

# 直線の幾何学

2008年9月16日

5.3	法叢	36
5.4	線様の例	37
6	特異点論から	41

## 目次

1	射影空間と射影幾何学	2
1.1	射影空間	2
1.2	グラスマン多様体	4
2	ブリュカー座標とクラインモデル	6
2.1	ブリュカー座標	6
2.2	レグルス	12
3	微分幾何学から	14
3.1	第1基本形式と第2基本形式	14
3.2	曲面上の曲線と曲面の曲率	16
3.3	可展面	19
4	線織面	21
4.1	線織面の特異点	21
4.2	締括線	25
4.3	線織面の微分幾何学的な不変量	26
4.4	線織面の特異点の分類	30
5	線叢と線様	33
5.1	線叢の基礎事項	33
5.2	線叢の基本形式	35

直線の幾何学とは、英語の line geometry の訳である。空間内の直線を対象とする幾何学であるが、射影化して射影幾何学の一種と考えることもできる。本稿では空間内の直線の織り成す幾何学について、解説する。

なお、このノートは 2008 年 9 月 1 日から 5 日に埼玉大学にて行われた集中講義の講義ノートとして準備されたもので、主参考文献は次の本である。

H. Pottmann and J. Wallner, Computational line geometry. Mathematics and Visualization. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

## 1 射影空間と射影幾何学

### 1.1 射影空間

0 でないベクトル  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$  に対し同値関係  $\sim$  を次で定める。

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}'$$

この同値関係による商空間を  $m$  次元射影空間といひ、 $\mathbb{P}^m$  で表す。

$$\mathbb{P}^m = \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} / \sim$$

自然な写像  $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^m$  を  $p$  で表す。  $[\mathbf{x}] = p(\mathbf{x})$  と書く。

$\mathbb{R}^{m+1}$  の座標を、  $(x_0, x_1, \dots, x_m)$  とするとき、

$$\tilde{U}_i = \{(x_0, \dots, x_m) : x_i \neq 0\}$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} &= \bigcup_{i=0}^m \tilde{U}_i \\ \mathbb{P}^m &= \bigcup_{i=0}^m U_i \quad U_i = p(\tilde{U}_i) \end{aligned}$$

$U_i$  は、 $\mathbb{R}^n$  と位相同型である。実際、次が位相同型となる。

$$U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{aligned} [x_0, \dots, x_m] &\mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\left( \frac{x_i}{x_i} \right)}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ [y_1, \dots, y_m] &\leftarrow [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_m] \end{aligned}$$

補題 1.1.  $U$  を  $\mathbb{R}^m$  の開集合とする。写像

$$f : U \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad f(t) = [f_0(t) : f_1(t) : \dots : f_n(t)]$$

に対し

$$\text{rank}(df)_P = \text{rank}\left(f, \frac{\partial(f_0, \dots, f_n)}{\partial(t_1, \dots, t_m)}\right) - 1$$

証明.  $U$  を原点の近傍として、原点の周りで考察する。  $f(0) \in U_0$  とする。次の写像の階数を考察すればよい。

$$g : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (g_1(t), \dots, g_n(t)) = \left( \frac{f_1(t)}{f_0(t)}, \dots, \frac{f_n(t)}{f_0(t)} \right)$$

$j$  番目の成分を  $t_i$  で偏微分すると、

$$\frac{\partial g_j}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \frac{f_j(t)}{f_0(t)} \right) = \frac{1}{f_0(t)^2} \left( f_0(t) \frac{\partial f_j(t)}{\partial t_i} - \frac{\partial f_0(t)}{\partial t_i} f_j(t) \right)$$

なので、

$$\begin{pmatrix} f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial t_m} \\ 0 & \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{\partial g_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial t_m} \end{pmatrix} = \frac{1}{f_0^2} \begin{pmatrix} f_0^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -f_1 & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ -f_2 & 0 & f_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -f_n & 0 & 0 & \dots & f_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial t_m} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}$$

となり結果を得る。 □

補題 1.2.  $f_i(t)$  を  $t_0, t_1, \dots, t_m$  の  $d$  次同次多項式とする。写像

$$f : P^m \rightarrow P^n, \quad f(t) = [f_0(\tilde{t}) : f_1(\tilde{t}) : \dots : f_n(\tilde{t})], \quad \tilde{t} = [t_0 : \dots : t_m]$$

に対し  $\text{rank}(df)_P = \text{rank} \frac{\partial(f_0, \dots, f_n)}{\partial(t_0, t_1, \dots, t_m)} - 1$

証明.  $f_i(t)$  は  $t_0, t_1, \dots, t_m$  の  $d$  次同次多項式なので、

$$t_0 \frac{\partial f_j}{\partial t_0} + t_1 \frac{\partial f_j}{\partial t_1} + \dots + t_m \frac{\partial f_j}{\partial t_m} = df_j$$

$t_0 = 1$  とすると

$$\frac{\partial f_j}{\partial t_0}(1, t) + t_1 \frac{\partial f_j}{\partial t_1}(1, t) + \dots + t_m \frac{\partial f_j}{\partial t_m}(1, t) = df_j(1, t)$$

これより

$$\text{rank} \begin{pmatrix} f_0 & \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial t_m} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t_m} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial t_0} & \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial t_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_0} & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_0} & \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial t_m} \end{pmatrix}$$

となり、前補題と比較すれば結果を得る。 □

$(n+1) \times (n+1)$  行列  $C$  が非退化ならば、次の写像を考えることができる。

$$c: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad [\mathbf{x}] \mapsto [C\mathbf{x}]$$

これは全単射で、射影同型と呼ばれる。

**定義 1.3.**  $\mathbb{P}^n$  の  $n+2$  個の点が基本集合(fundamental set)であるとは、そのどの  $n+1$  個の点を表すベクトルも一次独立のときを言う。

**補題 1.4.**  $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$ , と  $P'_0, P'_1, \dots, P'_{n+1}$  が  $\mathbb{P}^n$  の基本集合であるとき、各  $P_i$  を  $P'_i$  に移す射影同型が存在する。このような射影同型は一意的である。

**証明.**  $P_i = [\mathbf{v}_i]$ ,  $P'_i = [\mathbf{v}'_i]$  ( $i = 0, 1, \dots, n+1$ ) とする。すると  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$  および  $\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_n$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の基底であり、

$$\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{v}'_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda'_i \mathbf{v}'_i$$

と書ける。基本集合であることから、各  $\lambda_i, \lambda'_i$  は 0 でない。 $\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{u}'_i = \lambda'_i \mathbf{v}'_i$  とおくと  $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n$  および  $\mathbf{u}'_0, \dots, \mathbf{u}'_n$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の基底である。 $f(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}'_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) なる線形写像  $f$  をとると

$$f(\mathbf{v}_{n+1}) = f(\mathbf{u}_0 + \dots + \mathbf{u}_n) = \mathbf{u}'_0 + \dots + \mathbf{u}'_n = \mathbf{v}'_{n+1}$$

なので、 $f$  は求める射影同型を誘導する。

その様な射影同型を  $f_1, f_2$  とする。 $f_2^{-1} \circ f_1$  は基本集合  $P_0, \dots, P_{n+1}$  を固定する。よって次の補題より  $f_2^{-1} \circ f_1$  は恒等写像。よって  $f_1 = f_2$ .  $\square$

**補題 1.5.**  $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$  が  $\mathbb{P}^n$  の基本集合であるとき、 $\alpha(P_i) = P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n+1$ ) となる自己同型  $\alpha$  は恒等写像に限る。

**証明.** 線形同型写像  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  が  $n+2$  個の固有ベクトルを持ち、そのうちのどの  $n+1$  個も一次独立ならば、恒等写像の定数倍でなければならない。  $\square$

## 1.2 グラスマン多様体

ベクトル空間  $\mathbb{R}^{n+1}$  内の  $k+1$  次元部分空間全体をグラスマン多様体といい  $G(k+1, n+1)$  で表す。 $\mathbb{P}^n = G(1, n+1)$  である。 $\mathbb{R}^{n+1}$  の余次元 1 のベクトル空間全体もその法ベクトルを用いて、表す事が出来る。

$$\mathbb{P}^n \rightarrow G(n, n+1), \quad [\mathbf{x}] \mapsto \langle \mathbf{x} \rangle^\perp$$

これは全単射である。しばしば  $\mathbb{P}^{n+1*} = G(n, n+1)$  と書く。

一次独立なベクトル  $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k$  の生成する部分空間  $\langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$  と書き、対応するグラスマン多様体  $G(k+1, n+1)$  の点を  $[\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k]$  と書く。

$G(2, 4)$  は  $\mathbb{P}^3$  内の直線全体の空間とみなせる。

$$G(2, 4) \rightarrow \{\mathbb{P}^3 \text{内の直線}\} \quad V \mapsto \pi(V)$$

$\langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k \rangle^\perp$  で  $\langle \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$  の直交補空間を表し、対応するグラスマン多様体  $G(n-k, n+1)$  の点を  $[\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k]^\perp$  で表す。

$(n+1) \times (n+1)$  行列  $C$  が非退化ならば、次の写像を考えることができる。

$$\kappa: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n*}, \quad [\mathbf{x}] \mapsto [C\mathbf{x}]^\perp$$

$[\mathbf{y}] \in \kappa([\mathbf{x}])$  のとき  $[\mathbf{y}]$  は  $[\mathbf{x}]$  に共役であるという。このとき

$${}^t \mathbf{y} C \mathbf{x} = 0$$

$C$  の転置行列  ${}^t C$  を使って

$${}^t \kappa: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n*}, \quad [\mathbf{x}] \mapsto [{}^t C \mathbf{x}]^\perp$$

を定める。 $\kappa = {}^t \kappa$  なるとき  ${}^t C = \pm C$  である。

$C$  が対称行列のとき、自己共役な  $\mathbf{x}$  全体を  $C$  によって定まる 2 次超曲面といい  $\Phi$  で表す。それは次を満たす  $\mathbf{x}$  全体である。

$${}^t \mathbf{x} C \mathbf{x} = 0$$

$C$  を非退化対称行列とする。写像  $\kappa: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n*}$  を  $\kappa: G(1, n+1) \rightarrow G(n, n+1)$  と見る。これを自然に写像

$$\kappa_k: G(k+1, n+1) \rightarrow G(n-k, n+1), \quad [\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k] \mapsto [C\mathbf{v}_0, \dots, C\mathbf{v}_k]^\perp$$

に拡張することが出来る。

$G(k+1, n+1)$  の元が  $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-k}]^\perp$  で表されているとき、

$$\kappa_k: [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-k}]^\perp \mapsto [{}^t C^{-1} \mathbf{a}_1, \dots, {}^t C^{-1} \mathbf{a}_{n-k}]$$

となる。なぜなら

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \langle C\mathbf{v}_0, \dots, C\mathbf{v}_k \rangle^\perp &\iff {}^t (C\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{x} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, k \\ &\iff {}^t \mathbf{v}_i {}^t C \mathbf{x} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff {}^t C\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-k} \rangle \\ &\iff \mathbf{x} \in ({}^t C^{-1}\mathbf{a}_1, \dots, {}^t C^{-1}\mathbf{a}_{n-k}) \end{aligned}$$

となるからである。

部分空間  $G$  が 2 次超曲面  $\Phi$  に点  $\mathbf{x}$  で接しているとは、次が成り立つときをいう。

$$\mathbf{x} \in G \subset \kappa(\mathbf{x}) (= \Phi \text{ の } \mathbf{x} \text{ での接超平面})$$

**補題 1.6.**  $G$  を  $\mathbb{R}^{n+1}$  の  $k+1$  次元部分ベクトル空間とする。

- $G$  が  $\Phi$  に接する ( $\exists \mathbf{x} \neq 0: \mathbf{x} \in G \subset \kappa(\mathbf{x})$ )  $\iff G \cap \kappa_k(G) \neq \emptyset$
- $G \subset \Phi \iff G \subset \kappa_k(G)$

**証明.**  $\mathbf{x} \in G, \mathbf{x} \neq 0$  とする。  $G = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$  と書くと

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \tau(G) &\iff \mathbf{x} \in [C\mathbf{x}, C\mathbf{v}_1, \dots, C\mathbf{v}_k]^\perp \\ &\iff {}^t \mathbf{x} C\mathbf{x} = 0, {}^t \mathbf{v}_i C\mathbf{x} = 0 \ (i = 1, \dots, k) \\ &\iff G \subset \kappa(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \subset \kappa_k(G) &\iff \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \tau_k(G) \\ &\iff \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in [C\mathbf{x}, C\mathbf{v}_1, \dots, C\mathbf{v}_k]^\perp \\ &\iff {}^t \mathbf{x} C\mathbf{x} = 0, {}^t \mathbf{v}_i C\mathbf{x} = 0, {}^t \mathbf{v}_i C\mathbf{v}_j = 0 \ (i, j = 1, \dots, k) \\ &\iff G \subset \Phi \end{aligned}$$

□

## 2 プリュッカー座標とクラインモデル

### 2.1 プリュッカー座標

空間  $\mathbb{R}^3$  の 2 点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を通る直線  $L$  を考える。この直線の方法ベクトルを  $\mathbf{v}$  とすると、 $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  とおくことができる。方向ベクトルが  $\mathbf{v}$  で空間  $\mathbb{R}^3$  の点  $\mathbf{a}$  を通る直線  $L$  を考える。  $[\mathbf{v} : \mathbf{a} \times \mathbf{v}]$  が定める  $P^5(\mathbb{R})$  の点。

