線形代数学講義ノート

福井 敏純

2023 年 11 月 9 日

目次

まえがき

2017 年度及び 2018 年度に埼玉大学理学部数学科の学生向けに線形代数学を講義する際に用意したノートが本稿の基になっている．線形代数学を初学者に説明する目的で用意したものだが，初学者向けに基礎事項をコンパクトに纏めた教科書を企図したものでない．大学初年次の授業では普通は説明しないようなことも解説して，線形性が如何に多くの計算を可能にするか，読者に体感してもらうことを意図している．

$x_1, \ldots, x_n$ を数学的考察の対象として

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

の形で記述されるものを $x_1, \ldots, x_n$ の線形結合（1 次結合）というが，線形結合で記述される対象の解析は線形代数の守備範囲であり，非常に広い応用を持っている．線形代数学が成立したのは 18 世紀から 19 世紀にかけてと思うが，先人達は実にいろいろな計算をしている．それらを総括して俯瞰して説明する能力は筆者にはないが，筆者の経験した範囲で知り得たことを筆者なりに纏めたものが本稿である．しかしながらまだ未完成の原稿であり，いろんな不備があると思う．教科書としても不適切な部分もあるであろう．そのような不完全な原稿であるが，筆者が思う線形代数学の基礎は概ね纏められたと思うので公開することにした．

$^\circ$ を付けた箇所は，筆者が特に初学者向けと思っている部分である。この部分は高校生でも読めるであろう．冗長に感じる読者は飛ばしても構わない．

必要最小限の線形代数学の知識を取り敢えず学びたいという方は，本稿の内容を逐一知る必要はない．省略可能な部分はたくさんある．* がついた項目などがそうである．そのような部分は実際の講義では説明しない事も多い．しかし，線形代数学における計算のアイデアが，広く一般化される事を示すのは意味があると思うので，説明は残している．興味に応じて参照していただければありがたい．

本文に大きな間違いはないと思うが，筆者の思い込みや勘違いが紛れている可能性もあるので鵜呑みにせず読んでいただければありがたい．また誤りに気づいた際は筆者にご一報いただければ誠にありがたい．

本原稿を通読し誤植や誤りを多数指摘してくれた藤森英章氏に感謝します．

第 1 章

ベクトルと行列 $^\circ$

ベクトルの概念は向きと大きさをもつ物理量が起源である．数学的なベクトルの概念は，ハミルトン達が導入した数ベクトルの概念に始まる（ベクトルという言葉は 19 世紀後半, ハミルトンが使い始めた)．行列を意識的に使い始めたのは 1855 年頃のケーリーからと思われる．ベクトルや行列の使用が普及したのは 20 世紀になってからで，自由にそれらを使える現代人はその恩恵を受けている訳である．

1.1　ベクトル

1.1.1　数ベクトル

実数を n 個ならべたものを**数ベクトル** (numerical vector) という．$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ のようにベクトルを太文字で表す．2 つのベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ に対し，その和，差を次で定める．

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n), \quad \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$$

実数 c に対し，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の c 倍 $c\boldsymbol{v}$ を次で定める．

$$c\boldsymbol{v} = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n)$$

特に -1 倍は次のように書く．

$$-\boldsymbol{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$$

このように書くと $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$ である．成分がすべて 0 のベクトルを**零ベクトル**といい，$\mathbf{0}$ で表す．

注意 1.1.1. ベクトルを太文字 $\boldsymbol{v}$ で表さずに $\vec{v}$ で書く事もある．太文字や矢印付きを使うのは，数と区別し一見して違いが分かるようにするための工夫である．書き方にこのよう

な工夫をしなくても，ベクトルと数を混乱しないというときは，単に v を使う事もある．しかし初学者は戸惑うであろうから，本稿では太文字を使う事にする．

■内積　2 つのベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ に対し，その**内積** $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ を次で定める．

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

定義から $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$ である．さらに次が成り立つ．

$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{w}, \quad (c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$$

ただし c は実数である．この性質を，内積は $\boldsymbol{v}$ について線形であるという．同様に，内積は $\boldsymbol{w}$ についても線形である．

$$\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}_2, \quad \boldsymbol{v} \cdot (c\boldsymbol{w}) = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$$

特に $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = {v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2 \geq 0$ で等号成立は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

と置き，これをベクトル $\boldsymbol{v}$ の**長さ**という．記号 $\|\boldsymbol{v}\|$ の代わりに $|\boldsymbol{v}|$ を使うこともあ．

補題 1.1.2 (コーシー・シュワルツの不等式)**.** $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|$
等号成立ならば，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ か $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}$ の定数倍となる．

証明. $\boldsymbol{v} = 0$ のときは両辺ともに 0 なので明らかである．$\boldsymbol{v} \neq 0$ として示す．

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 =& t^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2t(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) + \|\boldsymbol{w}\|^2 \\ =& \|\boldsymbol{v}\|^2 \Big(t - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\Big)^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 - \frac{(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} \\ =& \|\boldsymbol{v}\|^2 \Big(t - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\Big)^2 + \frac{\|\boldsymbol{w}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} \end{aligned}$$

なので，$(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 \|\boldsymbol{w}\|^2 \leq 0$ でなければならない．これより示すべき不等式は従う．もし $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| = \|\boldsymbol{v}\| \|\boldsymbol{w}\|$ ならば，上式より次が成立する．

$$\|t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2 \Big(t - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}\Big)^2$$

$t = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}$ とおけば，この式は 0 であり $\boldsymbol{w} = t\boldsymbol{v}$ が分かる． □

定理 1.1.3 (3 角不等式 (triangle inequality))**.** $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$.
等号成立ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ か $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}$ の定数倍となる．

証明. $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ のときは明らかに等号成立である．$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ として示す.

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 =&(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\\
=&\|\boldsymbol{v}\|^2+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\|\boldsymbol{w}\|^2\leq\|\boldsymbol{v}\|^2+2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{w}\|^2=(\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|)^2
\end{aligned}
$$

等号成立は, $|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}|\leq\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$ で等号成立のときで $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ か $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}$ の定数倍となる．□

$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0}$ のとき，コーシー・シュワルツの不等式より次が成り立つ.

$$
-1\leq\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}\leq 1
$$

よって $\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}=\cos\theta$ を満たす θ が $0\leq\theta\leq\pi$ なる範囲に唯一つ存在する．これをベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ のなす角といい，$\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ で表す．$\theta=\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ とおけば

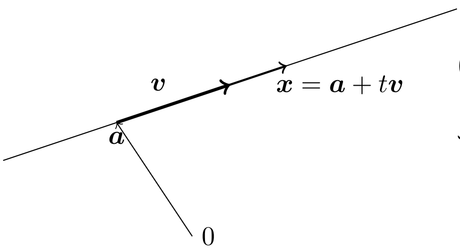
$$
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\cos\theta
$$

である．$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ のときはベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ は**直交する**という.

1.1.2　平面ベクトル

$n=2$ のときの数ベクトルを平面ベクトルという．平面上の点 (x,y) と，対応する位置ベクトル $\boldsymbol{x}=(x,y)$ を同一視する.

■直線の方程式　平面上の点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ を通り，$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ を方向ベクトルとする直線は



(1.1.4)　$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$　または $(x,y)=(a,b)+t(v_1,v_2)$

で表される．この式から t を消去して得られる式

$$
v_2(x-a)=v_1(y-b)
$$

は点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ を通り，傾き v_2/v_1 の直線を表すからである．(1.1.4) から t を消去して次の様に書く事もある.

$$
\frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}
$$

この表示の問題点は，分母が零の時表示が意味を持たない事にある．そこで分母が零の時は分子も零と解釈すると約束する事にする．方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ は定数倍しても直線は変わらないので, 与えられた直線に対し長さが 1 の方向ベクトルを選ぶ事ができる．$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)$ の長さが 1 の時，v_1,v_2 を**方向余弦**という.

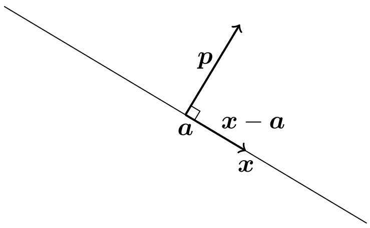
- v_1 は $\boldsymbol{v}$ が x 軸の正方向の単位ベクトルとなす角 θ_1 の余弦 $\cos\theta_1$,

- v_2 は $\boldsymbol{v}$ が y 軸の正方向の単位ベクトルとなす角 θ_2 の余弦 $\cos\theta_2$,

となるからである．

点 $\boldsymbol{a}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{p}=(p,q)$ に直交する直線の方程式は次でも表される．

$$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0,\quad \text{または}\quad p(x-a)+q(y-b)=0. \tag{1.1.5}$$



集合の記法を用いると，(1.1.4), (1.1.5) はそれぞれ次の様に表せる．

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \exists t, (x,y)=(a,b)+t(v_1,v_2)\}$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p(x-a)+q(y-b)=0\}$$

零でない平面ベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ のなす角を θ とする．$\boldsymbol{v}=r_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{w}=r_2(\cos\beta,\sin\beta)$ と書くと $\beta=\alpha+\theta$ であり，次式がわかる．

$$\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\beta-\alpha)=\cos\theta$$

1.1.3　空間ベクトル

$n=3$ のときの数ベクトルを空間ベクトルという．ベクトルが空間の点を表すと思えるからである．

■直線の方程式　空間内の点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ を通り，$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ を方向ベクトルとする直線は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}\quad \text{または}\ (x,y,z)=(a,b,c)+t(v_1,v_2,v_3)$$

で表される．t を消去して次の様に書く事もある．

$$\frac{x-a}{v_1}=\frac{y-b}{v_2}=\frac{z-c}{v_3}$$

この表示の問題点は，分母が零の時表示が意味を持たない事にある．そこで分母が零の時は分子も零と解釈すると約束する事にする．方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ は定数倍しても直線は変わらないので，与えられた直線に対し長さが 1 の方向ベクトルを選ぶ事ができる．$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ の長さが 1 の時，v_1,v_2,v_3 を**方向余弦**という．

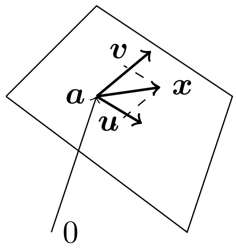
- v_1 は $\boldsymbol{v}$ が x 軸の正方向の単位ベクトルとなす角 θ_1 の余弦 $\cos\theta_1$,
- v_2 は $\boldsymbol{v}$ が y 軸の正方向の単位ベクトルとなす角 θ_2 の余弦 $\cos\theta_2$,
- v_3 は $\boldsymbol{v}$ が z 軸の正方向の単位ベクトルとなす角 θ_3 の余弦 $\cos\theta_3$,

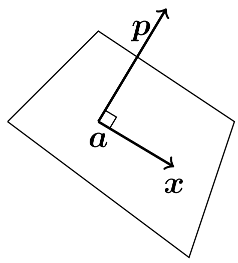
となるからである．

■平面の方程式　空間内の点 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ を通り，2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ と $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ を含む平面に平行な平面は

(1.1.6)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$　または $(x, y, z) = (a, b, c) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)$

で表される．





また，点 $\boldsymbol{a}$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{p} = (p, q, r)$ に直交する平面の方程式は

(1.1.7)　$\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0,$　または　$p(x - a) + q(y - b) + r(z - c) = 0$

で表される．

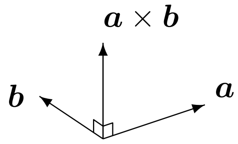
集合の記法を用いると，(1.1.6), (1.1.7) はそれぞれ次の様に表せる．

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists s, t\ (x, y, z) = (a, b, c) + s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3)\}$$
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : p(x - a) + q(y - b) + r(z - c) = 0\}$$

演習 1.1.8 (3 垂線の定理). 平面外の点 A からその平面に下ろした垂線の足を B とし，点 B からこの平面上にあって B を通らない直線 ℓ に下ろした垂線の足を C とすると、直線 AC は直線 ℓ に直交する事を示せ．

■外積　2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の**外積** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次で定める．

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - b_2 a_3, a_3 b_1 - b_3 a_1, a_1 b_2 - b_1 a_2)$$



補題 1.1.9. 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ にも $\boldsymbol{b}$ にも直交し，長さが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積であるようなベクトルである．

証明. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$ は計算すればわかる．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S は，次で与えられる．

$$\begin{aligned} S =& \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| |\sin\theta| = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \sqrt{1 - \frac{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2}} \\ =& \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2} \\
&=\sqrt{\begin{pmatrix} a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2 \\ +a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2 \\ +a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2 \\ +2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3 \end{pmatrix}} \\
&=\sqrt{(a_2b_3-b_2a_3)^2+(a_3b_1-b_3a_1)^2+(a_1b_2-b_1a_2)^2} \\
&=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|
\end{aligned}
$$

□

後述の (2.1.3) の類似で $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を次の様に書く事がある.

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix}
$$

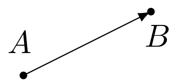
ただし，$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ である.

1.1.4 位置ベクトル

点 A の座標を $(a_1,\ldots,a_n)$ としたとき，ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ を点 A の**位置ベクトル**という.

2 点 A, B の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とするとき，点 A を始点とし点 B を終点とするベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と書く．2 点 A, B の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とするとき，次が成り立つ.

$$
\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}
$$



例 1.1.10. 2 点 A, B の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とするとき，線分 AB を $p:q$ に内分する点 C の位置ベクトル $\boldsymbol{c}$ は，次式で与えられる.

$$
\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\frac{p}{p+q}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{q\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}}{p+q}
$$

例 1.1.11 (3 角形の重心). 3 点 A, B, C の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とする．3 角形 $\triangle ABC$ の**重心** (barycenter) を G と書くと，重心 G の位置ベクトル $\boldsymbol{g}$ は次で与えられる.

$$
\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}
$$

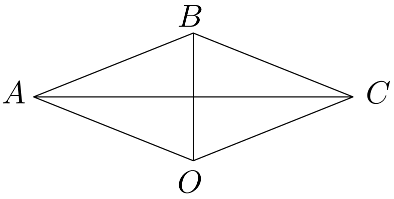
重心 G は線分 AB の中点と点 C を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点である．点 A, B, C の役割を入れ替えてもよいから，点 G は線分 BC の中点と点 A を結ぶ線分を $1:2$ に内分する点でもある．この表示は 3 角形の各頂点と対辺の中点を結ぶ線分は 1 点で交わることを示している.

1.1.5　幾何学から *

ベクトルを使うと簡単に証明できる幾何の定理をいくつか紹介しよう．

例 1.1.12. 菱形（ひしがた）の対角線は直交する．実際，四角形 $OABC$ を菱形とすると $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$ なので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=&(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\=&\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}\\=&|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0\end{aligned}$$



となるからである．

3 点 A, B, C を通る円は 1 つ定まる．$\triangle ABC$ の**外接円** (circumcircle) である．外接円の中心を $\triangle ABC$ の**外心** (circumcenter) というが，それを O とする．以下，平行移動して O が原点であると思って読むとわかりやすいと思うが，O が原点であることは本質的には使わないので，原点とは別の点と思っていても議論は大差ない．

外心 O は点 A, B, C から等距離にあるので次が成り立つ．

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=R\quad（R \text{ は外接円の半径}）$$

従って，外心 O は $\triangle ABC$ の各辺の垂直 2 等分線の交点である．

定理 1.1.13 (3 角形の垂心). $\triangle ABC$ の各頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わる．

その点を $\triangle ABC$ の**垂心** (orthcenter) というのであった．

証明. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ なる点 H を考えるとこれが垂心である．実際，

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

なので直線 $\overrightarrow{AH}$ と直線 $\overrightarrow{BC}$ は直交している．同様に直線 $\overrightarrow{BH}$ と直線 $\overrightarrow{AC}$ は直交していて，直線 $\overrightarrow{CH}$ と直線 $\overrightarrow{AB}$ は直交している事がわかる． □

定理 1.1.14. $\triangle ABC$ の重心 G は外心 O と垂心 H を $1:2$ に内分する点である．

証明. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$ の帰結である． □

外心と垂心を結ぶ直線を**オイラー線** (Euler line) という．

定理 1.1.15 (9 点円). $\triangle ABC$ の外心と垂心の中点を Q とすると，次が成り立つ．

(i) 各辺の中点からの点 Q への距離は $R/2$ である．

(ii) 各頂点と垂心の中点からの点 Q への距離も $R/2$ である．

(iii) 各頂点から対辺に下ろした垂線の足も点 Q から $R/2$ の距離にある．

すなわち，点 Q を中心とする半径 $R/2$ の円は，$\triangle ABC$ の各辺の中点，各頂点と垂心の中点，各頂点から対辺に下ろした垂線の足を通る．この円を **9 点円** (9-point circle) という．

証明. 外心 O と垂心 H の中点 Q は $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ を満たす．

$\triangle ABC$ の各辺の中点の位置ベクトルは

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}), \quad \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

で表されるので，(i) は次式より明らかである．

$$\overrightarrow{OQ} - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} \tag{1.1.16}$$

$$\overrightarrow{OQ} - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} \tag{1.1.17}$$

$$\overrightarrow{OQ} - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC} \tag{1.1.18}$$

$\triangle ABC$ の各頂点と垂心 H の中点の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}) &= \tfrac{1}{2}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}) &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}) &= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})
\end{aligned}$$

なので，(ii) は次式の帰結である．

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}) - \overrightarrow{OQ} = \tfrac{1}{2}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} \tag{1.1.19}$$

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH}) - \overrightarrow{OQ} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} \tag{1.1.20}$$

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}) - \overrightarrow{OQ} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC} \tag{1.1.21}$$

辺 BC の中点 D を始点とし，頂点 A と垂心 H の中点 E を終点とするベクトルは，(1.1.16) と (1.1.19) を比較すれば次の様に表せる．

$$\overrightarrow{DE} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH}) - \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}$$

線分 DE を底辺とし，点 A から対辺 BC に下ろした垂線の足 L を頂点とする 3 角形は，直角 3 角形であるから，点 L は辺 DE を直径とする円上にある．(1.1.16) と (1.1.19) を比較すれば，この円は点 Q を中心とする半径 $R/2$ の円であるから (iii) も従う． □

9 点円は内接円 (incircle)，傍接円 (excircle) と接しているが説明は省略する．

例 1.1.22 (モンジュ点). 4 面体の各辺に対し，中点を通りその辺に直交する平面を考える．その様な平面は辺の数だけ，つまり 6 つあるが，この 6 平面はある 1 点で交わる．この点を 4 面体の**モンジュ点** (Monge point) という．

原点 O と 3 点 A, B, C を頂点とする 4 面体を考える．点 A, B, C の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ とする．$\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ を次を満たすように取る，

$$(\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} = 0,\ (\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0,\ (\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$$

最初の式は線分 OA の中点を通り OA に直交する平面を表す．2 番目の式は線分 OB の中点を通り OB に直交する平面を表し，3 番目の式は線分 OC の中点を通り OC に直交する平面を表す．これは次の連立方程式に書き換えられる．

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})x + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})y + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})z = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \\ (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})x + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})y + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})z = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})x + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})y + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})z = \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{cases}$$

後述の §2.1.2 の連立 1 次方程式の計算よりこれを満たす x, y, z は唯一つ定まる．

$$(\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}))\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) = 0$$

なので，$\boldsymbol{p}$ の表す点は，線分 AB の中点を通り AB に直交する平面上にある．

$$(\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}))\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) = 0, \quad (\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}))\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}) = 0$$

も同様に分かるので，$\boldsymbol{p}$ の表す点は，線分 AC の中点を通り AC に直交する平面上にあり，また，線分 BC の中点を通り BC に直交する平面上にもある．

1.2　行列

数（式や記号でもよい）を長方形に並べたものを**行列** (matrix) という．行の数を m，列の数を n とするとき，$m \times n$ 行列（または (m, n) 行列）という事もある．例えば

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

は，順に 2×2 行列，2×3 行列，3×2 行列，3×3 行列である．一般に $m \times n$ 行列は次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

表記を簡単にするため，これを単に A で表す．$a_{i,j}$ を A の (i,j) 成分と言う．(m,n) を行列 A のサイズと言う．$A=(a_{i,j})$ と書く事もある．

実数を成分とする行列を実行列または実数行列，複素数を成分とする行列を複素行列または複素数行列と言う．整数や有理数を成分とする行列をそれぞれ整数行列，有理数行列という事がある．

1.2.1　行列の和・差，定数倍

サイズの同じ行列に対しては，和，差を定義する事ができる．即ち，

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$

とするとき，$A+B$, $A-B$ を次で定める．

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & a_{m,2}+b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{1,1}-b_{1,1} & a_{1,2}-b_{1,2} & \cdots & a_{1,n}-b_{1,n} \\ a_{2,1}-b_{2,1} & a_{2,2}-b_{2,2} & \cdots & a_{2,n}-b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}-b_{m,1} & a_{m,2}-b_{m,2} & \cdots & a_{m,n}-b_{m,n} \end{pmatrix}$$

c を定数とするとき，行列 A の c 倍を，次で定める．

$$cA=\begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \cdots & ca_{1,n} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \cdots & ca_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m,1} & ca_{m,2} & \cdots & ca_{m,n} \end{pmatrix}$$

すべての成分が 0 である行列を**零行列**という．零行列は O で表す．次が成り立つ．

- $A+B=B+A$.
- $(A+B)+C=A+(B+C)$.
- $A+O=O+A=A$.

1.2.2 行列の積

行列 A の列の個数が行列 B の行の個数に等しいとき，積 AB を次で定める．A を $m\times n$ 行列，B を $n\times p$ 行列として，

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}$$

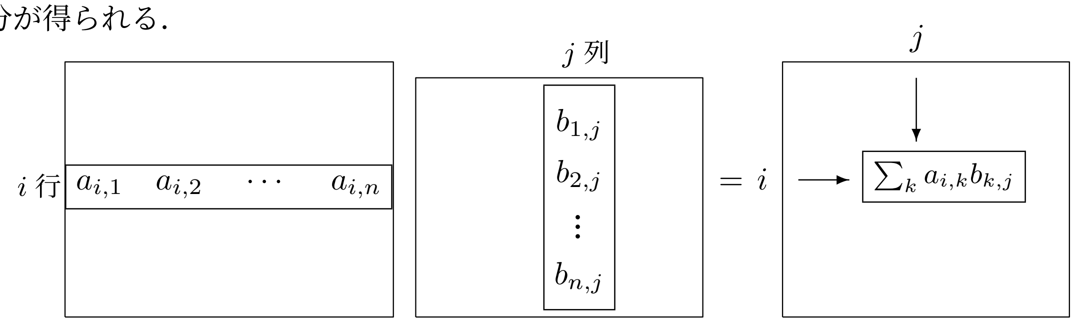
とするとき，$m\times p$ 行列 AB を次で定める．

$$AB=\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+\cdots+a_{1,n}b_{n,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,p}+a_{1,2}b_{2,p}+\cdots+a_{1,n}b_{n,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}b_{1,1}+a_{m,2}b_{2,1}+\cdots+a_{m,n}b_{n,1} & \cdots & a_{m,1}b_{1,p}+a_{m,2}b_{2,p}+\cdots+a_{m,n}b_{n,p} \end{pmatrix}$$

言い換えると積 AB はその (i,j) 成分が次で表される行列である．

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,n}b_{n,j} \tag{1.2.2}$$

行列 A の第 i 行と行列 B の第 j 列の対応する成分の積の和を取れば，行列 AB の (i,j) 成分が得られる．



図中 AB の成分を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ と書くべきところを $\sum_k a_{i,k}b_{k,j}$ と略して書いている．このように総和記号では k の動く範囲をしばしば省略して書く．今の場合，文脈から k の動く範囲は明らかなので，省略する事によって記述が簡素になるからである．

演習 1.2.3. (1.2.1) にある行列から，積が定義できる 2 つの行列をすべて選び出せ．また，その積を計算せよ．

注意 1.2.4. AB が定義されていても BA が定義されるとは限らない．BA が定義されるには B の列数と A の行数が同じでなければならないからである．また AB, BA が共に定義されても $AB=BA$ とは限らない．

次の例は AB と BA のサイズが異なる場合である．

$$\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&48\\34&105\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&4\\2&5\\2&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&32&45\\12&33&51\\18&48&78\end{pmatrix}$$

AB と BA が同じサイズでも，大抵の場合は AB と BA は異なる行列である．

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

以後，AB と書くときは，その行列の積が定義されている，即ち A の列数と B の行数が等しいと暗黙のうちに仮定する事にする．

行の数と列の数が等しい行列を**正方行列** (square matrix) という．特に $n\times n$ 行列を n 次の正方行列という．対角成分が 1 でその他の成分が 0 である正方行列を**単位行列** (identity matrix) といい E で表す[*1]．

$$E=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

E が $n\times n$ 行列ならば，n 次の**単位行列**と呼んで n を明示して E_n と書く事もある．

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

と書くと $E=(\delta_{i,j})$ となる．$\delta_{i,j}$ を**クロネッカーの記号**とよぶ．

定理 1.2.5. 行列の積については，次が成り立つ．

(i) $EA=A$, $AE=A$
(ii) $(cA)B=A(cB)=c(AB)$
(iii) $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$
(iv) $(AB)C=A(BC)$

証明. (i), (ii): 次式の帰結である．

$$\sum_k a_{i,k}\delta_{k,j}=a_{i,j},\ \sum_k \delta_{i,k}a_{k,j}=a_{i,j},\ \sum_p (ca_{i,p})b_{p,j}=c\sum_p a_{i,p}b_{p,j}=\sum_p a_{i,p}(cb_{p,j})$$

(ii): 次式から分かる．

$$\sum_k (a_{i,k}+b_{i,k})c_{k,j}=\sum_k a_{i,k}c_{k,j}+\sum_k b_{i,k}c_{k,j}$$

[*1] 正方行列のサイズ n を明示して E_n と書くこともある．E の代わりに I を使うこともある．なお単位元に E を使うのはドイツ語の 1 (eins) から来ている．

$$\sum_k a_{i,k}(b_{k,j}+c_{k,j}) = \sum_k a_{i,k}b_{k,j} + \sum_k a_{i,k}c_{k,j}$$

(iv): $A=(a_{i,j})$, $B=(b_{j,k})$, $C=(c_{k,l})$ とするとき

$$\sum_j a_{i,j}\Big(\sum_k b_{j,k}c_{k,l}\Big) = \sum_j\sum_k a_{i,j}b_{j,k}c_{k,l} = \sum_k\Big(\sum_j a_{i,j}b_{j,k}\Big)c_{k,l}$$

これは $(AB)C = A(BC)$ を意味する. □

例 1.2.6. $Z_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{smallmatrix}\right)$, $Z_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{smallmatrix}\right)$ とおくと,

$$Z_1Z_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -x_1y_2 - y_1x_2 \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = Z_2Z_1$$

である. $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と置くと $EJ = JE = J$, $J^2 = -E$ なので,

$$Z_1Z_2 = (x_1E + y_1J)(x_2E + y_2J) = (x_1x_2 - y_1y_2)E + (x_1y_2 + y_1x_2)J$$

と書く事もできる. $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}$, $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{-1}$ と置くとき

$$z_1z_2 = (x_1 + y_1\sqrt{-1})(x_2 + y_2\sqrt{-1}) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{-1}$$

との類似に注意しておこう. 写像

$$\mathbb{C} \to \left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \text{ は実数}\right\},\ z = x + y\sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},$$

は, 複素数の和を対応する行列の和に, 複素数の積を対応する行列の積に写しているのである.

定理 1.2.7. n 次正方行列 A が任意の n 次正方行列 X と交換可能であるとする. すると A は単位行列の定数倍である.

証明. $A = (a_{i,j})$ とおく. まず $n = 2$ のときを示す.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} \\ 0 & a_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,2} & 0 \\ a_{2,2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}$$

なので $a_{1,1} = a_{2,2}$, $a_{2,1} = a_{1,2} = 0$ となり証明された.
一般の n のとき, (i,j) 成分が 1 で他の成分は 0 の行列を $E_{i,j}$ と書き $X = E_{i,j}$ とおく.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = AE_{i,j} = E_{i,j}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

なので

$$(AE_{i,j})_{k,j} = \begin{cases} 0 & (k \neq i) \\ a_{i,i} & (k = i) \end{cases}, \qquad (E_{i,j}A)_{i,k} = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ a_{j,j} & (k = j) \end{cases},$$

であり，$a_{i,i} = a_{j,j}$, $a_{i,j} = 0$ $(i \neq j)$ がわかる． □

演習 1.2.8. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と可換な 2 次正方行列を決定せよ．

演習 1.2.9. $A^2 = E$ を満たす 2 次正方行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を決定せよ．

定理 1.2.7 の証明中に表れた $E_{i,j}$ を**行列単位** (matrix unit) と呼ぶ事がある．

演習 1.2.10.
- $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ を示せ．
- $A = (a_{i,j})$ に対し $E_{i,j}AE_{k,l} = a_{j,k}E_{i,l}$ を示せ．

1.2.3　転置行列

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

に対し，その行と列を入れ替えて得られる行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表す[*2]．

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

転置行列について成り立つ性質を述べておこう．まず最初に注意すべき性質は，自明であるが，転置を 2 回とればもとの行列に戻るという事である．即ち ${}^t({}^tA) = A$．他には

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(A-B) = {}^tA - {}^tB, \quad {}^t(cA) = c\,{}^tA, \quad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

が成り立つ．これらもほとんど自明であるから，最後の式だけ説明しよう．

$${}^tB = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \cdots & b_{n,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \cdots & b_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1,p} & b_{2,p} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

[*2] 転置行列を A^T, A^t 等と表記する文献も散見されるが，本稿では使わない．行列の冪と紛らわしいからである．

より，積 ${}^t\!B{}^t\!A$ の (j,i) 成分は

$$b_{1,j}a_{i,1}+b_{2,j}a_{i,2}+\cdots+b_{n,j}a_{i,n}=\sum_{k=1}^{n}b_{k,j}a_{i,k}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$$

であり，AB の (i,j) 成分（式 (1.2.2) 参照）と一致し ${}^t(AB)$ の (j,i) 成分と一致する．

注意 1.2.11. ${}^tA=A$ を満たす正方行列 A を**対称行列** (symmetric matrix) という．A, B が対称行列であっても，その積 AB は対称行列とは限らない．実は AB が対称行列であることは $AB=BA$ が成立することと同値である．実際，A, B が対称行列ならば，次が成り立つ．

$$AB \text{ が対称行列} \iff {}^t(AB)=AB \iff BA=AB \quad ({}^t(AB)={}^t\!B{}^t\!A=BA \text{ より})$$

正方行列 A に対しては，**冪** (power) が定義できる．

$$\begin{aligned}A^2=&AA,\\A^3=&A^2A,\\&\cdots\\A^n=&A^{n-1}A \quad (n\geq 2)\end{aligned}$$

である．これですべての自然数 n に対して冪 A^n が定義できる．$A^1=A$, $A^0=E$ と約束すると指数法則 $A^mA^n=A^{m+n}$ がすべての非負整数 m, n について成り立つ．

1.2.4　逆行列

$AX=E$ を満たす行列 X を A の**逆行列** (the inverse matrix of A) といい A^{-1} で表す．A^{-1} が存在するとき，A は**可逆である** (invertible) という．$YA=E$ を満たす行列 Y が存在すればそれは X に等しい．

$$Y=Y(AX)=(YA)X=X$$

A^{-1} が存在すれば，$AX=E$ を満たす行列 X は A^{-1} でなければならない（逆行列の一意性）．

$$X=EX=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}E=A^{-1}$$

実は $AX=E$ をみたす行列 X が存在すれば，$XA=E$ を満たす事*3を後で示す．逆行列をもつ行列を**正則行列** (a regular matrix) という．

*3 $Z=XA$ が可逆ならば $Z^2=XAXA=XA=Z$ なので $XA=Z=E$ がわかる．

例 1.2.12. 可逆な行列 Z が冪等性（即ち $Z^2 = Z$）を満たすならば Z は単位行列である．$Z = (Z^2)Z^{-1} = ZZ^{-1} = E$ となるからである．

例 1.2.13 (2×2 行列の逆行列)**.** $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ のとき，$X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ と置くと，$AX = E$ は次の様に書ける．

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1y_1 &= 1 \qquad & a_1x_2 + b_1y_2 &= 0 \\ a_2x_1 + b_2y_1 &= 0 \qquad & a_2x_2 + b_2y_2 &= 1 \end{aligned}$$

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ならばこれを解いて

$$x_1 = \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad x_2 = \frac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_1 = \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_2 = \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

を得る．

$$X = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \tag{1.2.14}$$

が A の逆行列である．

定理 1.2.15 (転置行列の逆行列)**.** 正方行列 A に逆行列 A^{-1} が存在すれば A の転置行列 ${}^tA$ の逆行列は ${}^t(A^{-1})$ となる．

証明. $A(A^{-1}) = E$ の転置を取れば ${}^t(A^{-1}){}^tA = E$ なので ${}^t(A^{-1})$ が ${}^tA$ の逆行列である．記号で書くと $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. □

定理 1.2.16 (積の逆行列)**.** 正方行列 A, B に逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在するとき積 AB にも逆行列が存在し，それは次で与えられる．

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

証明. $B^{-1}A^{-1}$ が AB の逆行列である事を示せば良い．

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) =& ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = E \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) =& B^{-1}A^{-1}(B^{-1}A^{-1}) = BB^{-1} = E \end{aligned}$$

□

演習 1.2.17. 正則行列 A に対し $A^{-1} = ({}^tA\ A)^{-1}{}^tA = {}^tA(A\ {}^tA)^{-1}$ を示せ．

