in \mathbb{R}^8$  が存在する。



$E_7$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & I_{3uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & I_{3uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & I_{3vv}(du, dv) \\ G_4(du, dv) & I_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$D_7$  および  $A_7$  特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

## 2.7 $\mathbb{R}^9$ 内の曲面

■高さ関数  $h_v$ . ジェネリックには  $h_v$  が少なくとも  $A_7, D_7, E_7$  特異点である  $v \in S^8$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$E_7$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv \\ G_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$D_7$  および  $A_7$  特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

■距離二乗関数  $d_y$ . ジェネリックには  $d_y$  が少なくとも  $A_8, D_8, E_8, X_9$  特異点である  $y \in \mathbb{R}^9$  が存在する。

$X_9$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu} & (I_3)_{uuu} \\ g_{uuv} & (I_3)_{uuv} \\ g_{uvv} & (I_3)_{uvv} \\ g_{vvv} & (I_3)_{vvv} \\ G_4(du, dv) & I_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$E_8$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & (I_3)_{uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & (I_3)_{uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & (I_3)_{vv}(du, dv) \\ (G_4)_u(du, dv) & (I_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) & (I_4)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$D_8$  および  $A_8$  特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

## 2.8 $\mathbb{R}^{10}$ 内の曲面

■高さ関数  $h_v$ . ジェネリックには  $h_v$  が少なくとも  $A_8, D_8, E_8, X_9$  特異点である  $v \in S^9$  が存在する。この条件は次で与えられる。

$X_9$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu} \\ g_{uuv} \\ g_{uvv} \\ g_{vvv} \\ G_4(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$E_8$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \\ g_{uu} \\ g_{uv} \\ g_{vv} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv \\ (G_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$D_8$  および  $A_8$  特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

■距離二乗関数  $d_{\mathbf{y}}$ . ジェネリックには  $d_{\mathbf{y}}$  が少なくとも  $A_9, D_9, J_{10}, X_{10}$  特異点である  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{10}$  が存在する。

$X_{10}$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu} & (I_3)_{uuu} \\ g_{uuv} & (I_3)_{uuv} \\ g_{uvv} & (I_3)_{uvv} \\ g_{vvv} & (I_3)_{vvv} \\ (G_4)_u(du, dv) & (I_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) & (I_4)_v(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$J_{10}$  特異点の核方向  $(du, dv)$  の方程式は次で与えられる。

$$\det \begin{pmatrix} g_u & 0 \\ g_v & 0 \\ g_{uu} & I_{2,0} \\ g_{uv} & I_{1,1} \\ g_{vv} & I_{0,2} \\ g_{uuu}du + g_{uuv}dv & (I_3)_{uu}(du, dv) \\ g_{uuv}du + g_{uvv}dv & (I_3)_{uv}(du, dv) \\ g_{uvv}du + g_{vvv}dv & (I_3)_{vv}(du, dv) \\ (G_4)_u(du, dv) & (I_4)_u(du, dv) \\ (G_4)_v(du, dv) & (I_4)_v(du, dv) \\ G_5(du, dv) & I_5(du, dv) \end{pmatrix} = 0$$

$D_9$  および  $A_9$  特異点の核方向はどのように記述されるかは（筆者には）わからない。

## 2.9 要約

埋込先のユークリッド空間の次元  $n$  と考えるべき特異点、及びここで得たその核方向のみたす微分方程式の  $(du, dv)$  に関する次数を表にまとめておこう。

埋込次元 $n$		考える特異点型と 核方向の微分方程式の次数							
$h_v$	$d_y$								
3		$A_1$	2						
4	3	$A_2$	2						
5	4	$A_3$	5						
6	5	$A_4$	14	$D_4$	3				
7	6	$A_5$	78	$D_5$	4				
8	7	$A_6$	?	$D_6$	8	$E_6$	3		
9	8	$A_7$	?	$D_7$	?	$E_7$	7		
10	9	$A_8$	?	$D_8$	?	$E_8$	9	$X_9$	4
11	10	$A_9$	?	$D_9$	?	$J_{10}$	14	$X_{10}$	6

### 3 分類の障害とブローアップ

#### 3.1 非調和比

$\mathbb{R}^2$  の 4 つのベクトル  $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}$  に対し、その非調和比を

$$\sigma_{i,j;k,l} = \frac{|v_i v_k| \cdot |v_j v_l|}{|v_i v_l| \cdot |v_j v_k|}$$

で定める。 $\sigma_{i,j;k,l} = \sigma_{j,i;l,k} = \sigma_{k,l;i,j} = \sigma_{l,k;j,i}$  なので、 $i, j, k, l$  を入れ替えた時、非調和比の値は高々  $4!/4 = 6$  個の値を取る。それらの値は次のように実現される。

- $\sigma_{i,j;l,k} = \frac{1}{\sigma_{i,j;k,l}} (= \sigma_{j,i;k,l} = \sigma_{l,k;i,j} = \sigma_{k,l;j,i})$ .
- $\sigma_{i,k;j,l} = 1 - \sigma_{i,j;k,l} (= \sigma_{k,i;l,j} = \sigma_{j,l;i,k} = \sigma_{l,j;k,i})$ .
- $\sigma_{i,k;l,j} = \frac{1}{1 - \sigma_{i,j;k,l}} (= \sigma_{k,i;j,l} = \sigma_{l,j;k,i} = \sigma_{j,l;i,k})$ .
- $\sigma_{i,l;j,k} = \frac{\sigma_{i,j;k,l} - 1}{\sigma_{i,j;k,l}} (= \sigma_{l,i;k,j} = \sigma_{j,k;i,l} = \sigma_{k,j;l,i})$ .
- $\sigma_{i,l;k,j} = \frac{\sigma_{i,j;k,l}}{\sigma_{i,j;k,l} - 1} (= \sigma_{l,i;j,k} = \sigma_{k,j;i,l} = \sigma_{j,k;l,i})$ .

非調和比には番号  $\{1, 2, 3, 4\}$  の入れ替えにより、4 次対称群  $S_4$  が作用している。この作用の核は、クライン群  $K (= \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2)$  であり、商群  $S_4/K = S_3$  が非調和比に効果的に作用している。

実際、6 つの一次分数変換

$$\sigma_1 : \lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_2 : \lambda \mapsto 1 - \lambda, \quad \sigma_3 : \lambda \mapsto \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \tau_1 : \lambda \mapsto \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \tau_2 : \lambda \mapsto \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

を考えると、これらは合成に関して 3 次対称群と同型な群をなすことが確かめられる。

1	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\tau_1$	$\tau_2$
$\sigma_1$	1	$\tau_1$	$\tau_2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$\sigma_2$	$\tau_2$	1	$\tau_1$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$\sigma_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	1	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\tau_1$	$\sigma_3$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\tau_2$	1
$\tau_2$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_3$	1	$\tau_1$

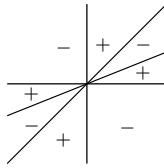
最後に、上で示した関係式で次節で使うものを、使い易い形に直して注意しておこう。

$$\sigma_{j,k;l,i} = \frac{\sigma_{i,j;k,l}}{\sigma_{i,j;k,l} - 1}, \quad \sigma_{k,l;i,j} = \sigma_{i,j;k,l}, \quad \sigma_{l,i;j,k} = \frac{\sigma_{i,j;k,l}}{\sigma_{i,j;k,l} - 1},$$

$$\sigma_{l,k;j,i} = \sigma_{i,j;k,l}, \quad \sigma_{k,j;i,l} = \frac{\sigma_{i,j;k,l}}{\sigma_{i,j;k,l} - 1}, \quad \sigma_{j,i;l,k} = \sigma_{i,j;k,l}, \quad \sigma_{i,l;k,j} = \frac{\sigma_{i,j;k,l}}{\sigma_{i,j;k,l} - 1}$$

### 3.2 ホイットニーの例

$f_t : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $0 < t < 1$ ),  $f_t(x, y) = xy(y - x)(y - tx)$ , と置く。



■右同値  $f_t$  と  $f_s$  が  $C^1$  右同値であるとする。つまり、 $f_t = f_s \circ h$  となる、 $C^1$  微分同相  $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  があったとする。4つのベクトル  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  が生成する直線をそれぞれ  $l_1, l_2, l_3, l_4$  とする。 $l_1 \cup l_2 \cup l_3 \cup l_4$  は線形写像  $dh$  で保たれ ( $t$  を  $s$  に変えたものに移る)、 $f_t \geq 0$  なる領域が保たれることも考慮すると、 $l_i$  の像は次の4つの場合しかない。

$h(l_1)$	$h(l_2)$	$h(l_3)$	$h(l_4)$	非調和比	$h$
$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$\sigma_{1,2;3,4}$	向きを保つ
$l_3$	$l_4$	$l_1$	$l_2$	$\sigma_{3,4;1,2}$	向きを保つ
$l_2$	$l_1$	$l_4$	$l_3$	$\sigma_{2,1;4,3}$	向きを逆転
$l_4$	$l_3$	$l_2$	$l_1$	$\sigma_{4,3;2,1}$	向きを逆転

この表に現れた非調和比は全て  $1/(1-t)$  に等しいので  $t = s$  を帰結する。

■V同値  $h(f_t^{-1}(0)) = f_s^{-1}(0)$  となる  $C^1$  微分同相  $h$  があったとすると、次の集合は  $dh$  で不変である。

$$\{\sigma_{1,2;3,4}, \sigma_{2,3;4,1}, \sigma_{3,4;1,2}, \sigma_{4,1;2,3}, \sigma_{4,3;2,1}, \sigma_{3,2;1,4}, \sigma_{2,1;4,3}, \sigma_{1,4;3,2}\}$$

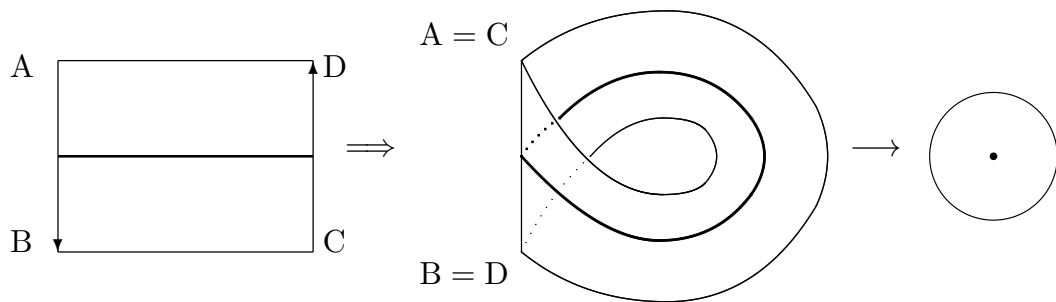
$\sigma_{1,2;3,4} = \frac{1}{1-t}$ ,  $\sigma_{2,3;4,1} = \frac{1}{t}$  よりこの集合は  $\{\frac{1}{1-t}, \frac{1}{t}\}$  であることがわかる。 $h(x, y) = (y, y - (1-t)x)/a$  とすると、

$$f_t \circ h(x, y) = -(t-1)^2 a^{-4} xy(y-x)(y-(1-t)x)$$

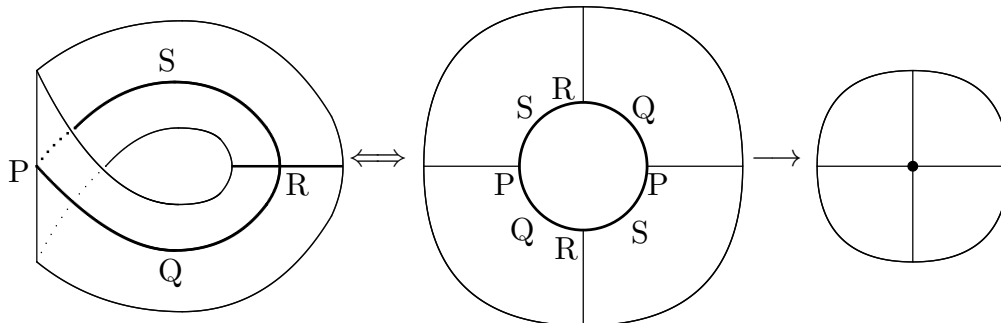
となる。 $a = \sqrt{|t-1|}$  とおくと  $f_t \circ h = -f_{1-t}$ .