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

の小行列式を並べて

$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - b_3 a_1, a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

7

で定義する。最初の 3 つの成分をこの直線の方法ベクトル、後の 3 つの成分をモーメントという。それぞれ  $\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}$  で表す。

この定義を射影化することも出来る。射影空間  $\mathbb{P}^3$  の 2 点  $\mathbf{a} = [a_0 : a_1 : a_2 : a_3]$ ,  $\mathbf{b} = [b_0 : b_1 : b_2 : b_3]$  を通る直線のリュッカー座標を

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

の小行列式を並べて

$$(a_0 b_1 - b_0 a_1, a_0 b_2 - b_0 a_2, a_0 b_3 - b_0 a_3, a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - b_3 a_1, a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

と定める。これを  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  または  $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$  と表す。

写像  $G(2, 4) \rightarrow \mathbf{P}^5$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  の像を  $M$  で表す。

**補題 2.1.** ゼロでない点  $[\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}]$  がある直線のリュッカー座標になることと次は同値。

$$\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$$

**証明.**  $[\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}]$  がある直線のリュッカー座標であれば、

$$\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = \det(\mathbf{v} \ \mathbf{a} \ \mathbf{v}) = 0$$

方向ベクトル  $\mathbf{l}$  モーメント  $\bar{\mathbf{l}}$  の直線が存在するためには、次の一次方程式が解ければよい。

$$\mathbf{l} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & l_3 & -l_2 \\ -l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & -l_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \end{pmatrix}$$

これが、解を持つ条件は、左辺の行列の階数が 2 なので、

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & l_3 & -l_2 & \bar{l}_1 \\ -l_3 & 0 & l_1 & \bar{l}_2 \\ l_2 & -l_1 & 0 & \bar{l}_3 \end{pmatrix} = 2$$

となる。この行列の 3 次の小行列式を計算すると、順に

$$0, l_3(\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}}), -l_2(\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}}), l_1(\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}})$$

なので、 $\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$  が求める条件になる。 □

上の証明中の計算より、次がわかる。

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{l}_1 & \bar{l}_2 & \bar{l}_3 \\ -\bar{l}_1 & 0 & l_3 & -l_2 \\ -\bar{l}_2 & -l_3 & 0 & l_1 \\ -\bar{l}_3 & l_2 & -l_1 & 0 \end{vmatrix} = (\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}})^2$$

8

線形座標変換でプリユカー座標がどのように変わるかを調べてみよう。 $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  を  $\mathbb{R}^4$  の基底、 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  を  $\mathbb{R}^4$  の別の基底とする。

$$(\mathbf{e}_0 \ \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_0 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) C$$

で基底の変換行列  $C$  を定める。

$$(\mathbf{a} \ \mathbf{b}) = (\mathbf{v}_0 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3) C \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

行列

$$C \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{ただし} \quad C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

の 2 次の小行列式を計算して、基底  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  に関するプリユカー座標を得る。

$0 \leq i < j \leq 3$  のとき

$$\det \begin{pmatrix} c_{i0} & c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} \\ c_{j0} & c_{j1} & c_{j2} & c_{j3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \sum_{0 \leq k < l \leq 3} \begin{vmatrix} c_{ik} & c_{il} \\ c_{jk} & c_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_k & b_k \\ a_l & b_l \end{vmatrix}$$

を得る。

**補題 2.2.** 直線  $L$  は 2 点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が張ると見ることが出来るが 2 平面  $\langle \mathbf{u} \rangle^\perp, \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$  の共通部分と見ることが出来る。このとき 2 点  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  の張る直線のプリユカー座標は

$$[\bar{\mathbf{1}} : \mathbf{1}]$$

である。

証明. まず次のように置く。

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0 &= (0, l_1, l_2, l_3) & \mathbf{f}_0 &= (0, \bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3) \\ \mathbf{s}_1 &= (-l_1, 0, \bar{l}_3, -\bar{l}_2) & \mathbf{f}_1 &= (-\bar{l}_1, 0, l_3, -l_2) \\ \mathbf{s}_2 &= (-l_2, -\bar{l}_3, 0, \bar{l}_1) & \mathbf{f}_2 &= (-\bar{l}_2, -l_3, 0, l_1) \\ \mathbf{s}_3 &= (-l_3, \bar{l}_2, -\bar{l}_1, 0) & \mathbf{f}_3 &= (-\bar{l}_3, l_2, -l_1, 0) \end{aligned}$$

$\det(\mathbf{s}_0 \ \mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3) = (\mathbf{1} \cdot \bar{\mathbf{1}})^2 = 0$  でこの行列の階数は 2 なので、4 点  $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  は直線上にある。 $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  のうち 2 つを選んでプリユカー座標を計算すると、この直線は  $L$  であることがわかる。

$\mathbf{s}_i \in \langle \mathbf{f}_j \rangle^\perp$  で  $\det(\mathbf{f}_0 \ \mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \mathbf{f}_3) = (\mathbf{1} \cdot \bar{\mathbf{1}})^2 = 0$  でこの行列の階数は 2 なので、 $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  の外積を計算すればよい。

$$\mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}) \quad \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}) \quad \mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{f}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1})$$

$$\mathbf{f}_1 \wedge \mathbf{f}_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}) \quad \mathbf{f}_3 \wedge \mathbf{f}_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1}) \quad \mathbf{f}_2 \wedge \mathbf{f}_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} (\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{1})$$

□

2 点  $(x_0, \mathbf{x}), (y_0, \mathbf{y})$  を結ぶ直線のプリユカー座標は

$$[x_0 \mathbf{y} - y_0 \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}]$$

であった。

**補題 2.3.** 直線  $L$  のプリユッカー座標を  $(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{1}})$  とする。

1. 点  $[(x_0, \mathbf{x})]$  が超平面  $[(u_0, \mathbf{u})]^\perp$  上にある事は次と同値。

$$u_0 x_0 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$$

2. 2 点  $(x_0, \mathbf{x}), (y_0, \mathbf{y})$  を結ぶ直線のプリユカー座標は

$$[x_0 \mathbf{y} - y_0 \mathbf{x}, \mathbf{x} \times \mathbf{y}]$$

3. 2 平面  $[(u_0, \mathbf{u})]^\perp, [(v_0, \mathbf{v})]^\perp$  の交点として現れる直線のプリユカー座標は

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{v}, u_0 \mathbf{v} - v_0 \mathbf{u}]$$

4. 直線  $L$  が点  $(x_0, \mathbf{x})$  を含む事は次と同値。

$$\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{1}} = 0, \quad -x_0 \bar{\mathbf{1}} + \mathbf{x} \times \mathbf{1} = 0$$

5. 直線  $L$  が平面  $(u_0, \mathbf{u})^\perp$  に含まれる事は次と同値。

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = 0, \quad -u_0 \mathbf{1} + \mathbf{u} \times \bar{\mathbf{1}} = 0$$

6.  $L$  上にない点  $(x_0, \mathbf{x})$  をとる。このとき直線  $L$  と点  $(x_0, \mathbf{x})$  の張る平面は

$$(\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{1}}, -x_0 \bar{\mathbf{1}} + \mathbf{x} \times \mathbf{1})^\perp$$

証明. 1, 2 は明らか. 3 は 2 の双対. 4 は  $L = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  とすると,

$$(x_0, \mathbf{x}) \in L \iff (x_0, \mathbf{x}) \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$$

で示す.  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  の展開に  $1, \bar{1}$  が表れることに注意. 5. は 4 の双対. 6. は 1 と 5 を用いる. 詳細は演習とする.  $\square$

補題 2.4. 2 直線  $G, H$  のプリュッカー座標を、それぞれ  $[\mathbf{g} : \bar{\mathbf{g}}], [\mathbf{h} : \bar{\mathbf{h}}]$  とする. このとき、次が成り立つ.

$$G \cap H \neq \emptyset \iff \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{h} = 0$$

証明.  $\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{g}} = 0, \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{h}} = 0$  より

$$\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{g} + \mathbf{h}) \cdot (\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{h}})$$

座標を変換しても  $(\mathbf{g} + \mathbf{h}) \cdot (\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{h}})$  が 0 になるかどうかは変わらない. よって直線  $G, H$  を特別なものにしてよい.  $G = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1 \rangle$  とすると

$$[\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}] = [1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]$$

$H = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2 \rangle$  のときは  $[\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}] = [0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0]$

$$[\mathbf{g} + \mathbf{h}, \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{h}}] = [1 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0] \quad \text{なので} \quad (\mathbf{g} + \mathbf{h}) \cdot (\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{h}}) = 0$$

$H = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$  のときは  $[\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}] = [0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0]$

$$[\mathbf{g} + \mathbf{h}, \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{h}}] = [1 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0] \quad \text{なので} \quad (\mathbf{g} + \mathbf{h}) \cdot (\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{h}}) \neq 0$$

$\square$

$\mathbb{P}^5$  内で次で定まる曲面をクライン 2 次超曲面といい、 $M$  で表す.

$$\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

直線の幾何学 (Line geometry) 独特の用語を説明しよう.

直線束 (pencil) 1 点を通る平面上の直線全体

場 (field) ある平面上の直線全体

束 (bundle) 1 点を通る  $\mathbb{R}^3$  の直線全体

これらは普通の幾何学では違った意味で用いられることに注意.

補題 2.5. クライン写像  $P$  は、直線束を直線に移す. 逆に、クライン写像で直線に移るものは直線束に限る.

証明. 直線  $G, H$  のプリュッカー座標を、それぞれ  $[\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}], [\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}]$  とする.  $[\lambda\mathbf{g} + \mu\mathbf{h}, \lambda\bar{\mathbf{g}} + \mu\bar{\mathbf{h}}]$  がクラインモデル  $M$  に入っている条件は  $\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{g}} = 0, \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{h}} = 0$  より

$$0 = (\lambda\mathbf{g} + \mu\mathbf{h}) \cdot (\lambda\bar{\mathbf{g}} + \mu\bar{\mathbf{h}}) = \lambda\mu(\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{h})$$

従って、 $[\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}}], [\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}]$  を含む直線がクラインモデル  $M$  に入るための必要十分条件は

$$\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{h} = 0$$

これは  $G$  と  $H$  が交わることを意味する.  $\square$

補題 2.6. クラインモデル  $M$  は、2 つの平面の 3 径数族  $\Pi_b, \Pi_f$  を含む. これらはそれぞれ、束、場に対応している. これ以外には、クラインモデル  $M$  は平面を含まない.

- $\Pi_b$  の 2 つの平面は丁度 1 点で交わる.
- $\Pi_f$  の 2 つの平面は丁度 1 点で交わる.
- $\Pi_b$  の平面と  $\Pi_f$  の平面は、交わらないか、直線で交わる.

証明. クラインモデル  $M$  に完全に含まれている平面は、束か場に対応することを示す.  $\mathbb{P}^5$  の点で、その様な平面を張る 3 点を取る. そのいずれの 2 点も、 $M$  に含まれる直線を張るから、交わる 2 本の直線に対応する. このような 3 本の直線はある 1 点を通る 3 本の直線か、同一平面上にある 3 本の直線である. これが、補題の最初の部分の主張である. 残りの主張は次の事実から直ちに従う.

- 2 つの束は丁度 1 つの直線を共有する.
- 2 つの場は丁度 1 つの直線を共有する.
- 束と場はどの直線も共有しないか、直線場を共有する.

$\square$

定理 2.7.  $\mathbb{P}^5$  の射影自己同型で  $M$  を保つものは、 $M$  を  $\mathbb{P}^3$  の直線全体の空間と見たとき、 $\mathbb{P}^3$  の自己同型が誘導する  $M$  の自己同型に限る.

証明.  $\mathbb{P}^5$  の射影自己同型  $\alpha$  で  $M$  を保つものは、 $M$  に含まれる部分空間  $\Pi_b, \Pi_f$  を保つか入れ替えるかする. 2 平面の共通部分を考察することにより  $\Pi_b$  の元と  $\Pi_a$  の元を混ぜて移す事はない.

$\alpha$  が  $\Pi_b, \Pi_f$  を保つとき、束の間の写像を見れば全単射  $\kappa : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  を定めるが、同一直線上にある点は同一直線上にある点に移さなければならない. (ここは、正確には基本集合を用いた考察をする.)