行列をブロックに分けてその積を計算する事ができる．

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CZ + DW \end{pmatrix}$$

但し，A, B, ... は行列で，上式に現れた積はすべて定義されているサイズとする．一般には行列は可換ではないので，ブロックを使った計算は複雑になる．しかし，いくつかのブロックが単位行列や零行列であれば，計算を見通しよくできる事もある．

例 1.2.18 (ブロック表示による逆行列)**.** A の逆行列が存在すれば

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}\end{aligned}$$

なので，先走るが，定理 2.4.1 を用いて，次がわかる．

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

更に $\Delta = D - CA^{-1}B$ の逆行列が存在すれば，$\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ は可逆で次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} E & A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & \Delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E & O \\ CA^{-1} & E \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & \Delta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\Delta^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これは結構複雑な式である．例えば，もし $C = O$ ならば $\Delta = D$ で

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}$$

となり，式は簡単化される．

ブロックの数を増やしても計算は同様であるが，詳細は省略する．

1.2.5 1 次変換

$m \times 1$ 行列を（m 次元の）列ベクトル（縦ベクトル），$1 \times n$ 行列を（n 次元の）行ベクトル（横ベクトル）という．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n)$$

実数を成分とする n 次元行ベクトルの空間と n 次元列ベクトルの空間はどちらも数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視される．

$\mathbb{R}^m$ を m 次元列ベクトル空間と同一視し，$\mathbb{R}^n$ を n 次元列ベクトル空間と同一視しよう．$m \times n$ 行列 A があるとき，行列 A の定める次の写像を考える．

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

これは次のように表す事もできる．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

この写像を行列 A の定める **1 次変換**または**線形写像** (a linear map) という．線型写像と書くこともある．

注意 1.2.19. 行ベクトルと列ベクトルの役割を入れ替えて，$\mathbb{R}^m$ は m 次元行ベクトル空間と同一視し，$\mathbb{R}^n$ は n 次元行ベクトル空間と同一視して考える事もできる．この場合 $m \times n$ 行列 A の定める写像

$$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}A$$

を表示すると次のようになる．

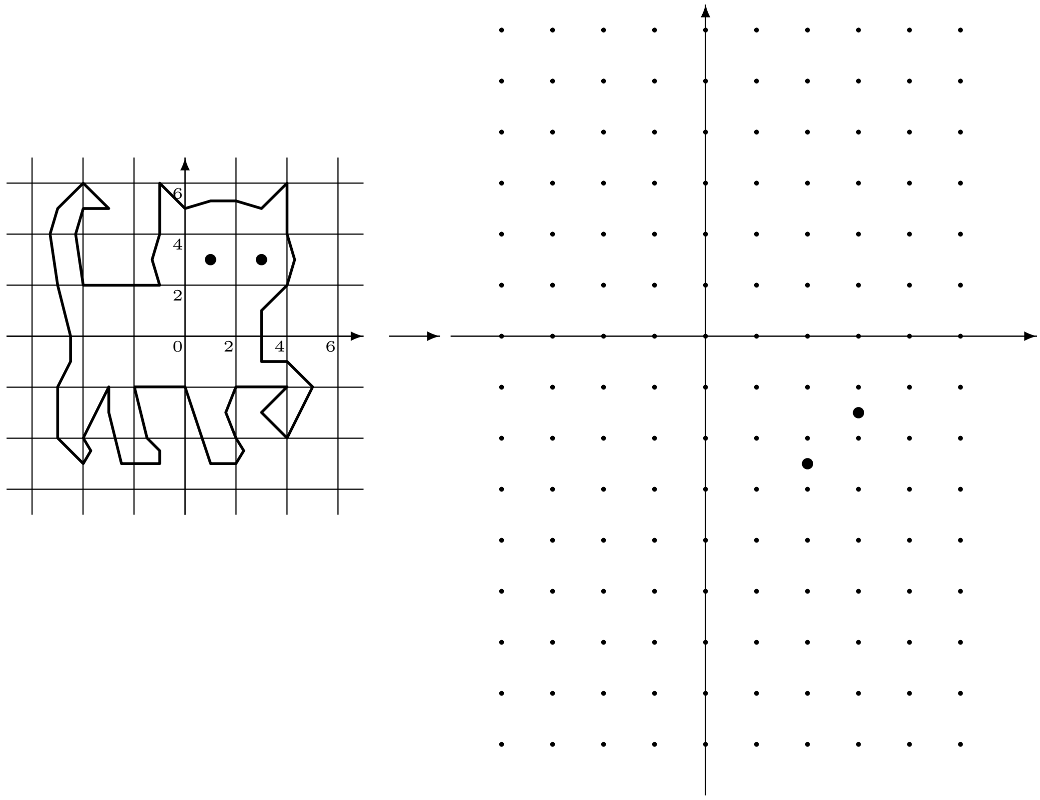
$$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_m) \mapsto (x_1\ x_2\ \cdots\ x_m) \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

行ベクトルで説明しても列ベクトルで説明しても，実質的には同じ事であるから，本稿では主に列ベクトルで説明する事にする．

例 1.2.20 (猫写し)**.** 1970 年代から 2015 年まで，高校数学では行列と 1 次変換が教えられていた．1 次変換の特徴を捉えるのに工夫された教材として，1980 年代に小沢健一氏[*4]によって考案された 1 次変換による猫写しを紹介する．

問題 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \binom{x}{y}$,
で左図をうつせ．

[*4] 1942 年埼玉県秩父市生，元都立高校教諭，元私立東野高校長



定義 1.2.21. 写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が**線形写像**であるとは次の 2 条件をみたすときを言う.

- $\forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n \quad f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w})$
- $\forall c\in\mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\ f(c\boldsymbol{v})=cf(\boldsymbol{v})$

補題 1.2.22. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が線形写像である事は次の条件と同値である.

$$\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}\quad \forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n\quad f(c_1\boldsymbol{v}+c_2\boldsymbol{w})=c_1f(\boldsymbol{v})+c_2f(\boldsymbol{w}). \tag{1.2.23}$$

証明. 線形性を仮定すると，次の様に (1.2.23) が分かる.

$$f(c_1\boldsymbol{v}+c_2\boldsymbol{w})=f(c_1\boldsymbol{v})+f(c_2\boldsymbol{w})=c_1f(\boldsymbol{v})+c_2f(\boldsymbol{w}).$$

逆に，(1.2.23) で $c_1=c_2=1$ と置けば線形性の最初の式が従うし，$c_1=c$, $c_2=0$ とすれば第 2 式が従う. $\square$

線形写像は $\mathbf{0}$ を $\mathbf{0}$ に写す.（これは $f(\mathbf{0})=f(0\boldsymbol{v})=0f(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ よりわかる.）

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

とおく．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**と呼ぶ.

補題 1.2.24. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ は標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ の行き先で定まる.

証明. $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書くとき

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = f(x_1\boldsymbol{e}_1) + \cdots + f(x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n)$$

なので明らか. □

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad f(\boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

と書くと

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となる. $A = (a_{i,j})$ とおけば, これを短く $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書く事ができる.

注意 1.2.25 (線形写像の合成)**.** 2 つの線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ に対しその合成 $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ も線形写像になる. これは定義から容易にわかる.

$$g(f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})) = g(f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})) = g \circ f(\boldsymbol{v}) + g \circ f(\boldsymbol{w}),\ g(f(c\boldsymbol{v})) = g(cf\boldsymbol{v}) = cg(f\boldsymbol{v})$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ が $\boldsymbol{y} \mapsto B\boldsymbol{y}$, と行列で表示されているとすると,

$$g \circ f(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = g(A\boldsymbol{x}) = B(A\boldsymbol{x}) = BA\boldsymbol{x}$$

であるから, 合成 $g \circ f$ の行列は積 BA であることがわかる.

定義 1.2.26. 平面から平面への次の線形写像を**回転**という.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

角度 α 回転させ更に角度 β 回転させれば $\alpha + \beta$ 回転させた事になる. よって

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

が分かる. この左辺の積を計算すれば 3 角関数の加法定理が導かれる.

第 2 章

行列式

行列式の理論は行列の理論より古い．歴史的には，江戸時代の関孝和や 17 世紀のドイツのライプニッツ等の連立 1 次方程式の研究に，行列式の起源がある．行列記法は 19 世紀以降なので，現在のような簡便な記法は当時はない．19 世紀に夭折したガロアの仕事（現代ではガロア理論と呼ばれるもの）を理解しようとして導入された概念が群の概念なので，対称群の概念も当時はない．現代的な意味での行列式の理論はコーシーに始まる．本章では行列の記号を使いつつ，行列式の理論の骨子を紹介する．

2.1　2 次と 3 次の行列式$^\circ$

本節では 2 元と 3 元の連立 1 次方程式を考察し，2 次と 3 次の行列式がどのように現れるかを解説する．

2.1.1　2 元連立 1 次方程式

2 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

の解は $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ のとき次のようになる．

$$x = \frac{p_1b_2 - p_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1p_2 - a_2p_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ の分子は分母の $\begin{matrix} a_1,\, a_2 \\ b_1,\, b_2 \end{matrix}$ を $p_1,\, p_2$ に変えて得られる事に注意しよう．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{2.1.1}$$

と置き，**2 次の行列式**と呼ぶ．分子はそれぞれ

$$\begin{vmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix}$$

で表せる．特に，次が成り立つ．

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{2.1.2}$$

2.1.2　3 元連立 1 次方程式

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

の解を求めよう．x を定数とみなして，第 2 式と第 3 式を書き換えると

$$\begin{cases} b_2y + c_2z = p_2 - a_2x \\ b_3y + c_3z = p_3 - a_3x \end{cases}$$

これを解いて次を得る．

$$\begin{aligned} y =& \frac{(p_2 - a_2x)c_3 - c_2(p_3 - a_3x)}{b_2c_3 - c_2b_3} = \frac{(p_2c_3 - c_2p_3) - x(a_2c_3 - c_2a_3)}{b_2c_3 - c_2b_3}, \\ z =& \frac{b_2(p_3 - a_3x) - (p_2 - a_2x)b_3}{b_2c_3 - c_2b_3} = \frac{-(p_2b_3 - b_2p_3) + x(a_2b_3 - b_2a_3)}{b_2c_3 - c_2b_3}. \end{aligned}$$

これを，第 1 式を $(b_2c_3 - c_2b_3)$ 倍したものに代入して，定数項を移項すると

$$\begin{aligned} &[a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)]x \\ &\qquad = p_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(p_2c_3 - c_2p_3) + c_1(p_2b_3 - b_2p_3) \end{aligned}$$

なので，x は次のようになる．

$$x = \frac{p_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(p_2c_3 - c_2p_3) + c_1(p_2b_3 - b_2p_3)}{a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)}$$

y, z についても同様なので $a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \neq 0$ のとき

$$x = \frac{p_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(p_2c_3 - a_3p_2) + c_1(p_2b_3 - b_2p_3)}{a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)}$$

$$
\begin{aligned}
y =& \frac{a_1(p_2c_3 - c_2p_3) - p_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2p_3 - p_2a_3)}{a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)} \\
z =& \frac{a_1(b_2p_3 - p_2b_3) - b_1(a_2p_3 - p_2a_3) + p_1(a_2b_3 - b_2a_3)}{a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)}
\end{aligned}
$$

となる．解の表示式を見ると，分母は共通であり，$\begin{array}{l} x \text{ の分子} \\ y \text{ の分子} \\ z \text{ の分子} \end{array}$ は分母の $\begin{array}{l} a_i \\ b_i \\ c_i \end{array}$ を p_i に変えたものである．

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) \tag{2.1.3}
$$

と置く．これを **3 次の行列式**と呼ぶ．分子はそれぞれ

$$
\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}
$$

であり，解は次のように表せる．

$$
x = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \;
y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \;
z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{2.1.4}
$$

公式 (2.1.2), (2.1.4) の類推で，4 元連立 1 次方程式や一般の n 元 1 次方程式でも，同様の公式が成立すると予想される．それを説明するためには (2.1.1), (2.1.3) の一般化が必要であるが，項数が増えて複雑になり，式を書き下す事も大変になる．従って，類推も大切であるが理論的考察が必要になる．これを次節で行う．

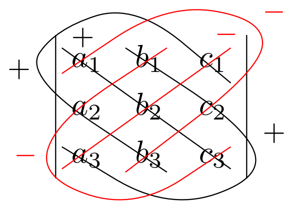
3 次の行列式について一言注意して本節を終わろう．よく見ると (2.1.3) は行列式の第 1 行での展開である．行列式は，次の様に各行各列で展開することができる．

$$
\begin{aligned}
(2.1.3) =& \quad a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) && \text{第 1 行での展開} \\
=& - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + b_2(a_1c_3 - c_1a_3) - c_2(a_1b_3 - b_1a_3) && \text{第 2 行での展開} \\
=& \quad a_3(b_1c_2 - c_1b_2) - b_3(a_1c_2 - c_1a_2) + c_3(a_1b_2 - b_1a_2) && \text{第 3 行での展開} \\
=& \quad (b_2c_3 - c_2b_3)a_1 - (b_1c_3 - b_3c_1)a_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_3 && \text{第 1 列での展開} \\
=& - (a_2c_3 - c_2a_3)b_1 + (a_1c_3 - a_3c_1)b_2 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_3 && \text{第 2 列での展開} \\
=& \quad (a_2b_3 - b_2a_3)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 && \text{第 3 列での展開}
\end{aligned}
$$

一見複雑にみえるが，よーく見ると規則的である．（君は規則性を発見できるか?）このように多くの規則的な表示がある事が行列式の有用性の理由の１つである．

$$(2.1.3) = \quad a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

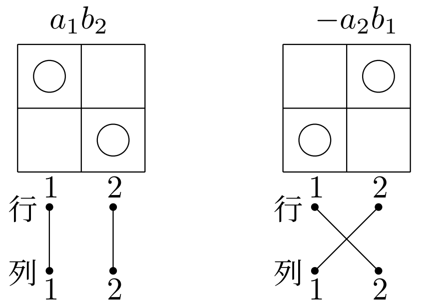
であるから，3 次の行列式は次の様に覚えるのが便利である．**関-サラスの方法**[*1] ということがある．



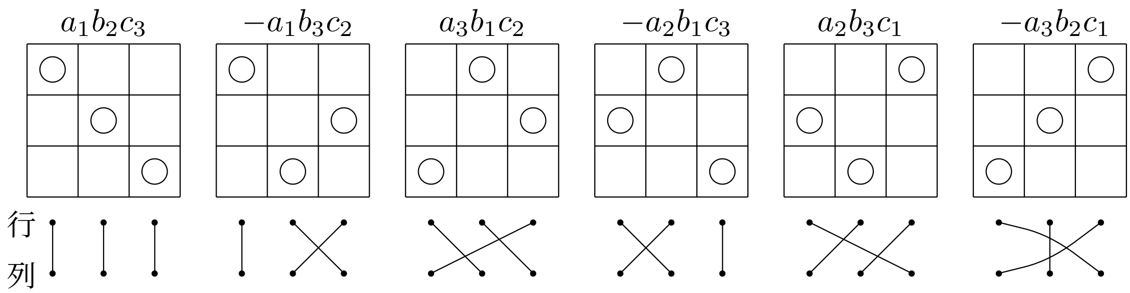
2.2　行列式の定義

まずは 2 次と 3 次の行列式の定義をよく眺めてみる．

2 次の行列式 (2.1.1) に現れた項は 2 つで次のように表せる．



3 次の行列式 (2.1.3) に現れた項は 6 つでそれぞれ次のように表せる．



高次の行列式を見出すため，これらを眺めてわかる規則を述べてみよう．

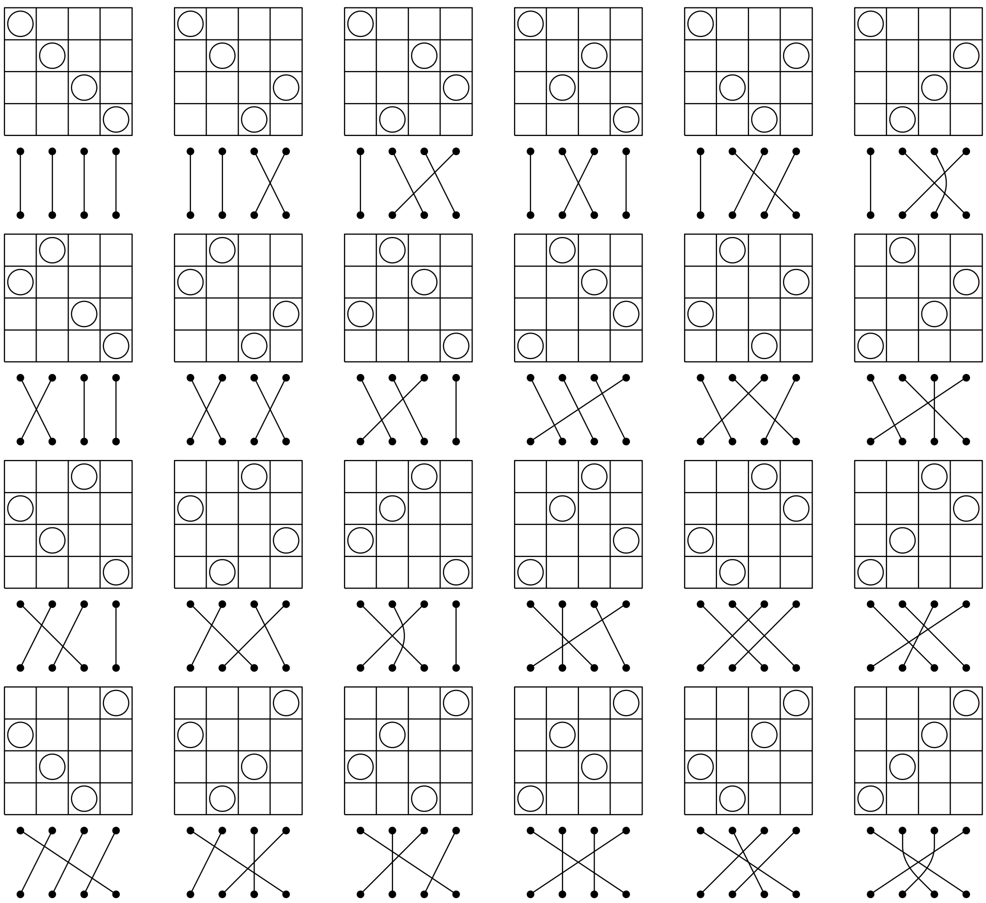
(i) 各項は上の図に対応するが，図中の○は各行各列に 1 回づつ現れる．

[*1] 阿部剛久, 藤野清次著 「関-Sarrus の公式をめぐって」(数理解析研究所講究録，1195 巻, 2001 年, pp. 38-50）によると，1846 年に発行された Finck の代数学の教科書の記述が基でこれをサラスの方法と呼ぶのが習慣化している．

(ii) 各項の係数は 1 または -1 である．係数は，その項の添字に現れる行と列を図のように 2 点以上は交わらないよう線で結んだときの交点の個数の偶奇で決まっている．

例えば線分で結んで 3 本以上が 1 点で交われば，交わった点の近くで線を少し動かして，3 本が 1 点で交わらないようにする事ができる．そのように結ぶ結び方は何通りか考えられ，交点の個数は結び方に依存する．しかしながら交点の個数の偶奇は結び方に依存しない．これは証明すべき事柄であるが，今はこの事を認めて先へ進もう．

試みに $n=4$ の場合に，上と同様の考察をしてみよう．次の配置に対応する $4!=24$ 個の項がある．



対応する項を，全部書き下すのは可能であるが，24 個の項があるので相応の時間がかかる．

n 次正方行列については (i) を満たす項は全部で $n!$ 個あるので，n 次の行列式には全部で $n!$ 個の項がある事になる．$n=5$ のときは 120 個の項があり $n=6$ のときは 720 個の項がある．n が大きいと書き下して計算しようというアイデアは現実的でなく，理論的考察が必要になる．一般の n 次の行列式を定義しその性質を解明するため，次節で置換と対

称群の基礎知識を説明する．

2.2.1　対称群

$M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ と置き，M_n から M_n への全単射全体を**置換** (permutation) という．M_n の置換全体を S_n で表す．2 つの置換 σ, τ があったとき，その合成 $\tau \circ \sigma$ も M_n の全単射であるから置換である．この置換を $\tau\sigma$ で表す．置換全体はこの積について群をなす．すなわち，次が成り立つ．

- 任意の σ, τ, $\rho \in S_n$ に対して $(\rho\tau)\sigma = \rho(\tau\sigma)$ が成り立つ．（結合法則）
- 任意の $\sigma \in S_n$ に対し $e\sigma = \sigma e = \sigma$ を満たす $e \in S_n$ が存在する．（単位元の存在）
- 任意の $\sigma \in S_n$ に対し $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = e$ を満たす $\sigma^{-1} \in S_n$ が存在する．（逆元の存在）

S_n を**対称群** (symmetric group) という．置換 σ の表し方にはいくつか方法があるが

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように表す事もよく行われる．この記法をコーシーの 2 行記法という．

i $(1 \leq i \leq n)$ と $\sigma \in S_n$ に対し $\sigma^k(i) = i$ をみたす k が存在する．実際，$\{\sigma^k(i) : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ は M_n の部分集合なので $\sigma^{k_1}(i) = \sigma^{k_2}(i)$ なる k_1, k_2 $(k_1 < k_2)$ が存在するが，これに σ^{k_1} の逆元を左からかけると $i = \sigma^{k_2 - k_1}(i)$ を得る．

i_1, i_2, $\ldots i_k$ をどの 2 つも相異なるとする時，

$$i_1 \mapsto i_2,\ i_2 \mapsto i_3,\ \ldots,\ i_k \mapsto i_1,\ i \mapsto i\ (i \neq i_1, \ldots, i_k)$$

で定まる置換を**巡回置換**（サイクル）(cycle) といい，$(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ で表す．k をこの巡回置換の長さという．なお長さ 1 の巡回置換 (i) は恒等写像と解釈しておく．

例 2.2.1. 3 次の置換は，次の 6 つである．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

各元はそれぞれ，巡回置換として次の様に書く事もできる．

$$(1) \qquad (2\ 3) \qquad (1\ 2\ 3) \qquad (1\ 2) \qquad (1\ 3\ 2) \qquad (1\ 3)$$

例 2.2.2. 4 次の置換で巡回置換でないものがある．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$$

これは巡回置換ではない．2 つの巡回置換 $(1\ 2)$, $(3\ 4)$ の積である．

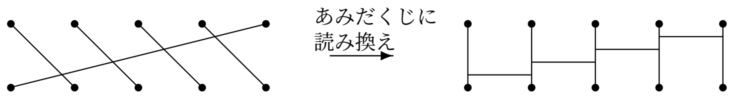
補題 2.2.3. 任意の置換は巡回置換の積で表される．

証明. n に関する帰納法で示す．$n=2$ のときは自明．$n-1$ 以下まで正しいとして n の時を示す．$\sigma \in S_n$ に対し，列 $1, \sigma(1), \sigma(\sigma(1)), \ldots$ を考えると，いつかは 1 に戻る．そのような元すべては $S=\{\sigma^n(1) : n \in \mathbb{N}\}$ と書けて，これは M_n の部分集合なので有限集合である．σ は S の巡回置換と $M_n \setminus S$ の置換を定める．$M_n \setminus S$ は元の個数が $n-1$ 個以下であるから，帰納法の仮定が使えて $M_n \setminus S$ の置換は巡回置換の積で表せる．□

置換のうち，2 つの元のみを入れ替えて他の元は変えないものを**互換** (transposition) という．長さが 2 の巡回置換と言っても同じ事である．番号 i と j を入れ替える互換は $(i\ j)$ のように表せる．

補題 2.2.4. 任意の置換は互換の積で表される．

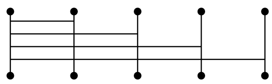
証明. 巡回置換が互換の積で書ける事を示せば十分である．番号をつけ変えて巡回置換 $(1\ 2\ \cdots\ k)$ が互換の積で書ける事を示せば良い．



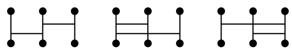
これより $(1\ 2\ \cdots\ k) = (1\ 2)(2\ 3)\cdots(k-1\ k)$ なので証明終.□

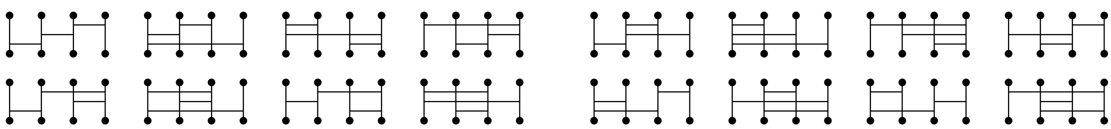
注意 2.2.5. 巡回置換を互換の積に表す表し方は他にもある．例えば次の様に表せる．

$$(1\ 2\ \cdots\ k) = (1\ k)(1\ k-1)\cdots(1\ 3)(1\ 2)$$



(越境を許すあみだくじ)

巡回置換 $(1\ 2\ 3)$ を 2 つの互換の積に表す表し方は次図の 3 通り．
巡回置換 $(1\ 2\ 3\ 4)$ を 3 つの互換の積に表す表し方は次図の 16 通り．

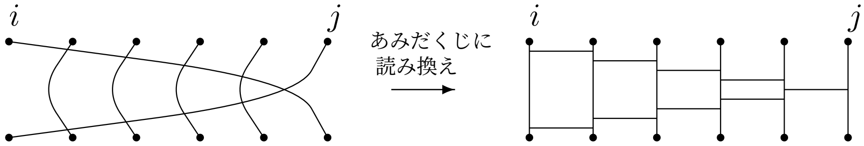


隣接する番号の入れ替え $(k\ k+1)$ を**隣接互換** (adjacent transposition) という．

補題 2.2.6. 任意の置換は隣接互換の積で表される．

これは置換が「あみだくじ（阿弥陀籤）」で表せる事を主張している．

証明. 互換が隣接互換の積で表せる事を示せば十分である．$(i\ j)$ $(i<j)$ に対して示そう．$j=i+1$ なら隣接互換であるから $j>i+1$ とする．



これより

$$(i\ j) = (i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-2\ j-1)(j-1\ j)(j-2\ j-1)\cdots(i+1\ i+2)(i\ i+1)$$

となり証明を終わる. □

定理 2.2.7. 置換を互換の積に表すとき，互換の個数の偶奇は互換の積の表し方に依らずに決まる.

証明. 差積と呼ばれる次の多項式 Δ を考える[*2].

$$\begin{aligned}\Delta =&(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)\\ &\times(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\\ &\cdots\\ &\times(x_{n-1}-x_n)\\ =&\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\end{aligned}$$

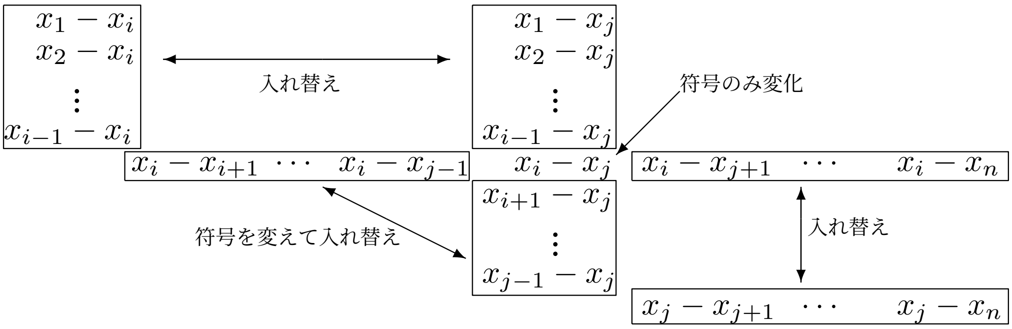
置換 $\sigma\in S_n$ に対して，$\sigma\Delta$ を次で定める.

$$\begin{aligned}\sigma\Delta =&(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(2)})(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(3)})\cdots(x_{\sigma(1)}-x_{\sigma(n)})\\ &\times(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(3)})\cdots(x_{\sigma(2)}-x_{\sigma(n)})\\ &\cdots\\ &\times(x_{\sigma(n-1)}-x_{\sigma(n)})\\ =&\prod_{1\le i<j\le n}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})\end{aligned}$$

σ が互換 (i,j) $(i<j)$ ならば，$\sigma\Delta=-\Delta$ である．実際[*3]，x_i, x_j を含む因子が σ によってどの様に変わるかをすべて書いてみると次のようになる.

[*2] $\prod$ は積を表す記号で総乗記号と呼ばれる．総和記号 $\sum$ と同じ様に $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n$ の様に使う.

[*3] 「実際」という語の後には，直前に述べた事の証明を述べる習慣である.「実際」は英語の in fact の訳語である.



つまり Δ と $\sigma\Delta$ の因子は同じで，$x_i - x_j$ の因子が効いて符号は変わる事がわかる．

一般の置換 σ を互換の積として $\sigma_k\sigma_{k-1}\cdots\sigma_1$ と表したとき

$$\sigma\Delta = \sigma_k\sigma_{k-1}\cdots\sigma_1\Delta = (-1)^k\Delta$$

である．左辺は互換の積の表し方に関係なく決まるので，k の偶奇は互換の積の表し方に依らずに定まる事が分かる．　□

偶数個の互換の積として表せる置換を**偶置換**，奇数個の互換の積として表せる置換を**奇置換**という．偶置換全体も群になる．偶置換全体の群を**交代群** (altenating group) という．

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ が偶置換のとき} \\ -1 & \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases}$$

$\varepsilon(\sigma)$ を置換 σ の**符号数**という．$\varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$ である．特に $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(e) = 1$ なので，$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

$\sigma \in S_n$ に対し次の写像は全単射である．

$$S_n \to S_n,\ \tau \mapsto \tau\sigma, \qquad S_n \to S_n,\ \tau \mapsto \sigma\tau$$

なぜなら，それぞれの逆写像が次で与えられるからである．

$$S_n \to S_n,\ \tau \mapsto \tau\sigma^{-1}, \qquad S_n \to S_n,\ \tau \mapsto \sigma^{-1}\tau$$

2.2.2　n 次の行列式の定義

準備ができたので n 次の行列式の定義をしよう．n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ に対し，次で A の**行列式** (determinant) を定める．

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{2.2.8}$$

行列式は $\det(A)$, $|A|$ などをの記号を使って表す．これは $n!$ 個の項の和である．行と列の役割を入れ替えると

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるが，行列式の構成は行と列の入れ替えをしても変わらないから $\det({}^tA) = \det(A)$ が分かる．この事を定理として述べておこう．

定理 2.2.9. 転置行列をとってもその行列式は変わらない．即ち $\det({}^tA) = \det(A)$.

証明. 自明で良いと思うが，次のような式変形を見ておくのも有益であろう．

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\ &= \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\tau(j)} = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)} = \det(A)\end{aligned}$$

ここで σ と τ は互いに逆である．すなわち $\sigma(i) = j$ は $i = \tau(j)$ と同値．$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$ にも注意しておく． □

注意 2.2.10. 行列式の値を求めようとする際，定義に従って計算するのは項の数が多く一般には大変である．そのせいか，近年は行列式の定義を説明する事が減ったように思う．2.3.2 節に述べる，行又は列による展開だけ知っていれば実用上困る事は少ないとの考えからであろう．しかしながら，行列式の基本的性質を明瞭に了解するには行列式の定義が不可欠である．尚，数値計算で行列式の値を求めるには，後述 (注意 4.2.7) の掃き出し法を用いて計算する事が多い．

例 2.2.11. 第 1 行が最初の成分を除いてすべて 0 であれば，行列式の定義 (2.2.8) で，$\sigma(1) = 1$ なる $\sigma \in S_n$ についてのみ和をとれば良い．このような σ は $\{2, \dots, n\}$ の置換を定めるので，次が成り立つ．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

行と列を入れ替えても同様であるから，次も成り立つ．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

例 2.2.12. 前の例の計算を帰納的に続ければ[*4]，上三角行列（または下三角行列）の行列式は対角成分の積である事が分かる．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n},$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n}.$$

■行列式の性質　行列式 $\det(A)$ は次の性質を持つ．

(i) $\det(A)$ は $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}$ について 1 次同次式である．
(ii) $\det(A)$ は $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$ について 1 次同次式である．

この性質は重要なので，その帰結を自明であるが定理として述べておこう．

定理 2.2.13 (行列式の多重線形性). (i) $\det(A)$ は各行について線形である．即ち行ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して

(a) $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}'_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}'_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$　　(b) $\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ c\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = c\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$

(ii) $\det(A)$ は各列について線形である．即ち列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して

(a) $\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}'_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}'_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$
(b) $\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ c\boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) = c\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$

例 2.2.14. 行列 $((-1)^{i+j}a_{i,j})$ は行列 $(a_{i,j})$ の奇数行と奇数列の符号を変えて得られる．奇数行の個数と奇数列の個数の和は偶数なので $\det((-1)^{i+j}a_{i,j}) = \det(a_{i,j})$.