### 3.3 ブローアップ

長方形 ABCD において  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{CD}$  を同一視して得られる図形をメビウスの帯という。



メビウスの帯から円板 (平面の原点中心の円板) に向かって写像を作ろう。メビウスの帯の中心線 (長方形の AB の中点と CD の中点を結ぶ線分に対応する円, 図の太線部) を 1 点に潰す写像を考える。これは次のような解釈で理解する事もできる。メビウスの帯を中心線にハサミをいれて切り開くと次のページ上の中央の図のようなアニュラス (annulus) と呼ばれる図形になる。アニュラスの内側の円の原点について対称な点を同一視して得られる図形はメビウスの帯である。アニュラスの内側の円を 1 点に潰すと円板になるので、メビウスの帯の中心円を一点に潰す写像ができる。この写像を平面のブローアップという。



■射影直線を用いた説明  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  なる実数の組  $(\xi, \eta)$  に対し、関係  $\sim$  を次で定める。

$$(\xi, \eta) \sim (\xi', \eta') \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists t \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ s.t. } \xi = t\xi', \eta = t\eta'.$$

この同値関係による  $(\xi, \eta)$  の同値類を、記号  $[\xi : \eta]$  で表し、この同値関係  $\sim$  による  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  の商空間を実射影直線と呼び  $P^1(\mathbb{R})$ , または単に  $P^1$  で表す。

$$P^1 = P^1(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^2 - 0 / \sim.$$

ここで  $\mathbb{R}^2$  の原点  $(0, 0)$  を単に  $0$  と略記している。

**定義 3.1.**  $M = \{(x, y) \times [\xi : \eta] \in \mathbb{R}^2 \times P^1(\mathbb{R}) \mid x\eta = y\xi\}$  とおき、自然な射影  $\mathbb{R}^2 \times P^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  の  $M$  への制限を  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \times [\xi : \eta] \mapsto (x, y)$  と書く。これを平面の原点でのブローアップという。  $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times P^1$  であり、  $\pi|_{M - \pi^{-1}(0)} : M - \pi^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  は同型となる。

■地図を用いた表示 平面のブローアップで得られた集合  $M$  の部分集合  $U, V$  を次で定義する。

$$U = \{(x, y) \times [\xi, \eta] \in \mathbb{R}^2 \times P^1(\mathbb{R}) \mid x\eta = y\xi, \xi \neq 0\}$$

$$V = \{(x, y) \times [\xi, \eta] \in \mathbb{R}^2 \times P^1(\mathbb{R}) \mid x\eta = y\xi, \eta \neq 0\}$$

明らかに  $M = U \cup V$  が成り立つ。次で写像  $\varphi, \phi$  を定義するとこれらは全単射である。

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \times [\xi, \eta] \mapsto (u, v) = \left(x, \frac{\eta}{\xi}\right)$$

$$\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \times [\xi, \eta] \mapsto (u', v') = \left(\frac{\xi}{\eta}, y\right)$$

このとき

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \cap \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}^2 \cap \phi(U), \quad (u, v) \mapsto (u', v') = \left(\frac{1}{v}, uv\right)$$

は解析的同型写像であることがわかる。

よって  $M$  は  $\mathbb{R}^2$  と同形であるような2つの図形  $U$  (座標を  $(u, v)$  とする) と  $V$  (座標を  $(u', v')$  とする) を次の関係式で貼り合わせて得られる図形であると考え事ができる。

$$(u', v') = \left(\frac{1}{v}, uv\right).$$

これをブローアップ  $M$  の地図による表示という。

写像  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $(u, v)$  および  $(u', v')$  を用いて表すと  $(x, y) = (u, uv) = (u'v', v')$  となる。これより平面のブローアップ  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  は解析的写像である事がわかる。

### 一般のブローアップ

$U$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合,  $f_1, \dots, f_k$  を  $U$  上で定義された解析的関数とする.  $X = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$  とおいて,

$$\{x \times [\xi_1 : \dots : \xi_k] \in U \times P^{k-1} \mid [f_1(x) : \dots : f_k(x)] = [\xi_1 : \dots : \xi_k], x \notin X\}$$

のザリスキ閉包を  $Z$  とする. このとき自然な写像

$$\pi : Z \longrightarrow U, \quad (x, \xi) \mapsto x$$

を  $X$  を中心とした  $U$  のブローアップという. イデアル  $\langle f_1, \dots, f_k \rangle$  を中心としたブローアップと言う言い方をすることもある. ザリスキ閉包を取るのには、ザリスキ閉包を取らなければ  $Z$  が解析空間である保証がないからである. 解析空間であることを諦めるのであれば普通の閉包を考えて悪いわけではない.

$\mathbb{R}^n$  の原点ブローアップは  $x_1, \dots, x_n$  の生成するイデアルを中心としたブローアップである.

### 3.4 ブロー解析同値

まず、郭子加による観察を紹介しよう.

**観察** ホイットニーの例  $f_t(x, y) = xy(y-x)(y-tx)$ ,  $t > 2$ , とブローアップ  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  を合成すると解析的自明な族になる. この解析的自明性は  $(\mathbb{R}^2, 0)$  の位相自明性を誘導する.

即ち  $E = \pi^{-1}(0)$  と置くとき、実解析的同型  $H_t : (M, E) \rightarrow (M, E)$ , 位相同型  $h_t : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  が存在して次の可換図式を満たす.

$$\begin{array}{ccccc} (M, E) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \\ & \downarrow H_t & & \downarrow h_t & \parallel \\ (M, E) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{f_t} & \mathbb{R} \end{array}$$

この事実を、証明しよう.  $F(x, y, t) = f_t(x, y)$  と置く.

$$\xi = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t}$$

と置けば、 $\xi F \equiv 0$  であり、 $\xi$  は  $\pi$  によって実解析的ベクトル場に持ち上がる.  $\xi$  の積分が  $h_t$  を与える. なぜならば、 $(x, y) = (u, uv)$  とすると

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial v} = u \frac{\partial}{\partial y}$$



であり、次を得る。

$$u \frac{\partial}{\partial x} = u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}, \quad u \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial v}$$

このことは、 $\xi$  が  $M \times \{t \geq 2\}$  上の実解析的ベクトル場に持ち上がることを示している。 $\frac{\partial}{\partial u}$  の係数に  $u$  があるので、 $E (u = 0)$  上、この持ち上げは  $E$  に接していることもわかる。

**定義 3.2.** 写像  $f : M \rightarrow N$  が点  $x \in M$  でブロー解析的であるとは、 $x$  の近傍  $U$  と  $U$  の非特異中心のブローアップの有限個の合成  $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$  が存在して、合成  $f \circ \tilde{\pi}$  が実解析的写像に拡張される時を言う。各点でブロー解析的である写像を、単にブロー解析的写像であるという。

**定義 3.3.** 実解析関数  $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  がブロー解析同値であるとは、 $f \circ g = h$  となる同相写像芽  $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  で  $h, h^{-1}$  が共にブロー解析的となるものが存在するときをいう。

次で定まる写像は、原点に連続には拡張されないが、原点ブローアップすれば連続に拡張される。

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

この事は、連続でない写像に対してもブロー解析的写像の概念が意味を持つことを示唆している。

- $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$ , と置くと、 $f$  は原点に連続に拡張可能ではないが、 $f(0, 0) = 0$  と定めればすべての方向微分は存在する。この関数はブロー解析的である。
- $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$ , と置くと、 $f$  は原点に連続に拡張可能で ( $f(0, 0) = 0$ ) あるが偏微分の順序は交換可能でない。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

この関数はブロー解析的である。

- 関数  $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$  はブロー解析的である。
- $z^3 + (x^2 + y^2)z + x^3$  の解  $z = g(x, y)$  もブロー解析的である。実際、カルダノの公式を適用すれば

$$g(x, y) = -\frac{2^{1/3}(x^2 + y^2)}{h(x, y)} + \frac{h(x, y)}{3 \cdot 2^{1/3}}, \quad h(x, y) = \left(-27x^3 + \sqrt{729x^6 + 108(x^2 + y^2)^3}\right)^{1/3},$$

となり、 $g$  は原点ブローアップで解析写像になることがわかる。

## 4 実代数的構成可能集合の不変量

### 4.1 位相空間論から

位相空間がネーター的であるとは、任意の閉集合の減少列が定常化する時を言う。即ち、閉部分集合の減少列

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \cdots \supset X_k \supset X_{k+1} \supset \cdots$$

があったら、ある番号から先は等号になる時を言う。

$\mathbb{R}^n$  のザリスキ位相はネーター位相空間の典型的な例である。

位相空間  $X$  が既約であるとは、空でない 2 つ以上の閉集合の和集合として書けない時を言う。即ち次が成り立つ位相空間の事である。

$$X = X_1 \cup X_2 \quad X_i \text{ は閉集合} \implies X = X_1 \text{ または } X = X_2$$

位相空間の部分集合が既約であるとは、部分位相空間として既約であるときを言う。 $X$  内の極大な既約部分集合を  $X$  の既約成分という。

**補題 4.1.**  $X$  の既約成分は閉集合である。

**証明.**  $Z$  を既約成分とする。 $\bar{Z} = Z_1 \cup Z_2$ ,  $Z_i$  は閉集合、とすると  $Z = (Z_1 \cap Z) \cup (Z_2 \cap Z)$  である。 $Z$  は既約なので  $Z = Z_1 \cap Z$  または  $Z = Z_2 \cap Z$  つまり  $Z \subset Z_1$  または  $Z \subset Z_2$ . よって  $\bar{Z} \subset Z_1$  または  $\bar{Z} \subset Z_2$  □