$\alpha$  が  $\Pi_b, \Pi_f$  を入れ替えるとき、全単射  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3*}$  を定める。前と同じ議論でこれは射影自己同型。  $\square$

## 2.2 レグルス

3本の直線  $L_1, L_2, L_3$  が互いに捩れの位置にあるとする。この3本の直線すべてに交わる直線全体をレグルスという。

例 2.8. 写像

$$s: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3,$$

$$[x_0 : x_1] \times [y_0 : y_1] \mapsto [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1]$$

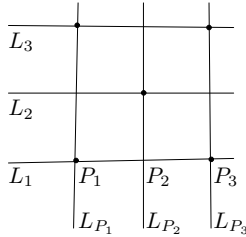
の像は  $\mathbb{P}^3$  内で  $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$  で定義される曲面で  $[x_0, x_1]$  または  $[y_0, y_1]$  を固定したときの像を考えれば2重線織面であり、レグルスである。

定理 2.9. レグルスはある線織2次曲面上に乗っている。

証明. 各点  $P \in L_1$  に対し、 $P$  を含む直線  $L_2$  と交わる直線は  $P$  と  $L_2$  の張る平面上にあり、さらに直線  $L_3$  と交わるような直線  $L_P$  は、この平面と直線  $L_3$  との交点を通るものであり、唯一つ定まる。

$$L_P = \langle P, L_2 \rangle \cap \langle P, L_3 \rangle$$

$L_1$  上に3点  $P_1, P_2, P_3$  を取る。 $L_1$  と  $L_{P_1}$  の張る平面に点  $L_{P_2} \cap L_2$  は存在しない。なぜなら、もし、 $L_1$  と  $L_{P_1}$  の張る平面に点  $L_{P_2} \cap L_2$  が在れば、点  $L_{P_1} \cap L_2$  もそうだから、 $L_2$  もこの平面上にある。よって  $L_1, L_2$  が同一平面上にあることになり、捩れの位置にあるという仮定に反する。



このような議論を続ければ5つの点  $P_1, P_3, L_{P_2} \cap L_2, L_{P_1} \cap L_3, L_{P_3} \cap L_3$  が基本集合であることがわかる。

線織2次曲面上にある互いに交わらない3本の直線  $L_1, L_2, L_3$  をとり、上と同様にして基本集合を作ることが出来る。この二つの基本集合を写すような射影変換を考えれば、レグルスは線織2次曲面上に乗っていることがわかる。  $\square$

直線  $L_1, L_2, L_3$  のプリュカー座標を、それぞれ  $[\bar{l}_1, \bar{l}_1], [\bar{l}_2, \bar{l}_2], [\bar{l}_3, \bar{l}_3]$  とする。

定理 2.10. 3点  $[\bar{l}_1, \bar{l}_1], [\bar{l}_2, \bar{l}_2], [\bar{l}_3, \bar{l}_3]$  の張る平面を  $G$  とおく。 $\mu: \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^5, [x: \bar{x}] \mapsto [\bar{x}: x]$  とするときレグルスのプリュカー座標全体の集合は  $\mu(G)^\perp \cap M$  で表される。さらに平面  $\mu(G)^\perp$  は  $M$  に横断的に交わっている。

証明. 点  $[x: \bar{x}]$  がある直線のプリュカー座標で、その直線が直線  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と交わる条件は次のように書ける。

$$x \cdot \bar{x} = 0, \quad \bar{l}_i \cdot x + l_i \cdot \bar{x} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

これは、 $[x: \bar{x}] \in M \cap \mu(G)^\perp$  と同値である。

これが  $M$  と横断的に交わる平面との交点であり、非特異曲線を定義することを示す。

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \bar{l}_1 & l_1 \\ \bar{l}_2 & l_2 \\ \bar{l}_3 & l_3 \\ \bar{x} & x \end{pmatrix} = 4$$

を示せばよい。この階数が3だとすると、 $x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3, \bar{x} = \lambda_1 \bar{l}_1 + \lambda_2 \bar{l}_2 + \lambda_3 \bar{l}_3$  となる  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  が存在する。これを

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \bar{l}_{31} \\ \bar{l}_{12} & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{32} \\ \bar{l}_{13} & \bar{l}_{23} & \bar{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と書いて、 $x \cdot \bar{x} = 0$  と

$$\begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{12} & \bar{l}_{13} \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{23} \\ \bar{l}_{31} & \bar{l}_{32} & \bar{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = 0$$

に代入すると

$$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3) \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \bar{l}_{31} \\ \bar{l}_{12} & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{32} \\ \bar{l}_{13} & \bar{l}_{23} & \bar{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left( \begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{12} & \bar{l}_{13} \\ \bar{l}_{21} & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{23} \\ \bar{l}_{31} & \bar{l}_{32} & \bar{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ l_{12} & l_{22} & l_{32} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{l}_{11} & \bar{l}_{21} & \bar{l}_{31} \\ \bar{l}_{12} & \bar{l}_{22} & \bar{l}_{32} \\ \bar{l}_{13} & \bar{l}_{23} & \bar{l}_{33} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

この左辺の行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathbf{l}}_1 \cdot \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_1 \cdot \bar{\mathbf{l}}_2 & \bar{\mathbf{l}}_1 \cdot \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_1 \cdot \bar{\mathbf{l}}_3 \\ \bar{\mathbf{l}}_2 \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 \cdot \bar{\mathbf{l}}_1 & 0 & \bar{\mathbf{l}}_2 \cdot \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_2 \cdot \bar{\mathbf{l}}_3 \\ \bar{\mathbf{l}}_3 \cdot \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_3 \cdot \bar{\mathbf{l}}_1 & \bar{\mathbf{l}}_3 \cdot \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3 \cdot \bar{\mathbf{l}}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

でこの行列式は  $2(\bar{\mathbf{l}}_1 \cdot \mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_1 \cdot \bar{\mathbf{l}}_2)(\bar{\mathbf{l}}_1 \cdot \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_1 \cdot \bar{\mathbf{l}}_3)(\bar{\mathbf{l}}_2 \cdot \mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_2 \cdot \bar{\mathbf{l}}_3) \neq 0$ . よって  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  となり、 $\mathbf{x} = 0, \bar{\mathbf{x}} = 0$  を得る。これは矛盾。□

2次線織面は2重線織面であり、レグルスは2次線織面であるから、レグルスがあると、それに双対的なレグルスがある。

**定理 2.11.**  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) のプリュカー座標を  $(\mathbf{l}_i, \bar{\mathbf{l}}_i)$  とし、 $L_i \cap L_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) とする。 $G$  を  $(\mathbf{l}_i, \bar{\mathbf{l}}_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の生成する平面を  $G$  とする。 $G \cap M$  は、 $L_1, L_2, L_3$  の定めるレグルスの双対レグルスのプリュカー座標である。

**証明.**  $L_1, L_2, L_3$  の定めるレグルスのプリュカー座標  $(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$  は、次の関係式で定まる。

$$\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0, \quad \bar{\mathbf{l}}_i \cdot \mathbf{m} + \mathbf{l}_i \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

これを満たす3つのプリュカー座標  $(\mathbf{m}_i, \bar{\mathbf{m}}_i)$  をとる。プリュカー座標が  $(\bar{\mathbf{m}}_i, \mathbf{m}_i)$  である直線を  $L'_i$  とする。 $L'_1, L'_2, L'_3$  の定めるレグルスのプリュカー座標  $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$  は、次の関係式で定まる。

$$\mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0, \quad \bar{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{m}_i + \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

これは、クライン2次超曲面  $M$  と、平面との断面を定めるが、構成法よりこの平面は  $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) で張られている。□

## 3 微分幾何学から

### 3.1 第1基本形式と第2基本形式

$U$  を  $\mathbb{R}^2$  の開集合とし、曲面の径数表示

$$\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$$

を考える。このとき、これを  $u, v$  で偏微分して得られるベクトル  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  は曲面の接ベクトルである。

$$|\mathbf{x}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \mathbf{x}(u, v)|^2 \sim |\mathbf{x}_u \Delta u + \mathbf{x}_v \Delta v|^2$$

$$= E \Delta u^2 + 2F \Delta u \Delta v + G \Delta v^2$$

ただし

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

そこで、次の対称微分形式を第1基本形式と呼ぶ。

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$$

曲面の単位法ベクトルは次で与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

$\mathbf{x}$  の2階偏微分を接空間の基底  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$  と法空間の基底  $\mathbf{n}$  の一次結合として表す。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + L \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v + M \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v + N \mathbf{n} \end{aligned}$$

ここで  $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uv}^u, \Gamma_{vv}^u, \Gamma_{uu}^v, \Gamma_{uv}^v, \Gamma_{vv}^v, L, M, N$  は  $(u, v)$  の関数である。 $\Gamma_{uu}^u, \dots, \Gamma_{vv}^v$  を Christoffel の記号という。

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \quad M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \quad N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

に注意しておこう。

$$L du^2 + 2M dudv + N dv^2$$

を第2基本形式という。 $L du^2 + 2M dudv + N dv^2 = 0$  なる方向  $(du, dv)$  を漸近方向 (asymptotic direction) という。

$\Gamma_{uu}^u, \dots, \Gamma_{vv}^v$  を具体的に計算しておこう。

**補題 3.1.**

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{uu}^v &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{uv}^u &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{uv}^v &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{vv}^u &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{vv}^v &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$



証明. まず、次に注意する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_u & \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)_v & \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u \\ \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u &= (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_v - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_u & \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)_u \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_u &= \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F & F_u - \frac{1}{2}E_v &= \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G \\ \frac{1}{2}E_v &= \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F & \frac{1}{2}G_u &= \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G \\ F_v - \frac{1}{2}G_u &= \Gamma_{vv}^u E + \Gamma_{vv}^v F & \frac{1}{2}G_v &= \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G \end{aligned}$$

これを行列の形に書くと

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$  の逆行列を左からかけて、結果を得る。

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \frac{1}{2(EG - F^2)} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}$$

□

### 3.2 曲面上の曲線と曲面の曲率

$\gamma(t)$  を曲面上の曲線とする。 $\gamma(t)$  の速度ベクトル、加速度ベクトルを基底  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}$  を用いて表そう。

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t)}{dt} &= \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \\ \frac{d^2\gamma(t)}{dt^2} &= \mathbf{x}_u \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \mathbf{x}_v \cdot \frac{d^2v}{dt^2} + \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \Gamma_{uu}^u + 2\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \Gamma_{uv}^u + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \Gamma_{vv}^u\right) \mathbf{x}_u \\ &\quad + \left(\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \Gamma_{uu}^v + 2\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \Gamma_{uv}^v + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \Gamma_{vv}^v\right) \mathbf{x}_v \end{aligned}$$

$$+ \left( \left(\frac{du}{dt}\right)^2 L + 2\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} M + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 N \right) \mathbf{n}$$

$t$  を弧長径数 ( $s$  で表す) としたとき、加速度ベクトル  $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$  の法方向の成分を法曲率(normal curvature) とよび、 $\kappa_n$  で表す。

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \left(\frac{du}{ds}\right)^2 L + 2\frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} M + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 N \\ &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2} \\ &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \end{aligned}$$

法曲率の最大値最小値を調べよう。 $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 1$  上で極値を調べればよいから

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 - \lambda(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 - 1)$$

と置いて、 $du, dv$  による偏微分が 0 である条件を見る。左辺を  $du, dv$  で偏微分すると、

$$\begin{aligned} Ldu + Mdv &= \lambda(Edu + Fdv) \\ Mdu + Ndv &= \lambda(Fdu + Gdv) \end{aligned}$$

書き換えて

$$(1) \quad \begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = 0$$

よって、 $\lambda$  が法曲率の最大値最小値であれば、次を満たす。

$$\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \lambda^2 - \left( \begin{vmatrix} L & F \\ M & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E & M \\ F & N \end{vmatrix} \right) \lambda + \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

これを満たす  $\lambda$  を主曲率という。この 2 次方程式の 2 根を  $\lambda_1, \lambda_2$  としたとき

$$\begin{aligned} K &= \lambda_1 \lambda_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ H &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

となる。ここで  $K$  をガウス曲率(Gauss curvature),  $H$  を平均曲率(mean curvature) という。

$\lambda$  が主曲率のとき、(1) を満たす  $(du, dv)$  を主方向 (principal direction) という。 $(du, dv)$  が主方向であれば、(1) より、

$$(L - \lambda E, M - \lambda F) = \mu_1(dv, -du) \quad (M - \lambda F, N - \lambda G) = \mu_2(dv, -du)$$

を満たす実数  $\mu_1, \mu_2$  が存在しする。  $\mu_1 = dv\mu, \mu_2 = -du\mu$  と置いて

$$\begin{aligned}(L - \lambda E, M - \lambda FN - \lambda G) &= \mu(dv^2, -dudv, +du^2) \\ (L, M, N) &= \lambda(E, F, G) + \mu(dv^2, -dudv, +du^2)\end{aligned}$$

を得る。よって

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -dudv & du^2 \end{vmatrix} = 0$$

をえる。これが主方向の方程式である。

**定理 3.2.** ガウス曲率  $K$  は第 1 基本形式とその 2 階までの偏微分で表すことができる。

$$K = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{pmatrix} E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) \\ +F(E_u G_v - E_v G_u - E_v F_v) \\ -2F_u G_u + 4F_u F_v \\ +G(E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2) \end{pmatrix} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG - F^2)}$$

**証明.** 補題 3.1 の証明より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E_u &= \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F & F_u - \frac{1}{2}E_v &= \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G \\ \frac{1}{2}E_v &= \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F & \frac{1}{2}G_u &= \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G \\ F_v - \frac{1}{2}G_u &= \Gamma_{vv}^u E + \Gamma_{vv}^v F & \frac{1}{2}G_v &= \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G\end{aligned}$$

であった。  $\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v)_v - \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_{vv}$  なので

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{x}_v &= \{(\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + L\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}_v\}_v \\ &\quad - (\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v + L\mathbf{n}) \cdot (\Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v + N\mathbf{n}) \\ &= (\Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G)_v - (\Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F)\Gamma_{vv}^u - (\Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G)\Gamma_{vv}^v - LN \\ &= (F_u - \frac{1}{2}E_v)_v - \frac{1}{2}E_u \Gamma_{vv}^u - (F_u - \frac{1}{2}E_v)\Gamma_{vv}^v - LN\end{aligned}$$

これに補題 3.1 の結果を代入して整理すれば

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{x}_v &= F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} \\ &\quad + \frac{1}{4(EG - F^2)} \left( \begin{aligned} &E(E_v G_v - 2F_u G_v) + G(E_u G_u - 2E_u F_v) \\ &+ F(E_u G_v + E_v G_u - 2F_u G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v) \end{aligned} \right) - LN\end{aligned}$$