定理 2.2.15 (行列式の交代性（歪(わい)対称性）)**.**
(i) 行列式の i 行と j 行 $(1 \le i < j \le n)$ を入れ替えると行列式の符号が変わる．

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

(ii) 行列式の i 列と j 列 $(1 \le i < j \le n)$ を入れ替えると行列式の符号が変わる．

$$\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots \boldsymbol{a}_1) = -\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots \boldsymbol{a}_1)$$

[*4] 数学的帰納法で証明できるとき，このような言い方をする事がある．

証明. (ii) も同様であるから (i) のみ示す．$\tau = (i\ j)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma\tau(1)} \cdots a_{i,\sigma\tau(i)} \cdots a_{j,\sigma\tau(j)} \cdots a_{n,\sigma\tau(n)} \\
&= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{1,\sigma\tau(1)} \cdots a_{i,\sigma\tau(i)} \cdots a_{j,\sigma\tau(j)} \cdots a_{n,\sigma\tau(n)} \\
&= -\det(A)
\end{aligned}
$$

□

系 2.2.16. (i) 2 つの行が同じ行列の行列式は 0 である．
(ii) 2 つの列が同じ行列の行列式は 0 である．

証明. A の第 i 行と j 行が同じだとすると，第 i 行と j 行を入れ替えても行列は変わらないので $\det(A) = -\det(A)$．よって $\det(A) = 0$. (ii) も同様である． □

系 2.2.17. 行列式の行または列の番号を置換 σ で付け替えると行列式は $\varepsilon(\sigma)$ 倍される．

証明. 置換 σ を互換の積で表すと，各互換に対応して，行（または列）を入れ替えるたびに行列式の符号が変わる．よって主張は従う．
別証　行を置換 σ で入れ替えた場合を考える．

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{\sigma(1),1} & \cdots & a_{\sigma(1),n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\sigma(n),1} & \cdots & a_{\sigma(n),n} \end{vmatrix}
&= \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) a_{\sigma(1),\tau(1)} \cdots a_{\sigma(n),\tau(n)} \\
&= \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\tau\sigma^{-1}(n)} \\
&= \varepsilon(\sigma) \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau\sigma^{-1}) a_{1,\tau\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\tau\sigma^{-1}(n)} \\
&= \varepsilon(\sigma) \det(A)
\end{aligned}
$$

列を置換 σ で入れ替えた場合も同様である．

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{1,\sigma(1)} & \cdots & a_{1,\sigma(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,\sigma(1)} & \cdots & a_{n,\sigma(n)} \end{vmatrix}
&= \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau) a_{1,\tau\sigma(1)} \cdots a_{n,\tau\sigma(n)} \\
&= \varepsilon(\sigma) \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau\sigma) a_{1,\tau\sigma(1)} \cdots a_{n,\tau\sigma(n)} \\
&= \varepsilon(\sigma) \det(A)
\end{aligned}
$$

□

系 2.2.18. 行列式はある行に別の行の定数倍を加えてもその値は変わらない．行列式はある列に別の列の定数倍を加えてもその値は変わらない．

証明. 行についての主張は転置行列をとれば列に関する主張から従うので, 列についてのみ示す．$i \neq j$ として

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j + c\boldsymbol{a}_i\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) &= \det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) + c\det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{j}{\boldsymbol{a}_i}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_j\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)\end{aligned}$$ □

例 2.2.19. $a_{1,1} \neq 0$ のとき，第 j 行 $(j \geq 2)$ から第 1 行の $a_{j,1}/a_{1,1}$ 倍を引けば次を得る．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}/a_{1,1} & \cdots & a_{2,n} - a_{1,n}a_{2,1}/a_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} - a_{1,2}a_{n,1}/a_{1,1} & \cdots & a_{n,n} - a_{1,n}a_{n,1}/a_{1,1} \end{vmatrix}$$

同様に，第 j 列 $(j \geq 2)$ から第 1 列の $a_{1,j}/a_{1,1}$ 倍を引けば次を得る．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}/a_{1,1} & \cdots & a_{2,n} - a_{n,1}a_{1,2}/a_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{n,2} - a_{2,1}a_{1,n}/a_{1,1} & \cdots & a_{n,n} - a_{n,1}a_{1,n}/a_{1,1} \end{vmatrix}$$

ここで，例 2.2.11 を用いれば，サイズが 1 つ小さい行列式の計算に還元できる．

2.3　余因子と余因子行列

2.3.1　2 次と 3 次の行列の逆行列°

例 1.2.13 で 2 次行列の逆行列を計算したが，n 次行列についても同様の公式があれば便利である．ここでは余因子行列を使った逆行列の計算法を説明しよう．

正方行列 A に対し，$\det(A) \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

となる行列 A^* を紹介する．A^* は余因子行列と呼ばれる．まずは 2 次の場合と 3 次の場合を見る．一般の n 次の場合は，系 2.3.10 で与えられる．

定理 2.3.1 (2 次正方行列の余因子行列)**.**

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ に対し}, A^* = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$AA^* = A^*A = \det(A)E.$

証明. 単純な計算である.

$$
\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_2 - b_1a_2 & 0 \\ 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_2 - b_1a_2 & 0 \\ 0 & a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} \qquad \square
$$

定理 2.3.2 (3 次正方行列の余因子行列)**.**

$$
A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \text{のとき } A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
$$

と置けば $AA^* = A^*A = \det(A)E$.

証明. 単なる計算であるが一寸(ちょっと)複雑である．A の成分が積の計算に現れる箇所を $\boxed{a_i}$ 等で示す.

$$
AA^* = \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \boxed{a_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} \boxed{a_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} \boxed{a_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \boxed{a_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}
\end{pmatrix} = \det(A)E
$$

$$
A^*A = \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_2} & b_2 & c_2 \\ \boxed{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} \boxed{b_1} & b_1 & c_1 \\ \boxed{b_2} & b_2 & c_2 \\ \boxed{b_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} \boxed{c_1} & b_1 & c_1 \\ \boxed{c_2} & b_2 & c_2 \\ \boxed{c_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{a_1} & c_1 \\ a_2 & \boxed{a_2} & c_2 \\ a_3 & \boxed{a_3} & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{c_1} & c_1 \\ a_2 & \boxed{c_2} & c_2 \\ a_3 & \boxed{c_3} & c_3 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{a_1} \\ a_2 & b_2 & \boxed{a_2} \\ a_3 & b_3 & \boxed{a_3} \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{b_1} \\ a_2 & b_2 & \boxed{b_2} \\ a_3 & b_3 & \boxed{b_2} \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & b_2 & \boxed{c_2} \\ a_3 & b_3 & \boxed{c_3} \end{vmatrix}
\end{pmatrix} = \det(A)E \qquad \square
$$

2.3.2　行列式の展開

行列式の性質の冒頭に述べた性質 (i) より $\det(A)$ は $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}$ の 1 次同次式で, (ii) より $\det(A)$ は $a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}$ の 1 次同次式だが, 少し考えると, 両者の $a_{i,j}$ の係数は同じでなければならない事が分かる．つまり

$$
\begin{aligned}
\det(A) =& a_{i,1}a^*_{i,1} + \cdots + a_{i,n}a^*_{i,n} \\
\det(A) =& a_{1,j}a^*_{1,j} + \cdots + a_{n,j}a^*_{n,j}
\end{aligned}
$$

と表せる．この表示式を，それぞれ行列式の**第 i 行での展開**，**第 j 列での展開**といい，$a^*_{i,j}$ を正方行列 $A=(a_{i,j})$ の (i,j) **余因子** (cofactor) という．ラプラスの名に因んでラプラス展開と呼ばれることもあるが，ラプラスより早く久留島義太が発見していたとも言われる．

定理 2.3.3. $a^*_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$．但し $M_{i,j}$ は A から第 i 行と第 j 列を除いて得られる行列の行列式である．

$$M_{i,j}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

証明. (2.2.8) を見ると，$a_{i,j}$ の係数 $a^*_{i,j}$ は，次で与えられる事がわかる．

$$a^*_{i,j}=\sum_{\sigma:\sigma(i)=j}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{i-1,\sigma(i-1)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

これは，$n-1$ 次の行列式 $M_{i,j}$ と良く似ている．検討してみよう．行列式 $M_{i,j}$ を，行と列の番号の番号の付替え

$$\tau=\begin{pmatrix}1 & \cdots & i-1 & i & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n\end{pmatrix},\ \rho=\begin{pmatrix}1 & \cdots & j-1 & j & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

を用いて

$$M_{i,j}=\sum_{\sigma'\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma')a_{\tau(1),\rho\sigma'(1)}\cdots a_{\tau(n-1),\rho\sigma'(n-1)}$$

と書く．$\tau(n)=i$, $\rho(n)=j$ とすれば τ, ρ は S_n の元で

$$\varepsilon(\tau)=(-1)^{n-i},\quad \varepsilon(\rho)=(-1)^{n-j} \tag{2.3.4}$$

が成り立つので，次の様に変形できる．

$$\begin{aligned} M_{i,j}=&\sum_{\sigma'\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma')a_{1,\rho\sigma'(1)}\cdots a_{i-1,\rho\sigma'(i-1)}a_{i+1,\rho\sigma'(i)}\cdots a_{n,\rho\sigma'(n-1)} \\ =&\sum_{\sigma'\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma')a_{1,\rho\sigma'\tau^{-1}(1)}\cdots a_{i-1,\rho\sigma'\tau^{-1}(i-1)}a_{i+1,\rho\sigma'\tau^{-1}(i+1)}\cdots a_{n,\rho\sigma'\tau^{-1}(n)} \\ =&\varepsilon(\tau)\varepsilon(\rho)\sum_{\sigma\in S_n:\sigma(i)=j}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{i-1,\sigma(i-1)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \end{aligned}$$

ここで $\sigma=\rho\sigma'\tau^{-1}$ である．(2.3.4) より

$$M_{i,j}=(-1)^{i+j}\sum_{\sigma\in S_n:\sigma(i)=j}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{i-1,\sigma(i-1)}a_{i+1,\sigma(i+1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$=(-1)^{i+j}a^*_{i,j}$$

となり，$a^*_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$ を得る． □

例 2.3.5. 3 次行列式の第 1 行での展開式を書き下しておく．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

これは (2.1.3) である．定理 2.3.2 の証明中に 3 次行列の行での展開が現れている事に注意しよう．第 1 列での展開式は次の様になる．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

列による展開も定理 2.3.2 の証明中に現れている．

4 次行列の第 1 行での展開式は次の様になる．

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \\ =&a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,2}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + a_{1,3}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix} - a_{1,4}\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

注意 2.3.6. 余因子 $a^*_{i,j}$ とは，第 i 行を変数，他の行を定数と見て，行列式を第 i 行の同次 1 次式と見たときの係数と見る事ができる．第 j 列を変数，他の列を定数と見て行列式を第 j 列の同次 1 次式と見たときの係数と見ても良い．即ち，次の関係式を満たす．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ x_1 & \cdots & x_n \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a^*_{i,1}x_1 + \cdots + a^*_{i,n}x_n \tag{2.3.7}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & x_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & x_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a^*_{1,j}x_1 + \cdots + a^*_{n,j}x_n \tag{2.3.8}$$

2.3.3　余因子行列

正方行列 A に対し，$AA^* = A^*A = \det(A)E$ を満たす行列 A^* が存在する．余因子行列である．n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ の**余因子行列** (adjugate matrix) [*5] A^* を次で定める．

$$A^* = \begin{pmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{1,n} & \cdots & a^*_{n,n} \end{pmatrix}$$

余因子行列の添字の付け方が $A = (a_{i,j})$ の添字の付け方と異なり，その転置になっている事に注意しよう．

定理 2.3.9. $AA^* = A^*A = \det(A)E$

証明. まず $AA^* = \det(A)E$ を示す．

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{1,n} & \cdots & a^*_{n,n} \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} AA^* \text{の } (i,j) \text{ 成分 } =& a_{i,1}a^*_{j,1} + a_{i,2}a^*_{j,2} + \cdots + a_{i,n}a^*_{j,n} \\ =& (-1)^{1+j}a_{i,1}M_{j,1} + (-1)^{2+j}a_{i,2}M_{j,2} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{i,n}M_{j,n} \\ =& \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{cases} \det(A) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

次に $A^*A = \det(A)E$ を示す．

$$A^*A = \begin{pmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{1,n} & \cdots & a^*_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} A^*A \text{ の } (i,j) \text{ 成分 } =& a^*_{1,i}a_{1,j} + a^*_{2,i}a_{2,j} + \cdots + a^*_{n,i}a_{n,j} \\ =& (-1)^{1+i}a_{1,j}M_{1,i} + (-1)^{2+i}a_{2,j}M_{2,i} + \cdots + (-1)^{n+i}a_{n,j}M_{n,i} \\ =& \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,j} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,j} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,j} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{cases} \det(A) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

□

[*5] 英文で cofactor matrix というと転置を取る前の行列 $\begin{pmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{n,1} & \cdots & a^*_{n,n} \end{pmatrix}$ を指すことが多い．ここでは日本語における慣用に従って，これの転置をとったものを余因子行列と呼ぶ．

系 2.3.10 (行列の逆転公式)**.** 正方行列 A が $\det(A) \neq 0$ を満たせば逆行列 A^{-1} が存在しそれは次式で与えられる．

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$$

証明. $AA^* = A^*A = \det(A)E$ を $\det(A)$ で割れば良い． □

注意 2.3.11. 数値計算で逆行列を求める際はこの公式を使うのは推奨されない．行列式の計算が大変な事がしばしばあるからである．数値的に解を求めるには注意 4.2.5 に説明する掃き出し法が使われる事が多い．

定理 2.3.12 (クラメルの公式)**.** $\det(a_{i,j}) \neq 0$ のとき連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\cdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

の解は次で与えられる．

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n-1,1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n-1,n} & b_n \end{vmatrix}$$

証明.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と置けば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せる．$\det(A) \neq 0$ のとき，この解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ となる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} =& A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det(A)} A^*\boldsymbol{b} \\ =& \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^*_{1,n} & \cdots & a^*_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a^*_{1,1}b_1 + \cdots + a^*_{n,1}b_n \\ \vdots \\ a^*_{1,n}b_1 + \cdots + a^*_{n,n}b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より (2.3.8) を用いれば主張を得る． □

この定理は，公式 (2.1.4) の n 変数への一般化である．

注意 2.3.13. 数値計算で連立 1 次方程式を解く際はクラメルの公式を使うのは推奨されない．行列式の計算が大変な事がしばしばあるからである．数値的に解を求めるには後述の第 4.2.1 節に説明する掃き出し法が使われる事が多い．

次の定理はクラメルの公式の系である．

定理 2.3.14 (連立 1 次方程式が自明解のみをもつ条件)**.** 斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

が自明解（$x_1 = \cdots = x_n = 0$ なる解）しか持たない必要十分条件は $\det(a_{i,j}) \neq 0$ である．

証明. $\det(a_{i,j}) \neq 0$ なら，クラメルの公式より自明解（$x_1 = \cdots = x_n = 0$） のみが解である事が分かる．$\det(a_{i,j}) = 0$ のとき自明解以外の解が存在する事を示そう．$n = 1$ のとき $a_{1,1} = 0$ より $a_{1,1}x_1 = 0$ は任意の数 x_1 を解に持つので主張は正しい．$n > 1$ とする．$a_{i,1}$ がすべて零であれば x_1 を任意として $x_2 = \cdots = x_n = 0$ が解となる．$a_{i,1} \neq 0$ のとき，行を入れ替えて（式の順序を入れ替えて）$a_{1,1} \neq 0$ としてよい．第 i 行（$i \geq 2$）から第 1 行の $a_{i,1}/a_{1,1}$ 倍を引いて，$a_{2,1} = \cdots = a_{n,1} = 0$ と仮定して良い．系 2.2.18 より変形後の係数行列式 $\det(a_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n}$ は 0 で，帰納法の仮定から連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

は自明でない解を持つ． $a_{1,1} \neq 0$ なので, この自明でない解に対し, $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0$ で x_1 を定める事ができる． □

2.4　積の行列式

2.4.1　積の行列式

行列式に関する次の定理は基本的である．

定理 2.4.1 (積の行列式)**.** n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{j,k})$ に対し

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

証明. $n = 2$ のときをまず証明する．

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} \\ =&\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} \\ =&\begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} \\ a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= b_{1,1}b_{2,2}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + b_{1,2}b_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

一般の n のときを証明しよう．縦ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ を用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ と書いておく．即ち $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ と置く．すると次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \left| \sum_{j_1=1}^{n} \boldsymbol{a}_{j_1} b_{j_1,1} \ \cdots \ \sum_{j_n=1}^{n} \boldsymbol{a}_{j_n} b_{j_n,n} \right| \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{j_1} b_{j_1,1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{j_n} b_{j_n,n}| \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{j_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{j_n}| \cdot b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n}
\end{aligned}
$$

ここで次の事実に注意する．

$$
|\boldsymbol{a}_{j_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{j_n}| = \begin{cases} 0 & \{j_1, \ldots, j_n\} \neq \{1, \ldots, n\} \\ \varepsilon\left(\begin{smallmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{smallmatrix}\right) \det(A) & \{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\} \end{cases}
$$

よって

$$
|AB| = \det(A) \sum_{\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \ldots, n\}} \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ j_1 & \ldots & j_n \end{pmatrix} b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n} = \det(A)\det(B)
$$

となり証明を終わる． □

系 2.4.2. 正方行列 A が逆行列をもつ必要十分条件は $\det(A) \neq 0$.

証明. $\det(A) \neq 0$ ならば逆行列が存在する事は既に見た（定理 2.3.10）．A が逆行列 A^{-1} をもてば

$$
1 = \det(E) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})
$$

よって，$\det(A) \neq 0$. □

この証明より $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ も分かる．

例 2.4.3. n 次正方行列 A に対し，$\det(A)\det(A^*) = \det(AA^*) = \det(\det(A)E) = (\det A)^n$ より $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$. この計算では $\det(A) \neq 0$ でなければ $\det(A^*)$ がわからない様に思うが，実は行列の各成分を変数と見た多項式の恒等式の計算であるから，$\det(A) = 0$ のときも成り立つ．後述の補題 2.7.1 でもわかる．

積の行列式の公式は A, B が正方行列でなくても AB が正方行列ならば，次の様に一般化される．

定理 2.4.4 (積の行列式（一般形）)**.** $k \times n$ 行列 $A = (a_{i,j})$ と $n \times k$ 行列 $B = (b_{j,s})$ に対し，$k \leq n$ ならば

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,i_1} & \cdots & a_{k,i_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{i_1,1} & \cdots & b_{i_1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i_k,1} & \cdots & b_{i_k,k} \end{vmatrix}$$

$k > n$ ならば $\det(AB) = 0$.

この公式はコーシー・ビネの公式と呼ばれる事がある．

証明. 定理 2.4.1 の証明と同様である．まず $(n,k) = (3,2)$ のときを証明しよう．

$$\begin{aligned}
&\det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,3}b_{3,2} \\ a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,3}b_{3,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,3}b_{3,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,3}b_{3,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} b_{1,1}b_{2,2} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} b_{1,1}b_{3,2} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} \end{vmatrix} b_{2,1}b_{1,2} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} b_{2,1}b_{3,2} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,1} \\ a_{2,3} & a_{2,1} \end{vmatrix} b_{3,2}b_{1,2} + \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,2} \end{vmatrix} b_{3,2}b_{2,2} \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{2,1} & b_{2,1} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

次に一般の (n,k) で証明をする．縦ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)$ と書いておく．即ち $\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{k,j} \end{pmatrix}$ と置く．すると次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
|AB| &= \left| \sum_{j_1=1}^{n} \boldsymbol{a}_{j_1} b_{j_1,1} \ \cdots \ \sum_{j_k=1}^{n} \boldsymbol{a}_{j_k} b_{j_k,k} \right| \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{j_1} b_{j_1,1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{j_k} b_{j_k,k}| \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{j_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{j_k}| \cdot b_{j_1,1} \cdots b_{j_k,k}
\end{aligned}$$

ここで次の事実に注意する．

$$|\boldsymbol{a}_{j_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{j_k}| = \begin{cases} 0 & j_1, \ldots, j_k \text{に重複があるとき} \\ \varepsilon\binom{i_1 \ \cdots \ i_k}{j_1 \ \cdots \ j_k} |\boldsymbol{a}_{i_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i_k}| & \{j_1, \ldots, j_k\} = \{i_1, \ldots, i_k\} \text{ のとき} \end{cases}$$

但し $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ としている．よって

$$
\begin{aligned}
|AB| &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |\boldsymbol{a}_{i_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i_k}| \sum_{\{j_1,\ldots,j_k\}=\{i_1,\ldots,i_k\}} \varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} b_{j_1,1} \cdots b_{j_k,k} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |\boldsymbol{a}_{i_1} \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{i_k}| \begin{vmatrix} b_{i_1,1} & \cdots & b_{i_1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i_k,1} & \cdots & b_{i_k,k} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となり証明を完了する． □

ここで記号を変えて $\boldsymbol{a}_1 = (a_{1,1} \ \cdots \ a_{1,n}), \ldots, \boldsymbol{a}_k = (a_{k,1} \ \cdots \ a_{k,n})$,
$\boldsymbol{b}_1 = (b_{1,1} \ \cdots \ b_{1,n}), \ldots, \boldsymbol{b}_k = (b_{k,1} \ \cdots \ b_{k,n})$ として $k \times n$ 行列
$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_k \end{pmatrix}$ を考えると，前定理より次を得る．

$$
\det(A^t B) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b}_k \end{vmatrix} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,i_1} & \cdots & a_{k,i_k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,i_1} & \cdots & b_{1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k,i_1} & \cdots & b_{k,i_k} \end{vmatrix}
$$

特に $A = B$ とすれば次を得る．

$$
(2.4.5) \qquad \det(A^t A) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,i_1} & \cdots & a_{k,i_k} \end{vmatrix}^2
$$

この行列式を**グラム行列式** (Gram determinant) と呼ぶ．

注意 2.4.6. 式 (2.4.5) で，$k = 2$ とすれば

$$
\|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \end{vmatrix} \geq 0
$$

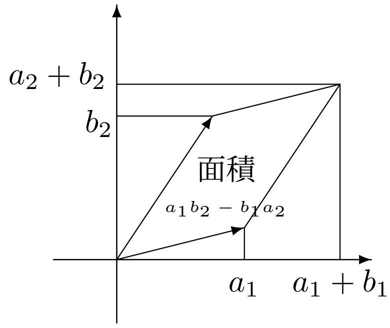
となり，コーシー・シュワルツの不等式 $\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \geq \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を得る．

2.4.2　面積・体積と行列式

定理 2.4.7 (平行四辺形の面積の公式)**.** $\mathbb{R}^2$ 内のベクトル $\boldsymbol{a} = \binom{a_1}{a_2}$, $\boldsymbol{b} = \binom{b_1}{b_2}$ に対して $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす平行四辺形の面積 S は行列式 $|\boldsymbol{a} \ \boldsymbol{b}|$ の絶対値で与えられる．

証明. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば，θ は $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|}$ を満たす．従って

$$
\begin{aligned}
S =&\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\sin\theta| \\
=&\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
=&\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2}} \\
=&\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2} \\
=&\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2} \\
=&\sqrt{a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2} \\
=&|a_1b_2-b_1a_2|
\end{aligned}
$$



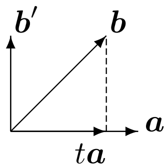
である． □

定理 2.4.8 (空間内の平行四辺形の面積)**.** $\mathbb{R}^3$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ が作る平行四辺形の面積 A は次を満たす.

$$
A^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}^2
$$

証明. ベクトル $\boldsymbol{a}$ に直交する平面（で原点を含むもの）を Π とする．ベクトル $\boldsymbol{b}$ の Π への直交射影を $\boldsymbol{b}'$ とすると $A=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}'\|$ である．ところで $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$ と置くと，$\langle\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}\rangle=0$ より，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$ なので $t=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ を得る．よって

$$
\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{vmatrix}
$$



となり，$\langle\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}\rangle=0$ を考慮すれば,

$$
\|\boldsymbol{b}'\|^2=\langle\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}'\rangle=\left\langle\boldsymbol{b}',\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right\rangle=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{vmatrix}
$$

なので，$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}'\|^2=A^2$ を得る． □

この証明は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\mathbb{R}^n$ のベクトルであってもそのまま通用する．即ち次が成立する．

定理 2.4.9. $\mathbb{R}^n$ の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\dots,b_n)$ が作る平行四辺形の面積 A は次を満たす.

$$
A^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\end{vmatrix}=\sum_{1\le i<j\le n}\begin{vmatrix}a_i & a_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}^2
$$

この定理は，3 平方の定理 $\|\boldsymbol{a}\|^2=\sum_{i=1}^n a_i^2$ の一般化と見る事も出来る．これはさらに一般の平行体の体積公式として一般化される（定理 2.4.11）.

定理 2.4.10. (i) $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ が作る平行六面体の体積 V は行列式 $|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|$ の絶対値である.
(ii) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^n$ のベクトルのときは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V は次を満たす.

$$V^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

証明. ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平面に直交する直線（で原点を通るもの）を ℓ とする．ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積を A，ベクトル $\boldsymbol{c}$ の直線 ℓ への直交射影を $\boldsymbol{c}'$ とすると，$V = A\|\boldsymbol{c}'\|$ である．ところで $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - t_1\boldsymbol{a} - t_2\boldsymbol{b}$ と置くと，$\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b} = 0$ なので,

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})t_1 + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})t_2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}, \quad (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})t_1 + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})t_2 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

となり，次を得る.

$$t_1 = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix}, \quad t_2 = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}, \quad \text{但し}\quad A^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} - \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix}\boldsymbol{a} - \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}\boldsymbol{b} = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{b} = 0$ を考慮すれば,

$$\|\boldsymbol{c}'\|^2 = \boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c}'\cdot(\boldsymbol{c} - t_1\boldsymbol{a} - t_2\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}'\cdot\boldsymbol{c} = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

を得る．分母を払えば証明を終える.

$$V^2 = A^2\|\boldsymbol{c}'\|^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

$n = 3$ のときは右辺の行列式は $\det\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|^2$ となる. □

さらに一般化された公式を述べよう

定理 2.4.11 (平行体の体積とグラムの行列式)**.** $\mathbb{R}^n$ 内のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対し，グラムの行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} = \det(A^tA)\ \text{((2.4.5) 参照)}$$

は非負なので $V_k^2 = \det(A^tA)$ を満たす非負実数 V_k が存在する．このとき，V_k は $\boldsymbol{a}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_k$ の生成する k 次元平行体

$$P = \{t_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + t_k\boldsymbol{a}_k : 0 \le t_1 \le 1,\ \ldots,\ 0 \le t_k \le 1\}$$

の体積である．但し k 次元平行体の体積は底となる $k-1$ 次元平行体の体積に高さを乗じて得られるとしている．

証明. V_1 はベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の長さであり，$V_1^2 = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1$ なので $k=1$ のとき主張は正しい．k のときを仮定して $k+1$ のときを示そう．

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_{k+1} - t_1\boldsymbol{a}_1 - \cdots - t_k\boldsymbol{a}_k$ が $\boldsymbol{a}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_k$ のどれとも直交するように t_1, $\ldots$, t_k を定めたい．それには $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b} = \cdots = \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{b} = 0$ なので，次の連立 1 次方程式を解けば良い．

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} \end{pmatrix}$$

クラメルの公式より $t_1, \ldots, t_k$ を求めると，

$$t_i = \frac{(-1)^{k+i}}{V_k^2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_k \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k \\ \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix}_{i\ \text{行を除く}}$$

となるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} =& \boldsymbol{a}_{k+1} - t_1\boldsymbol{a}_1 - \cdots - t_k\boldsymbol{a}_k \\ =& \frac{1}{V_k^2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_k \\ \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{k+1} \end{vmatrix} \quad \text{（最終列での展開が前の式）} \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

を得る．$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_1 = \cdots = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_k = 0$ より

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{b}\|^2 =& \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a}_{k+1} - t_1\boldsymbol{a}_1 - \cdots - t_k\boldsymbol{a}_k) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} \\ =& \frac{1}{V_k^2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} \\ \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_{k+1} \end{vmatrix} = \frac{V_{k+1}^2}{V_k^2} \end{aligned}$$

よって $V_{k+1} = V_k\|\boldsymbol{b}\|$ となり，V_{k+1} は V_k に $\boldsymbol{a}_{k+1}$ の $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の作る平行体からの高さ $\|\boldsymbol{b}\|$ を乗じて得られる事がわかる． □

証明中の記号で，ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_k$ すべてに直交する $\mathbb{R}^n$ の部分空間へのベクトル $\boldsymbol{a}_{k+1}$ の直交射影 $\boldsymbol{b}$ は式 (2.4.12) で与えられる．

注意 2.4.13. $V_k \neq 0$ は $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ の 1 次独立性（後述）と同値である．この証明には，後述の定理 3.4.1 を使うのが簡単である．そこでの (ii) と (iii) の同値性から分かる．

2.5　行列式の特徴付け *

行列式の性質として，行（または列）に関する多重線形性（定理 2.2.13）があった．実は，行（または列）に関する多重線形性と交代性（定理 2.2.15）が．行列式を特徴づける．ここでは，列に関する多重線形性と交代性が行列式を特徴づける事を示そう．行に関する場合も同様であるので，列に関する場合のみ扱う．

定理 2.5.1. 体 $\mathbb{K}$ の元[*6]を成分とする n 次正方行列全体を $M(n \times n, \mathbb{K})$ で表す．写像

$$\delta : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

が次の性質 (i)–(iv) を満たせば，$\delta(X) = \det(X)$ である．以下，行列 X を列ベクトルの組 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ で表す．

(i) $\delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n)$
$= \delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n) + \delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}'_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n)$

(ii) $\delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, k\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n) = k\delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ $(k \in \mathbb{K})$

(iii) $\delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_{j-1}, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n)$
$= -\delta(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{x}_{j-1}, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{x}_n)$

(iv) $\delta(E) = 1$

(iii) より，2 つの列が一致したら δ の値は 0 となる事に注意しよう．(i), (ii) を各列に関する線形性，(iii) を列に関する交代性，(iv) を正規性という事がある．

証明. $n = 2$ の場合をまず示そう．$\boldsymbol{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\boldsymbol{e}_2 = \binom{0}{1}$ と置く．

$$\begin{aligned}
\delta(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) =&\delta(x_1\boldsymbol{e}_1 + y_1\boldsymbol{e}_2, x_2\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) \\
=&\delta(x_1\boldsymbol{e}_1, x_2\boldsymbol{e}_1) + \delta(x_1\boldsymbol{e}_1, y_2\boldsymbol{e}_2) + \delta(y_1\boldsymbol{e}_2, x_2\boldsymbol{e}_1) + \delta(y_1\boldsymbol{e}_2, y_2\boldsymbol{e}_2) \\
=&x_1x_2\delta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + x_1y_2\delta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + y_1x_2\delta(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + y_1y_2\delta(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \\
=&(x_1y_2 - y_1x_2)\delta(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (x_1y_2 - y_1x_2)\delta(E) \\
=&x_1y_2 - x_2y_1
\end{aligned}$$

[*6] 体については注意 3.1.2 を見てほしい．$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ として実数を成分とする行列のみを考えていても，議論の実質は同じである．

一般の n の場合も同様である．$\boldsymbol{e}_1$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ を標準基底とする．まず，

$$\delta(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n})=\varepsilon\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ j_1 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\delta(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=\varepsilon\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ j_1 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$$

に注意しておく．$\{j_1,\ldots,j_n\}\neq\{1,\ldots,n\}$ の時は $\varepsilon\left(\begin{smallmatrix}1 & \cdots & n\\ j_1 & \cdots & j_n\end{smallmatrix}\right)=0$ と約束しておけば，この式は任意の $j_1,\ldots,j_n$ について正しい式である．$\boldsymbol{x}_i=x_{i,1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_{i,n}\boldsymbol{e}_n$ と書くと

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)=&\delta(x_{1,1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_{1,n}\boldsymbol{e}_n,\ldots,x_{n,1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_{n,n}\boldsymbol{e}_n)\\ =&\sum_{j_1,\ldots,j_n}x_{1,j_1}x_{2,j_2}\ldots x_{n,j_n}\delta(\boldsymbol{e}_{j_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{j_n})\\ =&\sum_{j_1,\ldots,j_n}x_{1,j_1}x_{2,j_2}\ldots x_{n,j_n}\varepsilon\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ j_1 & \cdots & j_n\end{pmatrix}\\ =&\det(x_{i,j})\end{aligned}$$

となり証明を終わる． □

2.6　いろいろな行列式

2.6.1　ヴァンデルモンドの行列式とラグランジュ補間

定理 2.6.1 (ヴァンデルモンドの行列式)**.**

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

左辺の行列式は $|x_i^{j-1}|_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n}$ と書く事もできる．

証明. $n=1$ の時は明らか[*7]．$n-1$ のときを仮定し n のときを示す．各行を x_1 倍して次の行から引くと

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=&\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}\\ =&(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

[*7] $1=1$ という式になっている．右辺の総乗記号 $\prod$ は掛けるものがない時は 1 となる事に注意．

$$
\begin{aligned}
&=(x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)\\
&=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)
\end{aligned}
$$

となり証明を終わる. □

別証明. $x_i = x_j$ $(1 \le i < j \le n)$ と置くと左辺の行列式は 0 になるので,

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1\\
x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix}
= c\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)
$$

と書ける. 両辺の次数を比較すると共に $\frac{n(n-1)}{2}$ 次であるから, c は定数である. 両辺における $x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ の係数を比較すると $c = 1$ が分かる.

$$
\begin{aligned}
(\boxed{x_2} - x_1)(\boxed{x_3} - x_1)(\boxed{x_4} - x_1)\cdots(\boxed{x_n} - x_1)&\\
(\boxed{x_3} - x_2)(\boxed{x_4} - x_2)\cdots(\boxed{x_n} - x_2)&\\
(\boxed{x_4} - x_3)\cdots(\boxed{x_n} - x_3)&\\
\cdots&\\
(\boxed{x_n} - x_{n-1})&
\end{aligned}
$$

となり証明を終わる. □

定理 2.6.2 (ラグランジュ補間)**.** $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ が相異なるとき $P(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ を満たす n 次多項式 $P(x)$ はただ 1 つ存在し次で与えられる.

$$
P(x) = -\frac{1}{\Delta}
\begin{vmatrix}
0 & 1 & x & \cdots & x^n\\
y_0 & 1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\
y_1 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
y_n & 1 & x_n & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix}
\qquad \text{但し } \Delta = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j - x_i)
$$

尚, 数値計算の際は行列式は計算量が多いので第 1 列で展開して整理して得られる次の形で利用する.