ネーター位相空間の部分空間はネーター位相空間である。

**補題 4.2.** ネーター位相空間は有限個の既約成分を持つ。

**証明.**  $X$  の閉部分集合で無限個の既約成分を持つもの全体を  $A$  とする。 $A$  が空でないとする。 $A$  の極小元が存在する。極小元を  $Z$  とすると  $Z$  は既約でないので  $Z$  は  $Z$  より真に小さい閉部分集合  $Z', Z''$  の和集合として表せる。 $Z', Z''$  は有限個の既約成分の和集合であるから  $Z$  はそれらの和集合として表せ、無駄な成分を省くと、 $Z$  を有限個の既約成分の和として表せる。 □

ネーター位相空間  $X$  については、クルル次元の概念を定義することが出来る。すなわち、既約な閉集合の減少列の長さの最大値を  $X$  のクルル次元という。ここで既約閉部分集合の減少列

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots \supsetneq X_k$$

に対し、その長さを  $k$  と定める。

ネーター位相空間  $X$  の部分集合  $C$  が構成可能集合であるとは、開集合の差の有限個の和集合として表せるときを言う。閉包の中で開集合となる集合と言っても同値である。

## 4.2 弧対称集合

次の形の集合の有限個の和集合を半代数的集合という。

$$\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_k(x) > 0\}, P(x), Q_i(x) \in \mathbb{R}[x]$$

写像が半代数的とは、そのグラフが半代数的な部分集合であるときを言う。

実解析的多様体  $M$  の部分集合  $X$  が弧対称集合であるとは、任意の解析的写像  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$  が次の条件をみたす時を言う。

$$\gamma((-1, 0]) \subset X \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \gamma([0, \varepsilon)) \subset X$$

**補題 4.3.**  $\mathbb{R}^n$  の連結解析的多様体  $\Gamma$  と、半代数的弧対称集合  $E$  に対し、 $\Gamma \subset E$  でなければ  $\dim(\Gamma \cap E) < \dim \Gamma$

**証明.**  $\dim \Gamma = \dim(\Gamma \cap E)$  とすると、 $U = \text{Int}_\Gamma(\Gamma \cap E)$  は空集合でない。 $U$  が  $\Gamma$  の中で閉集合であれば、 $\Gamma$  の連結性より、 $U = \Gamma$  となり、 $\Gamma \subset E$  を得る。従って、 $U$  が  $\Gamma$  の中で閉集合であることを示せばよい。 $a \in \bar{U} \cap \Gamma$  とする。 $\Gamma$  を  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $k = \dim \Gamma$ , の中の開球  $B(a, r)$  としてよい。 $b \in U \cap B(a, r)$  をとり、 $b$  を通る弦  $C$  を取る。弦の開部分は  $U$  内にあり、 $U \subset E$  であるので、 $C \subset E$  であり、 $(B(a, r)$  は無限個の弦で覆われるので)  $B(a, r) \subset E$  となる。つまり、 $a$  の  $\Gamma$  内でのある近傍は  $E$  に含まれる。よって  $a \in U$ 。これは  $U$  が  $\Gamma$  内で閉集合であることを意味する。  $\square$

**定理 4.4.** 半代数的弧対称集合全体を閉集合全体として、代数的多様体  $M$  にネーター位相空間の構造が定まる。

**証明.** 位相空間であることは、易しい。ネーター的であることは前補題の帰結である。  $\square$

ブロー解析的写像のグラフは弧対称集合である。代数的集合や、解析的集合は弧対称集合である。ブロー解析的写像のグラフで、解析的集合でないものが存在するので、弧対称集合は代数的集合や解析的集合より、広いクラスとなる。

$X \subset P^n(\mathbb{R})$  が  $\mathcal{AS}$  集合であるとは、 $\gamma : (-1, 1) \rightarrow P(\mathbb{R})$  が次の条件をみたす時を言う。

$$\gamma((-1, 0)) \subset X \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \gamma((0, \varepsilon)) \subset X$$

$\bar{X}^{\mathcal{AS}}$  で、弧対称集合を閉集合として  $P^n(\mathbb{R})$  に定まるネーター位相に関する  $X$  の閉包を表す。

### 4.3 仮想ポアンカレ多項式

半代数的な  $\mathcal{AS}$  集合  $X$  に対し、次の性質を満たす仮想ポアンカレ多項式  $\beta(X)$  が定まる。

- $\beta$  は加法的
- $\beta$  は乗法的
- $\mathcal{AS}$  同型な  $X$  と  $Y$  に対し、 $\beta(X) = \beta(Y)$
- $\deg \beta(X) = \dim X$
- $\beta(X)$  の最高次の係数は  $X$  の  $\mathcal{AS}$  既約成分の個数に等しい。

$X$  がコンパクト非特異多様体なら  $\beta(X)$  は  $\mathbb{Z}_2$  係数のホモロジーのポアンカレ級数に一致する。

証明には次の定理 ([?, Theorem 2.3]) が本質的である。

**定理 4.5.** コンパクト非特異代数多様体の連結成分  $A$  に対し可換群に値を持つ量  $\chi(A)$  が定まっているとする。  $\chi$  が次の条件を満たせば、 $\chi$  は  $\mathcal{AS}$  集合全体に加法的不変量として拡張される。

- $\chi(\emptyset) = 0$
- コンパクト代数多様体の連結成分  $A, B$  が  $\mathcal{AS}$  同型ならば  $\chi(A) = \chi(B)$
- 実代数的多様体  $X$  の非特異部分多様体  $C$  によるブローアップを  $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$  とする。  $A$  を  $X$  の連結成分とする時

$$\chi(\sigma^{-1}(A)) - \chi(\sigma^{-1}(A \cap C)) = \chi(A) - \chi(A \cap C)$$

$\mathbb{Z}_2$  係数のホモロジーのポアンカレ級数が上の性質を満たすことを確認すれば、仮想ポアンカレ級数の存在は証明されたことになる。ここでは、最後のブローアップに関する性質を確認しよう。  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  を  $X$  の非特異多様体  $C$  を中心とするブローアップとし  $E = \pi^{-1}(C)$  を例外集合とする。次の完全列があることを示す。

$$0 \rightarrow H_k(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(C; \mathbb{Z}_2) \oplus H_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

まず、対  $(X, C)$ ,  $(\tilde{X}, E)$  の長完全列のなす次の可換図式を考える

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_k(E) & \rightarrow & H_k(\tilde{X}) & \rightarrow & H_k((\tilde{X} \setminus E)) & \rightarrow & H_{k-1}(E) & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & \\ \rightarrow & H_k(C) & \rightarrow & H_k(X) & \rightarrow & H_k((X \setminus C)) & \rightarrow & H_{k-1}(C) & \rightarrow \end{array}$$

ここで  $H_k((X, C))$  は閉台をもつ無限鎖のホモロジーであり、Borel-Moore ホモロジーとも呼ばれるものである。また  $H_k(X, C) = H_k((X \setminus C))$ ,  $H_k(\tilde{X}, E) = H_k((\tilde{X} \setminus E))$  である事実を使っている。この図式を追跡すると、次が完全であることがわかる。

$$\rightarrow H_k(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(C; \mathbb{Z}_2) \oplus H_k(\tilde{X}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow$$

ポアンカレ双対の与える同型を  $D$  と書けば、次の図式がある。

$$\begin{array}{ccc} H_k(\tilde{X}) & \xrightarrow{\pi_*} & H_k(X) \\ \uparrow D & & \uparrow D \\ H^{n-k}(\tilde{X}) & \xleftarrow{\pi^*} & H^{n-k}(X) \end{array}$$

任意の  $\beta \in H^{n-k}(X)$  に対し、可換性  $D(\beta) = \pi_*(D\pi^*(\beta))$  が成立する。(任意の  $\alpha \in H^k(\tilde{X})$  に対し、 $D^{-1}(\alpha) = \pi^*(D^{-1}\pi_*(\alpha))$  なる可換性は成立しない事に注意。例えば  $X$  を曲面とし 1 点ブローアップを考えれば、例外集合  $E$  の表すサイクルは 0 ではないが、その  $\pi_*$  による像は 0 になる。) この図式を追跡すれば  $H_k(\tilde{X}) \rightarrow H_k(X)$  が全射であることがわかるので証明を終わる。

実代数多様体のなす圏を  $\text{Var}_{\mathbb{R}}$  で表し、そのグロタンディーク環を  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$  と書く。グロタンディーク環とは、実代数多様体  $X$  に対し記号  $[X]$  を割り当て、次の関係式で割ったものである。

- $X$  と  $X'$  が同型なら  $[X] = [X']$
- $Y$  が  $X$  の閉集合なら  $[X] = [X \setminus Y] + [Y]$
- $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$ .

$\mathbb{L} = [\mathbb{R}]$  と書く習慣である。 $\mathbb{L}$  は Lefschetz に由来すると言われている。グロタンディーク環では、いろいろな計算をすることができるが、そこでの心配は、得られた公式が自明な関係式となっていない事の判定が、容易でない時がある事<sup>\*2</sup>である。例えば  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$  は整域でない。また、自然な写像

$$\beta : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{Z}[u], \quad [X] \rightarrow \beta(X)$$

があるが、グロタンディーク環の構造がよくわかっていないので、上の写像の核の構造は、よくわかっていない。

**例 4.6.** まず 1 点の仮想ポアンカレ多項式は 1 である。実射影空間  $P^n$  について

$$\beta(P^n) = u^n + u^{n-1} + \cdots + u + 1$$

---

<sup>\*2</sup> 半代数的集合のグロタンディーク環は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  と同型であることが知られている。

特に、 $\beta(P^1) = u + 1$ .  $P^1 = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$  より  $\beta(\mathbb{R}) = u$ . よって、 $\mathbb{R}^n$  の仮想ポアンカレ級数は次のようにわかる。

$$\beta(\mathbb{R}^n) = \beta(\mathbb{R})^n = u^n$$

$n$  次元球面  $S^n$  は  $\mathbb{R}^n$  に無限遠点を付加したものだから、次を得る。

$$\beta(S^n) = \beta(\mathbb{R}^n) + 1 = u^n + 1$$

**注意 4.7.** 2重被覆  $S^1 \rightarrow P^1$  があるが  $\beta(S^1) = u + 1 = \beta(P^1)$  である。これは位相空間としての同型

$$S^1 \setminus \{0, \infty\} \simeq \mathbb{R} \times \{0, 1\}$$

は、実代数多様体（または  $\mathcal{AS}$  集合）としての同型にはなり得ないからである。

**例 4.8.**  $X_1 = S^1$ ,  $X_k = X_k \vee S^1$  のとき、 $\beta(X_k) = ku + 1$

$$\beta(X_{k+1}) = \beta(X_k) + \beta(S^1) - 1 = (ku + 1) + (u + 1) - 1 = (k + 1)u + 1$$