となる。同様に、  $\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v)_u - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_{uv}$  なので

$$\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{x}_v = \frac{1}{2}G_{uu} - \frac{EG_u^2 - 2FE_v G_u + GE_v^2}{4(EG - F^2)} - M^2$$

$\mathbf{x}_{uvv} = \mathbf{x}_{uvv}$  より、これらは等しく  $LN - M^2$  を  $E, F, G$  で表す式を得る。  $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$  より主張を得る。  $\square$

$\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  の曲面の接方向の成分が 0 となるとき  $\gamma(t)$  は測地線 (geodesic) であるという。測地線であるための条件は

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \Gamma_{uu}^u + 2\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \Gamma_{uv}^u + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \Gamma_{vv}^u &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \Gamma_{uu}^v + 2\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \Gamma_{uv}^v + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \Gamma_{vv}^v &= 0\end{aligned}$$

である。

**補題 3.3.** 曲線  $\gamma(t)$  が測地線ならば、  $|\frac{d\gamma(t)}{dt}|$  は定数。すなわち径数  $t$  は弧長に比例する。

**証明.** 曲線  $\gamma(t)$  が測地線であるとする。  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  の接成分は恒等的に 0 である。すると  $\frac{d\gamma}{dt}$ ,  $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$  は直交する。よって

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\rangle = 2 \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0$$

$\square$

$v = \text{定数}$ 、となる曲線が測地線であれば  $\Gamma_{uu}^v = 0$ 。よって

$$(2) \quad 2EF_u - FE_u - E_v E = 0$$

が成り立つ。

### 3.3 可展面

曲面に測地線の 1 径数族とそれに直交するような曲線の 1 径数族が与えられているとする。これらの曲線族を径数曲線にとり、これらをそれぞれ  $v = \text{定数}$ 、  $u = \text{定数}$  なる径数曲線とすれば、第 1 基本形式は

$$I = E du^2 + G dv^2$$

となる。  $F \equiv 0$  に注意する。  $v = \text{定数}$  なる曲線が測地線であるから、条件 (2) より  $E_v = 0$  であり、  $E$  は  $u$  のみの関数である。

$$\bar{u} = \int \sqrt{E} du$$

を新しい  $u$  としてとれば、第 1 基本形式は次のようになる。

$$I = du^2 + G dv^2$$

曲面上の 1 点  $O$  から、測地線を引き、点  $O$  を通りその測地線と点  $O$  で角度  $v$  で交わる測地線を距離  $u$  だけ進んだ点を  $P$  としよう。このとき、

**補題 3.4.**  $G(0, v) = 0, \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G}|_{u=0} = 1$ .

**証明.**  $u = 0$  のとき第 1 基本形式は退化しているので、  $G(0, v) = 0$ 。さて、  $u = \text{定数}$  なる曲線に沿って曲線の長さを測ると、その長さは

$$\int_0^v \sqrt{G} dv$$

となる。さて  $\frac{\text{弧の長さ}}{\text{半径}} \rightarrow \text{中心角 (半径} \rightarrow 0)$  なので

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int_0^v \sqrt{G} dv = v$$

一方、

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \int_0^v \sqrt{G} dv = \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^v \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G} dv = \int_0^v \left( \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G} \right) |_{u=0} dv$$

であるから、  $\frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G}|_{u=0} = 1$  を得る。 □

このときのガウス曲率は、定理 3.2 より

$$K = \frac{G_u^2 - 2GG_{uu}}{4G^2} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

ガウス曲率が常に 0 であれば、微分方程式

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

が得られ、積分によって

$$\sqrt{G} = A(v)u + B(v)$$

となる。補題 3.4 より  $A(v) = 1, B(v) = 0$  となり  $\sqrt{G} = u$  すなわち、

$$I = du^2 + u^2 dv^2$$

を得る。よって次の定理を示した。

**定理 3.5.** ガウス曲率が恒等的に 0 であれば平面に展開可能である。即ち、第 1 基本形式が  $du^2 + dv^2$  となる径数  $(u, v)$  が存在する。このことは、平面からこの曲面に長さを変えない写像が存在することを意味している。このとき、この曲面は可展面 (developable surface) であるという。

参考

ガウス曲率が正定数で  $K = 1/k^2$  であれば、径数を取り替えて

$$I = du^2 + k^2 \sin^2 \frac{u}{k} dv^2$$

と出来る。これは球面に展開可能であることを意味している。

ガウス曲率が負定数で  $K = -1/k^2$  であれば、径数を取り替えて

$$I = du^2 + k^2 \sinh^2 \frac{u}{k} dv^2$$

と出来る。これは双曲面に展開可能であることを意味している。

## 4 線織面

### 4.1 線織面の特異点

直線の 1 パラメータ族がなす曲面のことを線織面 (ruled surface) と言う。  $\mathbb{R}^3$  では、2 点  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を通る直線は  $\mathbf{x}(u) = (1-v)\mathbf{a} + v\mathbf{b}$  ( $v \in \mathbb{R}$ ) と書けるので、線織面は 1 径数族  $\mathbf{a}(u), \mathbf{b}(u)$  を用いて

$$I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (1-v)\mathbf{a}(u) + v\mathbf{b}(u)$$

と書くことも出来る。ただし、  $I$  は区間とする。

$$\text{rank} (\mathbf{a}' + v(\mathbf{b}' - \mathbf{a}') \quad \mathbf{b} - \mathbf{a})$$

線織面を表示するのに用いた  $\mathbf{a}(u)$  の表す曲線を準曲線 (directrix) と言う。

射影化して

$$I \times P^1 \rightarrow P^3, \quad (u, [\lambda_0 : \lambda_1]) \mapsto \lambda_0 \tilde{\mathbf{a}}(u) + \lambda_1 \tilde{\mathbf{b}}(u)$$

と書いてもよい。クラインモデルへの写像  $R$  は次のようになる。

$$R: I \times P^1 \rightarrow R^5, \quad [\mathbf{r}_1(u) : \mathbf{r}_2(u)] = [\tilde{\mathbf{a}} \wedge \tilde{\mathbf{b}}] = [\mathbf{v} : \mathbf{a} \times \mathbf{v}] \quad \mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

**定義 4.1** (特異母線、振母線).  $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$  とおく。

- $\text{rank}(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{u=u_0} = 1$  のとき  $R(u_0)$  を特異母線 (singular generator) という。
- $\text{rank}(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{u=u_0} = 2$  のとき  $R(u_0)$  を振母線 (torsal generator) という。
- $\text{rank}(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{u=u_0} = 3$  のとき  $R(u_0)$  を非振母線 (non-torsal generator) という。
- $\text{rank}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{u=u_0} = 1$  のとき  $R(u_0)$  を柱状母線 (cylindrical generator) という。
- $\text{rank}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')|_{u=u_0} = 2$  のとき  $R(u_0)$  を非柱状母線 (noncylindrical generator) という。

次の式を見れば、これらの概念が  $\mathbf{a}, \mathbf{v}$  の選び方によらずに直線の族のみから定まる事がわかる。但し  $h$  は  $C^1$  関数。

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \quad (\mathbf{a} + h\mathbf{v})' \quad \mathbf{v}') &= (\mathbf{v} \quad \mathbf{a}' \quad \mathbf{v}') \begin{pmatrix} 1 & h' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} \\ (h\mathbf{v} \quad \mathbf{a}' \quad (h\mathbf{v})') &= (\mathbf{v} \quad \mathbf{a}' \quad \mathbf{v}') \begin{pmatrix} h & 0 & h' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

線織面の母線のプリュッカー座標を考える。

$$R(u) = [\mathbf{v} : \mathbf{a} \times \mathbf{v}]$$

**定理 4.2.** 次の条件は同値である。

- $R(u_0)$  は特異母線  $\iff$  写像  $R: I \rightarrow M$  は  $u = u_0$  で特異点を持つ。
- $R(u_0)$  は振母線  $\iff R'(u_0) \in M$ 。

**証明.**  $R(u) = [\mathbf{v} : \mathbf{a} \times \mathbf{v}]$  なので  $R'(u) = [\mathbf{v}' : \mathbf{a}' \times \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{v}']$ 。

$$\begin{aligned} &\text{写像 } R: I \rightarrow M \text{ は } u = u_0 \text{ で特異点を持つ。} \\ \iff &\dim\langle R(t), R'(t) \rangle = 1 \\ \iff &\exists k \quad (\mathbf{v}', \mathbf{a}' \times \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{v}') = k(\mathbf{v}, \mathbf{a} \times \mathbf{v}) \\ \iff &\exists k \quad \mathbf{v}' = k\mathbf{v}, \mathbf{a}' \times \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{v}' = k\mathbf{a} \times \mathbf{v} \\ \iff &\exists k \quad \mathbf{v}' = k\mathbf{v}, \mathbf{a}' \times \mathbf{v} + \mathbf{a} \times k\mathbf{v} = k\mathbf{a} \times \mathbf{v} \\ \iff &\exists k \quad \mathbf{v}' = k\mathbf{v}, \mathbf{a}' \times \mathbf{v} = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \text{rank}(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}') = 1 \text{ (i.e. 特異母線)}$$

$$\begin{aligned} R'(u) \in M &\iff \langle \mathbf{v}', \mathbf{a}' \times \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \mathbf{v}' \rangle = 0 \\ &\iff \langle \mathbf{v}', \mathbf{a}' \times \mathbf{v} \rangle = 0 \\ &\iff \det(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}') = 0 \\ &\iff \text{rank}(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}') \leq 2 \text{ (i.e. 振母線または特異母線)} \end{aligned}$$

□

$1 \cdot \bar{1} = 0$  より  $l' \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{l}' = 0$  である。

$$(\lambda l + \mu l') \cdot (\lambda \bar{1} + \mu \bar{l}') = \lambda^2(1 \cdot \bar{1}) + 2\lambda\mu(l' \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{l}') + \mu^2(l' \cdot \bar{l}') = \mu^2(l' \cdot \bar{l}')$$

よって、振母線であることは、対応する点でプリュッカー像の接線がクライン 2 次曲面  $M$  に含まれる事と同値である。

**定理 4.3** (線織面の特異点). 線織面の特異点については次が成り立つ。

- 特異母線の各点は、線織面の特異点である。
- 非振母線の各点は、線織面の正則点である。
- 非特異な振母線は、非柱状母線ならば線織面の特異点を丁度 1 つ、柱状母線なら特異点はない。

**証明.** 線織面  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + v\mathbf{v}$  の特異点は、行列

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = (\mathbf{a}' + v\mathbf{v}' \quad \mathbf{v})$$

の階数が落ちるところである。特異点では、次をみたく  $(a, b) \neq (0, 0)$  が存在する。

$$a(\mathbf{a}' + v\mathbf{v}') + b\mathbf{v} = 0$$

特異母線の各点で、 $\text{rank}(\mathbf{a}', \mathbf{v}, \mathbf{v}') = 1$  なので、 $\mathbf{a}' + v\mathbf{v}', \mathbf{v}$  も 1 次従属となり、特異点であることがわかる。

振母線では  $\text{rank}(\mathbf{v}, \mathbf{a}', \mathbf{v}') = 2$  なので  $xa' + y\mathbf{v} + zv' = 0$  は  $\mathbb{R}^3$  の原点を含む直線を定める。

振母線が柱状ならば  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{v}'$  は 1 次従属でこの直線は  $(0, p, q)$  で張られる。この場合は、線形写像  $(a, b) \mapsto (a, b, av)$  の像がこの直線を含むように  $(a, b, v)$  を出来ない選ぶと  $q = 0$  となり、 $\mathbf{v} = 0$  を帰結し矛盾。

捩母線が非柱状ならば  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{v}'$  は 1 次独立で  $x \neq 0$ . 線形写像  $(a, b) \mapsto (a, b, av)$  の像がこの直線を含むように  $v$  を選ぶことが出来る。さらにこのような  $v$  は一意的である。この  $v$  に対応する点が特異点である。

非捩母線の各点で、 $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  が 1 次独立なので、このような  $(a, b) \neq (0, 0)$  は存在せず、非特異点であることがわかる。□

- すべての母線が捩母線であるような線織面を捩曲面 (torsal surface) という。
- 捩曲面でない線織面を歪曲面\*1 (skew surface) とよぶ。

**定理 4.4.** • 2 つの線織面が対応プリュカー座標  $R_1(u)$ ,  $R_2(u)$  が  $k$  位の接触をすれば、線織面も対応する母線に沿って  $k-1$  位の接触をする。  
 • 2 つの線織面が対応する母線の各点で  $k$  位の接触をすれば、そのプリュカー座標  $R_1(u)$ ,  $R_2(u)$  は  $k-1$  位の接触をする。

**証明.** プリュカー座標から線織面のパラメータ表示を得るには、補題 2.2 の証明中に現れた  $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  を使って得られる母線の次の表示式を使う。

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{l_1}(0, \bar{l}_3, -\bar{l}_2) + v(l_1, l_2, l_3) && (l_1 \neq 0 \text{ のとき}) \\ &-\frac{1}{l_2}(-\bar{l}_3, 0, \bar{l}_1) + v(l_1, l_2, l_3) && (l_2 \neq 0 \text{ のとき}) \\ &-\frac{1}{l_3}(\bar{l}_2, -\bar{l}_1, 0) + v(l_1, l_2, l_3) && (l_3 \neq 0 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