$$
P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} \qquad \text{但し } f_i(x) = \prod_{j\ne i}(x - x_j).
$$

証明. $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ と置くと,

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\
1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & x_n & \cdots & x_n^n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n
\end{pmatrix}
$$

より

$$a_0 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ y_1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad a_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & y_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & y_0 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & y_n \end{vmatrix}$$

となり，これを，$P(x)$ の定義に戻せば

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{\Delta}\begin{vmatrix} y_0 & 1 & x_0 & \cdots & x_0^{i-1} & x_0^{i+1} & \cdots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ y_n & 1 & x_n & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} x^i = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \cdots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

となり証明を終わる．　$\square$

ヴァンデルモンドの行列式には次のような拡張がある．

定理 2.6.3 (ヴァンデルモンドの行列式の拡張)**.** x_i $(1 \le i \le r)$ が相異なるとき

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_1 & \binom{3}{1}x_1^2 & \cdots & \binom{n}{1}x_1^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \binom{n}{k_1} & \cdots & \binom{n}{k_1}x_1^{n-k_1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_2 & \binom{3}{1}x_2^2 & \cdots & \binom{n}{1}x_2^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \binom{k_r}{k_r} & \cdots & \binom{n}{k_{r-1}}x_{r-1}^{n-k_{r-1}} \\ 1 & x_r & x_r^2 & x_r^3 & \cdots & x_r^n \\ & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_r & \binom{3}{1}x_r^2 & \cdots & \binom{n}{1}x_r^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \binom{k_r}{k_r} & \cdots & \binom{n}{k_r}x_r^{n-k_r} \end{array}\right|$$

と置くと次が成り立つ．

$$\Delta = \prod_{1 \le i < j \le r} (x_j - x_i)^{(k_i+1)(k_j+1)} \tag{2.6.4}$$

証明． $k_1 = \cdots = k_r = 0$ のときはヴァンデルモンドの行列式である．
$(k_1, \ldots, k_p, 1, k_{p+1}, \ldots, k_r)$ のときを仮定して $(k_1, \ldots, k_{p-1}, k_p + 1, k_{p+1}, \ldots, k_r)$ のときを示す．$\Delta_0(z)$ を次で定める．

$$\Delta_0(z) = \left|\begin{array}{cccccc} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \cdots & nx_1^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & \binom{n}{k_1}x_1^{n-k_1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & x_p & \cdots & \binom{n}{k_p}x_p^{n-k_p} \\ 1 & z & z^2 & \cdots & \cdots & z^n \\ 1 & x_{p+1} & x_{p+1}^2 & x_{p+1}^3 & \cdots & x_{p+1}^n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & x_r & x_r^2 & x_r^3 & \cdots & x_r^n \\ & 1 & 2x_r & 3x_r^2 & \cdots & nx_r^{n-1} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \cdots & \binom{n}{k_r}x_r^{n-k_r} \end{array}\right|$$

仮定より $\Delta_0(z)=\prod_{i=1}^{p}(z-x_i)^{k_i+1}\prod_{i=p+1}^{r}(x_i-z)^{k_i+1}\prod_{1\le i<j\le r}(x_j-x_i)^{(k_i+1)(k_j+1)}$ である．$\Delta_0(z)=(z-x_p)^{k_p+1}\Delta_1(z)$ で $\Delta_1(z)$ を定めると

$$\begin{aligned}\Delta =&\frac{1}{(k_p+1)!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{k_p+1}\Delta_0(x_p)=\Delta_1(x_p)\\ =&\prod_{i=1}^{p}(x_p-x_i)^{k_i+1}\prod_{i=p+1}^{r}(x_i-x_p)^{k_i+1}\prod_{1\le i<j\le r}(x_j-x_i)^{(k_i+1)(k_j+1)}\\ =&\prod_{i=1}^{p}(x_p-x_i)^{k_i+1}\prod_{i=p+1}^{r}(x_i-x_p)^{k_i+1}\prod_{1\le i<j\le r}(x_j-x_i)^{(k_i+1)(k_j+1)}\end{aligned}$$

なので，式 (2.6.4) で k_p を k_p+1 とした式を得る． □

この定理を使うとラグランジュ補間を微分係数の値を込めた式に精密化する事も可能である．

定理 2.6.5. $P^{(j)}(x_i)=y_i^{(j)}$ $(1\le i\le r,\ 0\le j\le k_i)$ を満たす n 次多項式 $P(x)$ はただ 1 つ存在し次で与えられる．但し $n=k_1+\cdots+k_r+r+1$.

$$P(x)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n\\ y_1^{(0)} & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n\\ y_1^{(1)} & & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_1 & \binom{3}{1}x_1^2 & \cdots & \binom{n}{1}x_1^{n-1}\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ y_1^{(k_1)} & & & & \binom{k_1}{k_1} & \cdots & \binom{n}{k_1}x_1^{n-k_1}\\ y_2^{(0)} & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n\\ y_2^{(1)} & & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_2 & \binom{3}{1}x_2^2 & \cdots & \binom{n}{1}x_2^{n-1}\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ y_{r-1}^{(k_{r-1})} & & & & \binom{k_{r-1}}{k_{r-1}} & \cdots & \binom{n}{k_{r-1}}x_{r-1}^{n-k_{r-1}}\\ y_r^{(0)} & 1 & x_r & x_r^2 & x_r^3 & \cdots & x_r^n\\ y_r^{(1)} & & \binom{1}{1} & \binom{2}{1}x_r & \binom{3}{1}x_r^2 & \cdots & \binom{n}{1}x_r^{n-1}\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ y_r^{(k_r)} & & & & \binom{k_r}{k_r} & \cdots & \binom{n}{k_r}x_r^{n-k_r} \end{vmatrix}$$

ここで Δ は前定理で定めたもの.

証明. $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ と置くと,

$$\begin{aligned}P'(x)=&a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\\ P''(x)=&2a_2x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}\\ &\cdots\\ P^{(j)}(x)=&j!a_j+(j+1)!a_{j+1}x+\cdots+j!\binom{n}{j}x^{n-j}\end{aligned}$$

なので，次を満たす $a_0, a_1, \ldots, a_n$ を求めれば良い．

$$\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\
 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \cdots & nx_1^{n-1} \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & k_1! & \cdots & k_1!\binom{n}{k_1}x_1^{n-k_1} \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & k_{r-1}! & \cdots & k_{r-1}!\binom{n}{k_{r-1}}x_{r-1}^{n-k_{r-1}} \\
1 & x_r & x_r^2 & x_r^3 & \cdots & x_r^n \\
 & 1 & 2x_r & 3x_r^2 & \cdots & nx_r^{n-1} \\
 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & k_r! & \cdots & k_r!\binom{n}{k_r}x_r^{n-k_r}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_1^{(k_1)} \\ y_2^{(0)} \\ \vdots \\ y_{r-1}^{(k_{r-1})} \\ y_r^{(0)} \\ y_r^{(1)} \\ \vdots \\ y_r^{(k_r)} \end{pmatrix}$$

よって定理 2.6.2 と同様の計算で証明が終了する．$P^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$ $(1 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq k_i)$ を直接確かめる事も容易である． □

2.6.2 コーシーの行列式 *

$$\det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(1 - x_i y_j)}$$

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らか．$n - 1$ のときを仮定して n のときを示す．第 1 行の定数倍を各行に加え，第 1 列が第 1 行以外 0 になるように変形する．その際，式

$$\frac{1}{1 - x_i y_j} - \frac{1 - x_1 y_1}{1 - x_i y_1}\frac{1}{1 - x_1 y_j} = \frac{(x_i - x_1)(y_j - y_1)}{(1 - x_i y_j)(1 - x_i y_1)(1 - x_1 y_j)}$$

を用いると

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{1-x_1y_1} & \frac{1}{1-x_1y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_1y_n} \\
\frac{1}{1-x_2y_1} & \frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{1-x_ny_1} & \frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
\frac{1}{1-x_1y_1} & \frac{1}{1-x_1y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_1y_n} \\
0 & \frac{1}{1-x_2y_2}\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{(1-x_2y_1)(1-x_1y_2)} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n}\frac{(x_2-x_1)(y_n-y_1)}{(1-x_2y_1)(1-x_1y_n)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \frac{1}{1-x_ny_2}\frac{(x_n-x_1)(y_2-y_1)}{(1-x_ny_1)(1-x_1y_2)} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n}\frac{(x_n-x_1)(y_n-y_1)}{(1-x_ny_1)(1-x_1y_n)}
\end{vmatrix}$$

となる．各行各列の共通因子を括りだせば

$$= \frac{(x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)}{(1 - x_2 y_1)\cdots(1 - x_n y_1)}\frac{(y_2 - y_1)\cdots(y_n - y_1)}{(1 - x_1 y_2)\cdots(1 - x_1 y_n)}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{1-x_1y_1} & \frac{1}{1-x_1y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_1y_n} \\
0 & \frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n}
\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-x_1y_1)}\frac{(x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)}{(1 - x_2 y_1)\cdots(1 - x_n y_1)}\frac{(y_2 - y_1)\cdots(y_n - y_1)}{(1 - x_1 y_2)\cdots(1 - x_1 y_n)}
\begin{vmatrix}
\frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_2y_n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{1-x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ny_n}
\end{vmatrix}$$

を得るので，最後の行列式に帰納法の仮定を使えば証明が終わる． □

2.6.3　交代行列の行列式 *

n 次正方行列 A が交代行列のとき，即ち ${}^tA = -A$ のとき，

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

なので，n が奇数なら $\det(A) = 0$ が分かる．n が偶数の時はある多項式の 2 乗となる事を示そう．$n = 2$ のとき $\det(A) = (a_{1,2})^2$ である．n が 4 以上の偶数の時は

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & 0 & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ -a_{1,4} & -a_{2,4} & -a_{3,4} & 0 & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & -a_{3,n} & -a_{4,n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

であるが，第 1 行がすべて零なら行列式も零となるので，ある $a_{1,j}$ は零でないとする．2 列目と j 列目，2 行目と j 行目を入れ替えれば $a_{1,2} \neq 0$ となる．以後これを仮定して計算しよう．第 j 列 $(j \geq 3)$ に第 1 列の $-a_{1,j}/a_{1,2}$ 倍と第 2 列の $a_{2,j}/a_{1,2}$ 倍を加えると

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} - \frac{a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}}{a_{12}} & \cdots & a_{3n} - \frac{a_{13}a_{2n} - a_{23}a_{1n}}{a_{12}} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} - \frac{a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13}}{a_{12}} & 0 & \cdots & a_{4n} - \frac{a_{14}a_{2n} - a_{24}a_{1n}}{a_{12}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} - \frac{a_{1n}a_{23} - a_{2n}a_{13}}{a_{12}} & -a_{4n} - \frac{a_{1n}a_{24} - a_{2n}a_{14}}{a_{12}} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (a_{1,2})^{4-n} \det(a_{1,2}a_{i,j} - a_{1,i}a_{2,j} + a_{2,i}a_{1,j})_{3 \leq i,j \leq n}$$

$(a_{1,2}a_{i,j} - a_{1,i}a_{2,j} + a_{2,i}a_{1,j})_{3 \leq i,j \leq n}$ は $n-2$ 次の交代行列なので帰納法により証明を終わる．行列式は $a_{i,j}$ の多項式であり，$a_{1,2}$ の冪は後ろの因子に繰り込んでしまうと $a_{1,2}$ の冪はなくなってしまう．実際，$a_{1,2} = 0$ とおくと行列式は零でないから，$a_{1,2}$ の冪は現れない．$n = 4$ のときは $(a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3})^2$．$n = 6$ のときは次式の 2 乗である．

$$\begin{aligned} &(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})a_{56} - (a_{12}a_{35} - a_{13}a_{25} + a_{15}a_{23})a_{46} \\ &+(a_{12}a_{45} - a_{14}a_{25} + a_{15}a_{24})a_{36} - (a_{13}a_{45} - a_{14}a_{35} + a_{15}a_{34})a_{26} \\ &+(a_{23}a_{45} - a_{24}a_{35} + a_{25}a_{34})a_{16} \end{aligned}$$

2.6.4　幾何学からの例

行列式が幾何学で使われる場面を幾つか紹介する．

例 2.6.6 (2 点を通る直線)**.** 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は次で与えられる．

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 2.6.7 (3 点を通る円)**.** 同一直線上にない 3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) を通る円の方程式は次で与えられる．

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

与えられた 3 点の作る 3 角形の外接円の方程式である．

例 2.6.8 (5 点を通る 2 次曲線)**.** 同一直線上にない 5 点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ を通る 2 次曲線の方程式は次で与えられる．

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 2.6.9 (3 点を含む平面)**.** 同一直線上にない 3 点 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) を通る平面の方程式は次で与えられる．

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

注意 2.6.10. 空間内の 2 点を通る直線の方程式は，１つの行列式で定義されない．しかし後述の階数の知識を使うと次のように書ける．

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{または} \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

最初の条件は次のように書き換える事ができる．

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-y_1 & z-z_1 \\ y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

例 2.6.11 (4 点を含む球)**.** 同一平面上にない 4 点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ を通る球の方程式は次で与えられる．

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

例 2.6.12. 次式の左辺の行列式が 2 次式ならば，9 点 (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ を通る 2 次曲面の方程式は次で与えられる．

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & yz & xz & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & x_7y_7 & y_7z_7 & x_7z_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & x_8y_8 & y_8z_8 & x_8z_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & x_9y_9 & y_9z_9 & x_9z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

一般の 9 点に対しては左辺の行列式は 2 次式であるが，9 個の点をどのように選んでも常に 2 次式というわけではない．例えば，9 点のうちある 4 点が同一直線上にあればこの左辺の行列式は 0 であり，ある 7 点が同一平面上にあればこの左辺の行列式は 0 である．

2.6.5　行列式の微分

t を変数とする関数を成分とする行列 $A = (a_{i,j}(t))$ を考える，各成分を微分して得られる行列 $A' = (a'_{i,j}(t))$ の行列式と行列式 $\det(A)$ の微分は全く異なる事に注意して欲しい．$\det(A') \neq (\det(A))'$ である．

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)}(t) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}(t)$$

なので $\det(A)$ の微分は積の微分公式を繰り返し使って

$$\begin{aligned} (\det(A))' &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)[a_{1,\sigma(1)}(t) a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}(t)]' \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \begin{bmatrix} a'_{1,\sigma(1)}(t) a_{2,\sigma(2)}(t) \cdots a_{n,\sigma(n)}(t) \\ +a_{1,\sigma(1)}(t) a'_{2,\sigma(2)}(t) \cdots a_{n,\sigma(n)}(t) \\ + \cdots \\ +a_{1,\sigma(1)}(t) a_{2,\sigma(2)}(t) \cdots a'_{n,\sigma(n)}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a'_{2,1} & \cdots & a'_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a'_{n,1} & \cdots & a'_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる．行と列を入れ替えた

$$\det(A)' = \begin{vmatrix} a'_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a'_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a'_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & a'_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a'_{n,n} \end{vmatrix}$$

も成立する．

A が正則行列のとき逆行列 A^{-1} の微分は $A(A^{-1})=E$ を微分する事によって得られる．微分すると $A'A^{-1}+A(A^{-1})'=O$ なので

$$(A^{-1})'=-A^{-1}A'A^{-1}$$

となる．

2.7　小行列式と行列式 *

2.7.1　小行列式と補余因子行列 *

以下，$1\le i_1<\cdots<i_p\le n,\ 1\le j_1<\cdots<j_p\le n$ とする．

$I=\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,\ldots,n\},\ J=\{j_1,\ldots,j_p\}\subset\{1,\ldots,n\}$ に対し，$i_1,i_2,\ldots,i_p$ 行と $j_1,j_2,\ldots,j_p$ 列を取り出して作る行列 $A_{I,J}$ と対応する行列式 $M_{I,J}$ を考える．

$$A_{I,J}=\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_1,2_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \cdots & a_{i_p,2_p} \end{pmatrix},\qquad M_{I,J}=\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_1,2_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \cdots & a_{i_p,2_p} \end{vmatrix}$$

$A_{I,J}$ を行列 A の**小行列**（または (I,J) 小行列），$M_{I,J}$ を**小行列式**（または (I,J) 小行列式）という．

$I=\{i_1,\ldots,i_p\}\subset\{1,\ldots,n\},\ 1\le i_1<\cdots<i_p\le n,$ に対し $|I|=i_1+\cdots+i_p,$ $\#I=p,$ と置く．また $I'=\{1,\ldots,n\}-I$ と置く．

補題 2.7.1 (余因子行列の小行列)**.** 正方行列 A の余因子行列 A^* の p 次小行列式 $M^*_{I,J}$ に対し，次式が成り立つ．

$$M^*_{I,J}=(-1)^{|I|+|J|}\det(A)^{p-1}M_{I',J'}$$

証明. まず $I=\{1,\ldots,p\},\ J=\{1,\ldots,p\}$ の場合を考える．

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{p,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{1,p} & \cdots & a^*_{p,p} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a^*_{1,1} & \cdots & a^*_{p,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^*_{1,p} & \cdots & a^*_{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ a^*_{1,p+1} & \cdots & a^*_{p,p+1} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^*_{1,n} & \cdots & a^*_{p,n} & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \det(A) & \dots & 0 & a_{1,p+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \det(A) & a_{p,p+1} & \dots & a_{p,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,p+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \det(A)^p \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

一般の場合も同様である．実際，$\hat{A}^* = (\hat{a}^*_{i,j})$ を

$$\hat{a}^*_{i,j} = \begin{cases} a^*_{i,j} & i \in I \\ 1 & (i,j) \text{ が } I', J' \text{の対角成分（即ち } (i,j) = (i'_k, j'_k) \text{ なる } k \text{ が存在）} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定めると，$A\hat{A}^*$ の成分は (J, I) の 対角成分が $\det(A)$, I 列の前記以外の成分は 0, I' 列の成分は A と一致する．よって

$$\det(A)M^*_{I,J} = \det(A)\det(\hat{A}^*) = \det(A\hat{A}^*) = (-1)^{|I|+|J|}\det(A)^p M_{I',J'}$$

となり結果を得る． □

注意 2.7.2. A の小行列式 $M_{I,J}$ に対し，$M_{I',J'}$ を $M_{I,J}$ の**補小行列式**, $(-1)^{|I|+|J|}M_{I',J'}$ を $M_{I,J}$ の**補余因子**[*8]という．前補題より，余因子行列の p 次小行列式は，対応する行列 A の小行列式の補余因子と，元の行列式の $(p-1)$ 次の冪の積となる事がわかる．次の補題は，小列式の間の関係式は，小行列式の補余因子の関係式に読み直す事ができる事を主張している．

定理 2.7.3 (相補則 (law of complementaries))**.** $I_{p,q}$, $J_{p,q}$ $(1 \leq q \leq r_p,\ p = 1, \dots, s)$ を $\#I_{p,q} = \#J_{p,q}$ となる $\{1, \dots, n\}$ の部分集合とする．$M_{I_{p,q},J_{p,q}}$ を対応する A の小行列式とし，恒等式

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} M_{I_{p,q},J_{p,q}} = 0, \qquad \text{（但し } c_p \text{ は定数）} \tag{2.7.4}$$

があったとする．すると次は恒等式．

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} \frac{(-1)^{|I_{p,q}|+|J_{p,q}|} M_{I'_{p,q},J'_{p,q}}}{\det(A)} = 0.$$

証明. 恒等式 (2.7.4) があったとする．行列 A の各成分を変数と見れば，この恒等式 (2.7.4) の各同次部分も恒等式なので，恒等式 (2.7.4) が同次式と仮定して証明すればよ

[*8] 単に小行列式の余因子という事もあるが，ここでは補余因子と呼ぶことにする．筆者の造語である．補余因子を並べて作った行列を補余因子行列と呼ぶことにすれば，小行列式を並べて作った行列の余因子行列と紛れることはない．2.7.3 節も参照の事．

い．よって

$$\sum_{q=1}^{r_p} \# I_{p,q}$$

は p によらない定数と仮定してよい．任意の行列式に対し (2.7.4) が成立するので，$(a_{i,j})$ をその余因子行列 $(a^*_{i,j})$ に変えても良い．A^* の (I,J) 小行列式を $M^*_{I,J}$ と書くと，

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} M^*_{I_{p,q},J_{p,q}} = 0$$

が成立する．これに補題 2.7.1 を用いて次が分かる．

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} \det(A)^{\# I_{p,q}-1}(-1)^{|I_{p,q}|+|J_{p,q}|} M_{I'_{p,q},J'_{p,q}} = 0.$$

これの $\det(A)$ の冪を約して求める式を得る．　□

定理 2.7.5 (小行列式拡大則 (law of extensible minors))**.** 行列 $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ にいくつかの行と列を付加して得られる拡大行列 $\widetilde{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N}$ $(n < N)$ を考える．A の小行列式を $M_{I,J}$, 拡大行列 $\widetilde{A}$ の小行列式を $\widetilde{M}_{P,Q}$ $(P, Q \subset \{1,\ldots,N\})$ で表す．A の小行列式 $M_{I,J}$ の間に同次恒等式

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} M_{I_{p,q},J_{p,q}} = 0 \qquad \text{(但し } c_p \text{ は定数)} \tag{2.7.6}$$

があれば，拡大行列の小行列式の間に次の関係式を得る．

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} \frac{\widetilde{M}_{I_{p,q}\cup\{n+1,\ldots,N\},J_{p,q}\cup\{n+1,\ldots,N\}}}{\widetilde{M}_{\{n+1,\ldots,N\},\{n+1,\ldots,N\}}} = 0. \tag{2.7.7}$$

$\widetilde{M}_{\varnothing\cup\{n+1,\ldots,N\},\varnothing\cup\{n+1,\ldots,N\}} = \widetilde{M}_{\{n+1,\ldots,N\},\{n+1,\ldots,N\}}$ であるから $M_{\varnothing,\varnothing} = 1$ とみて (2.7.7) が同次式になるよう各項に因子 $\widetilde{M}_{\{n+1,\ldots,N\},\{n+1,\ldots,N\}}$ を補って考えている．

例 2.7.8. この定理より，例えば次のような事がわかる．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{の拡大行列} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

を考える．

$$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

は A の小行列式間の恒等式なので，前補題より次式が恒等的に成立する．

$$
\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}
$$

定理 2.7.5 の証明． 恒等式 (2.7.6) があったとする．行列 A に対して相補則を適用すると

$$\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} \det(A)^{\# I_{p,q}-1} (-1)^{|I_{p,q}|+|J_{p,q}|} M_{I'_{p,q}, J'_{p,q}} = 0.$$

これは行列 $\widetilde{A}$ の小行列式の間の関係式なので，行列 $\widetilde{A}$ に対して相補則を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{s} c_p \prod_{q=1}^{r_p} [\det(\widetilde{A})^{n-1} \det(\widetilde{A}_{\{n+1,\ldots,N\},\{n+1,\ldots,N\}})]^{\# I_{p,q}-1} \\
&\quad \times \det(\widetilde{A})^{\# I_{p,q}-1} \widetilde{M}_{I_{p,q}\cup\{n+1,\ldots,N\}, J_{p,q}\cup\{n+1,\ldots,N\}} = 0.
\end{aligned}
$$

を得る．これより $\det(\widetilde{A})$ の因子を約して求めたい式を得る． □

2.7.2 ラプラス展開 *

行または列による行列式の展開は，複数行，複数列の展開式に一般化される．ここではそれを説明するため，まず記号を準備する．

$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$, に対し

$$I' = \{i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n-p}\}, \qquad 1 \le i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-p} \le n,$$

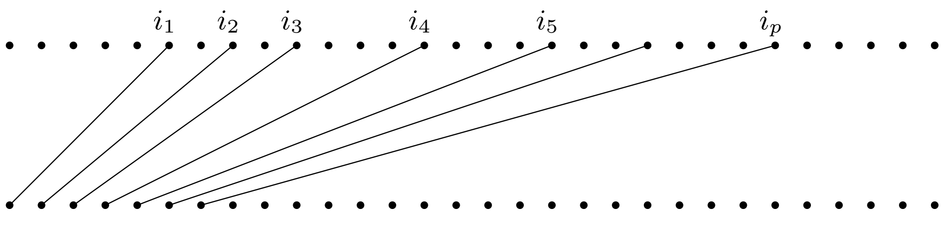
を $I \cup I' = \{1, 2, \ldots, n\}$ を満たすように定める．また I から決まる置換

$$\tau_I : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \qquad \text{を} \qquad \tau(j) = \begin{cases} i_j & (j = 1, \ldots, p) \\ i'_{j-p} & (j = p+1 \ldots, n) \end{cases}$$

で定める．

補題 2.7.9. $\varepsilon(\tau_I) = (-1)^{|I| - \frac{p(p+1)}{2}}$

証明． I と $\{1, \ldots, p\}$ を図のように線分で結んで得られる次図を眺める．



I' と $\{p+1,\ldots,n\}$ を線分で結ぶが，$1,2,\ldots,i_1-1$ から出る線分は I から出る線分と p 回交わり，$i_1+1,i_2+,2,\ldots,i_2-1$ から出る線分は I から出る線分と $p-1$ 回交わる．この考察を順次続けていくと，交点の総数は

$$\begin{aligned}
&p(i_1-1)+(p-1)(i_2-i_1-1)+\cdots+2(i_{p-1}-i_{p-2}-1)+(i_p-i_{p-1}-1)\\
=&i_1(p-(p-1))+i_2((p-1)-(p-2))+\cdots+i_p(2-1)-p-(p-1)-\cdots-2-1\\
=&i_1+i_2+\cdots+i_p-\frac{p(p+1)}{2}=|I|-\frac{p(p+1)}{2}
\end{aligned}$$

で与えられる． □

定理 2.7.10 (ラプラス展開 (Laplace expansion))**.** n 次正方行列 $A=(a_{i,j})$ に対し

$$\det(A)=\sum_{J:\#J=p}(-1)^{|I|+|J|}M_{I,J}M_{I',J'}$$

証明. $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$

$$\begin{aligned}
=&\varepsilon(\tau_I)\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{i_1,\sigma(1)}\cdots a_{i_p,\sigma(p)}a_{i'_1,\sigma(p+1)}\cdots a_{i'_{n-p},\sigma(n)}\\
&(\tau_I \text{ による行番号の付替え})\\
=&\varepsilon(\tau_I)\sum_J\sum_{\sigma\in S_n\sigma(\{1,\ldots,p\})=J}\varepsilon(\sigma)a_{i_1,\sigma(1)}\cdots a_{i_p,\sigma(p)}a_{i'_1,\sigma(p+1)}\cdots a_{i'_{n-p},\sigma(n)}\\
=&\varepsilon(\tau_I)\sum_J\varepsilon(\tau_J)\sum_{\sigma(\{1,\ldots,p\})=J}\varepsilon(\sigma)a_{i_1,\tau_J\sigma(1)}\cdots a_{i_p,\tau_J\sigma(p)}a_{i'_1,\tau_J\sigma(p+1)}\cdots a_{i'_{n-p},\tau_J\sigma(n)}\\
&(\tau_J \text{ による列番号の付替え})\\
=&\sum_J\varepsilon(\tau_I)\varepsilon(\tau_J)\sum_{\sigma(\{1,\ldots,p\})=\{1,\ldots,p\}}\varepsilon(\sigma)a_{i_1,\sigma(1)}\cdots a_{i_p,\sigma(p)}a_{i'_1,\sigma(p+1)}\cdots a_{i'_{n-p},\sigma(n)}\\
&(\tau_J\sigma \text{ を改めて } \sigma \text{ に置き直す})
\end{aligned}$$

$=\sum_J(-1)^{|I|+|J|}M_{I,J}M_{I',J'}$ □

2.7.3　複合行列式 *

n 行から p 行選ぶ選び方は $\binom{n}{p}$ 通り，n 列から p 列選ぶ選び方は $\binom{n}{p}$ 通りあるので n 次正方行列 A の p 次の小行列式 $M_{I,J}$ は全部で $\binom{n}{p}^2$ 通りある．これを辞書式順序で正方行列に並べて得られる行列を $C_p(A)$ と書き行列 A の p 次**複合行列** (compound matrix)，その行列式を行列 A の p 次**複合行列式** (compound determinant) という．$M_{I',J'}$ を $M_{I,J}$ の**余小行列式** (complementary minors) という．$(-1)^{|I|+|J|}M_{I',J'}$ を小行列式 $M_{I,J}$ の補余因子と呼んだが，補余因子をならべて得られる行列の転置行列（補余因子行列）を $C_p^*(A)$ と書こう．

例 2.7.11. 4 次正方行列の 2 次の小行列式を並べて得られる行列は次のようになる．

$$C_2(A) = \begin{pmatrix} M_{12,12} & M_{12,13} & M_{12,14} & M_{12,23} & M_{12,24} & M_{12,34} \\ M_{13,12} & M_{13,13} & M_{13,14} & M_{13,23} & M_{13,24} & M_{13,34} \\ M_{14,12} & M_{14,13} & M_{14,14} & M_{14,23} & M_{14,24} & M_{14,34} \\ M_{23,12} & M_{23,13} & M_{23,14} & M_{23,23} & M_{23,24} & M_{23,34} \\ M_{24,12} & M_{24,13} & M_{24,14} & M_{24,23} & M_{24,24} & M_{24,34} \\ M_{34,12} & M_{34,13} & M_{34,14} & M_{34,23} & M_{34,24} & M_{34,34} \end{pmatrix}$$

対応する補余因子を並べて得られる行列の転置行列 A_2^* は次のようになる．

$$C_2^*(A) = \begin{pmatrix} M_{34,34} & -M_{24,34} & M_{23,34} & -M_{14,34} & M_{13,34} & -M_{12,34} \\ -M_{34,24} & M_{24,24} & -M_{23,24} & M_{14,24} & -M_{13,24} & M_{12,24} \\ M_{34,23} & -M_{24,23} & M_{23,23} & -M_{14,23} & M_{13,23} & -M_{12,23} \\ -M_{34,14} & M_{24,14} & -M_{23,14} & M_{14,14} & -M_{13,14} & M_{12,14} \\ M_{34,13} & -M_{24,13} & M_{23,13} & -M_{14,13} & M_{13,13} & -M_{12,13} \\ -M_{34,12} & M_{24,12} & -M_{23,12} & M_{14,12} & -M_{13,12} & M_{12,12} \end{pmatrix}$$

注意 2.7.12. ラプラス展開（定理 2.7.10）は

$$C_p(A)C_p^*(A) = \det(A)E_{\binom{n}{p}} \tag{2.7.13}$$

を主張している．しかしながら，行列 $C_p(A)$ の余因子行列は $C_p^*(A)$ というわけではない．行列 $C_p(A)$ の余因子行列を $(C_p(A))^*$ と書くと $C_p(A)(C_p(A))^* = \det(C_p(A))E_{\binom{n}{p}}$ であるので，後述の定理 2.7.16 を使うと

$$C_p(A)(C_p(A))^* = \det(A)^{\binom{n-1}{p-1}}E_{\binom{n}{p}} \tag{2.7.14}$$

となる．(2.7.13) と (2.7.14) を比較すると，$C_p^*(A)$ と $(C_p(A))^*$ では $\det(A)$ の因子だけ異なる事がわかる．

補題 2.7.15. 行列式 $P = \det(x_{i,j})$ を変数 $x_{i,j}$ の多項式とみたとき P は既約である．

証明. $P = fg$ とする．$x_{1,1}$ が f に現れるとする．すると f は $x_{1,1}$ の 1 次式で g は $x_{1,1}$ の 0 次式である．g が $x_{i,j}$ の 1 次式とすると，

$$\det(x_{i,j}) = fg = (ax_{1,1} + b)(cx_{1,i} + d) = acx_{1,1}x_{1,i} + bcx_{1,i} + adx_{1,i} + bd$$

となり矛盾．即ち，すべての $x_{1,i}$ は f に現れ g には現れない．同様にすべての $x_{i,1}$ は f に現れ g には現れない．$x_{i,1}$ は f に現れるので $x_{i,j}$ は f に現れる．つまり g は定数．□

定理 2.7.16. $\det(C_p(A)) = \det(A)^{\binom{n-1}{p-1}}$.

証明. ラプラス展開（定理 2.7.10）より $C_p(A)C_p^*(A) = \det(A)E_{\binom{n}{p}}$ である．よって

$$\det(C_p(A))\det(C_p^*(A)) = \det(A)E_{\binom{n}{p}} = \det(A)^{\binom{n}{p}}.$$

前補題より $\det(A)$ は既約なので，$\det(C_p(A))$ は $\det(A)$ の冪であるが，次数を比較して，$\det(A_p)$ は $\det(A)^{\binom{n-1}{p-1}}$ の定数倍である事がわかる．$A = E$ のときを調べれば，この定数は 1 であり，$\det(C_p(A)) = \det(A)^{\binom{n-1}{p-1}}$ が帰結される．□

定理 2.7.17. $C_p(AB) = C_p(A)C_p(B)$

証明. $A = (a_{i,k})$, $B = (b_{k,j})$ と置くと，コーシー・ビネの公式（定理 2.4.4）より

$$\left|\begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,1} & \cdots & a_{i_p,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1,j_1} & \cdots & b_{1,j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,j_1} & \cdots & b_{n,j_p} \end{pmatrix}\right| = \sum_{k_1<\cdots<k_p} \begin{vmatrix} a_{i_1,k_1} & \cdots & a_{i_1,k_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,k_1} & \cdots & a_{i_p,k_p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{k_1,j_1} & \cdots & b_{k_1,j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_p,j_1} & \cdots & b_{k_p,j_p} \end{vmatrix}.$$

これは $C_p(AB) = C_p(A)C_p(B)$ を意味している．　□

行列式について解説している成書は非常に多い．ここでは，行列式に関する種々の公式を参照する際のソースとして，次の文献を挙げておく．

Thomas Muir, A Treastise on the tehory of Determinants, MacMillan, 1882.