$S^1$  に  $2(k - 1)$  個の点  $p_1, \dots, p_{k-1}, q_1, \dots, q_{k-1}$  を取り  $p_i$  を  $q_i$  と同一視して得られる空間を  $Y_k$  とすると

$$\beta(Y_k) = \beta(S^1) - 2(k - 1) + k - 1 = u - k + 2.$$

$\chi(X_k) = 1 - k = \chi(Y_k)$  なので、 $\beta$  は代数多様体の位相構造ではなく、 $\mathcal{AS}$  集合としての構造を反映して決まることがわかる。

**例 4.9.**  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2z = y^2\}$  と置くと、 $\beta(W) = u^2$  なぜなら  $z$  軸を  $Z$  と書くと、 $(x, y) \mapsto (x, y, y^2/x^2)$  は  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  から  $W \setminus Z$  への  $\mathcal{AS}$  集合としての同型を定める。よって

$$\beta(W) - \beta(Z) = \beta(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$$

となり結果を得る。

**注意 4.10.** 参考のため、McCrorry と Parusiński による仮想ポアンカレ級数の解釈を述べておく。、等式と、高々  $p$  個の不等式で定義される代数的鎖の生成する閉台を持つ  $\mathbb{Z}_2$  鎖のなす鎖群を  $G_{-k+p}C_k((X))$  と書く。フィルトレーション

$$0 \subset F_{-k}C_k((X)) \subset F_{-k+1}C_k((X)) \subset F_{-k+2}C_k((X)) \subset \cdots \subset F_0C_k((X)) = C_k((X))$$

のなす複体を考える。すると次が成り立つ。

$$\beta(X) = \sum_{p,q} (-1)^p \left( \dim H_{p+q}(F_{-(p+q)+p}C_*((X))/F_{-(p+q)+p-1}C_*((X))) \right) u^q$$

上のフィルトレーションのつくるスペクトル系列  $E_{p,q}^r$  を考える。

$$E_{p,q}^0 = F_p C_{p+q}((X))/F_{p-1} C_{p+q}((X)), \quad E_{p,q}^1 = H_{p+q}(F_p C_*((X))/F_{p-1} C_*((X)))$$

であり、 $F_p H_n((X)) = \text{Im}\{H_n(F_p C_*((X))) \rightarrow H_n((X))\}$  とおくと次が成り立つ。

$$E_{p,q}^\infty = F_p H_{p+q}((X))/F_{p+1} H_{p+q}((X)) \implies H_{p+q}((X))$$

よって、 $\beta(X)$  で  $u = -1$  と置けば、閉台を持つ鎖群のホモロジー（ボレル＝ムーアホモロジー）のオイラー数となることがわかる。

#### 4.4 弧解析的写像

$\mathbb{R}^n$  の部分集合  $X$  が半解析的集合であるとは  $X$  の各点に対しその近傍  $U$  が存在し、 $X \cap U$  が次の形の集合の有限個の和集合で書ける時をいう。

$$\{x \in U : P(x) = 0, Q_1(x) > 0, \dots, Q_k(x) > 0\}, \quad P(x), Q_i(x) \in \mathcal{O}(U)$$

但し  $\mathcal{O}(U)$  は  $U$  上の解析関数のなす環である。

$\mathbb{R}^n$  の部分集合  $X$  が劣解析的集合であるとは  $X$  の各点に対し近傍  $U$  が存在し、 $X \cap U$  が相対コンパクトな半解析的集合の射影像となる時を言う。

**定理 4.11.** 劣解析的な弧解析関数は連続である。

**証明.** 局所的な問題であるから、局所コンパクトな開近傍が定義域であるとして示せば十分である。定義域を  $U$  とし、有限分割  $U = \bigcup_i X_i$  を次を満たすように取る。

- $X_i$  は解析的多様体
- $\overline{X_i} \setminus X_i$  は幾つかの  $X_j$  の和集合
- $f|_{X_i}$  は解析的

$f$  が連続であることを示すには、 $X_j \subset \overline{X_i}$  ならば  $f(X_j) \subset \overline{f(X_i)}$  を示せば十分。 $x_0 \in X_j$  に対し、解析写像  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow U$  を  $\gamma(0) = x_0, \gamma((0, 1)) \subset X_i$  を満たすように取る。 $f \circ \gamma((0, 1)) \subset f(X_i)$  で  $f \circ \gamma$  は解析的なので  $f(x_0) = f \circ \gamma(0) \in \overline{f(X_i)}$ .  $\square$

**定理 4.12.** 半代数的な弧解析的関数はブロー解析的である。

代数多様体の開集合を非特異解析的部分多様体を中心としてブローアップして、それが、元の代数多様体全体に延長されるかどうかを考えよう。開集合内の解析多様体で解析空間に延長しないものが存在する（螺線など）ので、一般にはブローアップは全体に延長しないと考えるのが自然である。非特異代数多様体中心のブローアップではこの問題は発

生しない。開集合内の非特異代数多様体は特異点を持つかもしれないが大域的な代数的多様体に延長されるからである。

**定義 4.13.**  $U$  を実解析多様体  $M$  の開集合  $\iota: U \rightarrow M$  を包含写像とする。 $U$  の非特異多様体中心のブローアップ  $\tilde{U} \rightarrow U$  と、包含写像  $\iota$  との合成を局所ブローアップという。有限回の局所ブローアップの合成で解析的になる関数を局所ブロー解析的であるという。

定理 4.12 は次の定理の証明の帰結である。

**定理 4.14.** 劣解析的な弧解析的関数は局所ブロー解析的である。

この定理の証明のために広中による次の定理を引用する。

**定理 4.15 (直線形化定理).**  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の開集合とし連続な劣解析的関数  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、次を満たす  $\Psi = \{\phi_\alpha = \sigma_\alpha \circ \psi_\alpha\}$  が存在する。

1.  $\phi_\alpha: W_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $W_\alpha$  はユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  に同型で  $\phi_\alpha(W_\alpha) \subset \bar{U}$
2.  $\sigma_\alpha: V_\alpha \rightarrow U$  は非特異中心の局所ブローアップの有限回の合成
3.  $\psi_\alpha: W_\alpha \rightarrow V_\alpha$  は適当な座標に関して  $\psi_\alpha(x) = (\varepsilon_1 x_1^{r_1}, \dots, \varepsilon_n x_n^{r_n})$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $r_i \in \mathbb{N}$  と書ける。また  $\varepsilon_i$  の符号を変えたものは  $\Psi$  に含まれる。
4.  $\Psi$  は局所有限、即ち任意の  $p \in U$  に対し  $p \in \text{Im } \phi_\alpha$  となる、 $\alpha$  は有限個。
5.  $W_\alpha$  のコンパクト部分集合  $K_\alpha$  が存在して  $\bigcup_\alpha \phi_\alpha(K_\alpha)$  は  $\bar{U}$  の近傍
6.  $f \circ \phi_\alpha$  は恒等的に 0 でなければ単項式

**定理 4.14 の証明.** 劣解析的な弧解析写像  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、その直線形化  $\Psi = \{\phi_\alpha = \sigma_\alpha \circ \psi_\alpha\}$  をとる。 $\alpha$  を固定し、 $\sigma = \sigma_\alpha$ ,  $\psi = \psi_\alpha$  と書く。 $h = f \circ \sigma$  は弧解析的で  $h \circ \psi$  は正規交差 (単項式) であり、特に解析的である。実は  $h$  が解析的であることを示す。

$$h \circ \psi(y) = \sum a_\beta y^\beta$$

と書くと、各象限  $\mathcal{H}_{\{\varepsilon_i\}} = \{x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon_i x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  上

$$h(x) = \sum a_\beta \prod_{i=1}^n (\varepsilon_i x_i)^{\beta/r_i}$$

$\beta^0$  を、 $a^{\beta^0} \neq 0$  かつある  $\beta_i^0$  が  $r_i$  で割れないように取る。 $\varepsilon_j \cdot c_j \geq 0$  なるように  $c_j$  ( $j \neq i$ ) を取れば、

$$\gamma(t) = h(c_1, \dots, c_{i-1}, t, c_{i+1}, \dots, c_n)$$

はピューズー級数の  $\beta_i^0/r_i$  の係数が 0 でなく  $h$  が弧解析的であることに反する。よって  $h$  は各象限で解析的でなければならず、解析性は各象限の小近傍上に延長する。弧解析性より  $h = h_\alpha$  は  $V_\alpha$  上大域的な解析関数を定義している。□



## 5 弧空間の解析

### 5.1 弧空間

弧対称集合  $X$  とその弧対称部分集合  $Y$  に対し弧空間  $\mathcal{L}(X)$ ,  $\mathcal{L}(X, Y)$  を次で定める。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= \{\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow X, \text{実解析的}\} \\ \mathcal{L}(X, Y) &= \{\alpha : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, Y), \text{実解析的}\}\end{aligned}$$

$\alpha(0) \in X$  での  $k$  ジェットを取ることで誘導される写像を

$$p_k : \mathcal{L}(X) \rightarrow J^k(1, n), \quad \alpha \mapsto j^k \alpha(0)$$

で表す。弧解析的写像  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  があれば、誘導された写像

$$h_* : \mathcal{L}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{L}(X), \quad \alpha \mapsto \alpha \circ h$$

が存在する。 $h$  が解析的ならば、 $h_{*,k} : J^k(1, n) \rightarrow J^k(1, n)$  を  $j^k \alpha(0) \mapsto j^k (h_* \alpha)(0)$  の定める写像とすれば  $p_k(h_* \alpha) = h_{*,k}(p_k(\alpha))$  が成り立つ。

同様に、弧解析的写像  $h : (\tilde{X}, \tilde{Y}) \rightarrow (X, Y)$  ( $h(\tilde{Y}) \subset Y$ ) を満たす弧解析的写像  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  があれば、誘導された写像

$$h_* : \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y), \quad \alpha \mapsto \alpha \circ h$$

が存在する。

- 定義 5.1.**
1. 弧解析写像  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  が解析弧の持ち上げ性質を満たすとは、任意の  $\alpha \in \mathcal{L}(X)$  に対して、 $h_* \tilde{\alpha} = \alpha$  を満たす  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{L}(\tilde{X})$  が存在する時を言う。
  2. 実解析多様体間の弧解析写像  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  が一般解析弧の持ち上げの一意性を満たすとは、次を満たす  $X$  の測度 0 の集合  $Z$  が存在するときをいう。任意の  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{L}(\tilde{X})$  に対して、

$$\alpha = h_* \tilde{\alpha} = h_* \tilde{\beta}, \quad (\text{Im } \alpha, \alpha(0)) \not\subset (Z, \alpha(0)) \implies \tilde{\alpha} = \tilde{\beta}.$$