第 1 項の商の  $k$  階の微分は、分母分子の  $k$  階までの微分で表されるので最初の主張は明らか。

直線  $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$  のプリュカー座標は

$$(1, \bar{\mathbf{l}}) = (\mathbf{v}, \mathbf{a} \times \mathbf{v})$$

なので、2 つの線織面が対応する母線の各点で  $k$  位の接触をすれば、 $\mathbf{a}$  は  $k$  位までの微分が一致し、 $\mathbf{v}$  は  $k-1$  位までの微分が一致する。よって、 $(\mathbf{v}, \mathbf{a} \times \mathbf{v})$  は  $k-1$  位までの偏微分が一致する。□

\*1 または斜曲面

## 4.2 縮括線

ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  で次で表される線織面を考える。

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{v}(u)$$

$\mathbf{x}$  を偏微分すると、 $\mathbf{x}_u = \mathbf{a}' + v\mathbf{v}'$ ,  $\mathbf{x}_v = \mathbf{v}$  なので、法ベクトル  $\mathbf{n}(u, v)$  は次で与えられる。

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (\mathbf{a}' + v\mathbf{v}') \times \mathbf{v}$$

- $\mathbf{c}(u, v) = v\mathbf{v}(u)$  で定まる曲面を準錐面 (director cone) という。
- 点  $\mathbf{a}(u)$  を通り、ベクトル  $\mathbf{v}(u)$ ,  $\mathbf{v}'(u)$  で張られる平面を漸近平面 (asymptotic plane) という。
- 母線  $R(u)$  を含み、漸近平面に直交する平面を中心平面 (central plane) という。中心平面は点  $\mathbf{a}(u)$  を通り、ベクトル  $\mathbf{v}(u)$ ,  $\mathbf{v}'(u) \times \mathbf{v}(u)$  で張られる平面である。

中心平面の法ベクトルは  $\mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{v})$  で与えられる。

中心平面が曲面の接平面となるような点を母線の縮括点 (striction point) または中心 (center) という。  $\mathbf{x}(u, v_s(u))$  が縮括点だとすると

$$0 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{v}' \times \mathbf{v} \rangle = \langle (\mathbf{a}' + v_s \mathbf{v}') \times \mathbf{v}, \mathbf{v}' \times \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{a}' \times \mathbf{v}, \mathbf{v}' \times \mathbf{v} \rangle + v_s \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{v}, \mathbf{v}' \times \mathbf{v} \rangle$$

より非柱状母線のときはこれを解く事が出来て

$$v_s = -\frac{\langle \mathbf{a}' \times \mathbf{v}, \mathbf{v}' \times \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}' \times \mathbf{v}\|^2} = -\frac{\langle \mathbf{a}', \mathbf{v}' \rangle \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{a}', \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{v}'\|^2 - \langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle^2}$$

$\|\mathbf{v}(u)\| \equiv 1$  のときはこの表示はより簡単になる。  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$  と書くと、 $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1 \rangle \equiv 0$  なので

$$v_s = -\frac{\langle \mathbf{a}', \mathbf{e}'_1 \rangle}{\|\mathbf{e}'_1\|^2}$$

射影化すると漸近平面は  $\tilde{\mathbf{a}}(u) = (1, \mathbf{a}(u))$  と  $\tilde{\mathbf{v}}(u) = (0, \mathbf{v}(u))$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}'(u) = (0, \mathbf{v}'(u))$  の張る平面に対応する。

縮括点の軌跡を縮括線 (striction curve) という。

$$\mathbf{s}(u) = \mathbf{a} + v_s \mathbf{v} = \mathbf{a} - \frac{\langle \mathbf{a}', \mathbf{e}'_1 \rangle}{\|\mathbf{e}'_1\|^2} \mathbf{e}_1$$

**演習 4.5.** 線織面の母線のプリュカー座標が  $(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}})$  であらわされているとき縮括線は

$$\mathbf{s} = ((\mathbf{r} \times \mathbf{r}')^2, \det(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \bar{\mathbf{r}})\mathbf{r} + \det(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}')\bar{\mathbf{r}} + (\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'))$$

線織面  $S$  はある非特異曲線の接可展面と 2 位以上の接触をすれば、そこでそれらの縮括線も 1 位の接触をするので、 $S$  の縮括線も非特異である。

線織面

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a}(u) + v\mathbf{e}_1(u), \quad \|\mathbf{e}_1(u)\| = 1$$

を考える。母線のプリュカー像  $R$  は

$$R(u) = [R_1(u) : R_2(u)] = [\mathbf{e}_1 : \mathbf{a} \times \mathbf{e}_1]$$

となる。このとき配分径数(distribution parameter)  $\delta$  を次で定める。

$$\delta = \frac{\|R_1\|^2 \langle R'_1, R'_2 \rangle}{\|R_1 \times R'_1\|^2} = \frac{\|\mathbf{e}_1\|^2 \langle \mathbf{e}'_1, (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}') \rangle}{\|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1\|^2} = \frac{\det(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{a}')}{\|\mathbf{e}'_1\|^2}$$

### 4.3 線織面の微分幾何学的な不変量

$\mathbf{s}(u)$  を縮括線とする線織面  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{s}(u) + v\mathbf{e}_1(u)$ ,  $\|\mathbf{e}_1(u)\| = 1$  を考える。 $u$  を縮括線の弧長変数とする。

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|}$$

とおく。 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  をサンニア枠(Sannia frame)という。曲率  $\kappa$  と捩率  $\tau$  を

$$\kappa = \|\mathbf{e}'_1\|, \quad \tau = \frac{\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_1)}{\|\mathbf{e}'_1\|^2}$$

で定める。このとき

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

証明.  $\mathbf{e}'_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + a_{i3}\mathbf{e}_3$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とおいて係数  $a_{ij}$  を決めればよい。

$\mathbf{e}'_1 = \|\mathbf{e}'_1\|\mathbf{e}_2 = \kappa\mathbf{e}_2$  より  $a_{11} = a_{13} = 0$ ,  $a_{12} = \kappa$ . 更に

$$a_{23} = \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \left\langle \frac{\mathbf{e}''_1 \|\mathbf{e}_1\| - \mathbf{e}'_1 \|\mathbf{e}'_1\|}{\|\mathbf{e}'_1\|^2}, \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{e}''_1 \|\mathbf{e}_1\|}{\|\mathbf{e}'_1\|^2}, \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} \right\rangle = \tau$$

$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$  を微分して得られる式、

$$\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j \rangle = 0$$

より  $a_{ij} + a_{ji} = 0$  となり証明が終わる。□

線織面の微分幾何学的な不変量を計算しておこう。

縮括線の接方向  $\mathbf{s}'$  と母線の方向  $\mathbf{e}_1$  のなす角を縮括角 (striction) といい  $\sigma(u)$  で表す。

$$\mathbf{s}'(u) = \|\mathbf{s}'\|(\cos \sigma(u)\mathbf{e}_1 + \sin \sigma(u)\mathbf{e}_3)$$

すると

$$\|\mathbf{s}'\| \sin \sigma = \langle \mathbf{s}', \mathbf{e}_3 \rangle = \left\langle \mathbf{s}', \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} \right\rangle = \frac{\det(\mathbf{s}', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1)}{\|\mathbf{e}'_1\|} = \kappa\delta$$

を得る。線織面  $\mathbf{x} = \mathbf{s} + v\mathbf{e}_1$  を  $u, v$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{s}' + v\mathbf{e}'_1 \\ &= \|\mathbf{s}'\| \cos \sigma \mathbf{e}_1 + v\kappa\mathbf{e}_2 + \|\mathbf{s}'\| \sin \sigma \mathbf{e}_3 \\ &= \|\mathbf{s}'\| \cos \sigma \mathbf{e}_1 + v\kappa\mathbf{e}_2 + \kappa\delta\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

なので、

$$(3) \quad E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \|\mathbf{s}'\|^2 + v^2\kappa^2, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \|\mathbf{s}'\| \cos \sigma, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1$$

となり  $EG - F^2 = \|\mathbf{s}'\|^2 \sin^2 \sigma + v^2\kappa^2 = \kappa^2(\delta^2 + v^2)$  を得る。

定理 4.6. 縮括線を用いて表示された 2 つの線織面

$$\mathbf{x}_1(u, v) = \mathbf{s}_1(u) + v\mathbf{v}_1(u) \quad \mathbf{x}_2(u, v) = \mathbf{s}_2(u) + v\mathbf{v}_2(u)$$

の曲率を  $\kappa_1(u), \kappa_2(u)$ , 縮括角を  $\sigma_1(u), \sigma_2(u)$  とする。 $\kappa_1(u) = \kappa_2(u)$ ,  $\sigma_1(u) = \sigma_2(u)$  ならば、対応  $\mathbf{x}_1(u, v) \mapsto \mathbf{x}_2(u, v)$  は等距離写像である。

単位法ベクトル  $\mathbf{n}$  は次のようになる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\kappa\delta\mathbf{e}_2 - v\kappa\mathbf{e}_3}{\sqrt{\kappa^2(\delta^2 + v^2)}} = \frac{\delta\mathbf{e}_2 - v\mathbf{e}_3}{\sqrt{\delta^2 + v^2}}$$

$\delta \equiv 0$  のときは曲面は可展面で  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$  が単位法ベクトルになる。

$\mathbf{x}$  の 2 階偏微分は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= (\|\mathbf{s}'\| \cos \sigma)' \mathbf{e}_1 + v\kappa' \mathbf{e}_2 + (\kappa\delta)' \mathbf{e}_3 + \|\mathbf{s}'\| \cos \sigma \mathbf{e}'_1 + v\kappa \mathbf{e}'_2 + \kappa\delta \mathbf{e}'_3, \\ &= ((\|\mathbf{s}'\| \cos \sigma)' - v\kappa^2) \mathbf{e}_1 + (v\kappa' + \kappa\|\mathbf{s}'\| \cos \sigma - \kappa\tau\delta) \mathbf{e}_2 + ((\kappa\delta)' + v\kappa\tau) \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_{uv} &= \mathbf{e}'_1 = \kappa\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_{vv} &= 0 \end{aligned}$$

となるので、第2基本形式の係数は

$$(4) \quad L = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{(v\kappa' + \kappa\|\mathbf{s}'\| \cos \sigma - \kappa\tau\delta)\delta - ((\kappa\delta)' + v\kappa\tau)v}{\sqrt{\delta^2 + v^2}}$$

$$(5) \quad M = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\kappa\delta}{\sqrt{\delta^2 + v^2}}$$

$$(6) \quad N = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = 0$$

となる。

**定理 4.7 (E. Larmarle).** 線織面  $\mathbf{x} = \mathbf{s}(u) + v\mathbf{e}_1$  ( $\mathbf{s}(u)$  は締括線,  $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ ) のガウス曲率  $K(u, v)$  は、配分径数  $\delta$  を用いて次のように表される。

$$K(u, v) = -\frac{\delta^2}{(\delta^2 + v^2)^2}$$

証明. (3) と (5), (6) に、 $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$  を使えばよい。□

これより  $\delta \equiv 0$  のときは曲面は可展面である事がわかる。

平均曲率  $H$  ももちろん計算できる。

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{-2\|\mathbf{s}'\| \cos \sigma \kappa \delta / \sqrt{\delta^2 + v^2} + L}{2\kappa^2(\delta^2 + v^2)} \\ &= \frac{(v\kappa' - \kappa\|\mathbf{s}'\| \cos \sigma - \kappa\tau\delta)\delta - ((\kappa\delta)' + v\kappa\tau)v}{2\kappa^2(\delta^2 + v^2)} \end{aligned}$$

上記  $L, M, N$  の表示より  $(du, dv) = (0, 1)$  は (可展面でない) 線織面の漸近方向である。もう一つの漸近方向の微分方程式は

$$Ldu + 2Mdv = 0$$

である。これは次のリッカチ型の微分方程式になる。

$$\frac{dv}{du} + Pv^2 + 2Qv + R = 0$$

ここで、 $P, Q, R$  は  $u$  だけの関数である。その4つの解  $v_1, v_2, v_3, v_4$  の間に

$$\frac{v_1 - v_3}{v_2 - v_3} : \frac{v_1 - v_4}{v_2 - v_4} = \text{定数}$$

なる関係がある。よって次の定理を得る。

**定理 4.8 (Serret).** 斜曲面の4つの漸近曲線が母線を切る4点の複比は、どの母線についても同一である。

**定理 4.9.** 線織面があれば非振母線に沿って2位の接触をするレグルスが存在し、このレグルスの非振母線を含まない方の直線族は、非振母線に沿った、元の線織面の母線方向でない漸近直線である。

証明.  $\widetilde{\mathbf{M}}$  の法線方向は  $(\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{1}})$  で張られるので、ベクトル  $(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$  のクライネ2次超曲面の法ベクトル  $(\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{1}})$  方向への直交射影は

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{1}}}{\bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}}} (\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{1}})$$

となる。プリュッカー座標  $(\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{1}})$  は  $\bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}} = 0$  を満たす。よって

$$\bar{\mathbf{1}}' \cdot \bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}}' = 0 \quad \bar{\mathbf{1}}'' \cdot \bar{\mathbf{1}} + 2\bar{\mathbf{1}}' \cdot \bar{\mathbf{1}}' + \bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}}'' = 0$$

振母線であることより

$$\bar{\mathbf{1}}'' \cdot \bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{1}}'' = -2\bar{\mathbf{1}}' \cdot \bar{\mathbf{1}}' \neq 0$$