第 3 章

ベクトル空間

ベクトル空間の抽象的な定義が定式化されたのは 19 世紀末でペアノによる．彼の定義は忘れられ，直ちに影響を与えた訳ではないが，20 世紀の公理的な扱いの先鞭をつけたといえる．本章では，ベクトル空間（線形空間ともいう）の定義を説明し，その基本的性質を説明する．鍵となる概念はベクトルの 1 次独立性，基底，行列の階数である．

3.1　いろいろなベクトル空間

ここでは数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のもつ性質を抽象化して，抽象的にベクトル空間を定義する．続いてベクトル空間の例をいくつか挙げる．

3.1.1　ベクトル空間の定義と例

V が**ベクトル空間**（または**線形空間**）(a vector space, a linear space) であるとは V の元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して，和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ 及び，実数倍 $c\boldsymbol{v}$ ($c \in \mathbb{R}$]) が定義されていて次の性質を満たすときを言う．

(i) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$

(ii) $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$

(iii) 零ベクトルと呼ばれる元 $\mathbf{0}$ が存在して $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

(iv) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，次を満たす元 $\boldsymbol{v}'$ が存在する．（$\boldsymbol{v}'$ は $\boldsymbol{v}$ の**反元**と呼ばれる）
$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

(v) $c_1(c_2\boldsymbol{v})=(c_1c_2)\boldsymbol{v}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(vi) $c(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=c\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}$, $c \in \mathbb{R}$.

(vii) $(c_1+c_2)\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{v}+c_2\boldsymbol{v}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(viii) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

条件 (i), (ii), (iii), (iv) は「V は加法について可換群をなす」という条件である．可換群の事を，アーベル群と言う事もある．演算を加法で書いているので加法群と呼ぶ事もある．

上で係数 c の動く範囲は実数全体であるが，普通に加減乗除が定義される集合なら実はなんでも構わない．ただし c がどういう値をとり得るのかは，はっきり定めておいたほうが都合が良いので，c の取り得る範囲を $\mathbb{K}$ で表す．$\mathbb{K}$ は加減乗除が定義される集合で，数学では通常，体と呼ばれるものである．この $\mathbb{K}$ を，考えているベクトル空間の**係数体**という．係数体 $\mathbb{K}$ を指定して議論する時は，**体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間**または**体 $\mathbb{K}$ 上の線形空間**という．単に $\mathbb{K}$ ベクトル空間ということもある．$\mathbb{K}$ としては実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ などの場合を考える事が多い．$\mathbb{K}$ として $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ をとるとき，それぞれ実ベクトル空間，複素ベクトル空間，有理ベクトル空間という．

注意 3.1.1. 零ベクトル $\mathbf{0}$ だけからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間である．このベクトル空間は次を満たす．

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad c\mathbf{0} = \mathbf{0} \ (c \in \mathbb{K})$$

ベクトル空間は零ベクトル $\mathbf{0}$ を含まなければならないので，空集合はベクトル空間ではない．

注意 3.1.2 (体の定義). 参考までに，$\mathbb{K}$ が体であることの正確な定義を述べておこう．$\mathbb{K}$ の任意の 2 元 a, b に対してその和 $a + b$ と積 ab と呼ばれる $\mathbb{K}$ の元が定義されていて，次の条件を満たすとき $\mathbb{K}$ は**体** (field) であるという．

(a) $\mathbb{K}$ は加法について加法群である．即ち，
  (i) 加法に関する交換法則 $a + b = b + a$ が成り立つ．
  (ii) 加法に関する結合法則 $(a + b) + c = a + (b + c)$ が成り立つ．
  (iii) 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して $a + 0 = a$ を満たす元 $0 \in \mathbb{K}$ が存在する．この元 0 を零元という．
  (iv) 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して $a + b = 0$ を満たす元 $b \in \mathbb{K}$ が存在する．この元を a の反元といい $-a$ で表す．

(b) $\mathbb{K}$ は乗法について可換半群である．即ち，
  (i) 乗法に関する交換法則 $ab = ba$ が成り立つ．
  (ii) 乗法に関する結合法則 $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ．
  (iii) 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して $a1 = a$ を満たす元 $1 \in \mathbb{K}$ が存在する．この元 1 を単位元という．

(c) 次の分配法則が成り立つ．

$$a(b+c)=ab+ac, \quad (a+b)c=ac+bc$$

(d) 0 以外の元は乗法の逆元を持つ．即ち，任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して $a \neq 0$ ならば $ab=1$ をみたす $b \in \mathbb{K}$ が存在する．この元を a の逆元といい a^{-1} で表す．

$\mathbb{K}$ の任意の 2 元 a, b に対してその和 $a+b$ と積 ab と呼ばれる $\mathbb{K}$ の元が定義されていて，条件 (a) と条件 (b) の (ii) と (c) を満たすものを**環** (ring)，さらに (b) の (i) を満たすものを**可換環** (commutative ring) という．なお，(b) の (iii) を満たすときは**単位的** (unitary) と言う形容詞を付ける[*1]．例えば (a), (b), (c) を満たすものを**単位的可換環**という．

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は体ではないが，単位的可換環である．体 $\mathbb{K}$ の元を要素とする n 次正方行列全体は単位的環である．$n \geq 2$ のときは可換でない環である．

複素数を係数とする多項式は必ず複素数の根を持つ（定理 A.2.1）．n 次多項式は重複度も込めて n 個の根を持つのである．この事は第 5 章で固有値や固有ベクトルを考える際，重要になる．

注意 3.1.3 (一般結合法則 *)**.** 結合法則 (ii) があると，$(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)$ なので，この値を $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$ の様に書いて良い．4 項の和についても結合法則がなりたつ．例えば

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{v}_1+(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)\big)+\boldsymbol{v}_4 =&\big((\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\boldsymbol{v}_3\big)+\boldsymbol{v}_4=(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)\\ =&\boldsymbol{v}_1+\big(\boldsymbol{v}_2+(\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4)\big)=\boldsymbol{v}_1+\big((\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)+\boldsymbol{v}_4\big)\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

であり，この値は括弧をどこに入れるかに依らない事がわかる．これを一般結合法則という．この値を $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4$ の様に書いて良い．$k-1$ 項以下の和について一般結合法則が成り立つとして，k 項の和について考察する．$i=2,\ldots,k-1$ に対して

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{i-1}+\boldsymbol{v}_i)+(\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{v}_n)\\ &\big((\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{i-1})+\boldsymbol{v}_i\big)+(\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{v}_n)\\ =&(\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{i-1})+\big(\boldsymbol{v}_i+(\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{v}_n)\big)\\ =&(\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_{i-1})+(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{v}_n)\end{aligned}$$

なので，k 項の和について一般結合法則が成り立つ．この値を $\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_k$ の様に書く．なお，$(k+1)$ 項の和について，足し算の順序の指定の仕方（即ち (3.1.4) のような括弧の付け方）の個数は $\binom{2k}{k+1}/k$ 通りある．この数は**カタラン数**として知られている．

[*1] 環の定義に (b) の (iii) を含める文献もある．その場合は単位的でない環を表すのに擬環などの語を用いる．

注意 3.1.5. ここではベクトル空間の元は, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ のように太文字で表している．これは数との混同を避けるためであって，混同さえしなければ v, w のように普通のアルファベットで表してもかまわない．$\vec{v}$, $\vec{w}$ の様に上に矢印を載(の)せて表す事もあるが，平面や空間のベクトルを扱っている場合が多い様に見受けられる．

例 3.1.6. 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は実ベクトル空間である．同様に $\mathbb{C}^n$ は複素ベクトル空間, $\mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．これらも数ベクトル空間と呼ぶ．

例 3.1.7. 零ベクトルのみからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間になる．$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$ $(k \in \mathbb{K})$ なので実質的な計算は何もない．このベクトル空間を**自明なベクトル空間** (trivial vector space) といい 0 で表す．

例 3.1.8. $m \times n$ 行列全体はベクトル空間になる．和と定数倍が定義されるからである．体 $\mathbb{K}$ の元を要素とする $m \times n$ 行列を $M(m \times n, \mathbb{K})$ で表す．

例 3.1.9. 複素数全体 $\mathbb{C}$ に和と実数倍が定義されるので $\mathbb{C}$ は実ベクトル空間と見る事ができる．

例 3.1.10. 数列全体も和と定数倍が定義されるからベクトル空間になる．

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots), \quad c(a_1, a_2, \ldots) = (ca_1, ca_2, \ldots).$$

実数列全体は実ベクトル空間，複素数列全体は複素ベクトル空間と見る事ができる

例 3.1.11. 体 $\mathbb{K}$ の元を係数とする多項式全体

$$\mathbb{K}[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$

は，通常の多項式の加法と，定数倍について $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．なお，定数も多項式の特別の場合（$n=0$ の場合）と考える．

例 3.1.12. 形式的冪級数全体

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i : a_i \in \mathbb{K}\right\}$$

も加法と定数倍について $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる．

例 3.1.13. 関数にも和と定数倍が定義されるから関数全体もベクトル空間になる．

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (cf)(x) = c(f(x)).$$

実数値関数は実ベクトル空間，複素数値関数は複素ベクトル空間と見る事ができる

例 3.1.14. 実数には和と有理数倍が定義されるので $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間と見る事ができる．同様に複素数全体も有理ベクトル空間と見る事ができる．

例 3.1.15 (自由ベクトル空間)**.** 空でない集合 X に対しその元が生成する自由ベクトル空間 $F(X)$ を次で定める．

$$F(X) = \{\sum_{x\in X} c_x x(\text{有限和}) \ \mid c_x \in \mathbb{K}\}$$

ここで，有限和とは有限個の $x \in X$ を除いて $c_x = 0$ となるという意味である．$F(X)$ の和，定数倍は次で定める．

$$\sum_{x\in X} c_x x + \sum_{x\in X} c'_x x = \sum_{x\in X}(c_x + c'_x)x,\ c\sum_{x\in X} c_x x = \sum_{x\in X}(cc_x)x$$

3.1.2　部分空間

ベクトル空間 V の部分集合 W が V の**部分空間**であるとは，V から定まる加法と定数倍で W もベクトル空間になるときを言う．即ち，次の性質を満たすときを言う．

- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ ならば $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$.
- $\boldsymbol{v} \in W$ ならば $\mathbb{K}$ の任意の元 c について $c\boldsymbol{v} \in W$.

部分空間の例を挙げよう．

例 3.1.16. 実 $m \times n$ 行列の定める線形写像 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し，その**核** (kernel) $\mathrm{Ker}(A)$, および，その**像** (image) $\mathrm{Im}(A)$ を次で定める．

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\},\quad \mathrm{Im}(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\}$$

$\mathrm{Ker}(A)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間で，$\mathrm{Im}(A)$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である

例 3.1.17. $n \times n$ 行列全体のなすベクトル空間の中で，${}^tA = A$ をみたす行列（対称行列という）全体，および ${}^tA = -A$ をみたす行列（交代行列という）全体は，それぞれ部分空間になる．

例 3.1.18. 数列全体のなすベクトル空間の中で，有限数列全体は部分空間をなす．次の様に表示されるからである．

$$\{(a_n) : \exists n_0\ a_n = 0\ (n \geq n_0)\}$$

例 3.1.19. 数列全体のなすベクトル空間の中で，収束する数列全体は部分空間をなす．

例 3.1.20. $a_n \neq 0$ のとき，多項式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ の次数は n であるという．次数が n 次以下の $\mathbb{K}$ を係数とする多項式全体は $\mathbb{K}[x]$ の部分空間となる．ここで 0 の次数は $-\infty$ と定める事にする．

例 3.1.21. ある多項式 $P(x)$ の倍元であるような多項式全体は，$\mathbb{K}[x]$ の部分空間となる．

例 3.1.22. $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ は有理数体上のベクトル空間 $\mathbb{R}$ の部分空間となる．

例 3.1.23 (部分空間の共通部分)**.** ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し，その共通部分 $W_1 \cap W_2$ もまた部分空間になる．

例 3.1.24 (部分空間の和)**.** ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し，和集合 $W_1 \cup W_2$ は一般には部分空間にならない．和集合 $W_1 \cup W_2$ を含む最小の部分空間は，W_1 と W_2 の和と呼ばれるもので

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{v} \in V : \exists \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \exists \boldsymbol{w}_2 \in W_2,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2\}$$

で与えられる．

3.1.3　線形写像

ベクトル空間の間の写像 $f : V \to W$ が $\mathbb{K}$ **線形写像**である，または $\mathbb{K}$ 上線形であるとは，次の 2 条件をみたすときを言う．

- $f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$.
- $f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{K}$.

この条件は次の条件と同値である．

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2), \quad \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V,\ c_1, c_2 \in \mathbb{K}.$$

線形写像の例を挙げよう．

例 3.1.25. a を定数として $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$, は線形写像である．写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, は $b \neq 0$ ならば線形写像でない．

例 3.1.26. A を体 $\mathbb{K}$ の元を要素とする $m \times n$ 行列として $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$, は線形写像である．

例 3.1.27. ベクトル空間の間の線形写像 $f : V \to W$ に対し，次で定めるその**核** $\mathrm{Ker}(f)$,

および，その**像** $\mathrm{Im}(f)$ は，それぞれ V または W の部分空間である．

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}, \quad \mathrm{Im}(f) = \{\boldsymbol{w} \in W : \exists \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})\}$$

証明. $\mathrm{Ker}(f)$ が部分空間である事．$\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, f,\, c \in \mathbb{K}$ に対し
$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$
$f(c\boldsymbol{v}_1) = cf(\boldsymbol{v}_1) = c\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より $c\boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Ker}(f)$.
$\mathrm{Im}(f)$ が部分空間である事.
$\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{Im}(f),\, c \in \mathbb{K}$ に対し $\exists\ \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2 \in V\ \ f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1,\ f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$,
$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in \mathrm{Im}(f)$
$c\boldsymbol{v}_1 = cf(\boldsymbol{v}_1) = f(c\boldsymbol{v}_1) \in \mathrm{Im}(f)$. □

例 3.1.28. A を $l \times m$ 行列として $f : M(m \times n, \mathbb{K}) \to M(l \times n, \mathbb{K}),\ X \mapsto AX$, は線形写像である．同様に B を $n \times p$ 行列として $f : M(m \times n, \mathbb{K}) \to M(m \times p, \mathbb{K}),\ X \mapsto XB$, も線形写像である．

例 3.1.29. 関数に対しその微分を対応させる写像 $f \mapsto f'$ は微分可能な関数全体から関数全体への線形写像である．$(f+g)' = f' + g'$, $(cf)' = cf'$ が成り立つからである．

例 3.1.30. 積分を対応させる写像 $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ も $[a, b]$ 上積分可能な実数値関数全体から実数全体への線形写像である．

ベクトル空間 V, W に対し線形写像全体の空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \{f : V \to W : \mathbb{K} \text{ 上線形 }\}$$

もベクトル空間になる．和と定数倍が定義されるからである．考えている体 $\mathbb{K}$ を省略して $\mathrm{Hom}(V, W)$ と書くこともある．

3.2　1 次独立性

3.2.1　1 次独立性と 1 次従属性

定義 3.2.1 (1 次独立)**.** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が **1 次独立**（または**線形独立**, linearly independent）であるとは，次の条件をみたすときを言う．任意の $\mathbb{K}$ の元 $c_1, \ldots, c_p$ について

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0} \quad \text{ならば} \quad c_1 = \cdots = c_p = 0$$

論理式で書くと次のようになる．

$$\forall c_1, \ldots, c_p\ [c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0} \implies (c_1, \ldots, c_p) = (0, \ldots, 0)]$$

定義 3.2.2 (1 次従属)**.** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が **1 次従属**（または**線形従属**, linearly dependent）であるとは，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が 1 次独立でないとき，即ち，次を満たす $\mathbb{K}$ の元 $c_1, \ldots, c_p$ が存在する時を言う．

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0} \text{ かつ } (c_1, \ldots, c_p) \neq (0, \ldots, 0)$$

論理式で書くと次のようになる．

$$\exists c_1, \ldots, c_p \ [c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0},\ (c_1, \ldots, c_p) \neq (0, \ldots, 0)]$$

定義 3.2.3 (1 次結合)**.** 和 $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ の **1 次結合**（または**線形結合**, linear combinationin）という．

注意 3.2.4. $p = 1$ のとき，$\boldsymbol{v}_1$ が 1 次従属である事は，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ と同値である．実際，$\boldsymbol{v}_1$ が 1 次従属である条件

$$\exists c_1 \quad [c_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}, c_1 \neq 0]$$

を見れば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ はすぐ分かる．

注意 3.2.5. $p = 2$ のとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次従属である事は，次の条件が成り立つ事である．

$$\exists c_1, c_2 \quad [c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}, (c_1, c_2) \neq (0, 0)]$$

$c_1 \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_1 = -(c_2/c_1)\boldsymbol{v}_2$, $c_2 \neq 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_2 = -(c_1/c_2)\boldsymbol{v}_1$ よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次従属である事は，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ のうち一方が他方の定数倍になるという事を意味している．逆に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立である事は，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ のどちらも他方の定数倍にならないという事を意味している．

注意 3.2.6. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が 1 次従属であれば，定義より次が成り立つ．

$$\exists c_1, \ldots, c_p \quad c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0},\ (c_1, \ldots, c_p) \neq (0, \ldots, 0)$$

$c_i \neq 0$ とすると $\boldsymbol{v}_i$ は他の 1 次結合で書ける．実際，次のように表せる．

$$\boldsymbol{v}_i = -\frac{c_1}{c_i}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\boldsymbol{v}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\boldsymbol{v}_{i+1} - \cdots - \frac{c_p}{c_i}\boldsymbol{v}_p.$$

注意 3.2.7. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ の間に成立する線形の関係式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{0}$$

を考える．$c_1 = \cdots = c_p = 0$ とすればこれは成り立つが，これを自明な（線形）関係式という．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が 1 次従属である事は，それらの間に非自明な線形関係式（自明でない線形関係式）がある事を意味している．

3.2.2　1 次独立性と行列式

定理 3.2.8. n 次正方行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, 行ベクトルを $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$, とするとき，次の条件は同値である．

(i) $\det(A) \neq 0$.
(ii) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立.
(iii) $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_n$ は 1 次独立.

証明. 転置行列を考えれば (i) $\Leftrightarrow$ (iii) は (i) $\Leftrightarrow$ (ii) に帰着するので，(i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示せば十分．(i) $\Leftrightarrow$ (ii) は次の様に分かる．
$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみもつ $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立. □

系 3.2.9. n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ は 1 次従属である．

証明. まず

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

と置く．行列

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の行列式は零で，この行列の列ベクトルは 1 次従属．よって $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ は 1 次従属である． □

注意 3.2.10. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q$ $(p \leq q)$ も 1 次従属である．実際, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ 間の自明でない関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{a}_p = 0$$

があれば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q$ 間に次の自明でない関係式があるからである．

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{a}_p + 0\boldsymbol{a}_{p+1} + \cdots + 0\boldsymbol{a}_q = 0$$

対偶をとると，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q$ が 1 次独立ならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ $(p \leq q)$ も 1 次独立である事がわかる．

定理 3.2.11. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ が 1 次独立のとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次結合 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$ $(q > p)$ は 1 次従属である．

証明. 直前の注意 3.2.10 より，$q = p + 1$ のとき示せば十分.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_p \\ \boldsymbol{b}_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1,p} & \cdots & c_{p,p} \\ c_{1,p+1} & \cdots & c_{p,p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_p \end{pmatrix}$$

と書く．系 3.2.9 より $(c_{1,1}, \ldots, c_{p,1})$, …, $(c_{1,p+1}, \ldots, c_{p,p+1})$ は 1 次従属．よって，

$$(x_1 \ \cdots \ x_p \ x_{p+1}) \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1,p} & \cdots & c_{p,p} \\ c_{1,p+1} & \cdots & c_{p,p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

は自明でない解を持つ．この非自明解に対して，

$$\begin{aligned} (x_1 \ \cdots \ x_{p+1}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{p+1} \end{pmatrix} &= (x_1 \ \cdots \ x_{p+1}) \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1,p+1} & \cdots & c_{p,p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_p \end{pmatrix} \\ &= (0 \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_p \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{b}_1$, …, $\boldsymbol{b}_{p+1}$ は 1 次従属である. □

注意 3.2.12. $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_p$ が 1 次独立で $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{v}$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合で表せる．実際，$\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{v}$ が 1 次従属なので

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n + c\boldsymbol{v} = 0$$

なる c_1, …, c_n, c が存在して，少なくともどれか 1 つは零でない．$c = 0$ とすると，$\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_p$ の 1 次独立性に反するので，$c \neq 0$. よって $\boldsymbol{v} = -\frac{c_1}{c}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_p}{c}\boldsymbol{v}_p$ と表せる.

3.3　生成する空間とベクトル空間の基底

3.3.1　生成する部分空間

$\boldsymbol{v}_1$, …, $\boldsymbol{v}_p$ の 1 次結合全体を

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle \quad (\text{係数体 } \mathbb{K} \text{ を明示する時は } \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}})$$

で表す．$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}}$ は次の様に表せる.

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}} = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p \mid c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{K}\}$$

$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}}$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が $\mathbb{K}$ 上**生成する部分空間**[*2]という.

補題 3.3.1. (i) $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}}$ は V の部分空間である.
(ii) $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ を含む最小の部分空間である.

証明. (i) は $(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p) + (c_1'\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p'\boldsymbol{v}_p) = (c_1 + c_1')\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (c_p + c_p')\boldsymbol{v}_p$, $c(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p) = cc_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + cc_p\boldsymbol{v}_p$ より従う.
(ii) を示そう. W を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ を含む最小の部分空間とする. $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ を含む部分空間なので $W \subset \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}}$. $\boldsymbol{v}_i \in W$ より $c_i\boldsymbol{v}_i \in W$ で $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p \in W$ となり $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle_{\mathbb{K}} \subset W$ が分かる. □

補題 3.3.2. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次結合 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$ が 1 次独立ならば, それらが生成する部分空間は変わらない. 即ち $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p \rangle_{\mathbb{K}} = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p \rangle_{\mathbb{K}}$.

証明. $\boldsymbol{b}_j = c_{j,1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{j,p}\boldsymbol{a}_p$ として

$$(x_1 \ \cdots \ x_p) \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p,1} & \cdots & c_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_p \end{pmatrix} = (x_1 \ \cdots \ x_p) \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

は自明解のみを持つ. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次独立性から

$$(x_1 \ \cdots \ x_p) \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p,1} & \cdots & c_{p,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

でなければならないが, これが自明解しか持たないので

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p,1} & \cdots & c_{p,p} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ が分かる. よって } \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p,1} & \cdots & c_{p,p} \end{pmatrix} \text{ は逆行列を持ち,}$$

$\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$ の 1 次結合である. 特に $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p \rangle$. □

系 3.3.3. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ の 1 次結合 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$ $(q \leq p)$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{b}_i = c_{i,1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i,p}\boldsymbol{a}_p$ と書いたとき, 行列

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q,1} & \cdots & c_{q,p} \end{pmatrix} \text{ のある } q \times q \text{ 小行列式は零でない.}$$

証明. $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$ を拡張して $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q, \boldsymbol{b}_{q+1}, \ldots \boldsymbol{b}_p$ が 1 次独立であるように $\boldsymbol{b}_{q+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_p$

[*2] 線形包 (linear hull) という事もある.

を取る．$\boldsymbol{b}_i = c_{i,1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{i,p}\boldsymbol{a}_p$ $(1 \leq i \leq p)$ と書いたとき，行列式

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p,1} & \cdots & c_{p,p} \end{vmatrix} \tag{3.3.4}$$

の最初の q 行に関するラプラス展開（定理 2.7.10) を考えると

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q,1} & \cdots & c_{q,p} \end{pmatrix} \quad \text{のすべての } q \times q \text{ 小行列式が零} \tag{3.3.5}$$

であれば．(3.3.4) は零となり，前定理に反する．

ラプラス展開を使わない証明も，後述の階数の知識を使えば可能である．説明しよう．もし (3.3.5) が成立すれば，後述の定理 3.4.1 より，(3.3.5) の行列の q 個の行ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_q$ は 1 次従属．すなわち $(y_1, \ldots, y_q) \neq (0, \ldots, 0)$ で次をみたすものが存在する．

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q,1} & \cdots & c_{q,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{q,1} & \cdots & c_{q,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

なので，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_q$ は 1 次従属． □

3.3.2　ベクトル空間の基底

定義 3.3.6 (基底)**.** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ がベクトル空間 V の**基底** (basis) であるとは，次の条件を満たす時を言う．

- $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する．即ち $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle_{\mathbb{K}}$.
- $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立.

例 3.3.7. $\mathbb{K}^n$ に対し次は基底になる．これを $\mathbb{K}^n$ の**標準基底**という．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 3.3.8. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$ は $(2, 0, -1)$, $(0, 2, -1)$ を基底に持つ．よって $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ である．

例 3.3.9. $V = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ は自然な加法と定数倍で $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間になる．1, $\sqrt{2}$ が基底であるので $\dim_{\mathbb{Q}} V = 2$ である．

定理 3.3.10. V の元を基底の 1 次結合で表す表し方は一通りである．即ち

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = c'_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c'_n\boldsymbol{v}_n \quad \text{ならば} \quad c_1 = c'_1,\ \ldots,\ c_n = c'_n$$

証明. $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = c'_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c'_n\boldsymbol{v}_n$ ならば

$$(c_1 - c'_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (c_n - c'_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

となり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性より $c_i - c'_i = 0$. よって $c_i = c'_i$. □

定理 3.3.11. ベクトル空間の基底の個数は基底のとり方に依らない．

証明. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ が基底であるとして，$m = n$ を示す．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が基底なので $\boldsymbol{b}_j$ を $\boldsymbol{a}_i$ の 1 次結合で表せる．$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ は 1 次独立であるから，定理 3.2.11 より $m \leq n$. $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ を入れ替えて議論すれば，$m \geq n$ も分かる． □

ベクトル空間 V に基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が取れるとき，V は n 次元ベクトル空間 (an n-dimensional vector space) であるという．$\dim V = n$ と書く．

注意 3.3.12 (基底の選び方)**.** ベクトル空間の基底を選ぶには，次の様にすれば良い．

零でないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ をとる．$V \neq 0$ ならこれは可能である．

1 次独立な $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が取れたとしよう．$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle = V$ ならば $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ が基底である．そうでないならば $\boldsymbol{v}_{p+1} \in V \setminus \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle$ なる $\boldsymbol{v}_{p+1}$ が取れ，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$, $\boldsymbol{v}_{p+1}$ は 1 次独立である．なぜなら

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p + c\boldsymbol{v}_{p+1} = \boldsymbol{0}$$

と書くとき，もし $c \neq 0$ なら $\boldsymbol{v}_{p+1} = -\frac{c_1}{c}\boldsymbol{v}_1 - \cdots - \frac{c_p}{c}\boldsymbol{v}_p$ となり $\boldsymbol{v} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p \rangle$ に反する．よって $c = 0$ でなければならないが, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ の 1 次独立性より $c_1 = \cdots = c_p = 0$ が分かるからである．

このプロセスを続けて，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ となる $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を見つけられれば，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底となる．このとき，ベクトル空間 V は n 次元である．

有限回でこのプロセスが終了し，基底が構成できるベクトル空間を**有限次元**ベクトル空間という．このプロセスが有限回で終了しないときは，ベクトル空間 V は**無限次元**であるという．

$\mathbb{K}^n$ は有限次元ベクトル空間で $\dim \mathbb{K}^n = n$ である．自明なベクトル空間 0 には基底は存在しないので，次元は 0 とする．この場合は 0 個のベクトルからなる基底があると考えてもよい．

補題 3.3.13. (i) 有限次元ベクトル空間 V の部分空間 W は有限次元である．特に $\dim W \leq \dim V$．もし $\dim W = \dim V$ ならば $W = V$．
(ii) 有限次元ベクトル空間の線形写像による像は有限次元である．

証明. (i): W の元は V の基底の 1 次結合で書けるので，注意 3.3.12 で選んでいく 1 次独立な $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ はすべて V の基底の 1 次結合で書ける．よって $p \leq \dim V$ でなければならず，$p > \dim V$ とはなり得ない．特に $\dim W \leq \dim V$．もし $\dim W = \dim V$ ならば，補題 3.3.2 より，W の基底の生成する空間と，V の基底の生成する空間は，等しくなるので主張は従う．
(ii): V の基底の像を取ると像の元はそれらの 1 次結合である．V の基底の像から最大個数の 1 次独立なベクトルをとればそれが像の基底となる． □

注意 3.3.14. ベクトル空間 V の 1 次独立な元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ があるとき，これを拡張して V の基底とする事を考えよう．V の次元が n ならばこれは可能である．実際，$m \leq n$ であり，注意 3.3.12 と同じ論法で $\boldsymbol{a}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ をうまく選んで $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が V の基底としてよい．

注意 3.3.15. ベクトル空間 V の元 $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ があるとき，この中からうまく $\boldsymbol{a}_{i_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{i_p}$ を選んで $\boldsymbol{a}_{i_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{i_p}$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ の基底とする事ができる．まず $\boldsymbol{v}_1$ を $\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_m$ のうち最初の零ベクトルでないものとする．1 次独立であるような $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}_{j_1}$, ..., $\boldsymbol{v}_q = \boldsymbol{a}_{j_q}$ が選べたとする．番号 j_q 以前の j に対し，$\boldsymbol{a}_{j_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{j_q}$, $\boldsymbol{a}_j$ は 1 次従属と仮定して良い．$\boldsymbol{a}_{j_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{j_q}$, $\boldsymbol{a}_j$ が 1 次独立であるような最小の j を i_{q+1} とする．もしそのような j が存在しなければ，プロセスは終了する．即ち $\boldsymbol{a}_{i_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{i_q}$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ の基底になる．有限個の元で生成されるベクトル空間を考えているので，このプロセスは有限回で終了し，証明が終わる．

3.3.3　基底の変換

$\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_1$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ が基底であるとする．$\boldsymbol{b}_j = p_{1,j}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + p_{n,j}\boldsymbol{a}_n$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\boldsymbol{a}_i = q_{1,i}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + q_{n,i}\boldsymbol{b}_n$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする．すると，次の**基底の変換式**が成り立つ．

$$(\boldsymbol{b}_1 \ \ \ldots\ \boldsymbol{b}_n) = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} p_{1,1} & \ldots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{a}_1 \ \ \ldots\ \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix} q_{1,1} & \ldots & q_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & \ldots & q_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$, $B = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \ldots\ \boldsymbol{b}_n)$ と置く．$P = (p_{i,j})$, $Q = (q_{i,j})$ と置くと，$B = AP$, $A = BQ$ である．$B = BQP$ であり，$(E - QP)B = O$ を得る．これは $\boldsymbol{b}_1$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ の間の関係式を定めるが $\boldsymbol{b}_1$, ..., $\boldsymbol{b}_n$ は 1 次独立なので $E - PQ = O$，即ち

$QP = E$ が分かる．同様にして $PQ = E$ が分かる．よって P, Q は正則行列で，互いに他の逆行列である．数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の場合は，ベクトルを列ベクトルで書いていたことを思い出すと A, B は正方行列であり，上の関係式は行列の関係式と見る事ができる．

$\boldsymbol{v} \in V$ を基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と別の基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の 1 次結合で 2 通りに書いておく．

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{b}_n$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} =& (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix} q_{1,1} & \ldots & q_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & \ldots & q_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{v} =& (\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n)\begin{pmatrix} p_{1,1} & \ldots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より，次の**係数の変換式**を得る．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \ldots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \ldots & p_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & \ldots & q_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & \ldots & q_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

注意 3.3.16. 基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ と正則行列 P に対し，$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n)$, $B = (\boldsymbol{b}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{b}_n)$ と置くと，$P^{-1}B = A$ であるので，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合は $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の 1 次結合で書く事が出来，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ もまた基底である．

3.3.4 線形写像の表現行列

V, W をベクトル空間とし $f : V \to W$ を線形写像とする．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とする．$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$, $f(\boldsymbol{x}) = y_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m$ とすると

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1,j}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{m,j}\boldsymbol{w}_m, \ j = 1, \ldots, n,$$

と書くと $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{i,j}\boldsymbol{w}_i$ なので

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.3.17}$$

と書く事ができる．行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

を，V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n$ と W の基底 $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m$ に関する線形写像 f の**表現行列**という．(3.3.17) は次の基底の変換式と係数の変換式の 2 つに分解することができる．

$$(f(\boldsymbol{v}_1)\ \dots\ f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1\ \dots\ \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}, \tag{3.3.18}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.3.19}$$

注意 3.3.20. 表現行列としては，ベクトルを横に並べるのでなく縦に並べて得た式を考えることも出来る．

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix}$$

これは式 (3.3.18) の転置をとった式になっている．ベクトルを縦にならべても横に並べても実質は同じなので，ここでは基底を横にならべて書くことにする．

$\boldsymbol{v}'_1,\dots,\boldsymbol{v}'_n$ を V の別の基底，$\boldsymbol{w}'_1,\dots,\boldsymbol{w}'_m$ を W の別の基底とし，これらに関する表現行列を考える．

$$\big(f(\boldsymbol{v}'_1)\quad\cdots\quad f(\boldsymbol{v}'_n)\big) = \big(\boldsymbol{w}'_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{w}'_m\big)\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m,1} & \cdots & a'_{m,n}\end{pmatrix}$$

基底の間の変換式を

$$(\boldsymbol{v}'_1\ \dots\ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n}\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{w}'_1\ \dots\ \boldsymbol{w}'_m) = (\boldsymbol{w}_1\ \dots\ \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m,1} & \cdots & q_{m,m}\end{pmatrix}$$

とすると，f の線形性より

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{v}'_1)\ \dots\ f(\boldsymbol{v}'_n)) &= (f(\boldsymbol{v}_1)\ \dots\ f(\boldsymbol{v}_n))\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n}\end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{w}_1\ \dots\ \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n}\end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{w}'_1\ \dots\ \boldsymbol{w}'_m)\begin{pmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m,1} & \cdots & q_{m,m}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

なので，次式を得た．

$$\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m,1} & \cdots & a'_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m,1} & \cdots & q_{m,m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A' = (a'_{i,j})$, $P = (p_{i,j})$, $Q = (q_{i,j})$ と置くと $A' = Q^{-1}AP$ となる．これは基底を変えた時の，線形写像の表現行列の変換公式である．

例 3.3.21. $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{v}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{w}_1 = \binom{2}{1}$, $\boldsymbol{w}_2 = \binom{1}{2}$ に対し，線形写像

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1x + a_2y + a_3z \\ b_1x + b_2y + b_3z \end{pmatrix},$$

の表現行列は，$f(\boldsymbol{v}_i) = p_i\boldsymbol{w}_1 + q_i\boldsymbol{w}_2$, $i = 1, 2, 3$, を解いて得られる．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} = p_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \\ b_1 + b_3 \end{pmatrix} = p_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ f(\boldsymbol{v}_3) &= \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 \end{pmatrix} = p_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + q_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を解けば，次のような表現行列を得る．

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(a_1 + a_2) - b_1 - b_2 & 2(a_1 + a_3) - b_1 - b_3 & 2(a_2 + a_3) - b_2 - b_3 \\ 2(b_1 + b_2) - a_1 - a_2 & 2(b_1 + b_3) - a_1 - a_3 & 2(b_2 + b_3) - a_2 - a_3 \end{pmatrix}$$

標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{e}'_1 = \binom{1}{0}$, $\boldsymbol{e}'_2 = \binom{0}{1}$ に関する表現行列が $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix}\right)$ であり，$(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $(\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{e}'_1\ \boldsymbol{e}'_2)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ なので

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

となり，この右辺を計算しても求まる．

3.4　行列の階数

定理 3.4.1. $m \times n$ 行列 A において，次の数は一致する．

(i) 行列 A の表す線形写像の $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ の像の次元

(ii) A の小行列式で零でないものの最大のサイズ

(iii) A の列ベクトルの中から選び得る 1 次独立なベクトルの最大個数.