3. 上述の 2 性質を満たすとき、 $h : \tilde{X} \rightarrow X$  は一般解析弧の一意持ち上げ性質を満たすとは、

**例 5.2.**  $\mathbb{R}^n$  の非特異多様体  $Z$  中心のブローアップ  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  は上の性質を満たす。実際  $\mathbb{R}^n$  の任意の弧  $\alpha$  は  $M$  に持ち上げ可能であり、 $\alpha$  が  $Z$  に入らなければその持ち上げは一意である。

## 5.2 解析写像の誘導する弧空間の写像のファイバー

本節では 実解析多様体間の解析写像  $h : M \rightarrow N$  は一般解析弧の持ち上げの一意性を満たすと仮定する。  $h$  のヤコビ行列を  $Jh(x)$  と書き、  $\mathcal{B}_e$  を次で定める。

$$\mathcal{B}_e = \mathcal{B}_e(h) = \{\alpha \in \mathcal{L}(M) : \text{ord}_\alpha \det Jh = e\}$$

**定理 5.3.**  $k \geq 2e$  ならば  $p_k(\mathcal{B}_e) \rightarrow h_{*,k}(p_k\mathcal{B}_e)$  は  $\mathcal{AS}$  集合の意味で区分的に自明な  $\mathbb{R}^e$  ファイブレーション。即ち、  $h_{*,k}(p_k\mathcal{B}_e)$  の有限個の  $\mathcal{AS}$  集合への分割  $h_{*,k}(p_k\mathcal{B}_e) = \sqcup_q Y_q$  と  $\mathcal{AS}$  集合としての同型  $\phi_q : p_k(\mathcal{B}_e) \cap h_{*,k}^{-1}(Y_q) \rightarrow Y_q \times \mathbb{R}^e$  が存在し、次の可換図式を満たす。

$$\begin{array}{ccc} p_k(\mathcal{B}_e) \cap h_{*,k}^{-1}(Y_q) & \xrightarrow{\phi_q} & Y_q \times \mathbb{R}^e \\ & \searrow h_{*,k} & \downarrow \text{射影} \\ & & Y_q \end{array}$$

正定値対称行列  ${}^t Jh(x)Jh(x)$  の固有値の平方根を  $\sigma_i(x)$  と書く。まず次に注意する。

$$e = \sum_{i=1}^n \text{ord}_\alpha \sigma_i$$

$\text{Im}(h \circ \alpha) \not\subset Z$  なる  $\alpha \in \mathcal{L}(M)$  に対し、次を示す。

$$h_{*,k}^{-1}(p_k(h(\alpha(t)))) = \mathbb{R}^{e_1 + \dots + e_n}, \quad e_i = \text{ord}_\alpha \sigma_i.$$

但し  $k \geq 2e_{\max}$ ,  $e_{\max} = \max\{e_1, \dots, e_n\}$ .

$h(\alpha(t) + t^{k+1}v) \subset h(\mathbb{R}^n)$  を満たす任意の  $v \in \mathbb{R}[[t]]^n$  に対し次の方程式を考える。

$$h(\alpha(t) + u) - h(\alpha(t)) = t^{k+1}v. \quad (5.1)$$

テイラーの定理より

$$h(\alpha(t) + u) - h(\alpha(t)) = Ju + R(t, u) \quad J = Jh(\alpha(t)), \quad R(t, u) = O(|u|^2)$$

次を満たす  $U = (u_1, \dots, u_n) \in \text{SO}(n)$  が存在する。

$${}^t J J = U \Sigma^2 U, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha(t)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2(\alpha(t)) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

$U = (u_1, \dots, u_n)$  と書くと

$$Ju_i \cdot Ju_j = {}^t (Ju_i)(Ju_j) = {}^t u_i ({}^t J J) u_j = {}^t u_i \sigma_j^2 u_j = \sigma_j^2 (u_i \cdot u_j)$$

なので  $Ju_1, \dots, Ju_n$  は直交基底をなす。  $\|Ju_i\| = \sigma_i$  なので  $V = (\frac{Ju_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{Ju_n}{\sigma_n})$  と置く  
と  $V \in \text{SO}(n)$  で  $JU = V\Sigma$ .  $\bar{u} = {}^tUu$ ,  $\bar{R}(t, \bar{u}) = {}^tVR(t, u)$  と書く

$${}^tV[h(\alpha(t) + U\bar{u}) - h(\alpha(t))] = \Sigma\bar{u} + \bar{R}(t, \bar{u}), \quad \bar{R}(t, \bar{u}) = O(|\bar{u}|^2)$$

となるので、  $\bar{v} = {}^tVv$ , と置けば

$$t^{k+1}\bar{v}_j = t^{e_j}\bar{\sigma}_j(t)\bar{u}_j + \bar{R}_j(t, \bar{u}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

$R(t, t^{k-e+1}\bar{u}) = t^{2k-2e+2}\bar{R}^{[e]}(t, \bar{u})$  となる解析関数  $\bar{R}^{[e]}(t, \bar{u})$  があることに注意する。

さて、(5.1) で  $u$  を  $t^{k-e+1}u$  で置き換えると

$$h(\alpha(t) + t^{k-e+1}u) - h(\alpha(t)) = t^{k+1}v \quad (5.3)$$

なので方程式 (5.2) は

$$t^{k+1}\bar{v}_j = t^{e_j}\bar{\sigma}_j(t)t^{k-e+1}\bar{u}_j + \bar{R}_j(t, t^{k-e+1}\bar{u}), \quad j = 1, \dots, n,$$

となるので、次の方程式を得る。

$$t^{e-e_i}\bar{v}_j = \bar{\sigma}_j(t)\bar{u}_j + t^{k-e-e_i+1}\bar{R}_j^{[e]}(t, t^{k-e+1}\bar{u}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

$k \geq 2e$ ,  $e \geq e_{\max}$  のとき、陰関数定理よりこの方程式は  $(t, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) = (0, 0, \dots, 0)$  の近傍で唯一つの解  $\bar{u} = \bar{u}(t, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$  を持つ。

**補題 5.4.**  $k \geq 2e$ ,  $e \geq e_{\max}$  のとき、 $h \circ \alpha(t)$  が  $Z$  に含まれないならば、

- (a)  $h(\alpha_1(t)) \equiv h(\alpha_2(t)) \pmod{t^{k+1}}$  ならば  $\alpha_1(t) \equiv \alpha_2(t) \pmod{t^{k-e+1}}$ .
- (b)  $h_{*,k}^{-1}(p_k(h(\alpha(t)))) = \mathbb{R}^{e_1+\dots+e_n}$ .

**証明.** (a):  $h(\alpha_1(t)) \equiv h(\alpha_2(t)) \pmod{t^{k+1}}$  と仮定する。すると  $h(\alpha_2(t)) = h(\alpha_1(t)) + t^{k+1}v$  を満たす  $v$  が存在する。上述の議論より次を満たす  $u$  が存在する。

$$h(\alpha_1(t) + t^{k-e+1}u) = h(\alpha_1(t)) + t^{k+1}v = h(\alpha_2(t)).$$

$h(\alpha_2(t))$  の  $h$  によるリフトの一意性より  $\alpha_1(t) + t^{k-e+1}u = \alpha_2(t)$  であり  $\alpha_1(t) \equiv \alpha_2(t) \pmod{t^{k-e+1}}$ .

(b): まず次に注意する。

$$h_{*,k}^{-1}(p_k(f(\alpha(t)))) = \{\alpha(t) + t^{k-e+1}u \pmod{t^{k+1}} : u \in \mathbb{R}[[t]]^n, Ju \equiv 0 \pmod{t^e}\}$$

$\bar{u} = \bar{u}_0 + \bar{u}_1t + \dots + \bar{u}_{e-1}t^{e-1}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^n$ , とおくと  $Ju \equiv 0 \pmod{t^e}$  は  $\Sigma\bar{u} \equiv 0 \pmod{t^e}$  と同値。すなわち、 $t^{e_i}\bar{\sigma}_i\bar{u}_j t^j \equiv 0 \pmod{t^e}$ , よって

$$\bar{u}_{ji} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, e - e_i - 1$$

となるので結果を得る。 □

### 5.3 モチーフ測度

グロタンディーク環  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$  を、 $\mathbb{L}$  の冪の作る乗法系で局所化して得られる分数環  $\mathcal{M} = K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})[\mathbb{L}^{-1}]$  を考える。さらに  $F^q \mathcal{M} = \langle [X] \mathbb{L}^{-i} : \dim X - i \leq -q \rangle$  と置いて、フィルター

$$\cdots \supset F^{-2} \mathcal{M} \supset F^{-1} \mathcal{M} \supset F^0 \mathcal{M} \supset F^1 \mathcal{M} \supset F^2 \mathcal{M} \supset \cdots$$

を考え、次の次元による完備化と呼ばれる操作を考える。

$$\widehat{\mathcal{M}} = \varprojlim_q \mathcal{M}/F^q \mathcal{M}$$

- $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$  は整域でない。 ([?]).
- $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathcal{M}$  は単射かどうか不明 (単射でないと想定している人が多い)。
- $\mathcal{M} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$  は単射かどうか不明。
- 仮想ポアンカレ級数を取る写像  $\beta : K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{Z}[u]$ ,  $[X] \mapsto \beta(X)$ , は  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{R}})$  の  $\widehat{\mathcal{M}}$  への像を経由する写像に分解する。

$p_m(A) (m \gg 1)$  が構成可能集合になるような  $\mathcal{L}(X)$  の部分集合  $A$  を安定であるという。言い換えると  $A = p_m^{-1}(p_m(A))$  であり

$$p_m^{m+1} : p_{m+1}(A) \rightarrow p_m(A)$$

は  $\mathbb{R}^n$  をファイバーとする部分自明なファイブレーションである。

$\mathcal{L}(X)$  の部分集合  $B$  が可測であるとは任意の正整数  $q$  に対し安定集合  $C_q$  と  $[C_{q,i}] \in F^q \mathcal{M}$  (i.e.  $\dim C_{q,i} \leq -q$ ) を満たす  $C_{q,i}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) が存在して

$$(B - C_q) \cup (C_q - B) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{q,i}$$

となる時を言う。可測集合  $B$  に対し、その測度  $\mu(B)$  を次で定める。

$$\mu(B) = \lim_{q \rightarrow \infty} \mu(C_q).$$

**定理 5.5** ([?, Proposition 6.3.2]).  $n$  次元代数多様体  $X$  とその部分代数多様体  $Y$  をとる。 $(X, Y)$  の特異点解消  $h : \tilde{X} \rightarrow X$  を取ると

$$\mu_{\mathcal{L}(X)}(p_0^{-1}(Y)) = \mathbb{L}^{-n} \sum_J [E_J^\circ \cap h^{-1}(Y)] \prod_{i \in J} \frac{\mathbb{L} - 1}{\mathbb{L}^{\nu_i} - 1}.$$