で、 $(\bar{\mathbf{1}}', \bar{\mathbf{1}}'')$  の法方向への直交射影が0でない。よって  $(\bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{1}})$ ,  $(\bar{\mathbf{1}}', \bar{\mathbf{1}}')$ ,  $(\bar{\mathbf{1}}'', \bar{\mathbf{1}}'')$  の張る平面は、 $M$  に横断的に交わる。定理4.4より、この平面断面に対応するレグルスが求めるものである。2位の接触をする曲面の、接触点での漸近直線は一致する事、およびレグルスの漸近直線は母線である事より、最後の主張も従う。□

主方向の方程式は

$$\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -dudv & du^2 \end{vmatrix} = 0$$

であった。可展面のときは  $\delta = 0, \sigma = 0$  であり、主方向の方程式は

$$\begin{vmatrix} \|\mathbf{s}'\|^2 + v^2\kappa^2 & \|\mathbf{s}'\| & 1 \\ \pm\kappa\tau & 0 & 0 \\ dv^2 & -dudv & du^2 \end{vmatrix} = \mp\kappa\tau du (\|\mathbf{s}'\| du + dv) = 0$$

となる。よって母線が、曲率線である。もう一つの曲率線は

$$\frac{dv}{du} = -\|\mathbf{s}'\|$$

を解いて得られる。

$$v = -\int \|\mathbf{s}'\| du$$

**定理 4.10 (Sannia).** 区間  $I$  で定義された  $C^1$  正値関数  $\kappa(u)$ ,  $C^0$  関数  $\tau(u)$ ,  $C^1$  関数  $\sigma(u)$  に対し、 $\kappa(u)$  を曲率,  $\tau(u)$  を捩率,  $\sigma(u)$  を縮括角とする  $C^2$  線織面で  $u$  を縮括線の弧長変数とするものが唯一存在する。

証明. 常微分方程式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

を解いて, 枠  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  を構成すると, 係数行列が歪対称である事から, これは直交枠である事がわかる. 次に常微分方程式

$$\mathbf{s}'(u) = \cos \sigma(u) \mathbf{e}_1 + \sin \sigma(u) \mathbf{e}_3$$

を初期条件  $\mathbf{s}(u_0) = \mathbf{s}_0$  の下で解いて, 縮括線  $\mathbf{s}$  を得る.  $\mathbf{s}$  を準曲線,  $\mathbf{e}_1$  を方向曲線とする線織面は, 曲率  $\kappa$ , 捩率  $\tau$ , 縮括角  $\sigma$  を持つ. 常微分方程式の解の一意性よりこのような線織面は唯一に定まる.  $\square$

一つの曲線に螺旋運動を施して得られる曲面を螺旋曲面という. 螺旋曲面は線織面である。

- 方向曲線  $\mathbf{v}$  が平面上にある線織面を擬円錐状曲面(conoidal surface)という. このとき, 方向ベクトルはある平面  $\varepsilon$  に平行である. さらに, すべての漸近平面は  $\varepsilon$  に平行で, すべての中心平面は  $\varepsilon$  に垂直である. 中心可展面は柱状であり, 縮括線は  $\varepsilon$  への直交射影の線織面への制限の特異点集合である.
- 準曲線が直線に含まれるとき擬円錐体(conoid)という.
- 準曲線が  $\varepsilon$  に直交する擬円錐体を正擬円錐体(right conoid)という. 正擬円錐体の縮括線は準曲線に含まれる.

**例 4.11 (正擬円錐体の例).** •  $\mathbf{a} = (0, \cos \phi, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (d, 0, \sin \phi)$

- Zindler の擬円錐体  $\mathbf{a} = (0, 0, \tan 2\phi)$ ,  $\mathbf{v} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$
- Plücker の擬円錐体  $\mathbf{a} = (0, 0, \sin \phi)$ ,  $\mathbf{v} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$

#### 4.4 線織面の特異点の分類

線織面  $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{s}(u) + v\mathbf{e}(u)$  を考える. 但し  $\mathbf{s}(u)$  は縮括線で  $\|\mathbf{e}(u)\| \equiv 1$  とする. 柱状母線には特異点はないので, 柱状母線はないとして考える. すると  $\mathbf{e}'(u) \neq 0$  なの

で, 怪数  $u$  を取り替えて  $\|\mathbf{e}'(u)\| = 1$  と仮定してよい.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}' \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

として, 正規直交枠を作ると,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

となる関数  $k$  が存在することがわかる.  $\mathbf{s}' = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$  とおくと, 縮括線であることから

$$a_2 = \langle \mathbf{s}', \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{s}', \mathbf{e}' \rangle = 0$$

がわかる.

**定理 4.12.** •  $(u, v)$  が  $\mathbf{x}$  の特異点  $\iff v = a_3 = 0$

- $(u, v)$  が  $\mathbf{x}$  の交差帽子 (ホイットニーの傘).  $\iff v = a_3 = 0, a'_3 \neq 0$ .

証明.  $\mathbf{x}(u, v)$  の偏微分を計算すると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ v & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. 定理 6.2 より,  $\frac{\partial(a_3, v)}{\partial(u, v)} = a'_3 \neq 0$  が交差帽子 (ホイットニーの傘) となる条件である.  $\square$

$a_3 \equiv 0$  のとき  $\mathbf{x}$  は可展面となり, 特別に興味がある. このときは

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (a_1\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2) \times \mathbf{e}_1 = -v\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

となり, 単位法ベクトル  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$  は曲面の特異点にも連続に拡張される.

$$L : U \rightarrow T^*\mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (\mathbf{x}(u, v), \mathbf{n}^*(u, v))$$

とおくと次の可換図式を満たす.

$$\begin{array}{ccc} & & T^*\mathbb{R}^3 \subset T^*\mathbb{R}^3 \\ & \nearrow L & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathbf{x}} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$



$T^*\mathbb{R}^3$  の底方向の座標を  $(x_1, x_2, x_3)$ , ファイバーの座標を  $(p_1, p_2, p_3)$  とし、 $\omega = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$  とおく。

$$L^*\omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u du + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v dv = 0$$

なので、可展面の特異点は Legendre 特異点論の研究対象である。 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  として、

$$\Phi(u, v, \mathbf{y}, t) = (\mathbf{y} - \mathbf{x}(u, v)) \cdot \mathbf{n}(u, v) - t$$

と置く。

$$\Phi_u = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_u - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{3u} = -k(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_2 = -k(\mathbf{y} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{e}_2$$

$$\Phi_v = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_v - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n} = 0$$

なので退化した Legendre 特異点である。

**定理 4.13.** 可展面の特異点は、縮括線である。さらに、

- $v = 0, a_1 \neq 0$  ならば尖状点 (すなわち、適当な座標で  $f(u, v) = (u^2, u^3, v)$ )
- $v = a_1 = 0, a'_1$  ならば燕の尾特異点 (すなわち、適当な座標で  $f(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ )
- $v = k = 0, a_1 \neq 0, k' \neq 0$  ならば尖交叉帽子 (cuspidal cross cup) (すなわち、適当な座標で  $f(u, v) = (u, v^2, uv^3)$ )

証明. 直前に計算したように

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = -v\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

なので  $v = 0$  が特異点の定義式である。つまり縮括線が特異点集合である。 $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)$  に関するゼロベクトル場  $\mathbf{v}$  は

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial u} - a_1 \frac{\partial}{\partial v}$$

となる。

$$\mathbf{v}\mathbf{x} = \mathbf{x}_u - a_1 \mathbf{x}_v = (a_1 \mathbf{e}_1 - v\mathbf{e}_2) + a_1 \mathbf{e}_1 = -v\mathbf{e}_2$$

となるからである。また

$$\mathbf{v}(-v) = \left( \frac{\partial}{\partial u} - a_1 \frac{\partial}{\partial v} \right) (-v) = a_1$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}(-v)) = \left( \frac{\partial}{\partial u} - a_1 \frac{\partial}{\partial v} \right) a_1 = a'_1$$

より、 $a_1 = 0, a'_1 \neq 0$  が燕の尾となる条件 (Morin による判定法) である。

尖交叉帽子となる条件を見るには、

S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Singularities of maximal surfaces. Math. Z. 259 (2008), no. 4, 827–848.

による判定を使う。曲線  $\gamma(t) = (t, 0)$  は特異点集合  $v = 0$  を表す。 $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial u}$  なので  $\gamma'(t)$  と  $\mathbf{v}$  が一次独立であることは  $a_1 \neq 0$  と同値。 $\mathbf{v}(\mathbf{e}_3) = \left( \frac{\partial}{\partial u} - a_1 \frac{\partial}{\partial v} \right) \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}'_3 = -k\mathbf{e}_2$  より

$$\phi(t) = |\gamma'(t) \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{v}(\mathbf{e}_3)| = |a_1 \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3 \quad -k\mathbf{e}_2| = a_1 k$$

とおく。

$$\phi'(t) = a'_1 k + a_1 k'$$

より、主張が従う。□

## 5 線叢と線榛

直線の 2 径数族を線叢 (line congruence) という。叢とは草むらの意味、草が茂る様を表す漢字である。更に、直線の 3 径数族を線榛 (line complex) という。榛とは草や枝が茂る様、はしばみの木の意味。西洋はしばみの実はヘーゼルナッツである。

### 5.1 線叢の基礎事項

開集合  $D \subset \mathbb{R}^2$  上で定義された線叢 (直線の 2 径数族) があれば、対応するプリュカー座標を考えることにより、写像

$$P: D \rightarrow M \subset P^5(\mathbb{R}), \quad u = (u, v) \mapsto P(u, v) = (P_1(u, v), P_2(u, v))$$

が定まる。線榛の径数表現

$$\mathbf{x}(u, v, t) = \mathbf{a}(u, v) + t\mathbf{e}(u, v) \quad \mathbf{a}: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{e}: D \rightarrow S^2$$

を考える。 $\mathbf{a}(u, v)$  を準曲面 (directrix),  $\mathbf{e}: D \rightarrow S^2$  を球面写像という。 $\mathbf{e} \in S^2$  でなく、 $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 - 0$  とする場合もある。

$D$  内の曲線  $(u(s), v(s))$  を決めると、線織面  $\mathbf{x}(u(s), v(s), t)$  が定まる。この曲面を叢曲面 (congruence surface) という。

線叢の母線のプリュカー座標を  $R(u, v)$  とする。

$$R(u, v) = (\mathbf{e}, \mathbf{a} \times \mathbf{e}) = (\mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}})$$

とおく。\$(u, v) = (u\_0, v\_0)\$ で対応する母線が正則であるとは

$$(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}), (\mathbf{k}_u, \bar{\mathbf{k}}_u), (\mathbf{k}_v, \bar{\mathbf{k}}_v)$$

が \$(u, v) = (u\_0, v\_0)\$ で 1 次独立であるときをいう。

$$\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}} = 0 \text{ より}$$

$$\mathbf{k}_u \cdot \bar{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}}_u = 0, \quad \mathbf{k}_v \cdot \bar{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}}_v = 0$$

に注意しておこう。

**補題 5.1.** 叢曲面の母線のプリュカー座標を \$R(s)\$ とする。このとき \$R(s\_0)\$ と \$R'(s\_0)\$ の生成する部分空間 \$\langle R(s\_0), R'(s\_0) \rangle\$ は、比 \$[\frac{du}{ds}(s\_0) : \frac{dv}{ds}(s\_0)]\$ で定まる。

**証明.** \$R(s) = (\mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}})\$ より

$$R'(s) = (\mathbf{k}_u, \bar{\mathbf{k}}_u)u' + (\mathbf{k}_v, \bar{\mathbf{k}}_v)v'$$

であり、\$s = s\_0\$ とすれば従う。 \$\square\$

\$\langle R(s\_0), R'(s\_0) \rangle \subset \widetilde{M}\$ のとき、\$[\frac{du}{ds} : \frac{dv}{ds}]|\_{s=s\_0}\$ を振方向(torsal direction)という。

**補題 5.2.** 線叢のプリュカー座標 \$P\$ が \$(u\_0, v\_0)\$ で正則で、曲線 \$(u(s), v(s))\$ が \$(u\_0, v\_0) = (u(s\_0), v(s\_0))\$ で非特異ならば、対応する叢曲面も非特異である。

**証明.** 叢曲面 \$\mathbf{y}(s, t) = \mathbf{a}(u(s), v(s)) + t\mathbf{e}(u(s), v(s))\$ を考える。\$(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}})\$ を母線のプリュカー座標とすると

$$(\mathbf{k}', \bar{\mathbf{k}}') = (\mathbf{k}_u, \bar{\mathbf{k}}_u)u' + (\mathbf{k}_v, \bar{\mathbf{k}}_v)v'$$

なので、\$(u(s), v(s))\$ が非特異ならば

$$\begin{aligned} P(s) \text{ が } s = s_0 \text{ で特異点} &\iff R(s_0), R'(s_0) \text{ が 1 次従属} \\ &\implies (\mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}), (\mathbf{k}_u, \bar{\mathbf{k}}_u), (\mathbf{k}_v, \bar{\mathbf{k}}_v) \text{ が 1 次従属} \\ &\implies (\mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}) \text{ が } s = s_0 \text{ で正則でない} \end{aligned}$$

となり、結果を得る。 \$\square\$

線叢のプリュカー座標を \$P : D \to M \subset P^5\$ とする。プリュカー座標を \$P = (\mathbf{1}, \bar{\mathbf{1}})\$ と書く。方向 \$[du : dv]\$ が振方向であるとは

$$(\mathbf{l}_u du + \mathbf{l}_v dv) \cdot (\bar{\mathbf{l}}_u du + \bar{\mathbf{l}}_v dv) = 0$$