(iv) A の行ベクトルの中から選び得る 1 次独立なベクトルの最大個数.

この数を行列 A の**階数** (rank) と言い，$\operatorname{rank} A$ で表す.

この定理の証明のために，補題を準備しよう.

補題 3.4.2. $m \times n$ 行列 $A = (a_{i,j})$ の n 個の列ベクトルが 1 次独立であるための必要十分条件は A の n 次の小行列式で 0 でないものが存在する事である.

証明. 行列 $A = (a_{i,j})$ の n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次従属であれば,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}, \quad (c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

を満たす $\mathbb{K}$ の元 $c_1, \ldots, c_n$ が存在する．このとき

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

であり，特に，次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_n,1} & \cdots & a_{i_n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

$(c_1, \ldots, c_n)$ はこの連立 1 次方程式の非自明解であるから，定理 2.3.14 より

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,1} & \cdots & a_{i_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_n,1} & \cdots & a_{i_n,n} \end{vmatrix} = 0$$

が分かる．つまり，行列 A の n 次の小行列式はすべて 0 である.

行列 $A = (a_{i,j})$ の n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が 1 次独立であれば，定理 3.2.11 より，$m \geq n$ である．$m = n$ とする．1 次独立性より

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

は自明解しかもたないので

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

が分かる．$m > n$ のときを考える．$\mathbb{K}^m$ の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ をとる．このとき $\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p}$ $(j_1 < j_2 < \cdots < j_p)$ を,

(a) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p}$ は 1 次独立であるが

(b) $j = 1, 2, \ldots, m$ に対し $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p}, \boldsymbol{e}_j$ は 1 次従属

であるようにとる．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p}$ は $\mathbb{K}^m$ の基底である．実際，(b) より，$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p} \rangle$ は，各 $\boldsymbol{e}_j$ を含むので $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p} \rangle = \mathbb{K}^m$ であり (a) より基底である事が分かる．

よって $p = m - n$ であり，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_p}$ を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合として表したとき，その係数の作る行列は正則である．適当に番号を付け替えて $j_1 = n + 1$, $j_2 = n + 2$, ..., $j_p = m$ としてよいから，

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

となり，行列 A に 0 でない n 次小行列式がある事になる． □

定理 3.4.1 の証明. (i) と (iii) が等しい事: $A = (\boldsymbol{a}_1\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ と書くとき行列 A の定める写像は

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

なので，その像は $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ である．$\boldsymbol{a}_1$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ のうちから 1 次独立な $\boldsymbol{a}_{i_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{i_r}$ を選び，それ以外のものを加えると 1 次従属になるとき，$\boldsymbol{a}_{i_1}$, ..., $\boldsymbol{a}_{i_r}$ が像 $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle$ の基底になる．よって (i) と (iii) は等しい．

(ii) と (iii) が等しい事: $\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ を A の 1 次独立な列ベクトルとし，これ以上列ベクトルを加えたら 1 次従属になるとする．この列ベクトルを並べて得られる行列 $A' = (\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_r})$ を考える．$\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ の 1 次独立性より，A' の r 次小行列式で 0 でないものが存在する．A' の小行列式は A の小行列式でもあるから，A の r 次小行列式で 0 でないものが存在する事になる．即ち，(ii)≥(iii) である．次に (ii)≤(iii) を示す．

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{vmatrix} \neq 0$$

とすると，連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \ldots & a_{i_1,j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r,j_1} & \ldots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$$

は自明な解しか持たない．よって $\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_r}$ は 1 次独立であるので (ii)≤(iii) が分かる．

(ii) と (iv) が等しい事: A の転置行列について，(ii) と (iii) が等しい事の証明を辿れば良い． □

系 3.4.3. $\operatorname{rank}{}^t A = \operatorname{rank} A$.

演習 3.4.4. 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & a & 0 \\ -a & -c & 0 & a \\ b & 0 & c & -b \\ 0 & b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

注意 3.4.5. 階数 r の $m \times n$ 行列 A は，ある $m \times r$ 行列 P とある $r \times n$ 行列 Q の積 PQ として表される事を示そう．行列 A が表す線形写像を $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ とする．$\mathbb{K}^n$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, $\mathbb{K}^m$ の標準基底を $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_m$ とすると

$$(f(\boldsymbol{e}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{e}'_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}'_m)A$$

である．$f(\boldsymbol{p}_1), \ldots, f(\boldsymbol{p}_r)$ を $\operatorname{Im}(f)$ の基底とすると，

$$(f(\boldsymbol{p}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{p}_r)) = (\boldsymbol{e}'_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}'_m)P$$

なる $m \times r$ 行列 P と

$$(f(\boldsymbol{e}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n)) = (f(\boldsymbol{p}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{p}_r))Q$$

なる $r \times n$ 行列 Q が存在する．

$$(f(\boldsymbol{e}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n)) = (f(\boldsymbol{p}_1)\ \cdots\ f(\boldsymbol{p}_r))Q = (\boldsymbol{e}'_1\ \cdots\ \boldsymbol{e}'_m)PQ$$

なので $A = PQ$ がわかる．

3.5　次元公式と直和

3.5.1　次元公式

定理 3.5.1. ベクトル空間の間の線形写像 $f : V \to W$ が単射である事の必要十分条件は $\operatorname{Ker} f = 0$ である．

証明. f が単射であれば，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ より，$\operatorname{Ker} f = 0$ である．
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対し，$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}')$ とする．$f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \operatorname{Ker} f = 0$. よって $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$ となり，f が単射である事がわかる． □

定理 3.5.2 (次元公式)**.** V, W をベクトル空間とし，V は有限次元とする．線形写像 $f : V \to W$ に対し，次が成り立つ．

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

証明. $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ を $\operatorname{Ker} f$ の基底，$\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_r$ を $\operatorname{Im} f$ の基底とする．$f(\boldsymbol{u}_i)=\boldsymbol{w}_i$ となる $\boldsymbol{u}_i\in V$ をとる．$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_r$ が V の基底である事，即ち次を示せばよい．

(a) $\langle \boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_r\rangle = V$
(b) $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_r$ は 1 次独立.

(a) の証明．$\subset$ は明らかなので $\supset$ を示す．任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対し $f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_r$ の 1 次結合で表す.

$$f(\boldsymbol{x}) = b_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{w}_r$$

すると $f(\boldsymbol{x}-b_1\boldsymbol{u}_1-\cdots-b_r\boldsymbol{u}_r) = f(\boldsymbol{x})-b_1f(\boldsymbol{u_1})-\cdots-b_rf(\boldsymbol{u}_r) = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}-b_1\boldsymbol{u}_1-\cdots-b_r\boldsymbol{u}_r\in\operatorname{Ker} f$ であり，これは $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合で表せる.

$$\boldsymbol{x}-b_1\boldsymbol{u}_1-\cdots-b_r\boldsymbol{u}_r = a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k$$

よって $\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k+b_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{u}_r$.
(b) の証明．$a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k+b_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{0}$ と仮定する．このとき

$$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0}) = f(a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k+b_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{u}_r) = b_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+b_r\boldsymbol{w}_r$$

であるが, $\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_r$ の 1 次独立性より $b_1=\cdots=b_r=0$. よって $a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}$ であるが $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ の 1 次独立性より $a_1=\cdots=a_k=0$. □

系 3.5.3. V, W をベクトル空間とし，V_1 は V の有限次元部分空間とする．線形写像 $f:V\to W$ に対し，次が成り立つ.

$$\dim((\operatorname{Ker} f)\cap V_1)+\dim f(V_1) = \dim V_1$$

証明. 線形写像 $f|_{V_1}:V_1\to W$ に対して定理 3.5.2 を適用すれば良い. □

定理 3.5.4. 有限次元ベクトル空間の間の線形写像 $f:V\to W$ に対し次が成り立つ.

$$f\text{ は単射} \iff \dim\operatorname{Im} f = \dim V$$
$$f\text{ は全射} \iff \dim\operatorname{Im} f = \dim W$$

証明. f:単射 $\overset{\text{定理 3.5.1}}{\iff}$ $\operatorname{Ker} f = 0 \iff \dim\operatorname{Ker} f = 0 \overset{\text{定理 3.5.2}}{\iff} \dim\operatorname{Im} f = \dim V$
f:全射 $\iff \operatorname{Im} f = W \overset{\text{補題 3.3.13}}{\iff} \dim\operatorname{Im} f = \dim W$ □

定理 3.5.5. $\dim V=\dim W$ なる有限次元ベクトル空間の間の線形写像 $f:V\to W$ に対し次が成り立つ.
f は単射 $(\dim\operatorname{Ker} f=0) \iff f$ は全単射 $\iff f$ は全射 $(\dim\operatorname{Im} f=\dim W)$

証明. $\dim V=\dim W$ と定理 3.5.4 より,「f は単射 $\iff$ f は全射」の同値性は明らか. □

全単射であるような線形写像を**同型写像** (isomorphism)（または**線形同型** (linear isomorphism)）[*3]という．

系 3.5.6. n 次正方行列 A が定める線形写像 $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ について次が成り立つ．
$\det(A) \neq 0 \iff A$ は同型写像 $\iff A$ は単射 $\iff A$ は全射

証明. $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ が全単射である事は，$A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ の逆写像の存在と同値であり，それは A の逆行列の存在と同値である．よって最初の $\iff$ は従う．最初の $\iff$ 以外は前定理の帰結である． □

3.5.2　部分空間の直和

ベクトル空間 V の部分空間 W_1, W_2 に対して，和 $W_1 + W_2$ が**直和**であるとは，次の条件を満たす時をいう．

$$W_1 \cap W_2 = 0.$$

このとき $W_1 + W_2$ を $W_1 \oplus W_2$ と書く．W_1, W_2 を直和 $W_1 \oplus W_2$ の**直和因子**という．

$W_1 + W_2$ が直和であるとき，$W_1 + W_2$ の元は $w_1 + w_2$ $(w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2)$ と一意的に表す事ができる．実際，$w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ と書くと $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$ でこの左辺は W_1 の元，右辺は W_2 の元なので，この元は $W_1 \cap W_2$ の元であり，$W_1 \cap W_2 = 0$ より，零ベクトルである．よって $w_1 = w_1', w_2 = w_2'$.

注意 3.5.7. 逆に，$W = W_1 + W_2$ の任意の元 $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ の形に一意的に書けたとする．すると $W_1 \cap W_2 = 0$ が分かる．実際，$\boldsymbol{w} \in W_1 \cap W_2$ に対して，

$$\boldsymbol{w} = \begin{cases} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{w} \in W_1,\ \boldsymbol{0} \in W_2, \\ \boldsymbol{0} + \boldsymbol{w}, & \boldsymbol{0} \in W_1,\ \boldsymbol{w} \in W_2, \end{cases}$$

であるが，表現の一意性より $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が分かる．

注意 3.5.8 (直和因子への射影の線形性)**.** $W = W_1 \oplus W_2$ のとき $\boldsymbol{w} \in W$ に対し $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ なる $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ が一意的に存在する．このとき写像

$$p_1 : W \to W_1,\ \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w}_1, \qquad p_2 : W \to W_2,\ \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w}_2$$

は共に線形写像である．実際，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ ならば

$k\boldsymbol{w} = (k\boldsymbol{w}_1) + (k\boldsymbol{w}_2),\ k\boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ k\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ より $p_i(k\boldsymbol{w}) = k\boldsymbol{w}_i = kp_i(\boldsymbol{w}),\ i = 1, 2,$

[*3] 単に同型という事も多い．同型という言葉は数学の色んな場面で使われる．文脈によりその意味合いは少しずつ異なってくる，ここではベクトル空間としての同型写像なので，線形同型写像と言う事もある．

となる．また $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2$, $\boldsymbol{w}'_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}'_2 \in W_2$ ならば

$$\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' = (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}'_1) + (\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}'_2),\ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}'_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}'_2 \in W_2 \text{ より}$$

$p_i(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') = \boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{w}'_i = p_i(\boldsymbol{w}) + p_i(\boldsymbol{w}')$, $i = 1, 2$, である．

定理 3.5.9. W_1, W_2 がベクトル空間 V の有限次元部分空間である時，次が成り立つ．

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

特に $W_1 + W_2$ が直和 $W_1 \oplus W_2$ ならば

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

証明. $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする．$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q$ を次をみたすようにとる．

- $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ を W_1 の基底
- $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q$ を W_2 の基底

すると，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q$ は $W_1 + W_2$ の基底になる．実際，これらが $W_1 + W_2$ を生成する事は明らかなので，1 次独立性を示そう．

$$a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots a_s\boldsymbol{w}_s + b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_p\boldsymbol{u}_p + c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_q\boldsymbol{v}_q = \boldsymbol{0}$$

とすると，

$$a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots a_s\boldsymbol{w}_s + b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_p\boldsymbol{u}_p = -c_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - c_q\boldsymbol{v}_q \tag{3.5.10}$$

の左辺は W_1 の元，右辺は W_2 の元なので，これは $W_1 \cap W_2$ の元であり，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$ の 1 次結合で表せる．よって

$$-c_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - c_q\boldsymbol{v}_q = a'_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a'_s\boldsymbol{w}_s$$

であり，移項して次を得る．

$$a'_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a'_s\boldsymbol{w}_s + c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_q\boldsymbol{v}_q = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q$ の 1 次独立性より $a'_1 = \cdots = a'_s = c_1 = \cdots = c_q = 0$．これを (3.5.10) に代入すると次式を得る．

$$a_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots a_s\boldsymbol{w}_s + b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_p\boldsymbol{u}_p = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ の 1 次独立性より $a_1 = \cdots = a_s = b_1 = \cdots = b_p = 0$．　□

注意 3.5.11 (次元公式に関する注意)**.** 線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$ であるが $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ は直和とは限らないので $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$ とは限らない．$\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ が直和となるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$ で，次の様な言い換えができる．

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0 &\iff \forall \boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} f\ [f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}] \\ &\iff \forall \boldsymbol{y}\ [f^2(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \ \to \ f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}] \\ &\iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f\end{aligned}$$

従って，$f^2 = f$ を満たす線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ については $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ が成り立つ．$f^2 = f$ を満たす線形写像を**射影** (projection) という．また射影を表す正方行列のことも射影という．射影は 5.8 節で重要な役割を果たす．

演習 3.5.12. $f^2 = f$ を満たさないが $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ を満たす線形写像の例をあげよ．

注意 3.5.13 (m 個の部分空間の直和)**.** 一般に，V の部分空間 $W_1, \ldots, W_m$ が与えられたとき，それらで生成される部分空間

$$W = \{\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_m : \boldsymbol{w}_i \in W_i, 1 \le i \le m\}$$

を W_i $(1 \le i \le m)$ の**和**といい $W_1 + \cdots + W_m$ で表す．特に W の任意の元 $\boldsymbol{w}$ が

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_m, \quad \boldsymbol{w}_i \in W_i \ (1 \le i \le m)$$

の形に一意的に表されるとき，W は W_i $(1 \le i \le m)$ の**直和**であるという．W が W_i $(1 \le i \le m)$ の直和になるためには

$$(W_1 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k = 0 \quad (2 \le k \le m)$$

が必要かつ十分である．W_i 達が有限次元のときは，直和の次元に関しては次が成立する．

$$\dim(W_1 \oplus \cdots \oplus W_m) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_m$$

演習 3.5.14. $W = W_1 + \cdots + W_m$ が直和である事は次の条件と同値であることを示せ．

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.5.15}$$

解： $W = W_1 + \cdots + W_m$ が直和であれば , $W_i + (\sum_{k \ne i} W_i)$ が直和 であり, 条件 (3.5.15) がわかる．逆に，条件 (3.5.15) を満たせば $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ が直和であることを示す．

W の元 $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_m=\boldsymbol{w}'_1+\cdots+\boldsymbol{w}'_m$, $\boldsymbol{w}_i$, $\boldsymbol{w}'_i\in W_i$ とかく.

$$\boldsymbol{w}_i-\boldsymbol{w}'_i=\sum_{k\neq i}(\boldsymbol{w}'_k-\boldsymbol{w}_k)\in W_i\cap(W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_m)=0$$

より　$\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{w}'_i$ がわかる.

演習 3.5.16. $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W_1=\langle\boldsymbol{e}_1\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_2=\langle\boldsymbol{e}_2\rangle_{\mathbb{R}}$, $W_3=\langle\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\rangle_{\mathbb{R}}$ は $W_1\cap W_2\cap W_3=0$ を満たすが $W_1+W_2+W_3$ は直和ではないことを示せ.

補題 3.5.17. A, B を $m\times n$ 行列とするとき, 次の不等式が成立する.

$$\operatorname{rank}(A+B)\leq\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B. \tag{3.5.18}$$

等号成立の必要十分条件は, $\operatorname{Im}(A+B)=\operatorname{Im}A\oplus\operatorname{Im}B$ である.

証明. $V=\mathbb{K}^n$ と置く. $(A+B)V\subset AV+BV$ より,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A+B)=\dim(A+B)V&\overset{(*)}{\leq}\dim(AV+BV)\\&\overset{(**)}{\leq}\dim AV+\dim BV=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\end{aligned}$$

等号成立は $(*)$ の不等号で等号成立 (即ち $(A+B)V=AV+BV$), かつ $(**)$ の不等号で等号成立 (即ち $AV\cap BV=0$) のときである. 従って不等式 (3.5.18) で等号成立の必要十分条件は, $(A+B)V=AV\oplus BV$ と表せる. □

$B=-A$ とすれば $A+B=O$ なので, (3.5.18) で等号は成立するとは限らない.

補題 3.5.19. A を $l\times m$ 行列, B を $m\times n$ 行列とするとき

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-m\leq\operatorname{rank}(AB)\leq\min\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\}.$$

証明. $\operatorname{Im}(AB)\subset\operatorname{Im}A$ で, 全射 $A:\operatorname{Im}B\to\operatorname{Im}(AB)$ があるので

$$\operatorname{rank}(AB)=\dim\operatorname{Im}(AB)\leq\begin{cases}\dim\operatorname{Im}A=\operatorname{rank}A,\\\dim\operatorname{Im}B=\operatorname{rank}B.\end{cases}$$

全射 $A:\operatorname{Im}(B)\to\operatorname{Im}(AB)$ に対して次元公式を適用する事により,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(AB)&=\dim\operatorname{Im}(AB)=\dim\operatorname{Im}B-\dim(\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Im}B)\\&\overset{(*)}{\geq}\dim\operatorname{Im}B-\dim\operatorname{Ker}A\\&=\dim\operatorname{Im}B-(m-\dim\operatorname{Im}A)\\&=\dim\operatorname{Im}B+\dim\operatorname{Im}A-m\\&=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-m\end{aligned}$$

この式で等号成立は $(*)$ で等号が成立する事, 即ち $\operatorname{Ker}A\subset\operatorname{Im}B$ が必要十分である. □

定理 3.5.20. A を $m \times n$ 次行列．P, Q をそれぞれ m 次と n 次の正則行列とすると

$$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank}(A).$$

証明. 補題 3.5.19 を繰り返し用いると

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(P^{-1}(PAQ)Q^{-1}) \leq \operatorname{rank}(PAQ) \leq \operatorname{rank} A$$

なので，定理は従う． □

3.6　商空間と双対空間

3.6.1　商空間

ベクトル空間 V の部分空間 W をとる．V に同値関係 $\sim$ を次で定める．
$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}' \iff \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$
これは同値関係になる．（各自確かめよ．）同値類は

$$[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v} + W = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} \in W\}$$

の形をしている．同値類の集合 $\{\boldsymbol{v} + W : \boldsymbol{v} \in V\}$ は，次で定まる加法と定数倍が定義されベクトル空間になる．

$$(\boldsymbol{v} + W) + (\boldsymbol{w} + W) := (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + W, \qquad c(\boldsymbol{v} + W) := c\boldsymbol{v} + W$$

これは次のように書いても同じことである．

$$[\boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{v}'] = [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'], \qquad c[\boldsymbol{v}] = [c\boldsymbol{v}]$$

このベクトル空間を V の W による**商空間**といい V/W で表す．
和及び定数倍の定義が代表元のとり方に依らないことの証明 $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{w}'$ とすると $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$, $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}' \in W$ より

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}') = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}') \in W$$

となり $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}'$．よって

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + W = (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}') + W$$

V/W の零元は $[\boldsymbol{0}] = \boldsymbol{0} + W$ である．

$$c\boldsymbol{v} - c\boldsymbol{v}' = c(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \in W$$

となり $c\boldsymbol{v} \sim c\boldsymbol{v}'$．よって $c\boldsymbol{v} + W = c\boldsymbol{v}' + W$ である． □

包含写像 $\iota : W \to V$, $\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w}$, と, 射影 $p : V \to V/W$, $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{v}]$, について $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} \iota$ が成り立つ．実際,

$$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p \iff p(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{0}] \iff \boldsymbol{v} \in W \iff \boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} \iota$$

V が有限次元のとき，全射線形写像 $V \to V/W$ に定理 3.5.2 を適用すると次を得る．

$$\dim W + \dim V/W = \dim V$$

3.6.2 双対空間

定義 3.6.1 (双対空間)**.** 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V に対し，その**双対空間** (dual space) V^* を次で定義する．

$$V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = \{\varphi : V \to \mathbb{K} : \mathbb{K} \text{ 上線形 }\}$$

双対空間の記号に $V^\vee$ を使う事もある．双対空間の元は線形写像であるが**コベクトル** (covector) ということもある．

双対空間における和及び定数倍は次のように自然に定義されるものであった．

$$(\varphi + \phi)(\boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}) + \phi(\boldsymbol{v}), \quad (c\varphi)(\boldsymbol{v}) = c(\varphi(\boldsymbol{v})), \quad \varphi, \phi \in V^*,\ \boldsymbol{v} \in V,\ c \in \mathbb{K}.$$

定理 3.6.2 (双対基底)**.** n 次元ベクトル空間 V に基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとるとき，双対空間 V^* の元 $\boldsymbol{v}_i^*$ を

$$\boldsymbol{v}_i^* : V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \boldsymbol{v}_j \longmapsto \delta_{i,j}$$

で定めると，$\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ は V^* の基底になる．これを V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の**双対基底** (dual basis) という．特に V^* も n 次元ベクトル空間になる事が分かる．

証明. $\varphi \in V^*$ を任意にとり $\varphi \in \langle \boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^* \rangle$ を示す．任意の $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \in V$ に対し，$x_i = \boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{x})$ なので

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{x}) =& \varphi(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) \\
=& x_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\boldsymbol{v}_n) \\
=& \varphi(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{x}) + \cdots + \varphi(\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{x}) \\
=& (\varphi(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1^* + \cdots + \varphi(\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n^*)(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

より $\varphi = \varphi(\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1^* + \cdots + \varphi(\boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{v}_n^*$ が分かる．よって φ は $\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ の 1 次結合で表せた．$c_1\boldsymbol{v}_1^* + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n^*$ が零写像とすると，$c_i = (c_1\boldsymbol{v}_1^* + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n^*)(\boldsymbol{v}_i) = 0$ なので，$\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ の 1 次独立性も分かる． □

注意 3.6.3. これより n 次元ベクトル空間 V の双対空間 V^* は n 次元ベクトル空間である事が分かる．

$$V \longrightarrow V^*, \qquad x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \longmapsto x_1\boldsymbol{v}_1^* + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n^*,$$

が同型を定める．ただし V^* の双対基底 $\boldsymbol{v}_i^*$ は，V の基底 $\boldsymbol{v}_i$ に依存しているので，この同型は基底に依存して定まる事を注意しておく．

定義 3.6.4 (双対写像). ベクトル空間 V, W の間の線形写像 $f : V \to W$ に対し双対空間 V^*, W^* の間の双対写像 f^* が次で定まる．

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*, \quad \varphi \mapsto \varphi\circ f$$

ベクトル空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$，ベクトル空間 W の基底を $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ とする．線形写像 $f : V \to W$ に対し，$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j}\boldsymbol{w}_i$ とするとき，$f^*(\boldsymbol{w}_i^*)(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_i^*(\sum_{s=1}^m a_{s,j}\boldsymbol{w}_s) = a_{i,j}$ なので，双対写像 f^* は次のように表される．

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*, \quad \boldsymbol{w}_i^* \longmapsto f^*(\boldsymbol{w}_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}\boldsymbol{v}_j^*$$

注意 3.6.5. 数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の元を列ベクトルで表すとき，その双対空間 $(\mathbb{K}^n)^*$ の元を行ベクトルで表す事が多い．このとき，標準基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の双対基底は次の様になる．

$$\boldsymbol{e}_1^* = (1 \ 0 \ \cdots \ 0), \ \ldots, \ \boldsymbol{e}_n^* = (0 \ \cdots \ 0 \ 1)$$

$(\mathbb{K}^n)^*$ の元 φ を $p_1\boldsymbol{e}_1^* + \cdots + p_n\boldsymbol{e}_n^* = (p_1 \ \ldots \ p_n)$ と表すとき，φ は次のように表示される．

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}) = (p_1 \ \ldots \ p_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$$

例 3.6.6. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \langle\boldsymbol{w}\rangle$, $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ と置く．$a_1 \neq 0$ と仮定すると $\boldsymbol{w}$ が W の基底になり，$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の V/W への像 $[\boldsymbol{e}_2]$, $[\boldsymbol{e}_3]$ が V/W の基底になる．$f(\boldsymbol{w}) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ より f の表現行列は次の様にわかる．

$$f : W \to V, \ \boldsymbol{w} \mapsto f(\boldsymbol{w}) = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2 \ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$g(\boldsymbol{e}_1) = g(\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{a_1}\boldsymbol{w})) = -\frac{a_2}{a_1}[\boldsymbol{e}_2] - \frac{a_3}{a_1}[\boldsymbol{e}_3]$, $g(\boldsymbol{e}_2) = [\boldsymbol{e}_2]$, $g(\boldsymbol{e}_3) = [\boldsymbol{e}_3]$ より g の表現行列は次の様にわかる．

$$g : V \to V/W, \ (g(\boldsymbol{e}_1) \ g(\boldsymbol{e}_2) \ g(\boldsymbol{e}_3)) = ([\boldsymbol{e}_2] \ [\boldsymbol{e}_3])\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & 1 & 0 \\ -\frac{a_3}{a_1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6.7}$$

$(V/W)^*$ の基底として $[\boldsymbol{e}_2]$, $[\boldsymbol{e}_3]$ の双対基底 $[\boldsymbol{e}_2]^*$, $[\boldsymbol{e}_3]^*$ を用いると (3.6.7) より

$$\begin{aligned} g^*([\boldsymbol{e}_2]^*)(\boldsymbol{e}_1) =& [\boldsymbol{e}_2]^*(-\tfrac{a_2}{a_1}[\boldsymbol{e}_2] - \tfrac{a_3}{a_1}[\boldsymbol{e}_3]) & g^*([\boldsymbol{e}_3]^*)(\boldsymbol{e}_1) =& [\boldsymbol{e}_3]^*(-\tfrac{a_3}{a_1}[\boldsymbol{e}_2] - \tfrac{a_3}{a_1}[\boldsymbol{e}_3]) \\ =& -\tfrac{a_2}{a_1} & =& -\tfrac{a_3}{a_1} \\ g^*([\boldsymbol{e}_2]^*)(\boldsymbol{e}_2) =& [\boldsymbol{e}_2]^*([\boldsymbol{e}_2]) = 1 & g^*([\boldsymbol{e}_3]^*)(\boldsymbol{e}_2) =& [\boldsymbol{e}_3]^*([\boldsymbol{e}_2]) = 0 \\ g^*([\boldsymbol{e}_2]^*)(\boldsymbol{e}_3) =& [\boldsymbol{e}_2]^*([\boldsymbol{e}_3]) = 0 & g^*([\boldsymbol{e}_3]^*)(\boldsymbol{e}_3) =& [\boldsymbol{e}_3]^*([\boldsymbol{e}_3]) = 1 \end{aligned}$$

となり，g^* の表現行列は次の様にわかる．

$$g^* : (V/W)^* \to V^*, \quad (g^*([\boldsymbol{e}_2]^*)\ g^*([\boldsymbol{e}_3]^*)) = (\boldsymbol{e}_1^*\ \boldsymbol{e}_2^*\ \boldsymbol{e}_3^*) \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

W^* の基底 $\boldsymbol{w}^*$ を用いると，$(f^*(\boldsymbol{e}_i^*))(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{e}_i^*(f(\boldsymbol{w})) = a_i$ であるから

$$f^* : V^* \to W^*,\ (f^*(\boldsymbol{e}_1^*)\ f^*(\boldsymbol{e}_2^*)\ f^*(\boldsymbol{e}_3^*)) = \boldsymbol{w}^*(a_1\ a_2\ a_3)$$

なので，線形写像 f^* のこの基底に関する表現行列もわかった．

例 3.6.8. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a_1x + a_2y + a_3z = 0 \right\}$ と置く．自然な包含写像を $f : W \to V$, 商写像を $g : V \to V/W$ と書く．$a_1 \neq 0$ とすると $\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が W の基底で f の表現行列は次の様になる．

$$f : W \longrightarrow V,\ (f(\boldsymbol{w}_1)\ f(\boldsymbol{w}_2)) = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.6.9}$$

$[\frac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]$ が V/W の基底で

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{e}_1) =& a_1[\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1], \\ g(\boldsymbol{e}_2) =& g(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{w}_1) = [\tfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{e}_1] = a_2[\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1], \\ g(\boldsymbol{e}_3) =& g(\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{w}_2) = [\tfrac{a_3}{a_1}\boldsymbol{e}_1] = a_3[\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1] \end{aligned}$$

より g の表現行列は次の様に表される．

$$g : V \to V/W,\ (g(\boldsymbol{e}_1)\ g(\boldsymbol{e}_2)\ g(\boldsymbol{e}_3)) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1](a_1\ a_2\ a_3) \tag{3.6.10}$$

双対写像 g^*, f^* は双対基底を用いて次の様に表される．

$$g^*([\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*) = (\boldsymbol{e}_1^*\ \boldsymbol{e}_2^*\ \boldsymbol{e}_3^*) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ (f^*(\boldsymbol{e}_1^*)\ f(\boldsymbol{e}_2^*)\ f(\boldsymbol{e}_3^*)) = (\boldsymbol{w}_1^*\ \boldsymbol{w}_2^*) \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & 1 & 0 \\ -\frac{a_3}{a_1} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは次のようにしても確かめられる．(3.6.10) より

$$g^*([\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*)(\boldsymbol{e}_1) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*([\boldsymbol{e}_1]) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*(a_1[\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]) = a_1$$

$$g^*([\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*)(\boldsymbol{e}_2) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*([\boldsymbol{e}_2]) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*(a_2[\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]) = a_2$$
$$g^*([\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*)(\boldsymbol{e}_3) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*([\boldsymbol{e}_2]) = [\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]^*(a_3[\tfrac{1}{a_1}\boldsymbol{e}_1]) = a_3$$

となり，g^* の表現行列がわかる．また (3.6.9) より

$$\begin{aligned}
f^*(\boldsymbol{e}_1^*)(\boldsymbol{w}_1) &= \boldsymbol{e}_1^*(-\tfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = -\tfrac{a_2}{a_1} & f^*(\boldsymbol{e}_1^*)(\boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{e}_1^*(-\tfrac{a_3}{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 = -\tfrac{a_3}{a_1} \\
f^*(\boldsymbol{e}_2^*)(\boldsymbol{w}_1) &= \boldsymbol{e}_2^*(-\tfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 1 & f^*(\boldsymbol{e}_2^*)(\boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{e}_2^*(-\tfrac{a_3}{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = 0 \\
f^*(\boldsymbol{e}_3^*)(\boldsymbol{w}_1) &= \boldsymbol{e}_3^*(-\tfrac{a_2}{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 0 & f^*(\boldsymbol{e}_3^*)(\boldsymbol{w}_2) &= \boldsymbol{e}_3^*(-\tfrac{a_3}{a_1}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) = 1
\end{aligned}$$

となり，f^* の表現行列がわかる．

注意 3.6.11. 双対基底は元の基底に依存して決まるので，計算するときは注意する必要がある．例えば V を 1 次元ベクトル空間とし $\boldsymbol{v}$ をその基底とすると 0 でないスカラー c を乗じた $c\boldsymbol{v}$ も V の基底である．$\boldsymbol{v}^*$ を $\boldsymbol{v}$ の双対基底，$(c\boldsymbol{v})^*$ を $c\boldsymbol{v}$ の双対基底とすると

$$(c\boldsymbol{v})^*(\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{c}(c\boldsymbol{v})^*(c\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{c}$$

なので $(c\boldsymbol{v})^* = \frac{1}{c}\boldsymbol{v}^*$ である．

注意 3.6.12 (基底の変換). $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{v}_1^*, \ldots, \boldsymbol{v}_n^*$ をその双対基底とする．$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を V の別の基底，$\boldsymbol{w}_1^*, \ldots, \boldsymbol{w}_n^*$ をその双対基底とする．基底の間の変換式を

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n)P \tag{3.6.13}$$

と書き，双対基底の変換式を

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1^*\\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n^*\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^*\\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^*\end{pmatrix} \tag{3.6.14}$$

と書くと，$Q = P$ である．実際，(3.6.14) に (3.6.13) を右から掛けると

$$\begin{aligned}
Q &= Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \boldsymbol{v}_1^*(\boldsymbol{v}_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \boldsymbol{v}_n^*(\boldsymbol{v}_n)\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1^*\\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^*\end{pmatrix}(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) \\
&= \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1^*\\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_n^*\end{pmatrix}(\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n)P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1^*(\boldsymbol{w}_1) & \cdots & \boldsymbol{w}_1^*(\boldsymbol{w}_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{w}_n^*(\boldsymbol{w}_1) & \cdots & \boldsymbol{w}_n^*(\boldsymbol{w}_n)\end{pmatrix}P = P
\end{aligned}$$

となるからである．

■2 **重双対**　ベクトル空間 V に対し $V^{**} = (V^*)^*$ と置く．これをベクトル空間 V の **2 重双対** (double dual) と呼ぶ.