但し  $h$  の例外集合は正規交差とし、その既約分解を  $\cup_{j \in J} E_j$  と書いた時、 $(\det Jh)_0 = \sum_{i \in J} (\nu_i - 1) E_i^\circ$  としている。

**問題 5.6.** (1) 実代数多様体間の半代数的同相写像  $f : X \rightarrow X'$  が双弧解析的ならば、 $f$  は  $\mathcal{L}(X)$  と  $\mathcal{L}(X')$  の間に全単射を誘導する。このとき  $\mu(\mathcal{L}(X)) = \mu(\mathcal{L}(X'))$  か？もし  $f$  が双リプシッツならば、 $f$  は  $p_k(\mathcal{L}(X))$  と  $p_k(\mathcal{L}(X'))$  の間の写像を誘導するので  $\mu(\mathcal{L}(X)) = \mu(\mathcal{L}(X'))$  を得る。

(2) 半代数的同相写像  $(X, Y) \rightarrow (X', Y')$  があるとする。もし  $f$  が双弧解析的ならば、次が成り立つか？

$$\mu_{\mathcal{L}(X)}(\mathcal{L}(X, Y)) = \mu_{\mathcal{L}(X')}(\mathcal{L}(X', Y')), \quad \mu_{\mathcal{L}(Y)}(\mathcal{L}(Y)) = \mu_{\mathcal{L}(Y')}(\mathcal{L}(Y'))?$$

**例 5.7.**  $\mu(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0)) = \mathbb{L}^{-n}$ .

$\mathbb{R}^3$  内で  $x^2z = y^2$  で定義される代数多様体を  $X$  とすると、 $\mu(\mathcal{L}(X, 0)) = \mathbb{L}^{-2}$ .

$\mathbb{R}^3$  内で  $x^2 + y^2 = z^2$  で定義される代数多様体を  $Y$  とすると、 $\mu(\mathcal{L}(Y, 0)) = \mathbb{L}^{-2}$ .

## 5.4 モチーフ的ゼータ関数

解析関数  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  に対して

$$\mathcal{A}_k(f) := \{\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0) : f(\alpha(t)) = ct^k + \dots, c \neq 0\}$$

$$\mathcal{A}_k^+(f) := \{\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0) : f(\alpha(t)) = t^k + \dots\}$$

$$\mathcal{A}_k^-(f) := \{\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0) : f(\alpha(t)) = -t^k + \dots\}$$

とおく。これらの集合は、 $J^k(1, n)$  のある代数的集合  $A_k, A_k^+, A_k^-$  が存在して

$$\mathcal{A}_k(f) = p_k^{-1}(A_k), \quad \mathcal{A}_k^+(f) = p_k^{-1}(A_k^+), \quad \mathcal{A}_k^-(f) = p_k^{-1}(A_k^-),$$

と書くことが出来る。一般に、 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0)$  の部分集合  $\mathcal{A}$  が、 $\mathcal{A} = p_k^{-1}(A)$ 、但し  $A$  は  $J^k(1, n) = \mathbb{R}^{kn}$  のある構成可能部分集合、と書けるとき、 $\mathcal{A}$  のモチーフ測度  $[\mathcal{A}]$  を

$$[\mathcal{A}] = \frac{[A]}{[J^k(1, n)]} = \frac{[A]}{\mathbb{L}^{nk}}$$

で定める。モチーフ測度はジェット空間  $J^k(1, n)$  に占める  $A$  の割合であるから弧空間  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0)$  に占める  $\mathcal{A}$  の割合と考えることが出来る。

モチーフ的ゼータ関数を次で定義する。

$$Z(f) := \sum_{k \geq 1} [\mathcal{A}_k(f)] t^k \quad Z^\pm(f) := \sum_{k \geq 1} [\mathcal{A}_k^\pm(f)] t^k$$

上の定義で  $\mathbb{L}$  を  $u$  に代えたものを仮想ポアンカレ多項式ゼータ関数と呼ぶ。混乱を招くことは殆ど無いので、同じ記号で表す事にする。

$$Z(f) := \sum_{k \geq 1} \frac{\beta(\mathcal{A}_k(f))}{u^{nk}} t^k \quad Z^\pm(f) := \sum_{k \geq 1} \frac{\beta(\mathcal{A}_k^\pm(f))}{u^{nk}} t^k$$

例 5.8.  $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0), x \mapsto x^d$

$$[\mathcal{A}_k(f)] = \begin{cases} (\mathbb{L} - 1)\mathbb{L}^a & \text{if } k = ad \\ 0 & \text{if } d \nmid k \end{cases}$$

$$Z(f) = \frac{(\mathbb{L} - 1)t^d/\mathbb{L}}{1 - t^d/\mathbb{L}}$$

$f$  が代数的であれば、即ちある代数方程式の解であれば、仮想ポアンカレ多項式ゼータ関数  $Z(f)$  及び  $Z^\pm(f)$  はブローナッシュ不変量であることを示すのが本節の目的である。

まず、関数  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  に対して次を満たす  $\pi$  を取る。

1.  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  は一般解析弧の一意持ち上げ性質を満たす。
2.  $M$  の各点の近傍である座標系  $y = (y_1, \dots, y_n)$  が存在して  $f \circ \pi$  および  $\pi$  のヤコビ行列式  $\det d\pi$  は局所的に  $y$  の単項式と単元の積に書ける。
3.  $\pi$  は  $f$  の零点集合以外を変えない。

このような、 $\pi$  の存在は自明でないが、特異点解消定理により非特異中心のブローアップの合成によりいつでもこのような  $\pi$  が存在することが知られている。この時、

$$(f \circ \pi)_0 = \sum_{j \in J} m_j E_j, \quad (\det d\pi)_0 = \sum_{j \in J} (\nu_j - 1) E_j$$

と書くことが出来る。ここで  $E_j$  は局所的には上に現れたある座標  $y_i$  の零点として定義される  $M$  の非特異因子である。  $I \subset J$  に対し、次で  $E_I^\circ$  を定める。

$$E_I^\circ = \bigcap_{i \in I} E_i \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$$

補題 5.9.  $\pi$  が  $f$  の零点集合の補集合で同型であれば、次が成り立つ。

$$\#\{e \in \mathbb{Z} : \pi_*^{-1}(\mathcal{A}_k(f)) \cap \mathcal{B}_e \neq \emptyset\} < \infty.$$

証明. まず  $\pi_*^{-1}(\mathcal{A}_k(f)) = \bigsqcup_I \mathcal{A}_k(f, E_I^\circ)$  に注意する。ここで

$$\mathcal{A}_k(f, E_I^\circ) := \pi_*^{-1}(\mathcal{A}_k(f)) \cap \mathcal{L}(M, E_I^\circ).$$

仮定より  $\nu_i > 1$  ならば  $m_i > 0$ .  $j_i = \text{ord}_{E_i} \gamma$ ,  $c = \max\{\frac{\nu_i - 1}{m_i} : i \in I\}$  と置く。すると

$$\text{ord}_\gamma d\pi = \sum_{i \in I} (\nu_i - 1) j_i \leq \sum_{i \in I} \frac{\nu_i - 1}{m_i} m_i j_i \leq c \sum_{i \in I} m_i j_i = ck.$$

これより  $\max\{e \in \mathbb{Z} : \mathcal{A}_k(f, E_I^\circ) \cap \mathcal{B}_e \neq \emptyset\} \leq ck$ , となり証明を終わる。  $\square$

定理 5.10.  $\phi(\lambda) = \lambda/(1 - \lambda) = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots$  とおくとき

$$Z_f(t) = \sum_{I \neq \emptyset} \beta(E_I^\circ)(u-1)^{\#I} \prod_{i \in I} \phi\left(\frac{t^{m_i}}{u^{\nu_i}}\right)$$

証明. 非負整数の組  $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in J}$  に対し、

$$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\alpha \in \mathcal{L}(M) : \text{ord}_{E_i} \alpha = j_i\}$$

と置く。但し、 $\text{ord}_{E_i} \alpha = 0$  とは  $\alpha(0) \notin E_i$  の事とする。 $\langle \mathbf{m}, \mathbf{j} \rangle := \sum_{i \in I} m_i j_i$ ,  $|\mathbf{j}| = \{i : j_i > 0\}$  と置く。

$$p_k(\mathcal{A}_k(f)) = \bigsqcup_{\mathbf{j} : \langle \mathbf{m}, \mathbf{j} \rangle = k, \pi(E_{|\mathbf{j}|}^\circ) = 0} \pi_{*,k}(p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}}))$$

$k \geq \max\{j_i\}$  とすると、自然な射影  $p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}}) \rightarrow E_{|\mathbf{j}|}^\circ$  のファイバーは

$$\prod_{i \in I} (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{k-j_i}) \times (\mathbb{R}^k)^{n-\#\mathbf{j}} \simeq (\mathbb{R}^*)^{\#\mathbf{j}} \times \mathbb{R}^{nk - \sum_{i \in |\mathbf{j}|} j_i},$$

である。従って、

$$\beta(p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}})) = \beta(E_{|\mathbf{j}|}^\circ)(u-1)^{\#\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{j} \in A(k,e)} u^{nk - \sum_{i \in J^*} j_i},$$

但し  $A(k,e) := \{\mathbf{j} : \langle \mathbf{m}, \mathbf{j} \rangle = k, \langle \boldsymbol{\nu}', \mathbf{j} \rangle = e, \pi(E_{|\mathbf{j}|}^\circ) = 0\}$ ,  $\boldsymbol{\nu}' = (\nu_i - 1)_{i \in I}$ . ここで  $f$  が代数的であることから、 $\pi$  を代数的に取ることが出来、 $E_{|\mathbf{j}|}^\circ$  は代数的構成可能集合であり、 $\beta(E_{|\mathbf{j}|}^\circ)$  を考えることが出来る。よって

$$\begin{aligned} Z_f(t) &= \sum_{k \geq 1} \beta(p_k(\mathcal{A}_k(f))) \left(\frac{t}{u^n}\right)^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{e \geq 1} \sum_{\mathbf{j} \in A(k,e)} \beta(\pi_{*,k}(p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}}))) \left(\frac{t}{u^n}\right)^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{e \geq 1} \sum_{\mathbf{j} \in A(k,e)} \frac{\beta(p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}}))}{u^e} \left(\frac{t}{u^n}\right)^k \quad (\text{定理 5.3}) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{e \geq 1} \sum_{\mathbf{j} \in A(k,e)} \beta(E_{|\mathbf{j}|}^\circ)(u-1)^{\#\mathbf{j}} \frac{u^{nk - \sum_{i \in I} j_i}}{u^e} \left(\frac{t}{u^n}\right)^k \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{e \geq 1} \sum_{\mathbf{j} \in A(k,e)} \beta(E_{|\mathbf{j}|}^*) (u-1)^{\#\mathbf{j}} \frac{t^k}{u^{e + \sum_{i \in I} j_i}} \\ &= \sum_{I : \pi(E_I) = 0} \beta(E_I^\circ)(u-1)^{\#I} \sum_{\mathbf{j} : |\mathbf{j}| = I} \prod_{i \in I} \left(\frac{t^{m_i}}{u^{\nu_i}}\right)^{j_i} \end{aligned}$$

$$= \sum_{I: \pi(E_I)=0} \beta(E_I^\circ)(u-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \phi\left(\frac{t^{m_i}}{u^{\nu_i}}\right),$$