となるときである。これを書き換えて

$$\mathbf{l}_u \cdot \bar{\mathbf{l}}_u du^2 + (\mathbf{l}_u \cdot \bar{\mathbf{l}}_v + \mathbf{l}_v \cdot \bar{\mathbf{l}}_u) du dv + \mathbf{l}_v \cdot \bar{\mathbf{l}}_v dv^2 = 0$$

を得る。

- この方程式が 2 実根をもつとき、\$P\$ はそこで楕円的であると言う。
- この方程式が重根をもつとき、\$P\$ はそこで放物的であると言う。
- この方程式が実根をもたないとき、\$P\$ はそこで双曲的であると言う。
- この方程式が恒等的に 0 のとき、\$P\$ はそこで楕形的であると言う。

## 5.2 線叢の基本形式

径数表現された線様

$$\mathbf{x}(u, v, t) = \mathbf{a}(u, v) + t\mathbf{e}(u, v) \quad \mathbf{a} : D \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{e} : D \to S^2$$

に対し、

$$E = \langle \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_v \rangle$$

$$e = \langle \mathbf{a}_u, \mathbf{e}_u \rangle, \quad f = \langle \mathbf{a}_u, \mathbf{e}_v \rangle, \quad f' = \langle \mathbf{a}_v, \mathbf{e}_u \rangle, \quad g = \langle \mathbf{a}_v, \mathbf{e}_v \rangle$$

とおいて、

$$I = \langle d\mathbf{e}, d\mathbf{e} \rangle = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$II = -\langle d\mathbf{a}, d\mathbf{e} \rangle = e du^2 + (f + f') du dv + g dv^2$$

なる対称形式 (それぞれ第 1 基本形式、第 2 基本形式という) を考えよう。\$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \equiv 1\$ を \$u, v\$ で偏微分して \$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e}\_u \rangle \equiv 0, \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}\_v \rangle \equiv 0\$。さらに \$u, v\$ で偏微分して

$$\langle \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_u \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_{uu} \rangle \equiv 0, \quad \langle \mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_{uv} \rangle \equiv 0, \quad \langle \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_v \rangle + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e}_{vv} \rangle \equiv 0.$$

となる。よって次を得る。

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathbf{e}_{uu} &= \Gamma_{uu}^u \mathbf{e}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{e}_v - E \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_{uv} &= \Gamma_{uv}^u \mathbf{e}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{e}_v - F \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_{vv} &= \Gamma_{vv}^u \mathbf{e}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{e}_v - G \mathbf{e} \end{aligned}$$

ここで Christoffel の記号を用いている。

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_u &= a_1 \mathbf{e}_u + b_1 \mathbf{e}_v + c_1 \mathbf{e} \\ \mathbf{a}_v &= a_2 \mathbf{e}_u + b_2 \mathbf{e}_v + c_2 \mathbf{e} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f' & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} c_1 = \langle \mathbf{a}_u, \mathbf{e} \rangle \\ c_2 = \langle \mathbf{a}_v, \mathbf{e} \rangle \end{matrix}$$

可積分条件  $(\mathbf{a}_u)_v = (\mathbf{a}_v)_u$  の両辺を  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}$  の 1 次結合で書き下してみる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_u)_v &= (a_1\mathbf{e}_u + b_1\mathbf{e}_v + c_1\mathbf{e})_v \\ &= a_{1v}\mathbf{e}_u + b_{1v}\mathbf{e}_v + c_{1v}\mathbf{e} + a_1\mathbf{e}_{uv} + b_1\mathbf{e}_{vv} + c_1\mathbf{e}_v \\ &= (a_{1v} + a_1\Gamma_{uv}^u + b_1\Gamma_{vv}^u)\mathbf{e}_u + (b_{1v} + a_1\Gamma_{uv}^v + b_1\Gamma_{vv}^v + c_1)\mathbf{e}_v + (c_{1v} - a_1F - b_1G)\mathbf{e} \\ (\mathbf{a}_v)_u &= (a_2\mathbf{e}_u + b_2\mathbf{e}_v + c_2\mathbf{e})_u \\ &= a_{2u}\mathbf{e}_u + b_{2u}\mathbf{e}_v + c_{2u}\mathbf{e} + a_2\mathbf{e}_{uu} + b_2\mathbf{e}_{uv} + c_2\mathbf{e}_u \\ &= (a_{2u} + a_2\Gamma_{uu}^u + b_1\Gamma_{uv}^u + c_2)\mathbf{e}_u + (b_{2u} + a_2\Gamma_{uu}^v + b_1\Gamma_{uv}^v)\mathbf{e}_v + (c_{2u} - a_2E - b_2F)\mathbf{e} \end{aligned}$$

よって、可積分条件  $(\mathbf{a}_u)_v = (\mathbf{a}_v)_u$  は次と同値。

$$(9) \quad \begin{aligned} a_{1v} + a_1\Gamma_{uv}^u + b_1\Gamma_{vv}^u &= a_{2u} + a_2\Gamma_{uu}^u + b_1\Gamma_{uv}^u + c_2 \\ b_{1v} + a_1\Gamma_{uv}^v + b_1\Gamma_{vv}^v + c_1 &= b_{2u} + a_2\Gamma_{uu}^v + b_1\Gamma_{uv}^v \\ c_{1v} - a_1F - b_1G &= c_{2u} - a_2E - b_2F \end{aligned}$$

よって次の定理を得た。

**定理 5.3.** 上で記述した線叢は、可積分条件 (9) を満たす方程式 (7), (8) で定まる。与えられた球写像  $\mathbf{e}: D \rightarrow S^2$  と関数  $e, f, f', g, c_1, c_2$  が条件 (9) を満たせば、方程式 (8) の解が準曲面を (従って線叢を) 定める。

曲面論の類似で、線叢に対し、次で決まる点を線叢の焦点という。

$$\mathbf{a} + \lambda\mathbf{e} \quad \text{但し} \quad \begin{vmatrix} e + \lambda E & f + \lambda F \\ f' + \lambda F & g + \lambda G \end{vmatrix} = 0$$

### 5.3 法叢

ある曲面の法線全体からなる線叢を法叢 (normal congruence) という。

**定理 5.4.** 線叢が法叢である必要十分条件は  $f = f'$ 。

**証明.** 線叢  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}$ ,  $\|\mathbf{e}\| = 1$ , が, ある曲面  $\mathbf{x} = \mathbf{a}(u, v) + t(u, v)\mathbf{e}(u, v)$  の法叢であるためには,

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$$

となる関数  $t(u, v)$  が存在することが必要十分である。これは書き直すと

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_u + t\mathbf{e}_u + t_u\mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_u \rangle + t_u \\ 0 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_v + t\mathbf{e}_v + t_v\mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_v \rangle + t_v \end{aligned}$$

となるので、偏微分方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial u} = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_u \rangle \\ \frac{\partial t}{\partial v} = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_v \rangle \end{cases}$$

の解が存在するための条件は

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_u \rangle = \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{e}, \mathbf{a}_v \rangle$$

で、これを書き直すと  $f = f'$  を得る。□

### 5.4 線様の例

**補題 5.5.** クラインモデル  $M$  と超平面  $H$  の共通部分は

- $H$  が  $M$  に接しないとき  $H$  の非特異 2 次超曲面である。
- $H$  が  $M$  に接すれば、接点で特異点を持つ  $H$  の特異 2 次超曲面である。

**証明.** 超平面  $H$  を  $\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{x}} = 0$  で表しておく。  $[\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}]$  を  $M \cap H$  の点とすると、

$$\mathbf{y} \cdot \bar{\mathbf{y}} = 0, \quad \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{y}} = 0$$

となる。このヤコビ行列を計算すると

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}} & \mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{a}} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

となり、この行列の階数を見ることにより証明を終わる。□

クライン 2 次超曲面  $M$  の超平面断面  $M \cap H$  は、 $\mathbb{P}^3$  の直線の 3 径数族を定める。これはどのような直線族か？

直線の 3 径数族でそのプリュカー座標が 1 次の関係式を見たすものを線形線様 (linear line complex) という。

**例 5.6.** 等長変換の 1 径数族

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ pt \end{pmatrix}$$

を  $z$  軸を軸とするピッチ  $p$  の螺線運動(helical motion with  $z$ -axis and with pitch  $p$ ) という。

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -x \sin t - y \cos t \\ x \cos t - y \sin t \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \\ p \end{pmatrix}$$

なので  $\|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\|^2 = x^2 + y^2 + p^2$  よって  $s = t/\sqrt{x^2 + y^2 + p^2}$  が螺線の弧長変数である。 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$  なるベクトル  $\mathbf{n}$  をとると、螺線  $\mathbf{n}$  方向の法線は、 $\mathbf{x}(t) + s\mathbf{n}$ , ( $s \in \mathbb{R}$ ) で表される。法線のプリュッカー座標は

$$[\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}] = [\mathbf{n}, \mathbf{x} \times \mathbf{n}]$$

$\mathbf{n} = (l_1, l_2, l_3)$  と書くと、

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -yl_1 + xl_2 + pl_3 = 0.$$

$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{x} \times \mathbf{l}$  より、

$$\bar{l}_1 = yl_3 - zl_2, \quad \bar{l}_2 = zl_1 - xl_3, \quad \bar{l}_3 = xl_2 - yl_1$$

なので  $pl_3 + \bar{l}_3 = 0$  である。

**演習 5.7.** 上で定めた螺線の法線族全体は、直線の 3 径数族を定めることを示せ。この族を射影化した時、無限遠平面に載っている直線はどのようなものか、決定せよ。

**定理 5.8.**  $\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}} \neq 0$  のとき、プリュッカー座標  $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}})$  が

$$\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$$

を満たすものは、例 5.6 の直線の 3 径数族と射影同値である。このような直線の 3 径数族を正則線形様(regular linear complex)という。

**証明.**  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ,  $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$  とおき、交代行列

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \\ -\bar{c}_1 & 0 & c_3 & -c_2 \\ -\bar{c}_2 & -c_3 & 0 & c_1 \\ -\bar{c}_3 & c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det C = (\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}})^2 \neq 0$$

に対し、次の写像を考える。

$$\pi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3*}, \quad [\mathbf{x}] \mapsto [C\mathbf{x}]^\perp$$

さらに  $k = 1, 2$  のとき

$$\pi_k : G(k+1, 4) \rightarrow G(3-k, 4), \quad [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k] \mapsto [C\mathbf{x}_0, \dots, C\mathbf{x}_k]^\perp$$

$\mathbb{P}^3$  の直線  $L$  が点  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  で張られるとき、 $[\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}] = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  であり

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0 &\iff \bar{c}_1(x_0y_1 - y_0x_1) + \bar{c}_2(x_0y_2 - y_0x_2) + \bar{c}_3(x_0y_3 - y_0x_3) \\ &\quad + c_1(x_2y_3 - y_2x_3) + c_2(x_3y_1 - y_3x_1) + c_3(x_1y_2 - y_1x_2) = 0 \\ &\iff (y_0 \ y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{pmatrix} 0 & \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \\ -\bar{c}_1 & 0 & c_3 & -c_2 \\ -\bar{c}_2 & -c_3 & 0 & c_1 \\ -\bar{c}_3 & c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff {}^t\mathbf{x}C\mathbf{y} = 0 \\ &\iff \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \pi([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \quad (C \text{ 交代行列なので } \mathbf{x} \in \pi(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \pi(\mathbf{y})) \\ &\iff \pi_1(L) = L \end{aligned}$$

直線  $\pi_1(L)$  のプリュッカー座標は次で与えられる。

$$(\mathbf{l}', \bar{\mathbf{l}}') = (\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}})(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}) - (\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{c}})$$

なぜなら  $(\mathbf{l}, \bar{\mathbf{l}}) \mapsto (\mathbf{l}', \bar{\mathbf{l}}')$  正則線形写像で  $\mathbb{P}^5$  の自己同型から誘導される。 $\mathbb{P}^5$  の自己同型は基本集合(7点)上一致すれば全体で一致する。よって基本集合上で、この式が成り立つことを示せばよい。 $\pi_1(L) = L$  ならばこの式は正しい。このような  $L$  のプリュッカー座標は超平面上にあるから、超平面上にない2点でこの式をチェックすればよい。後は適当な2点を取って、この式を計算で確かめればよい。

直線  $G$  が  $\pi(G) \neq G$  を満たすとする。 $G, \pi(G)$  のプリュッカー座標を、それぞれ、 $(\mathbf{g}, \bar{\mathbf{g}})$ ,  $(\mathbf{g}', \bar{\mathbf{g}}')$  とすると  $G \cap \pi(G) = \emptyset$  である。なぜなら

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{g}}' + \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}' &= \mathbf{g} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}})\bar{\mathbf{g}} - (\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g})\bar{\mathbf{c}}) + \bar{\mathbf{g}} \cdot ((\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}})\mathbf{g} - (\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g})\mathbf{c}) \\ &= 2(\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}})\mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{g}} - (\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g})^2 \\ &= -(\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g})^2 \neq 0 \end{aligned}$$

そこでベクトル  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  を

$$[\mathbf{b}_0] \in G, \quad [\mathbf{b}_1] \in \pi(G), \quad [\mathbf{b}_2] \in \pi(G), \quad [\mathbf{b}_3] \in G$$