定理 3.6.15. $V \to V^{**}$, $\boldsymbol{v} \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(\boldsymbol{v})]$, は単射.
特に，V が有限次元ならばこれは同型である.

証明. $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\{V \to V^{**}\}$ を取る．このとき，任意の $\varphi \in V^*$ に対し $\varphi(\boldsymbol{v}) = 0$ となっている．すると $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ である．実際 $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ ならば $\boldsymbol{v}$ を拡張して V の基底を作り，$\boldsymbol{v}$ 上 0 でなく $\boldsymbol{v}$ でない基底上では 0 として V 上定義された線形関数を構成することができる．V が有限次元の時は $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$ なので最後の主張は明らか. □

上の写像 $V \to V^{**}$ は，基底に依存しない写像であることを注意しておく.

3.6.3　完全列

定義 3.6.16 (完全列)**.** ベクトル空間の間の線形写像の列（有限列でも無限列でも良い）

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

があるとき，これが**完全列** (exact sequence) であるとは，各 i に対して次が成り立つ時を言う.

$$\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$$

例 3.6.17. 自明なベクトル空間 0 からベクトル空間 V への線形写像 $0 \to V$ は，零ベクトル $\mathbf{0}$ を零ベクトル $\mathbf{0}$ に写すものしか存在しない．この写像の像は（V の部分空間としての）0 である．従って次が成り立つ.

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{f} V \text{ が完全} \iff \operatorname{Ker} f = 0 \iff f \text{ は単射}$$

例 3.6.18. ベクトル空間 V から自明なベクトル空間 0 への線形写像 $V \to 0$ は，V の任意の元を零ベクトル $\mathbf{0}$ に写すものしか存在しない．この写像の核は V である．従って次が成り立つ.

$$W \xrightarrow{f} V \longrightarrow 0 \text{ が完全} \iff \operatorname{Im} f = V \iff f \text{ は全射}$$

例 3.6.19 (短完全列)**.** 次の形の完全列を**短完全列** (short exact sequence) という.

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

短完全列である条件は次のように表される.

$$\operatorname{Ker} f = 0, \quad \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f, \quad \operatorname{Im} g = Q.$$

定理 3.6.20. 完全列 $0 \to W \overset{\iota}{\to} V \overset{p}{\to} Q \to 0$ は次の事を意味している．

(i) W は V の部分空間とみなせる．
(ii) Q は V/W と同型である．

証明. (i): $0 \to W \overset{\iota}{\to} V$ は完全なので，$\iota : W \to V$ は単射．よって W と $\iota(W)$ を同一視すれば (i) は明らか．
(ii): $V \overset{p}{\to} Q \to 0$ は完全なので $p : V \to Q$ は全射．よって $\boldsymbol{q} \in Q$ に対し $p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{q}$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．$p(\boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{v}')$ とすると $p(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \operatorname{Ker} p = W$．よって $\boldsymbol{v} + W = \boldsymbol{v}' + W$ であり，写像 $f : Q \to V/W$ が $f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{v} + W$ で定まる．f が全単射を示す．任意の $\boldsymbol{v} + W$ に対し，$\boldsymbol{q} = p(\boldsymbol{v})$ と置くと $f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{v} + W$ なので f は全射．$f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} + W$ とすると $\boldsymbol{q} = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので f は単射．よって $f : Q \to V/W$ は同型である． □

従って，線形写像 $f : V \to W$ に対し，完全列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow V \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow 0, \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow W \longrightarrow W/\operatorname{Im} f \longrightarrow 0$$

があり，$\operatorname{Im} f \simeq V/\operatorname{Ker} f$ もわかる．

定理 3.6.21. ベクトル空間 V と，その部分空間 W に対し，完全列

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V/W \longrightarrow 0 \tag{3.6.22}$$

がある．双対的に次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow (V/W)^* \xrightarrow{g^*} V^* \xrightarrow{f^*} W^* \longrightarrow 0 \tag{3.6.23}$$

定義より $(V/W)^*$ は V 上の線形関数で部分空間 W で零になるもの全体である．

証明. 完全列 (3.6.22) は，定理 3.6.20 の帰結なので，列 (3.6.23) についてのみ示せば良い．

$\boxed{0 \longrightarrow (V/W)^* \xrightarrow{g^*} V^* \text{ が完全であること}}$

$\operatorname{Ker} g^* = 0$ である事を示せばよい．$\phi \in (V/W)^*$ をとる．$g^*(\phi) : V \overset{g}{\to} V/W \overset{\phi}{\to} \mathbb{K}$ が 0 ならば，各 $[\boldsymbol{v}] \in V/W$ に対し $\phi([\boldsymbol{v}]) = \phi \circ g(\boldsymbol{v}) = 0$ なので $\phi = 0$.

$\boxed{(V/W)^* \xrightarrow{g^*} V^* \xrightarrow{f^*} W^* \text{ が完全であること}}$

$\boxed{\operatorname{Ker} f^* \subset \operatorname{Im} g^*}$ $f^*(\varphi) = 0$ なる $\varphi \in V^*$ をとる．任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し $\varphi(\boldsymbol{w}) = \varphi \circ f(\boldsymbol{w}) = (f^*\varphi)(\boldsymbol{w}) = 0$. $\phi([\boldsymbol{v}]) = \varphi(\boldsymbol{v})$ とおくと $\phi \in (V/W)^*$ がわかる．実際

$$[\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v}'] \text{ ならば } \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W \text{ なので } \phi([\boldsymbol{v}]) - \phi([\boldsymbol{v}']) = \varphi(\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{v}') = \varphi(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = 0$$

となり ϕ がうまく定義されている事がわかる．ϕ の線形性は φ の線形性の帰結である．
$\boxed{\mathrm{Ker}\, f^* \supset \mathrm{Im}\, g^*}$ $\varphi = g^*(\phi)$ なる $\phi \in (V/W)^*$ があれば各 $\boldsymbol{w} \in W$ に対し $f^*(\varphi)(\boldsymbol{w}) = \varphi(f(\boldsymbol{w})) = \phi(g\circ f(\boldsymbol{w})) = 0$ なので $\varphi \in \mathrm{Ker}\, f^*$.
$\boxed{V^* \xrightarrow{f^*} W^* \longrightarrow 0 \text{ が完全であること}}$
$\psi \in W^*$ に対し $f^*(\varphi) = \psi$ なる $\varphi \in V^*$ を構成すれば良い．まず W^* の基底 $\{\boldsymbol{w}_i^*\}_{i\in I}$ をとる．各基底の元は，W 上の線形写像であるがそれを V 上に拡張することができる．その拡張を $\{\tilde{\boldsymbol{w}}_i^*\}_{i\in I}$ と書く．すなわち $\{\tilde{\boldsymbol{w}}_i^*\}_{i\in I}$ は次を満たす V 上の線形関数である．

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_i(f(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{w}_i^*(\boldsymbol{w}) \quad \forall \boldsymbol{w} \in W$$

$\{\tilde{\boldsymbol{w}}_i^*\}_{i\in I}$ は V 上 1 次独立であり，それらを拡張して V^* の基底 $\{\boldsymbol{w}_i^*, \boldsymbol{v}_j^*, i \in I, j \in J\}$ を作ることができる．

$$\psi = \sum_{i\in I} \psi_i \boldsymbol{w}_i^* (\text{有限和})$$

と書いた時,

$$\varphi = \sum_{i\in I} \psi_i \tilde{\boldsymbol{w}}_i^* (\text{有限和})$$

が求めるものである。 □

第 4 章

連立 1 次方程式

クラメルの公式（定理 2.3.12）より，係数行列が正方行列で正則ならば連立 1 次方程式 (4.1.1) は唯一つの解を持つ．しかしながら一般に，変数の個数と方程式の個数は等しいとは限らない連立 1 次方程式を考える場合もあるし，等しくても係数行列が正則でない場合も考えておく必要がある．本章では，掃き出し法による 1 次方程式の解法を紹介し，一般の連立 1 次方程式の解の構造を考察する．

4.1　解の存在条件

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\cdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1.1}$$

に対し，係数行列 A と拡大係数行列 $(A\ \boldsymbol{b})$ を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (A\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

すると連立 1 次方程式 (4.1.1) は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と書かれる．但し $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right)$ としている．

定理 4.1.2. 連立 1 次方程式 (4.1.1) に解が存在するための必要十分条件は，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\ \boldsymbol{b})$ である事である．

証明. 連立 1 次方程式 (4.1.1) を次の形に書いておく．

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix},\ \dots,\ \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$ と置くと，この式は $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$

となる．よって

$$\begin{aligned} \exists x_1,\dots,x_n\ x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} &\iff \langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\rangle = \langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}\rangle \\ &\iff \dim\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\rangle = \dim\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}\rangle \\ &\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\ \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

最後に $\operatorname{rank} A = \dim\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\rangle$, $\operatorname{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = \dim\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}\rangle$ という事実を使っている． □

例 4.1.3. 解を持たない連立 1 次方程式の例を挙げておく．

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

定理 4.1.4. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が 2 つあったとすると，その差は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である．即ち，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}_0$ が 1 つわかれば他の解は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{x}_0$ に加えて得られる．

証明. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$ とすると

$$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

よって $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は部分空間 $\operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n : A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$ の元である． □

4.2 行列の基本変形

4.2.1 掃き出し法

例 4.2.1 (掃き出し法で連立 1 次方程式を解く)**.** 次の連立 1 次方程式を解いてみる．

$$\begin{cases} y + z = 2 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$ 拡大係数行列は $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ である．

第 1 式と第 2 式を入れ替える．

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ y + z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 第 1 行と第 2 行を入れ替える．

第 1 式の 2 倍を第 3 式から引く．

$$\begin{cases} x-y+2z=3 \\ y+z=2 \\ y-5z=-5 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \text{第 1 行の 2 倍を第 3 行から引く．}$$

第 2 式を第 1 式に加え，更に，第 2 式を第 3 式から引く．

$$\begin{cases} x+3z=5 \\ y+z=2 \\ -6z=-7 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 2 行を第 1 行に加える} \\ \\ \text{第 2 行を第 3 行から引く．} \end{matrix}$$

第 3 式を $-\frac{1}{6}$ 倍する．

$$\begin{cases} x+3z=5 \\ y+z=2 \\ z=\frac{7}{6} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \text{第 3 行を } -\tfrac{1}{6} \text{ 倍する．}$$

第 3 式の 3 倍を第 1 式から引き，第 3 式を第 2 式から引く．

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{5}{6} \\ z=\frac{7}{6} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{第 3 式の 3 倍を第 1 式から引き，} \\ \text{第 3 式を第 2 式から引く．} \end{matrix}$$

この例のように，行基本変形を繰り返して連立 1 次方程式を解く方法を**掃き出し法** (row reduction)[*1] またはガウスの**消去法** (Gaussian elimination) という．上の計算では各列に対し枠囲みの要素を基にして，他の行の要素を 0 にしている．この枠囲みの要素を**ピボット**という．

例 4.2.2. 次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x+y-z-w=2 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+z+w=1 \\ x-w=1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{拡大係数行列を書く．}$$

*1 掃き出し法を英語に直訳すると sweeping-out method であろう．しかし Gaussian elimination のほうが通じるであろう．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{\text{-2}} & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{第 2 行から第 1 行を引く.} \\ \text{第 3 行から第 1 行を引く.} \\ \text{第 4 行から第 1 行を引く.} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{第 2 行を } -\tfrac{1}{2} \text{ 倍する.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{第 4 行から第 2 行を引く.} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{第 3 行を } \tfrac{1}{2} \text{ 倍する.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{第 2 行に第 3 行を足す.}$$

最後の行列より，次式を得る．

$$x - w = 1,\ y - w = \frac{1}{2},\ z + w = -\frac{1}{2}$$

よって w は $w = c$ を任意定数として解くと，

$$(x, y, z, w) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + c(1, 1, -1, 1)$$

を得る．

4.2.2　行基本変形

連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{4.2.3}$$

を解く事は，次の操作を繰り返して，与えられた連立 1 次方程式をできるだけ簡単な形に変形する事である．

- 式の順番を入れ替える

- ある式に 0 でない定数をかける.
- ある式に別の式の定数倍を加える.

この操作は，拡大係数行列の次の操作と対応している.

- 2 つの行を入れ替える
- ある行に 0 でない定数をかける.
- ある行に別の行の定数倍を加える.

これらの操作は，拡大係数行列に左から次の行列を掛ける操作に他ならない.

第 i 行と第 j 行を入れ替える.

$$
C_{i,j} = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& \cdots & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
& & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
& \cdots & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

第 i 行の c 倍を第 j 行に加える.

$$
F_{i,j}(c) = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & \vdots & & \vdots & & \\
& \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
& \cdots & 1 & & \vdots & & \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
& \cdots & c & \cdots & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad (i < j), \qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & j & & i & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & \vdots & & \vdots & & \\
& \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
& \cdots & 1 & \cdots & c & & \\
& & & \ddots & \vdots & & \\
& \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad (i > j)
$$

第 i 行を c 倍する.

$$
M_i(c) = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
& \cdots & & c & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

演習 4.2.4. $C_{i,j}^{-1} = C_{i,j}$, $F_{i,j}(c)^{-1} = F_{i,j}(-c)$, $M_i(c)^{-1} = M_i(c^{-1})$ を示せ.

行基本変形は，行列に左から正則行列を掛けて行列を簡単な形に変えていく操作と見る事ができる.

注意 4.2.5 (掃き出し法による逆行列の計算)**.** n 次正方行列 A の逆行列 X を求めるには，$AX = E$ を解けばよい．これは次のような連立 1 次方程式なので，この連立 1 次方程式を同時に解く掃き出し法で逆行列を求める事ができる．

$$\begin{cases} a_{1,1}x_{1,1} + \cdots + a_{1,n}x_{n,1} = 1 \\ a_{2,1}x_{1,1} + \cdots + a_{2,n}x_{n,1} = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n,1}x_{1,1} + \cdots + a_{n,n}x_{n,1} = 0 \end{cases}, \dots, \begin{cases} a_{1,1}x_{n,1} + \cdots + a_{1,n}x_{n,n} = 0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n-1,1}x_{n,1} + \cdots + a_{n-1,n}x_{n,n} = 0 \\ a_{n,1}x_{n,1} + \cdots + a_{n,n}x_{n,n} = 1 \end{cases}.$$

例 4.2.6. 掃き出し法で $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみよう．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{逆行列を求めたい行列の右側に単位行列を書く．}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{第 2 行から第 1 行を引く．} \\ \text{第 3 行から第 1 行の 2 倍を引く．} \end{array}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{第 2 行を } -\tfrac{1}{2} \text{ 倍する}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{5}{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{第 1 行から第 2 行を引く．} \\ \\ \text{第 3 行に第 2 行の 3 倍を足す．} \end{array}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \quad \text{第 3 行を } -\tfrac{2}{5} \text{ 倍する．}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{第 1 行から第 3 行の } \tfrac{3}{2} \text{ 倍を引く．} \\ \text{第 2 行に第 3 行の } \tfrac{1}{2} \text{ 倍を足す．} \end{array}$$

最後の右側の行列が逆行列である．なお，掃き出しの計算には必要ないが，行基本変形は左からある行列をかけることであったから、左端にその基本変形に対応する行列を書いている．構成より，

$$\begin{aligned} B_5B_4B_3B_2B_1A &= E \\ B_5B_4B_3B_2B_1E &= A^{-1} \end{aligned}$$

である．

注意 4.2.7 (掃き出し法による行列式の計算)**.** 掃き出し法は与えられた行列 A に左から行列 $C_{i,j}$, $F_{i,j}(c)$, $M_i(c)$ をかけて単位行列に変形する操作である．

$$\det C_{i,j} = -1, \qquad \det(F_{i,j}(c)) = 1, \qquad \det(M_i(c)) = c$$

なので，掃き出し法で，元の行列 A の行列式が分かる．実際，上の例では

$$F_{3,2}(\tfrac{1}{2})F_{3,1}(-\tfrac{3}{2})M_3(-\tfrac{2}{5})F_{2,3}(3)F_{2,1}(-1)M_2(-\tfrac{1}{2})F_{1,3}(-2)F_{1,2}(-1)A = E \tag{4.2.8}$$

なので，行列式をとれば

$$\left(-\tfrac{2}{5}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\det(A) = 1$$

となり $\det(A) = 5$ が分かる．一般に，基本変形の各ステップでのピボットの積を基本変形で行った行交換の回数だけ符号を変えて得られる値が行列式である．(4.2.8) を見れば

$$\begin{aligned} A =&(F_{3,2}(\tfrac{1}{2})F_{3,1}(-\tfrac{3}{2})M_3(-\tfrac{2}{5})F_{2,3}(3)F_{2,1}(-1)M_2(-\tfrac{1}{2})F_{1,3}(-2)F_{1,2}(-1))^{-1} \\ =&F_{1,2}(1)F_{1,3}(2)M_2(-2)F_{2,1}(1)F_{2,3}(-3)M_3(-\tfrac{5}{2})F_{3,1}(\tfrac{3}{2})F_{3,2}(-\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

である．この様に任意の正則行列が，基本変形の行列 $C_{i,j}$, $F_{i,j}(c)$, $M_i(c)$ の積で表せるのである．

行（または列）基本変形は左（または右）から正則行列をかける操作なので，基本変形によって行列の階数は変わらない．

定理 4.2.9. 行列の階数が r ならば，行基本変形と列の入れ替えによって次の形の行列に変形される．

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} \quad (A \text{ は } r \text{ 次正方行列で } \det A \neq 0), \qquad \begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

証明. 階数が r ならば，行の入れ替え，列の入れ替えによって左上の r 次小行列が正則として良い．それを A と置き，考えている行列を $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ と書くと

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ -CA^{-1} & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

これに左から $\left(\begin{smallmatrix} A^{-1} & O \\ O & E_{m-r} \end{smallmatrix}\right)$ をかけると，次式を得る．

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -CA^{-1} & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & A^{-1}B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \tag{4.2.10}$$

$D - CA^{-1}B$ が零行列でないと階数が r より大きくなり矛盾なので，$D - CA^{-1}B$ は零行列である． □

行基本変形により，行列の階数も分かり，連立 1 次方程式の解の構造が具体的にわかるのである．

4.2.3　列基本変形

与えられた行列に

- 右から $C_{i,j}$ をかけると第 i 列と第 j 列の入れ替え
- 右から $F_{i,j}(c)$ をかけると第 j 列の c 倍を第 i 列にくわえる
- 右から $M_i(c)$ をかけると第 i 列を c 倍する

操作になっている．これを列基本変形という．列基本変形は右から行列 $C_{i,j}$，$F_{j,j}(c)$，$M_{i(c)}$ を掛ける操作であり，列基本変形についても行基本変形と同様のことが成立する．

定理 4.2.11. 行列の階数が r ならば，列基本変形と行の入れ替えによって次の形の行列に変形される．

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & O \end{pmatrix} \quad (A \text{ は } r \text{ 次正方行列で } \det A \neq 0), \qquad \begin{pmatrix} E_r & O \\ C & O \end{pmatrix}$$

証明. 階数が r ならば，行の入れ替え，列の入れ替えによって左上の r 次小行列が正則として良い．それを A として，考えている行列を $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ と書くと

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

これに右から $\left(\begin{smallmatrix} A^{-1} & O \\ O & E_{m-r} \end{smallmatrix}\right)$ をかけると

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & O \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \tag{4.2.12}$$

$D - CA^{-1}B$ が零行列でないと階数が r より大きくなり矛盾なので，$D - CA^{-1}B$ は零行列である．後は，任意の行列は基本変形の行列の積で表せる事を思い出せば良い． □

定理 4.2.13. 行列の階数が r ならば，行または列の基本変形により $\left(\begin{smallmatrix} E_r & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ にする事ができる．

証明. 例えば，(4.2.10) に右から $\left(\begin{smallmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{smallmatrix}\right)$ を掛けて得られる式

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ -CA^{-1} & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

は (4.2.10) の右辺に列基本変形を施して上式の右辺を得ると解釈することが出来る．もし階数が r ならば $D - CA^{-1}B = O$ であり，証明を終わる． □

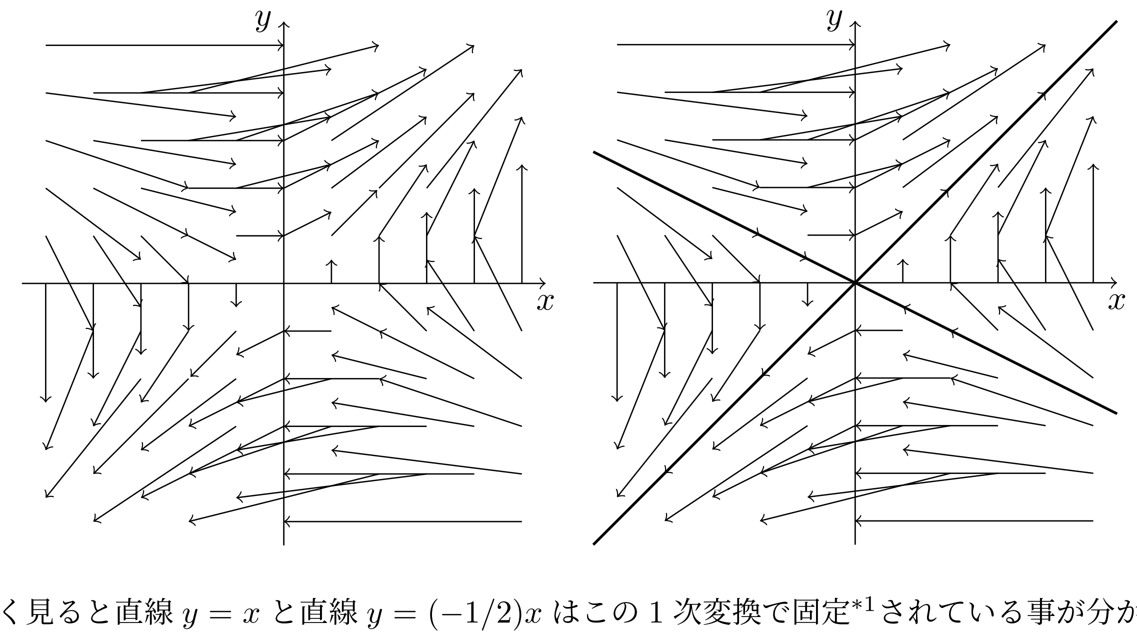
第 5 章

固有値と固有ベクトル

線形写像が行列で表せるとき，その行列の固有値は線形写像の特徴を表す重要な量である．本章では固有値の基礎事項を解説する．

5.1 固有値の定義

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ とし，1 次変換 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, を考える．元の点と写した先の点を矢線で結んで見てみよう（左図）.



よく見ると直線 $y = x$ と直線 $y = (-1/2)x$ はこの 1 次変換で固定*1されている事が分かる（右図）．行列 A からこの直線を見出すには定数 λ と，次式を満たす $\boldsymbol{x}$ を見い出せば良

*1 直線上の各点を固定するわけではなく，直線上の点をこの直線上の別の点に写している．考えている 1 次変換は集合としてこの直線を固定しているのである.

い事が分かる．

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

これは次の同次連立 1 次方程式が非自明解をもつという事である．

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

よって，$\det(A - \lambda E) = 0$ を得る．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\tfrac{3}{2}-\lambda) - \tfrac{1}{2} = \lambda^2 - \tfrac{5}{2}\lambda + 1 = (\lambda - 2)(\lambda - \tfrac{1}{2})$$

より $\lambda = 2, \frac{1}{2}$ で，対応するベクトル $\boldsymbol{x}$ はそれぞれ $\binom{1}{1}$, $\binom{2}{-1}$ の定数倍である．

定義 5.1.1 (固有値，固有ベクトル)**.** A を n 次正方行列とする．

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

をみたす $\boldsymbol{x}$ が存在する λ を A の**固有値** (eigenvalue) といい，そのときの $\boldsymbol{x}$ を λ の**固有ベクトル** (eigenvector) という．固有値 λ は方程式 $\det(A - \lambda E) = 0$ を解く事で得られる．

次式で定まる $\varphi_A(\lambda)$ を A の**固有多項式** (eigenpolynomial) という．

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} \tag{5.1.2}$$

$\varphi_A(\lambda) = 0$ を**固有方程式** (eigenequation) という．

固有値 λ は固有方程式の解（固有多項式の根）である．

定義 5.1.3. 固有値 λ に対し，**固有空間** (eigenspace) を次で定める．

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

固有方程式 $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$ は複素数解をもつかもしれない．従って固有値としては，複素数も許し，固有ベクトルとしては複素ベクトルを考える必要がときに起こってくる．実は，最初から，複素ベクトル空間で固有値，固有ベクトルを考え，複素ベクトル空間としての固有空間

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

を考えたほうが，理論上は見通しが良い．一般に，体 $\mathbb{K}$ の元を要素とする行列 A の固有空間の定義も同じである．

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$$

注意 5.1.4 (固有多項式の係数)**.** 固有多項式の係数と固有値の関係を見ておこう．

$$\varphi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + \cdots + s_{n-1}\lambda + s_n)$$

とおく．s_k は次の様に表示される．

$$s_k = (-1)^k \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \begin{vmatrix} a_{j_1,j_1} & a_{j_1,j_2} & \cdots & a_{j_1,j_k} \\ a_{j_2,j_1} & a_{j_2,j_2} & \cdots & a_{j_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_k,j_1} & a_{j_k,j_2} & \cdots & a_{j_k,j_k} \end{vmatrix} \tag{5.1.5}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を A の固有値とする．

$$\varphi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

より，次が分かる．

$$s_k = (-1)^k \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_k}$$

特に

$$\begin{aligned} \det(A) =& (-1)^n s_n = \lambda_1 \cdots \lambda_n \\ a_{1,1} + \cdots + a_{n,n} =& -s_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

式 (5.1.6) の値を行列 A の**トレース** (trace) といい $\mathrm{tr}(A)$ で表す．

式 (5.1.5) は次の様にわかる．φ_A を λ で微分すると

$$\begin{aligned} \varphi_A'(\lambda) =& \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1}-\lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ =& -\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} - \cdots - \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1}-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

を得る．$n-k$ 回微分を繰り返して得られる式

$$\varphi_A^{(n-k)}(\lambda) = (n-k)!(-1)^{n-k} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1}-\lambda & \cdots & a_{i_1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & \cdots & a_{i_k,i_k}-\lambda \end{vmatrix}$$

に $\lambda = 0$ を代入して (5.1.5) を得る．

注意 5.1.7. 歴史的には固有値と固有ベクトルの概念は 18 世紀に現れた．現在の言葉で言うと，t を変数とするベクトル値関数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ を未知関数とする，常微分方程式 $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$，ただし A は行列，の解の挙動を理解する事が動機であった．この方程式の解の挙動は，5.7 節で説明する．固有値の英語 eigenvalue はドイツ語と英語に起源を持つ造語

である．イギリスの天文学者 Eddington の Nature 掲載の論文（1927 年）が英語圏では初出らしい．それまでは proper value, characteristic value, latent value 等の言葉が使われていたが，第 2 次世界大戦後 eigenvalue の語が広く使われる様になった[*2].

注意 5.1.8 (共役な行列)**.** 正方行列 A, B に対し，$P^{-1}AP = B$ を満たす正則行列 P が存在するとき A と B は**共役である**という．$\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{w}$ とおくとき，$AP = PB$ なので

$$\boldsymbol{v} \text{ は } A \text{ の } \lambda \text{ 固有ベクトル} \iff \boldsymbol{w} \text{ は } B \text{ の } \lambda \text{ 固有ベクトル}$$

であり A と B の固有値は一致することがわかる．

$$\varphi_B(\lambda) = |P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}||A - \lambda E||P| = |A - \lambda E| = \varphi_A(\lambda)$$

なので，共役な行列は同じ固有多項式を持つ事がわかる．

注意 5.1.9 (線形写像の固有値)**.** 固有値，固有ベクトルの概念は線形写像 $f : V \to V$ に対しても定義される．即ち，$f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ なる $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, λ を f の**固有値**といい，そのときの $\boldsymbol{v}$ を λ に対する**固有ベクトル**という．λ 固有空間を次で定める．

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}\}$$

V が有限次元のとき，V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を取り，$f(\boldsymbol{e}_i) = a_{i,1}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{i,n}\boldsymbol{e}_n$ で f の表現行列 $A = (a_{i,j})$ を定めれば，行列 A の固有値が f の固有値である．行列 A は基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に依存するが，固有値の定義は基底に依存しないので，基底を変えて f の別の表現行列を用いてその固有値を計算しても，得られる値は変わらない事を注意しておく．これは，注意 5.1.8 で述べたことからもわかる．

例 5.1.10. 行列 A に逆行列が存在するとき，逆行列 A^{-1} の固有値は A の固有値の逆数である．実際，A に逆行列が存在すれば $|A| \neq 0$ で A の固有値は 0 ではない．よって $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ とすれば $\lambda^{-1}\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{v}$ となるからである．

$$|A - \lambda E| = |\lambda A(E - \lambda^{-1}A^{-1})| = |\lambda A||\lambda^{-1}E - A^{-1}| = (-1)^n|\lambda A||A^{-1} - \lambda^{-1}E|$$

からも，逆行列 A^{-1} の固有値は A の固有値の逆数である事がわかる．

演習 5.1.11. 転置行列の固有値は元の行列の固有値と一致する．

行列 A の固有値を λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ とすると

$$A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i, \qquad \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

[*2] 藤野 清次, Garry J.Tee, Rümldiger Weiss, ドイツ語と英語が合成された学術用語“Eigenvalue”に関する数理的考察, 情報処理学会研究報告ハイパフォーマンスコンピューティング（HPC）115 巻 1998, pp. 7–12.