となり証明を終わる。 □

## 5.5 ニュートン図形を用いた弧空間の計算

$a = (a_1, \dots, a_n)$  に対し  $\mathcal{L}_a$  を次で定める。

$$\mathcal{L}_a = \{\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0) : \text{ord } x_i \circ \alpha = a_i \text{ if } i \in I(a), x_i \circ \alpha \equiv 0 \text{ if } i \notin I(a)\}$$

但し  $I(a) = \{i : a_i > 0\}$ .  $m$  が  $a_{\max} = \max\{a_1, \dots, a_n\}$  ならば  $p_m(\mathcal{L}_a)$  は  $\mathbb{R}^{m|I(a)| - \sum_i a_i} \times (\mathbb{R}^*)^{|I(a)|}$  と同型である。但し  $|I(a)|$  は  $I(a)$  の個数。  $s(a) = \sum_{i=1}^n a_i$ , とおくと

$$[p_m(\mathcal{L}_a)] = \mathbb{L}^{m|I(a)| - \sum_i a_i} (\mathbb{L} - 1)^{|I(a)|} = (\mathbb{L} - 1)^{|I(a)|} \mathbb{L}^{m|I(a)| - s(a)}$$

であるので、次を得る。

$$[\mathcal{L}_a] = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{[p_m(\mathcal{L}_a)]}{\mathbb{L}^{mn}} = \begin{cases} (\mathbb{L} - 1)^n \mathbb{L}^{-s(a)} & \text{if } |I(a)| = n, \\ 0 & \text{if } |I(a)| < n. \end{cases}$$

**補題 5.11.**  $f$  が非退化の時

$$[\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k(f)] = \begin{cases} 0 & \text{if } m_f(a) > k, \\ ((\mathbb{L} - 1)^n - [X_{\gamma(a)}]) \mathbb{L}^{-s(a)} & \text{if } m_f(a) = k, \\ (\mathbb{L} - 1) [X_{\gamma(a)}] \mathbb{L}^{-s(a) - k + m_f(a)} & \text{if } m_f(a) < k. \end{cases}$$

$$[\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k^\pm(f)] = \begin{cases} 0 & \text{if } m_f(a) > k, \\ [X_{\gamma(a)}^\pm] \mathbb{L}^{-s(a)} & \text{if } m_f(a) = k, \\ [X_{\gamma(a)}] \mathbb{L}^{-s(a) - k + m_f(a)} & \text{if } m_f(a) < k. \end{cases}$$

**証明.**  $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ ,  $\phi_i(0) \neq 0$ , とし

$$\alpha(t) = (t^{a_1} \phi_1(t), \dots, t^{a_n} \phi_n(t)),$$

を考える。  $f$  のテイラー展開  $\sum_\nu c_\nu x^\nu$  に対し、

$$f(\alpha(t)) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu (t^{a_1} \phi_1(t))^{\nu_1} \dots (t^{a_n} \phi_n(t))^{\nu_n} = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu \phi(t)^\nu t^{\langle a, \nu \rangle}.$$

であるから、これは  $t^{m_f(a)}$  を因子にもつ。

$$f(\alpha(t)) = t^{m_f(a)} (f_{\gamma(a)}(\phi(t)) + R(t))$$



ここで  $R(t)$  は定数項が 0 でない級数。

$m_f(a) > k$  ならば  $\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k(f)$  は空集合である。

$m_f(a) = k$  ならば  $\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k(f)$  は  $\phi(0) \notin X_{\gamma(a)}$  なる弧  $\alpha(t)$  が  $\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k(f)$  の元を与える。

$m_f(a) < k$  のとき、 $\alpha \in \mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k(f)$  である事は、 $\phi(0) \in X_{\gamma(a)}$  かつ

$$F'(0) = F''(0) = \dots = F^{(k-m_f(a)-1)}(0) = 0, \quad F^{(k-m_f(a))}(0) \neq 0,$$

但し  $F(t) = t^{-m_f(a)} f(\alpha(t))$ , と同値。

$f(x) = f_{\gamma(a)}(x) + R_a(x)$  と書けるから、次のように書ける。

$$F(t) = f_{\gamma(a)}(\phi(t)) + R_a(t) \quad R_a(t) = O(t)$$

すると

$$F^{(l)}(t) = \sum_{1 \leq |\lambda| \leq l} \frac{\partial^\lambda f_{\gamma(a)}}{\partial x^\lambda}(\phi(t)) \sum_{s=1}^l \sum_{(k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_s) \in P_s(\lambda, l)} l! \prod_{j=1}^s \frac{[\phi^{(l_j)}]^{k_j}}{k_j! (l_j!)^{|k_j|}} + R_a^{(l)}(t)$$

但し  $P_s(\lambda, l) = \{(k_1, \dots, k_s, l_1, \dots, l_s) : |k_j| > 0, 0 < l_1 < \dots < l_s, \sum_{j=1}^s k_j = \lambda, \sum_{j=1}^s l_j = l\}$  と表せる。この表示の中に現れる、次の項に注目する。

$$\frac{\partial f_{\gamma(a)}}{\partial x_i}(\phi(t)) \phi_i^{(\ell)}(t).$$

$f$  が非退化であることより、 $X_{\gamma(a)}$  上  $f_{\gamma(a)}$  の勾配は 0 にならない。 $\frac{\partial f_{\gamma(a)}}{\partial x_1}(\phi(0)) \neq 0$  とすると、 $F^{(l)}(0) = 0$  を  $\phi_1^{(l)}(0)$  を定める式と見ることが出来る。 $F^{(k-m_f(a))}(0) \neq 0$  は  $\phi_1^{(k-m_f(a))}(0)$  がある特定の値でない事を意味する。

$\mathcal{A}_k^\pm(f)$  についても同様である。 □

**定理 5.12.**  $f$  を非退化とすると

$$[\mathcal{A}_k(f)] = \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} ((\mathbb{L} - 1)^n - [X_\gamma]) P_k(\gamma) + (\mathbb{L} - 1) \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} [X_\gamma] Q_k(\gamma)$$

$$[\mathcal{A}_k^\pm(f)] = \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} [X_\gamma^\pm] P_k(\gamma) + \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} [X_\gamma] Q_k(\gamma).$$

ここで、 $\Gamma_+(f)$  の面  $\gamma$  に対して

$$P_k(\gamma) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) = k} \mathbb{L}^{-s(a)}$$

$$Q_k(\gamma) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) < k} \mathbb{L}^{-k+m_f(a)-s(a)}.$$

と置いている。

証明. 前補題を用いる。

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_k(f)] &= \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0} [\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k(f)] \\
&= \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} ((\mathbb{L} - 1)^n - [X_\gamma]) \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) = k} \mathbb{L}^{-s(a)} \\
&\quad + (\mathbb{L} - 1) \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} [X_\gamma] \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) < k} \mathbb{L}^{-k + m_f(a) - s(a)}.
\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_k^\pm(f)] &= \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0} [\mathcal{L}_a \cap \mathcal{A}_k^\pm(f)] \\
&= \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} [X_\gamma^\pm] \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) = k} \mathbb{L}^{-s(a)} \\
&\quad + \sum_{\gamma < \Gamma_+(f)} [X_\gamma] \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) < k} \mathbb{L}^{-k + m_f(a) - s(a)}.
\end{aligned}$$

となる。  $\square$

2 変数の非退化な関数  $f(x_1, x_2)$  が好都合であるとする。原始的ベクトル  $a^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, q$ , で

$$\Lambda(f) \subset \{a^0, a^1, \dots, a^q\}, \quad \det(a^j a^{j+1}) = 1.$$

を満たすものをとる。 $a^0 = (1, 0)$ ,  $a^q = (0, 1)$  として  $a^0, a^1, \dots, a^q$  が  $\Gamma^*(f)$  の非特異な細分を与えるとする。 $[\cdot]$  で切り捨てを表す。

**命題 5.13.**

$$\begin{aligned}
\frac{[\mathcal{A}_k(f)]}{\mathbb{L} - 1} &= \sum_{m_f(a^0) | k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^0)}{m_f(a^0)}} + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{(u,v) \in N_k(m_f(a^j), m_f(a^{j+1}))} \mathbb{L}^{-us(a^j) - vs(a^{j+1})} \\
&\quad + \sum_{m_f(a^q) | k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^q)}{m_f(a^q)}} + \sum_{j=1}^{q-1} ((\mathbb{L} - 1) - [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}]) \sum_{m_f(a^j) | k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^j)}{m_f(a^j)}} \\
&\quad + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}] \frac{\mathbb{L}^{-k - h(a^j)} (1 - \mathbb{L}^{-\lfloor \frac{k-1}{m_f(a^j)} \rfloor h(a^j)})}{1 - \mathbb{L}^{-h(a^j)}}.
\end{aligned}$$

但し  $h(a) = m_f(a) - s(a)$ .