なるように取る。 $L = [\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1]$  と置くとそのプリュッカー座標は  $[1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]$  で  $[\mathbf{b}_0] \in G, [\mathbf{b}_1] \in \pi(G)$  より  $\pi(L) = L$  で  $\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = 0$  つまり  $\bar{c}_1 = 0$ 。同様にして、 $\bar{c}_2 = c_1 = c_2 = 0$  を得る。

$$\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}} = c_3\bar{c}_3 \neq 0, \quad \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{l}} = \bar{c}_3l_3 + c_3\bar{l}_3 = 0$$

$p = \bar{c}_3/c_3$  と置くと、 $pl_3 + \bar{l}_3 = 0$  を得る。□

**定理 5.9.** 点  $[\mathbf{c} : \bar{\mathbf{c}}] \in \mathbb{P}^5$  が  $\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}} = 0$  を満たすとする。すると、プリュッカー座標  $[1 : \bar{1}]$  が  $\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{1}} = 0$  を満たす直線全体は、プリュッカー座標が  $[\mathbf{c} : \bar{\mathbf{c}}]$  である直線  $A$  に交わる直線全体である。このような直線の 3 径数族を**特異線形様** (singular linear complex) という。

**証明.** 補題 2.4 より明らか。□

直線の 3 径数族でそのプリュッカー座標が 2 次の関係式を見たすものを**2 次線様** (quadratic line complex) という。

**例 5.10.** 例 5.6 で螺線の点  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  での接線の方向ベクトルは  $\mathbf{v} = (-y, x, p)$  である。接線のプリュッカー座標は

$$(\mathbf{v}, \mathbf{x} \times \mathbf{v}) = (-y, x, p, yp - xz, -yz - xp, x^2 + y^2)$$

よって螺旋族の接線は

$$p(l_1^1 + l_2^2) - l_3 \bar{l}_3 = 0$$

を満たすので、2 次線様である。

**例 5.11.** 2 次曲面  $\Phi : {}^t \mathbf{x} C \mathbf{x} = 0$  の接線全体は 2 次線様をなす。但し  $C$  は 4 次の対称行列:

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{03} & c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

以下、このことをみよう。 $L = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  とする。 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$  を  $\Phi$  の定義式に代入して得られる方程式

$${}^t(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) C (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda^2 ({}^t \mathbf{a} C \mathbf{a}) + 2\lambda\mu ({}^t \mathbf{a} C \mathbf{b}) + \mu^2 ({}^t \mathbf{b} C \mathbf{b}) = 0$$

が重根を持つ事が、直線  $L$  が 2 次曲面  $\Phi$  の接線であることである。重根を持つ条件は、

$$(10) \quad ({}^t \mathbf{a} C \mathbf{b})^2 - ({}^t \mathbf{a} C \mathbf{a})({}^t \mathbf{b} C \mathbf{b}) = 0$$

である。直線のプリュッカー座標を  $(1, \bar{1}) = (l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{23}, l_{31}, l_{12})$  とおくと、 $l_{01} \neq 0$  ならば  $(0, l_{01}, l_{02}, l_{03})$  と  $(-l_{01}, 0, l_{23}, -l_{31})$  はこの直線を張るので、

$$\mathbf{a} = (0, l_{01}, l_{02}, l_{03}) \quad \mathbf{b} = (-l_{01}, 0, l_{23}, -l_{31})$$

と置いて、方程式 (10) を見ればよい。この式の  $l_{01}$  に関する定数項と 1 次の項の係数を因数分解し、そこに現れる  $l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12}$  を  $-l_{01}l_{23}$  に置き換えると、(10) は  $l_{01}^2$  で割れ、その商に  $2(c_{03}c_{12} - c_{02}c_{13})(l_{01}l_{23} + l_{02}l_{31} + l_{03}l_{12})$  を加えると、 $l_{ij}$  の間の 2 次の関係式を得る。それを実際に書き下すと

$$\sum_{0 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq 3} \begin{vmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} \end{vmatrix} l_{i_1 j_1} l_{i_2 j_2} = 0$$

となる。

## 6 特異点論から

$C^\infty$  写像芽  $f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  に対し  $\mathcal{E}_n$  加群  $M$  は  $f$  を通じ自然に  $\mathcal{E}_p$  加群と見ることが出来る。

**定理 6.1 (Malgrange-Mather の準備定理).** このとき  $M$  の元  $m_1, \dots, m_k$  に対し次は同値。

- $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle_{\mathcal{E}_p}$
- $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle_{\mathbb{R}} + \langle f_1, \dots, f_p \rangle_M$

この定理を仮定して次の定理を示す。

**定理 6.2.** 写像  $f = (f_1, f_2, f_3) : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  がホイットニーの傘であることと次は同値。

$$(1) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 \end{pmatrix} (0, 0) = 1$$

$$(2) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \partial_x J_{23} & \partial_y J_{23} \\ \partial_x J_{13} & \partial_y J_{13} \\ \partial_x J_{12} & \partial_y J_{12} \end{pmatrix} = 2 \quad \text{ただし } J_{i,j} = J_{i,j}(f) = \begin{vmatrix} \partial_x f_i & \partial_y f_i \\ \partial_x f_j & \partial_y f_j \end{vmatrix}$$

**注意 6.3.** 証明の前に予備的な計算をしておく。

$$\partial_x f_1 J_{2,3} + \partial_x f_2 J_{1,3} + \partial_x f_3 J_{1,2} = \begin{vmatrix} \partial_x f_1 & \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_x f_3 & \partial_y f_3 \end{vmatrix} = 0$$

なので、もし  $\partial_x f_1 \neq 0$  ならば

$$J_{2,3} = -\frac{1}{\partial_x f_1}(\partial_x f_2 J_{1,3} + \partial_x f_3 J_{1,2})$$

微分同相

$$\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0), \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

に対し  $g = f \circ \varphi$  とおく。

$$\begin{pmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \\ \partial_x g_3 & \partial_y g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

なので、次の関係式を得る。

$$\left| \begin{matrix} \partial_x g_i & \partial_y g_i \\ \partial_x g_j & \partial_y g_j \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \partial_x f_i & \partial_y f_i \\ \partial_x f_j & \partial_y f_j \end{matrix} \right| \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \quad (1 \leq i < j \leq 3)$$

微分同相

$$\phi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0), \quad X = (X_1, X_2, X_3) \mapsto (\phi^1(X), \phi^2(X), \phi^3(X))$$

に対し  $h = \phi \circ f$  とおく。

$$\begin{pmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \\ \partial_x g_3 & \partial_y g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_X^1 & \phi_Y^1 & \phi_Z^1 \\ \phi_X^2 & \phi_Y^2 & \phi_Z^2 \\ \phi_X^3 & \phi_Y^3 & \phi_Z^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} \partial_x g_i & \partial_y g_i \\ \partial_x g_j & \partial_y g_j \end{matrix} \right| &= \left| \begin{pmatrix} \phi_X^i & \phi_Y^i & \phi_Z^i \\ \phi_X^j & \phi_Y^j & \phi_Z^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \\ \partial_x f_3 & \partial_y f_3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sum_{p < q} \left| \begin{matrix} \phi_p^i & \phi_q^i \\ \phi_p^j & \phi_q^j \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \partial_x f_p & \partial_y f_p \\ \partial_x f_q & \partial_y f_q \end{matrix} \right| \end{aligned}$$

よって

$$\begin{pmatrix} J_{23}(h) \\ J_{13}(h) \\ J_{12}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} \phi_2^2 & \phi_3^2 \\ \phi_2^3 & \phi_3^3 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^2 & \phi_3^2 \\ \phi_1^3 & \phi_3^3 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^2 & \phi_2^2 \\ \phi_1^3 & \phi_2^3 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} \phi_2^1 & \phi_3^1 \\ \phi_2^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_3^1 \\ \phi_1^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} \phi_2^1 & \phi_3^1 \\ \phi_2^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_3^1 \\ \phi_1^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{matrix} \right| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{23}(f) \\ J_{13}(f) \\ J_{12}(f) \end{pmatrix}$$

よって条件 (1) の下では、次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \partial_x J_{23}(h) & \partial_y J_{23}(h) \\ \partial_x J_{13}(h) & \partial_y J_{13}(h) \\ \partial_x J_{12}(h) & \partial_y J_{12}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{matrix} \phi_2^2 & \phi_3^2 \\ \phi_2^3 & \phi_3^3 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^2 & \phi_3^2 \\ \phi_1^3 & \phi_3^3 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^2 & \phi_2^2 \\ \phi_1^3 & \phi_2^3 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} \phi_2^1 & \phi_3^1 \\ \phi_2^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_3^1 \\ \phi_1^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} \phi_2^1 & \phi_3^1 \\ \phi_2^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_3^1 \\ \phi_1^2 & \phi_3^2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \phi_1^1 & \phi_2^1 \\ \phi_1^2 & \phi_2^2 \end{matrix} \right| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x J_{23}(f) & \partial_y J_{23}(f) \\ \partial_x J_{13}(f) & \partial_y J_{13}(f) \\ \partial_x J_{12}(f) & \partial_y J_{12}(f) \end{pmatrix}$$

証明.  $f$  がホイットニーの傘であれば上の条件を満たす事を示すのは、ルーチンの計算なので略す。

逆を示すのが問題である。 $\partial_x f_1(0, 0) \neq 0$  と仮定して証明する。すると

$$\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0), \quad (x, y) \mapsto (u, v) = (f_1(x, y), y)$$

は微分同相であるから、 $\varphi^{-1}$  が存在する。

$$f \circ \varphi^{-1}(u, y) = (u, f_2 \circ \varphi^{-1}(u, y), f_3 \circ \varphi^{-1}(u, y))$$

なので、 $f$  の代わりに  $f \circ \varphi^{-1}$  を考える事にすれば  $f_1(x, y) = x$  と仮定して計算してよい。このとき条件 (1) は  $\partial_y f_2(0, 0) = \partial_y f_3(0, 0) = 0$  となる。

$$\begin{aligned} \partial_y f_2(x, y) &= a_{10}x + a_{01}y + \dots \\ \partial_y f_3(x, y) &= b_{10}x + b_{01}y + \dots \end{aligned}$$

とかけるが  $(\partial_y f_2, \partial_y f_3)$  のヤコビ行列式が 0 でないので  $\mathbb{R}^3$  の線形座標変換で  $a_{01} = 0$ ,  $b_{01} \neq 0$  としてよい。よって

$$f_3(x, y) = xg_3(x, y) + y^2h_3(x, y), \quad h_3(0, 0) \neq 0$$

と書ける。

$$x = f_1 \quad y^2 = \frac{1}{h_3(x, y)}(f_3 - f_1g_3)$$

よって、 $\mathbb{R}^2$  の任意の関数  $k(x, y)$  は  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $c, d \in \mathcal{E}_2$  を使って

$$\begin{aligned} k(x, y) &= a + by + xc(x, y) + y^2d(x, y) \\ &= a + by + f_1\left(c - \frac{g_3d}{h_3}\right) + f_3\frac{d}{h_3} \end{aligned}$$

と書ける。よって定理 6.1 より、

$$k(x, y) = \varphi(f_1, f_3) + y\phi(f_1, f_3)$$

と書ける。 $k(x, y) = y^2$  とする。すると  $\varphi(f_1, f_2)$  は  $x$  の 1 次項を含みえず

$$\partial_x \phi(0, 0) = 0$$

を得る。源の座標変換

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - \phi(f_1, f_3)/2 \end{aligned}$$

を合成することにより  $f_2, f_3$  に関する条件を変えることなしに  $\phi(f_1, f_3) = 0$  と仮定してよい。

$$y^2 = \varphi(f_1, f_3)$$

$f_3(0, y) = y^2 h_3(0, y)$  より  $y^2 = f_3(0, y)/h_3(0, y)$  なので

$$\varphi(0, Z) = \frac{Z}{h_3(0, 0)} + Z^2 \chi(Z)$$

と書ける。これより  $\varphi_Z(0, 0) \neq 0$ . 座標変換  $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, \varphi(X, Z))$  を合成することにより、 $f_3(x, y) = y^2$  と仮定できる。

ふたたび定理 6.1 より、 $k(x, y) = f_2(x, y)$  として

$$f_2(x, y) = g_2(x, y^2) + y h_2(x, y^2)$$

と書ける。座標変換

$$\begin{aligned} X' &= X \\ Y' &= Y - g_2(X, Z) \\ Z' &= Z \end{aligned}$$

を合成することにより、 $g_2(x, y) = 0$  としてよい。

さてここで条件 (2) を見ると

$$J_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & \partial_y f_2 \end{vmatrix} = \partial_y f_2 \quad J_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 2y$$

なので

$$\begin{vmatrix} \partial_x J_{12} & \partial_y J_{12} \\ \partial_x J_{13} & \partial_y J_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{xy} f_2 & * \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \partial_{xy} f_2$$

$f_2(x, y) = y h_2(x, y^2)$  より

$$\partial_{xy} f_2(x, y) = \partial_x h_2(x, y^2) + 2y^2 \partial_{xz} h_2(x, y^2)$$

なので  $\partial_x h_2(0, 0) \neq 0$ . 座標変換

$$\begin{aligned} x' &= h_2(x, y^2) \\ y' &= y \end{aligned}$$

をとる。これは  $f_1$  を変えてしまうので最後に行先の座標変換

$$\begin{aligned} X' &= h_2(X, Z) \\ Y' &= Y \\ Z' &= Z \end{aligned}$$

を合成する。すると

$$X' = x' \quad Y' = x' y' \quad Z' = y'^2$$

を得る。 □