証明. 定理 5.12 より, 次を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{[\mathcal{A}_k(f)]}{\mathbb{L} - 1} &= (\mathbb{L} - 1) \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, m_f(a) = k, \dim \gamma(a) = 0} \mathbb{L}^{-s(a)} \\
&\quad + \sum_{\gamma < \Gamma_+(f), \dim \gamma = 1} ((\mathbb{L} - 1) - [\widehat{X}_\gamma]) \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) = k} \mathbb{L}^{-s(a)}
\end{aligned}$$

$$+ (\mathbb{L} - 1) \sum_{\gamma < \Gamma_+(f), \dim \gamma = 1} [\widehat{X}_\gamma] \sum_{a \in \mathbb{N}^n, a > 0, \gamma(a) = \gamma, m_f(a) < k} \mathbb{L}^{-s(a) - k + m_f(a)}$$

よって  $\frac{[A_k(f)]}{\mathbb{L} - 1}$  は次に等しい。

$$\begin{aligned} & (\mathbb{L} - 1) \left[ \sum_{m_f(a^0)|k} \mathbb{L}^{-u - \frac{ks(a^0)}{m_f(a^0)}} + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{(u,v) \in N_k(m_f(a^j), m_f(a^{j+1}))} \mathbb{L}^{-us(a^j) - vs(a^{j+1})} \right. \\ & \left. + \sum_{m_f(a^q)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^{q-1})}{m_f(a^{q-1})} - v} \right] + \sum_{j=1}^{q-1} ((\mathbb{L} - 1) - [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}]) \sum_{m_f(a^j)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^j)}{m_f(a^j)}} \\ & + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}] \sum_{m_f(a^j)|l, l < k} \mathbb{L}^{-k+l - \frac{ls(a^j)}{m_f(a^j)}} \\ & = (\mathbb{L} - 1) \left[ \sum_{m_f(a^0)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^0)}{m_f(a^0)}} \frac{\mathbb{L} - 1}{1 - \mathbb{L}^{-1}} + \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{(u,v) \in N_k(m_f(a^j), m_f(a^{j+1}))} \mathbb{L}^{-us(a^j) - vs(a^{j+1})} \right. \\ & \left. + \sum_{m_f(a^q)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^{q-1})}{m_f(a^{q-1})}} \frac{\mathbb{L} - 1}{1 - \mathbb{L}^{-1}} \right] + \sum_{j=1}^{q-1} ((\mathbb{L} - 1) - [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}]) \sum_{m_f(a^j)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^j)}{m_f(a^j)}} \\ & + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}] \sum_{m_f(a^j)|l, l < k} \mathbb{L}^{-k+l(1 - \frac{s(a^j)}{m_f(a^j)})} \\ & = \sum_{m_f(a^0)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^0)}{m_f(a^0)}} + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{(u,v) \in N_k(m_f(a^j), m_f(a^{j+1}))} \mathbb{L}^{-us(a^j) - vs(a^{j+1})} \\ & + \sum_{m_f(a^q)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^{q-1})}{m_f(a^{q-1})}} + \sum_{j=1}^{q-1} ((\mathbb{L} - 1) - [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}]) \sum_{m_f(a^j)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^j)}{m_f(a^j)}} \\ & + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}] \sum_{m_f(a^j)|l} \mathbb{L}^{-k} \sum_{u=1, u=\frac{l}{m_f(a^j)}}^{\lfloor \frac{k-1}{m_f(a^j)} \rfloor} \mathbb{L}^{-uh(a^j)} \\ & = \sum_{m_f(a^0)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^0)}{m_f(a^0)}} + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{(u,v) \in N_k(m_f(a^j), m_f(a^{j+1}))} \mathbb{L}^{-us(a^j) - vs(a^{j+1})} \\ & + \sum_{m_f(a^q)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^{q-1})}{m_f(a^{q-1})}} + \sum_{j=1}^{q-1} ((\mathbb{L} - 1) - [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}]) \sum_{m_f(a^j)|k} \mathbb{L}^{-\frac{ks(a^j)}{m_f(a^j)}} \\ & + (\mathbb{L} - 1) \sum_{j=1}^{q-1} [\widehat{X}_{\gamma(a^j)}] \frac{\mathbb{L}^{-k-h(a^j)} (1 - \mathbb{L}^{-\lfloor \frac{k-1}{m_f(a^j)} \rfloor h(a^j)})}{1 - \mathbb{L}^{-h(a^j)}} \end{aligned}$$

であり、証明を終わる。 □

## 6 リプシッツ性とブロー解析性

$U$  を  $\mathbb{R}^n$  の凸開集合とする。写像  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  がリプシッツ条件を満たすとは、ある正定数  $L$  が存在して、次を満たす時を言う。

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  が双リプシッツであるとはある正定数  $L, L'$  が存在して、次を満たす時を言う。

$$L'|x - x'| \leq |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'|$$

**定理 6.1.** 劣解析的同相写像  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  が双リプシッツ条件を満たせば  $f$  が弧解析的であれば、 $f^{-1}$  も弧解析的である。

**証明.**  $f^{-1}$  が弧解析的でないとする。すると解析的でない劣解析的弧  $\gamma(t) = \sum_i a_i t^{i/q}$  で  $f \circ \gamma$  が解析的であるものが存在する。

$$\gamma_{\text{an}}(t) = \sum_{i:q|i} a_i t^{i/q}$$

とおけば、弧解析性より  $f(\gamma_{\text{an}}(t))$  は解析的。双リプシッツ性より

$$L'|\gamma(t) - \gamma_{\text{an}}(t)| \leq |f(\gamma(t)) - f(\gamma_{\text{an}}(t))| \leq L|\gamma(t) - \gamma_{\text{an}}(t)|$$

であるが、中央項は整数冪から始まるが、左右の項は非整数冪から始まるので矛盾。  $\square$

**定理 6.2.** 連続な劣解析的写像  $f$  について、次は同値。

- $f$  はリプシッツ
- $f$  の偏微分係数は存在すれば有界

**証明.**  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の凸な開集合とする。連続な劣解析的関数  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  について示せば十分である。関数  $f$  がリプシッツならば、 $f$  の方向微分は存在すれば有界である。これは次の式から自明である。

$$\frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|} \leq L$$

逆に、瘦せた集合  $Z$  を除いて偏微分可能であるとし  $U \setminus Z$  上  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq L$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が成り立つとすると、 $v = x' - x$  と置けば次を満たす  $\theta$  が存在する。

$$f(x') - f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta v)v_i \quad (0 < \theta < 1)$$

この式は  $x + \theta v \in U \setminus Z$  であれば成立する。よって、 $x + \theta v \in U \setminus Z$  ならば

$$|f(x') - f(x)| \leq \sum_{i=1}^n L|v_i| \leq L\sqrt{n}|x' - x|$$

$f$  の連続性より  $U$  上この不等式は成立する。  $\square$

**定理 6.3.** 半代数的同相写像  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  について、 $f$  が双ブロー解析的ならば、次は同値。

- $f$  はリプシッツ
- $f^{-1}$  はリプシッツ

**証明.** 劣解析写像  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y = f(x)$ , に対し

$$Jf^{-1}(y) = (\det Jf(x))^{-1} (Jf(x) \text{ の余因子行列} )$$

なので、 $(\det Jf)^{-1}$  が有界であれば、

$$f \text{ がリプシッツ} \Leftrightarrow Jf \text{ が有界} \Rightarrow Jf^{-1} \text{ が有界} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ がリプシッツ} \quad (6.1)$$

となる。 $f \circ \pi$  が解析的になるようなブローアップの合成  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  をとり、 $\sigma' = f \circ \sigma$  とする。 $\det J\sigma$  および  $\det J\sigma'$  が正規交差であると仮定してよい。実際、もし正規交差でなければ、各例外集合に横断的な中心でのブローアップでの有限回の合成  $\tau : M' \rightarrow M$  で、 $(\det J(\sigma \circ \tau))$ ,  $(\det J(\sigma' \circ \tau))$  が正規交差とできる。

さて、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \sigma' \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

ここで、

$$(\det J\sigma)_0 = \sum_{i \in J} \nu_i E_i, \quad (\det J\sigma')_0 = \sum_{i \in J} \nu'_i E_i$$

とおくと、 $\det Jf = \det J\sigma'(\det J\sigma)^{-1}$  なので  $\det Jf$  が有界ならば  $\nu'_i \geq \nu_i$ 。このとき、(6.1) より、 $\nu_i = \nu'_i$  を帰結できればよい。

もし  $\sigma = \sigma'$  ならば  $\{\nu_i\}$  と  $\{\nu'_i\}$  は、重複度込みで等しいので、 $\nu_i = \nu'_i$  が帰結できる。しかし、 $\sigma \neq \sigma'$  の時はこの論法は使えない。 $\mathbf{j} = (j_i)_{i \in J}$  に対し、

$$\mathcal{B}_{\mathbf{j}} = \{\alpha \in \mathcal{L}(M, \sigma^{-1}(0)) : \text{ord}_{E_j} \alpha = j_i\}$$

と置く。すると、

$$\sigma_{*,k} : p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}}) \rightarrow \sigma_{*,k}(p_k(\mathcal{B}_{\mathbf{j}}))$$

は  $\mathcal{AS}$  集合の意味で区分的に自明な  $\mathbb{R}^e$  ファイブレーション。ただし  $e = \langle \nu, \mathbf{j} \rangle$ 。ここで

$$Z_k(\sigma) = p_k(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0)) \setminus \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_k} \sigma_{*,k} p_k \mathcal{B}_j, \quad \text{但し } A_k(\sigma) = \{\mathbf{j} : 2\langle \nu, \mathbf{j} \rangle \leq k\},$$

とおくと、

$$\dim Z_k(\sigma) \leq n(k+1) - \frac{k}{2\nu_{\max}}$$

実際、 $\mathbf{j} \notin A_k(\sigma)$  ならば、 $\frac{k}{2} < \langle \nu, \mathbf{j} \rangle \leq \nu_{\max} \langle \mathbf{1}, \mathbf{j} \rangle$  なので

$$\dim \sigma_{*,k}(p_k(\mathcal{B}_j)) \leq \dim p_k(\mathcal{B}_j) = n(k+1) - \langle \mathbf{1}, \mathbf{j} \rangle \leq n(k+1) - \frac{k}{2\nu_{\max}}$$

となる。 $Z_k = Z_k(\sigma)$ ,  $Z'_k = Z_k(\sigma')$ ,  $A_k = A_k(\sigma)$ ,  $A'_k = A_k(\sigma')$  と書く。 $\nu_i \leq \nu'_i$  ( $i \in J$ ) ならば  $A'_k \subset A_k$  なので、

$$Z_k \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A_k} \sigma_{*,k} p_k \mathcal{B}_j = p_k \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, 0) = Z'_k \sqcup \bigsqcup_{\mathbf{j} \in A'_k} \sigma'_{*,k} p_k \mathcal{B}_j$$

を変形して、

$$\beta(Z_k) - \beta(Z'_k) + \sum_{\mathbf{j} \in A_k \setminus A'_k} \beta(\sigma_{*,k} p_k \mathcal{B}_j) = \sum_{\mathbf{j} \in A'_k} [\beta(\sigma'_{*,k} p_k \mathcal{B}_j) - \beta(\sigma_{*,k} p_k \mathcal{B}_j)] \quad (6.2)$$

を得る。(6.2) の左辺の次数は  $n(k+1) - \frac{k}{\nu'_{\max}}$  以下である。 $\nu_i < \nu'_i$  なる  $i$  があったとすると、

$$C_k = \{\langle \mathbf{1}, \mathbf{j} \rangle : \langle \nu, \mathbf{j} \rangle < \langle \nu', \mathbf{j} \rangle, \mathbf{j} \in A_k\}$$

とおくと  $\emptyset \neq C_k \subset C_{k+1} \subset \dots$  である。 $c = \limsup_{k \rightarrow \infty} \min C_k$  とおくと、(6.2) の右辺の次数は  $n(k+1) - c$  となり矛盾する。  $\square$

より一般に次の定理が成立する。

**定理 6.4.** 半代数的同相写像  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  について次は同値。

- $f$  はブロー解析的かつ  $f^{-1}$  はリプシッツ
- $f$  はリプシッツかつ  $f^{-1}$  はブロー解析的

証明は省略する。