なる $\boldsymbol{x}_i$ が存在する．これを行列を用いてまとめて次のように書く．

$$A(\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_m) = (\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_m)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m\end{pmatrix}$$

定理 5.1.12. 相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は 1 次独立である．

証明. $m=1$ のとき，固有ベクトルは零ベクトルでないので主張は自明．m のとき正しいとする．固有値 λ_{m+1} に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_{m+1}$ が $\boldsymbol{x}_{m+1} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m$ と書けたとして矛盾を導く．

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1} =& A\boldsymbol{x}_{m+1} = A(c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m) = c_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_m\lambda_m\boldsymbol{x}_m \\ \lambda_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1} =& c_1\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_m\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}_m\end{aligned}$$

より

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})\boldsymbol{x}_m$$

であり，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は 1 次従属となり矛盾． □

$P^{-1}AP$ が対角行列になる正則行列 P が存在するとき，A は**対角化可能**であるという．

定理 5.1.13. n 次正方行列が n 個の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持てば対角化可能である．また，A が対角化可能ならば，対角行列 $P^{-1}AP$ の対角成分は行列 A の固有値である．

証明. 前定理より $P = (\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$ が正則行列なので，

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{5.1.14}$$

と置けば，$AP = P\Lambda$ より，$P^{-1}AP = \Lambda$ を得る．

逆に A が対角化可能ならば，対角行列 Λ を (5.1.14) で定め，$P^{-1}AP = \Lambda$ となる正則行列 P がある．$P = (\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$ とおけば，$AP = P\Lambda$ より $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_i \neq \mathbf{0}$, なので λ_i は A の固有値である．P は A の固有ベクトルを並べて得られる事も分かる． □

対角化可能でない行列もある．

例 5.1.15. $A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ と置くと固有多項式は $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2$ で，固有値は 0 となり $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ が固有ベクトルである．A は対角化可能でない．実際 $A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix}y_1&y_2\\0&0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

であるから $y_1 = y_2 = 0$ となり，$\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ は正則行列にならない．

例 5.1.16. $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ とおくと

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2\cos\theta)\lambda + 1$$

であり，固有値は $\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta$ となり，実数ではない．オイラーの公式 $e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ を用いれば，$e^{-\theta\sqrt{-1}}$, $e^{\theta\sqrt{-1}}$ が固有値であると言える．対応する固有ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ で表され，複素数の世界では次の様に対角化される．

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\theta\sqrt{-1}} & 0 \\ 0 & e^{\theta\sqrt{-1}} \end{pmatrix}$$

注意 5.1.17. 正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は，固有値 λ の固有空間の次元が固有値の重複度だけあることである．

例 5.1.18 (積の固有値)**.** n 次正方行列 A, B をとる．A^{-1} が存在すれば，$A^{-1}(AB)A = BA$ なので，AB は BA と共役でありその固有多項式は一致する．実は A^{-1} が存在しなくても，AB の固有多項式は BA の固有多項式に一致する．実際,

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -\frac{1}{\lambda}B & \frac{1}{\lambda}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda E & A \\ O & BA-\lambda^2 E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda E & A \\ B & -\lambda E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}E & -\frac{1}{\lambda}A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB-\lambda^2 E & O \\ B & -\lambda E \end{pmatrix}$$

なので

$$|BA - \lambda^2 E| = \begin{vmatrix} -\lambda E & A \\ B & -\lambda E \end{vmatrix} = |AB - \lambda^2 E|$$

となり AB の固有多項式は BA の固有多項式に一致する事がわかる．しかし，AB と BA は共役とは限らない．例えば，$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $AB = O$, $BA = B$ となり，$P^{-1}(AB)P = BA$ となる正則行列 P は存在しない事がわかる．

注意 5.1.19 (相対固有値)**.** n 次正方行列 A, B に対し

$$A\boldsymbol{x} = \lambda B\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},$$

なる $\boldsymbol{x}$ が存在するとき，λ を A の B に対する固有値，この $\boldsymbol{x}$ を A の B に対する固有ベクトルという．このとき $(A - \lambda B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるので，A の B に対する固有値は $\det(A - \lambda B) = 0$ を満たす．特に B が正則行列ならば A の B に対する固有値は $B^{-1}A$（または AB^{-1}）の固有値である．実際,

$$B(B^{-1}A - \lambda E)\boldsymbol{x} = (A - \lambda B)\boldsymbol{x} = (AB^{-1} - \lambda E)B\boldsymbol{x}$$

より，$\boldsymbol{x}$ が A の B に対する固有ベクトルならば，$B^{-1}A$ の固有ベクトルでもあり，$B\boldsymbol{x}$ は AB^{-1} の固有ベクトルである．

注意 5.1.20 (同時対角化 *). 対角化可能な n 次正方行列 A, B が可換, 即ち $AB = BA$, ならば, A と B は同時に対角化可能である. つまり, ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ が共に対角行列であるようにできる.

$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ を A の λ 固有空間の基底とすると

$$A(B\boldsymbol{x}_i) = (AB)\boldsymbol{x}_i = (BA)\boldsymbol{x}_i = B(A\boldsymbol{x}_i) = B(\lambda\boldsymbol{x}_i) = \lambda(B\boldsymbol{x}_i)$$

なので $B\boldsymbol{x}_i$ も A の λ 固有空間の元である. 即ち次のように書ける.

$$B(\boldsymbol{x}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{x}_m) = (\boldsymbol{x}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{x}_m)\begin{pmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & \ldots & c_{m,m} \end{pmatrix}$$

A は対角化可能なので A の固有ベクトルを並べて $\mathbb{K}^n$ の基底を構成することができ, その固有ベクトルをならべて行列 P を作ると $P^{-1}BP$ は対角線にあるブロック行列のみが零でない行列である. 各々のブロックの最小多項式[*3]の積が B の最小多項式なので, B が対角化可能であれば B の最小多項式は重複因子を持たず各ブロックも対角化可能である. 従って A が唯 1 つの固有値からなる場合に主張を証明しておけば十分である. そのときは A は $P^{-1}(\lambda E)P = \lambda E$ であるので主張は明らかである.

5.2　行列の上 3 角化

n 次正方行列を, 基底を取り替えて対角化できれば, 行列の冪の計算は簡単になる. しかし, 対角化できない行列もあるので, まずは上 3 角行列 (an upper triangular matrix)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

に直す事を考える. 上 3 角行列に直す利点は, 次の様な点にある.

- 上 3 角行列同士の積は上 3 角行列である. 対角成分はそれぞれ対応する対角成分の積になっている.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & * & \cdots & * \\ & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

[*3] 先走って説明している. 最小多項式の定義については 157 ページを見て下さい.

- 上 3 角行列 A の行列式は対角成分の積で与えられる．$A-\lambda E$ も上 3 角行列なのでその行列式は $A-\lambda E$ の対角成分の積である．よって上 3 角行列 A の対角成分は，行列 A の固有値である事がわかる．

定義 5.2.1 (直交行列)**.** ${}^tTT=E$ を満たす行列 T を**直交行列** (an orthogonal matrix) という．

直交行列を考える際は成分を実数に限定する事が多い．以後しばらくは実数を成分とする直交行列を考える．直交行列の行列式は ± 1 である．行列式が 1 の直交行列を**回転** (rotation) という．

注意 5.2.2. 直交行列を $T=(\boldsymbol{t}_1\ \cdots\ \boldsymbol{t}_n)$ と書くとき，$\boldsymbol{t}_i$ 達は長さが 1 で互いに直交する．実際，条件 ${}^tTT=E$ は，次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{t}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{t}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

言い換えると

$$\boldsymbol{t}_i\cdot\boldsymbol{t}_j={}^t\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j=\delta_{i,j}$$

であり，$\boldsymbol{t}_i$ 達は長さが 1 で互いに直交する．このような $\boldsymbol{t}_1,\ldots,\boldsymbol{t}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の**正規直交基底**という．

例 5.2.3. 2 次の直交行列は次の形をしている．

$$T=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}),\quad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^2,\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$$

よって次のいずれかの形になることがわかる．

$$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$\det T=1,-1$ となっている．

直交行列に関する性質をまとめておこう．

(i) T が直交行列ならばその転置行列が逆行列である．$T^{-1}={}^tT$．したがって直交行列の転置行列も直交行列である．$T\,{}^tT=TT^{-1}=E$.

(ii) 直交行列の積は直交行列である．

$${}^t(T_1T_2)(T_1T_2)=({}^tT_2{}^tT_1)(T_1T_2)={}^tT_2({}^tT_1T_1)T_2={}^tT_2T_2=E$$

(iii) T が $n-1$ 次の直交行列ならば，$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&T\end{smallmatrix}\right)$ は n 次直交行列になる．

$${}^t\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&{}^tT\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&{}^tTT\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&E\end{pmatrix}$$

(i), (ii) より直交行列全体は群をなすことがわかる．行列式の値が 1 であるような直交行列を**回転** (a rotation) という．回転全体も群をなす．n 次直交行列全体を $\mathrm{O}(n)$, n 次の回転全体を $\mathrm{SO}(n)$ で表す．

注意 5.2.4. $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ があったとき

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_i \rangle_{\mathbb{R}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

をみたすような直交行列 $T = (\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n)$ が存在する．これは帰納的に次のように構成する．まず $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{v}_1/|\boldsymbol{v}_1|$ とする．$\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_i$ まで構成できたとすると

$$\boldsymbol{t}_{i+1} = \frac{\pi_i(\boldsymbol{v}_{i+1})}{|\pi_i(\boldsymbol{v}_{i+1})|} \qquad \text{ただし} \quad \pi_i : \mathbb{R}^n \to \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i \rangle^{\perp} \quad \text{は直交射影}$$

とおけば良い．

次の定理はしばしばシューア (Schur) の 3 角化定理と呼ばれる．

定理 5.2.5 (3 角化可能定理)**.** n 次正方行列 A が重複度も込めて n 個の固有値をもつとき，正則行列 P をうまくとれば $P^{-1}AP$ は上 3 角行列であるようにできる．なお，A が実行列のときは P は直交行列に取ることができる．

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らか．λ_1 を A の固有値とし $\boldsymbol{v}_1$ をその固有ベクトルとする．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となるように $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を選ぶと，次のように書ける．

$$A(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

2 番目の等号は左辺の各列を基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で表すことで得られる．A_1 の固有値は，A の固有値から λ_1 を（重複度を考慮して）除いたものであるので，

$$P_1^{-1} A_1 P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を満たす $n-1$ 次の正則行列 P_1 が存在する．これより

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を得る．$P_0 = (\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n)$ とおくと，次式を得る

$$P_0^{-1} A P_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

P_0, P_1 が正則行列なので，$P = P_0\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{smallmatrix}\right)$ も正則行列であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}^{-1} P_0^{-1}AP_0 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & *\\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & *\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

を得る．A が実行列のときは，注意 5.2.4 を勘案すれば，上述の証明で $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を正規直交基底に選ぶことができる．この場合は P_0 は直交行列で，帰納法の仮定から P_1 も直交行列に選べるので，P が直交行列であることもわかる．実は同様にして A が複素行列のときは P はユニタリー行列（後述）にとる事ができる． □

5.3　対称行列と 2 次形式

5.3.1　対称行列

${}^tA = A$ を満たす行列を**対称行列** (a symmetric matrix) という．

定理 5.3.1. 実対称行列の固有値はすべて実数である．

証明の前に，内積ついて注意しておく．
実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{y} = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{smallmatrix}\right)$ に対し，しばしば次の内積を考える．

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

これは複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{y} = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{smallmatrix}\right)$ に対し

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}} = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

と一般化される．これはエルミート内積と呼ばれ，複素数に値を持つが，次の性質を持つ．

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = x_1\bar{x}_1 + \cdots + x_n\bar{x}_n = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

定理 5.3.1 の証明. 固有多項式は複素数まで広げて考えると必ず根を持ち，複素数の世界では必ず固有値が求まる．この固有値が実は実数である事を示す．$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ とする．複素共役をとると $A\overline{\boldsymbol{x}} = \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$ であり，

$$\lambda{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t(\lambda\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = ({}^t\boldsymbol{x}{}^tA)\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}(\bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}) = \bar{\lambda}{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}$$

が成り立つ．${}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \neq 0$ より $\lambda = \bar{\lambda}$. 即ち，λ は実数である． □

定理 5.3.2. 実対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

証明. λ_1, λ_2 を実対称行列 A の相異なる固有値，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を対応する固有ベクトルとすると，$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, $A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2\boldsymbol{x}_2$. よって

$$\lambda_1{}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = {}^t(\lambda_1\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_2 = {}^t(A\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_2 = {}^t\boldsymbol{x}_1{}^tA\boldsymbol{x}_2 = {}^t\boldsymbol{x}_1A\boldsymbol{x}_2 = {}^t\boldsymbol{x}_1\lambda_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2{}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より ${}^t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = 0$. つまり $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は直交する． □

定理 5.3.3. 実対称行列は直交行列により対角化可能である．

証明. 定理 5.2.5 より $\Lambda = {}^tTAT$ が上 3 角行列であるような直交行列 T が存在する．

$${}^t\Lambda = {}^t({}^tTAT) = {}^tT{}^tAT = {}^tTAT = \Lambda$$

なので，上 3 角行列 Λ は対称行列である事がわかり，対角行列になる． □

固有値がすべて正であるような対称行列を**正定値**対称行列という．

p, q をそれぞれ対称行列 A の正負の固有値の個数とする．(p, q) を A の**符号数** (signature) という．

系 5.3.4. (i) 交代行列 A（即ち，${}^tA = -A$）の固有値は 0 か純虚数である．

(ii) 直交行列 T の固有値の絶対値は 1 である．

証明. (i) 定理 5.3.1 の証明中の記号を使う．$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ とする．複素共役をとると $A\overline{\boldsymbol{x}} = \bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}$ であり，

$$\lambda{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t(\lambda\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{x}} = ({}^t\boldsymbol{x}{}^tA)\overline{\boldsymbol{x}} = -{}^t\boldsymbol{x}A\overline{\boldsymbol{x}} = -{}^t\boldsymbol{x}(\bar{\lambda}\overline{\boldsymbol{x}}) = -\bar{\lambda}{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}$$

が成り立つ．${}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \neq 0$ より $\lambda = -\bar{\lambda}$. 即ち，λ は 0 か純虚数である．

(ii) λ を直交行列 T の固有値とすると，$T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, なる $\boldsymbol{x}$ が存在する．

$$|\lambda|^2{}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t(\lambda\boldsymbol{x})(\overline{\lambda\boldsymbol{x}}) = {}^t(T\boldsymbol{x})(\overline{T\boldsymbol{x}}) = {}^t\boldsymbol{x}{}^tT T\overline{\boldsymbol{x}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}$$

より $|\lambda| = 1$ がわかる． □

注意 5.3.5 (ケーリー変換)**.** 交代行列 A に対し $T = (E + A)(E - A)^{-1}$ は直交行列である．実際，A が交代行列であるから ${}^tA = -A$ でありその固有値は 0 か 純虚数である．よって $\det(E - A)$ は零でなく $(E - A)$ の逆行列が存在する．

$$\begin{aligned}
{}^tTT =& {}^t((E + A)(E - A)^{-1})T = {}^t(E - A)^{-1}{}^t(E + A)T \\
=& (E - {}^tA)^{-1}{}^t(E + A)T = (E + A)^{-1}(E - A)(E + A)(E - A)^{-1} \\
=& (E + A)^{-1}(E - A^2)(E - A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E + A)(E - A)(E - A)^{-1} = E
\end{aligned}$$

なので A が直交行列であることがわかる．交代行列 A に対し tA も交代行列であるから $(E+tA)(E-tA)^{-1}$ は直交行列でこの行列式は ± 1. 連続性より $\det((E+tA)(E-tA)^{-1})$ は t について定数 ± 1 でなければならず，

$$\det(T) = \det(E+A)(E-A)^{-1} = \det(E+tA)(E-tA)^{-1} = \det(E+0A)(E-0A)^{-1} = 1$$

もわかる．なお $T = (E+A)(E-A)^{-1}$ を A について解くと

$$T(E-A) = E + A \text{ より } T - E = TA + A = (T+E)A$$

なので $T+E$ が正則ならば $A = (T+E)^{-1}(T-E)$ を得る．従って n 次交代行列全体を $\mathcal{A}_n$ と書くと，次の全単射が定まる．この写像を**ケーリー変換**という．

$$\mathcal{A}_n \longrightarrow \{T \in \mathrm{SO}(n) : \det(T+E) = 0\}, \quad A \longmapsto (E+A)(E-A)^{-1}.$$

5.3.2　2 次形式

実数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する同次 2 次式

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}, \quad A = (a_{i,j}) \quad a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbb{R}$$

を **2 次形式** (a quadrtic form) という．A は実対称行列なので，${}^tTAT$ が対角行列 Λ となるような直交行列 T が存在する．Λ の対角成分を順に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすれば $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}'$ とおくと，次式を得る．

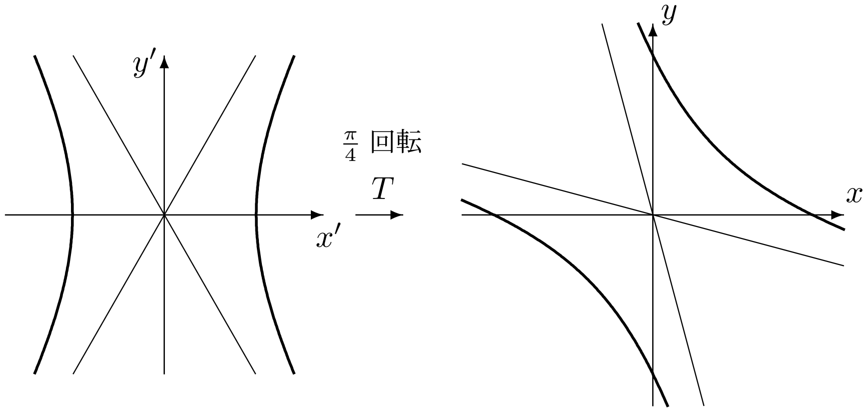
$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}' {}^tTAT \boldsymbol{x}' = {}^t\boldsymbol{x}' \Lambda \boldsymbol{x}' = \lambda_1 (x_1')^2 + \cdots + \lambda_n (x_n')^2 \tag{5.3.6}$$

対称行列 A が正定値ならば，固有値はすべて正であり $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ がわかる．$Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ を満たす 2 次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ を**正定値** 2 次形式という．

例 5.3.7. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ はどのような図形か調べよう．$Q = x^2 + 4xy + y^2$ とおくと $Q = (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である．$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，A の固有値は 3, -1, 固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，これは $\pi/4$ 回転を表す行列で ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ と置くと，点 (x, y) は点 (x', y') を $\pi/4$ 回転して得られる点で

$$Q = (x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x'\ y')\,{}^tPAP\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x'\ y')\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3(x')^2 - (y')^2$$

であるから，$x^2 + 4xy + y^2 = 1$ は双曲線 $3(x')^2 - (y')^2 = 1$ を原点の周りに $\pi/4$ 回転して得られる軌跡を表す．



クーラント (Courant) による 2 次形式の最小最大原理 (Courant minimax principle) を説明する．まず次の不等式に注意する．

例 5.3.8. $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ のとき，次の不等式が成立する．

$$\lambda_1 \leq \frac{\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq \lambda_n \qquad \text{但し } (x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

$(x_1, \ldots, x_n) = (1, 0, \ldots, 0)$ のとき左側の等号が成立し，$(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, 1)$ のとき右側の等号が成立する．これは次式の帰結である．

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_1 x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq \frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq \frac{\lambda_n x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \lambda_n$$

n 次対称行列 A の定める $V = \mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式

$$Q : V \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \tag{5.3.9}$$

に対して $m_k(Q)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} m_k(Q) &= \min\{\max{}_W(Q) : W \text{ は } V \text{ の } k \text{ 次元部分空間 }\}, \\ \max{}_W(Q) &= \max\{Q(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in W,\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\} \end{aligned}$$

定理 5.3.10 (最小最大原理)**.** 実対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ならば，(5.3.9) で定めた 2 次形式 Q に対して

$$\lambda_k = m_k(Q).$$

証明. ${}^tTAT$ が対角行列 Λ になるような直交行列 T が存在するので $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と置くと，$\|\boldsymbol{x}\| = ({}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})^{1/2} = ({}^t\boldsymbol{y}{}^tTT\boldsymbol{y})^{1/2} = ({}^t\boldsymbol{y}\boldsymbol{y})^{1/2} = \|\boldsymbol{y}\|$ で，

$$Q = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}{}^tTAT\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}\Lambda\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

となる．よって $Q = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ として証明すれば良い．$W_0 = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$ とすると $\lambda_k = \max_{W_0}(Q)$ なので

$$\lambda_k = \max{}_{W_0}(Q) \geq \min\{\max{}_W(Q) : \dim W = k\} = m_k(Q).$$

よって $\lambda_k \le m_k(Q)$ を示せば良い．例 5.3.8 より $\lambda_1 = m_1(Q)$ が分かる．$k \ge 2$ のときは次のようにする．$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_k, \dots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ とおくと，例 5.3.8 より $\boldsymbol{w} \in W_1$, $\|\boldsymbol{w}\| = 1$ ならば $Q(\boldsymbol{w}) \ge \lambda_k$. W_1 は余次元 $k-1$ 次元だから任意の k 次元部分空間 W と $\{\boldsymbol{0}\}$ 以外で交わる．$\boldsymbol{w}_1 \in W \cap W_1$, $\|\boldsymbol{w}_1\| = 1$, をとると

$$\max_W(Q) = \max\{Q(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in W, \|\boldsymbol{w}\| = 1\} \ge Q(\boldsymbol{w}_1) \ge \lambda_k.$$

よって $m_k(Q) = \min\{\max_W(Q) : \dim W = k\} \ge \lambda_k$. □

系 5.3.11. $\min_W(Q) = \min\{Q(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in W\}$ とおくと

$$\lambda_{n+1-k} = \max_{W:\dim W = k} \min_W(Q).$$

但し $\min_W(Q) = \min\{Q(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in W, \|\boldsymbol{w}\| = 1\}$ である．

証明. $-Q$ に前定理を適用すると，

$$-\lambda_{n+1-k} = \min_{W:\dim W = k} \max_W(-Q) = -\max_{W:\dim W = k} \min_W(Q)$$

を得るので，主張は従う． □

系 5.3.11 を次の形に書くこともできる．

$$\lambda_k = \max_{W:\dim W = n+1-k} \min_W(Q)$$

これを, 定理 5.3.10 に倣って証明してみよう．$Q = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ として証明すればよい．$W_0 = \langle \boldsymbol{e}_k, \dots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ と置くと，$\lambda_k = \min_{W_0} Q \le$ 右辺，がわかる．$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k \rangle$ と置くとこれは k 次元なので，任意の $n+1-k$ 次元部分空間 W に対し $W_1 \cap W$ は 1 次元以上で交わる．$\boldsymbol{w}_1 \in W \cap W_1$, $\|\boldsymbol{w}_1\| = 1$, を取ると

$$\min_W(Q) \le Q(\boldsymbol{w}_1) \le \lambda_k$$

となり，任意の $n+1-k$ 次元部分空間 W に対し $\min_W(Q) \le \lambda_k$ が成立するので，

$$\max_{W:\dim W = n+1-k} \min_W(Q) \le \lambda_k$$

となり証明が完了する．

$V = \mathbb{R}^n$ の部分空間 W に対して，2 次形式 $Q : V \to \mathbb{R}$ の W への制限は W の 2 次形式と見ることができる．実際，V の正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n$ で，最初の k 個が部分空間 W を生成する，即ち $W = \langle \boldsymbol{p}_1 \dots, \boldsymbol{p}_k \rangle_{\mathbb{R}}$ なるもの，を取る．$\boldsymbol{x} = y_1 \boldsymbol{p}_1 + \cdots + y_n \boldsymbol{p}_n$, $\boldsymbol{p}_i = \begin{pmatrix} p_{1,i} \\ \vdots \\ p_{n,i} \end{pmatrix}$, と書くとき

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 p_{1,1} + \cdots + y_n p_{1,n} \\ \cdots \\ y_1 p_{n,1} + \cdots + y_n p_{n,n} \end{pmatrix} = P\boldsymbol{y}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

なので

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y}, \quad B = {}^tPAP$$

となる．$B = (b_{i,j})$ は対称行列であるので

$$Q(y_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + y_k\boldsymbol{p}_k) = \sum_{i,j=1}^{k} b_{i,j}y_iy_j \tag{5.3.12}$$

は $y_1, \ldots, y_k$ の 2 次形式である．$\mathbb{R}^k \to W$, $(y_1, \ldots, y_k) \mapsto y_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + y_k\boldsymbol{p}_k$ で $\mathbb{R}^k$ と W を同一視することにより Q の W への制限は (5.3.12) で表され，これを W 上の 2 次形式と見ることができる．

固有値 λ_i は 2 次形式 $Q : V \to \mathbb{R}$ によって定まるので，複数の 2 次形式を考えるときは λ_i と書かずに $\lambda_i(Q)$ と書くのが混乱が少ない．固有値はすべて実数なので

$$\lambda_1(Q) \leq \lambda_2(Q) \leq \cdots \leq \lambda_n(Q)$$

となるように添字の付け方を約束しておく．$\lambda_i(Q)$ を 2 次形式 Q の第 i 固有値という．

定理 5.3.13 (コーシー)**.** V_1 を $n-1$ 次元部分空間，$Q_1 = Q|_{V_1}$ とすると

$$\lambda_i(Q) \leq \lambda_i(Q_1) \leq \lambda_{i+1}(Q), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

言い換えると次の不等式が成立する．

$$\lambda_1(Q) \leq \lambda_1(Q_1) \leq \lambda_2(Q) \leq \lambda_2(Q_1) \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}(Q) \leq \lambda_{n-1}(Q_1) \leq \lambda_n(Q)$$

証明. V_1 の i 次元部分空間は V の i 次元部分空間なので $\lambda_i(Q_1) \geq \lambda_i(Q)$.

$$-\lambda_i(Q_1) = \lambda_{n-1-i}(-Q_1) \geq \lambda_{n-1-i}(-Q) = -\lambda_{i+1}(Q)$$

より $\lambda_i(Q|_{V_1}) \leq \lambda_{i+1}(Q)$ が分かる． □

例 5.3.14. $p + q \leq n$ とし，$\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式 $Q = -x_1^2 - \cdots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \cdots + x_{p+q}^2$ に対し，$\dim W \geq n - p + 1$ ならば $1 = \lambda_{n-p+1} \leq m_W(Q) = \max\{Q(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{v} \in W,\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ なので $Q|_W$ は恒等的に零となる事はない．$q \leq p$ ならば $n-p$ 次元部分空間 $\langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_{q+1}, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_{q+2}, \ldots, \boldsymbol{e}_q + \boldsymbol{e}_{2q}, \boldsymbol{e}_{p+q+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ 上 Q は恒等的に零である．よって次がわかる．

$$\max\{\dim W : Q|_W \text{が恒等的に零}\} = \min\{n-p, n-q\}$$

この式は，一般の 2 次形式 Q についても，p を正の固有値の個数，q を負の固有値の個数として成立する式である．

注意 5.3.15. 2 次の対称行列 A が回転 $T(\theta) = \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ で対角化できたとする．すると ${}^tT(\theta)A\,T(\theta) = \left(\begin{smallmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ なので，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} A =& T(\theta)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}{}^tT(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\cos\theta & \lambda_1\sin\theta \\ -\lambda_2\sin\theta & \lambda_2\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\cos^2\theta + \lambda_2\sin^2\theta & (\lambda_1+\lambda_2)\cos\theta\sin\theta \\ (\lambda_1+\lambda_2)\cos\theta\sin\theta & \lambda_1\sin^2\theta + \lambda_2\cos^2\theta\end{pmatrix} \\ =& \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

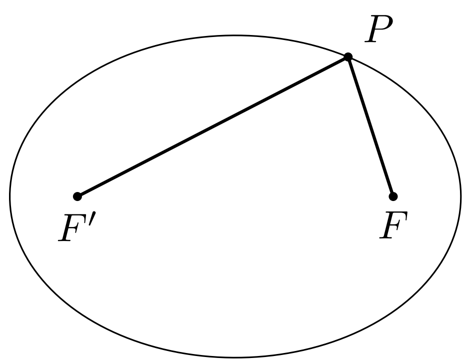
$A = \left(\begin{smallmatrix}a & b \\ b & c\end{smallmatrix}\right)$ と置くと，次が成立する事に注意しておく．

$$a + c = \lambda_1 + \lambda_2, \quad ac - b^2 = \lambda_1\lambda_2, \quad \begin{pmatrix}a - c \\ b\end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda_2)\begin{pmatrix}\cos 2\theta \\ \sin 2\theta\end{pmatrix}.$$

5.4　2 次曲線

5.4.1　楕円・放物線・双曲線

■楕円　2 点 F, F' からの距離の和が一定であるような点の軌跡を**楕円** (ellipse) という．F, F' を楕円の**焦点** (focus) という．楕円の定義式を求めてみよう．a を正定数，$0 < e < 1$ として，F を $(ea, 0)$, F' を $(-ea, 0)$, $\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$ とすると，楕円上の点 $P(x, y)$ の満たすべき条件は



$$\sqrt{(x+ea)^2 + y^2} + \sqrt{(x-ea)^2 + y^2} = 2a$$

である．左辺第 2 項を移項して 2 乗すれば

$$(x+ea)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-ea)^2 + y^2} + (x-ea)^2 + y^2$$

を得る．根号のない項を左辺に集めると

$$(x+ea)^2 - (x-ea)^2 - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-ea)^2 + y^2}$$

となる．左辺を整理して，両辺を $4a$ で割っておく．

$$ex - a = -\sqrt{(x-ea)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗すれば次を得る．

$$(ex - a)^2 = (x - ae)^2 + y^2$$

左辺を展開して，両辺の x の項が等しい事に注意すれば $(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2)$ を得るので，次の楕円の標準形を得る．

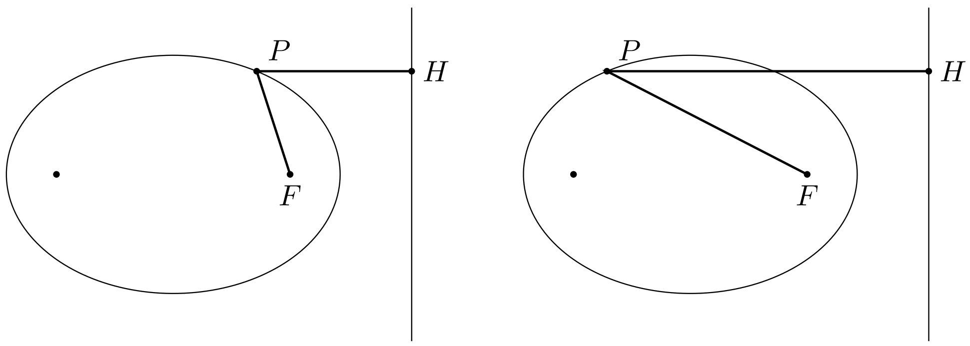
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{但し}\ b=a\sqrt{1-e^2}$$

このとき x 軸をこの楕円の長軸 (major axis)，y 軸をこの楕円の短軸 (minor axis)，長軸と短軸を併せて楕円の**主軸** (principal axes) という．e を**離心率** (eccentricity) といい，2 直線 $x=a/e$, $x=-a/e$ をそれぞれ焦点 F, F' に対応する**準線** (directrix) という．

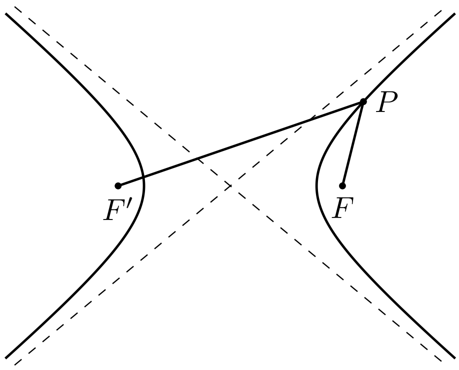
演習 5.4.1. 点 P での楕円の法線は $\angle FPF'$ を 2 等分することを示せ．

楕円上の点 P から 2 つの準線におろした垂線の足をそれぞれ H, H' とすると，

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}=\frac{\sqrt{(x-ea)^2+y^2}}{a/e-x}=\frac{a-ex}{a/e-x}=e. \quad \text{対称性より}\ \frac{\overline{PF'}}{\overline{PH'}}=e\ \text{もわかる．}$$



■双曲線　2 点 F, F' からの距離の差が一定であるような点の軌跡を**双曲線** (hyperbola) という．F, F' を双曲線の**焦点**という．



a を正定数，$e>1$ とする．F を $(ea,0)$, F' を $(-ea,0)$, $\overline{FP}-\overline{F'P}=\pm 2a$ とすると，双曲線上の点 $P(x,y)$ の満たすべき条件は

$$\sqrt{(x+ea)^2+y^2}-\sqrt{(x-ea)^2+y^2}=\pm 2a$$

である．左辺第 2 項を移項して 2 乗すれば

$$(x+ea)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-ea)^2+y^2}+(x-ea)^2+y^2$$

を得る．根号のない項を左辺に集めると

$$(x+ea)^2-(x-ea)^2-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-ea)^2+y^2}$$

となる．左辺を整理して，両辺を $4a$ で割っておく．

$$ex - a = \pm\sqrt{(x-ea)^2 + y^2}$$

両辺を 2 乗すれば次を得る．

$$(ex-a)^2 = (x-ae)^2 + y^2$$

展開して両辺の x の項が等しい事に注意すれば $(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2)$ を得るので次の双曲線の標準形を得る．

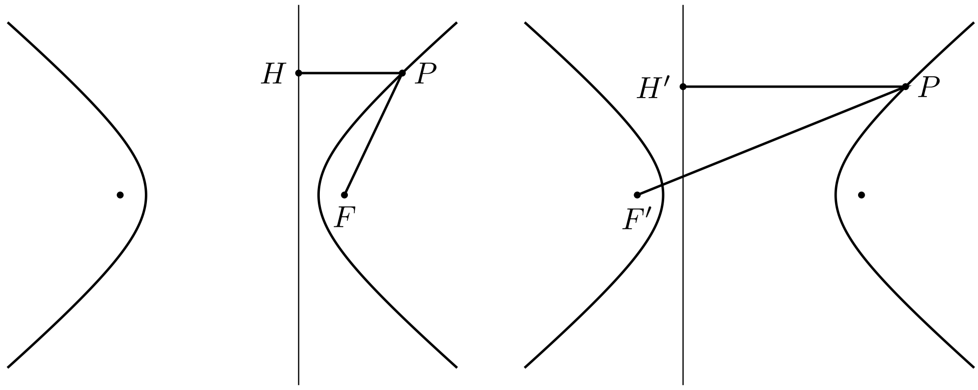
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{但し } b = a\sqrt{e^2-1}$$

演習 5.4.2. 点 P での双曲線の接線は $\angle FPF'$ を 2 等分することを示せ．

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ に対し $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ が決める 2 直線 $y = \pm\frac{b}{a}x$ をこの双曲線の**漸近線**(ぜんきんせん)(asymptote)[*4]という．原点より遠く離れた地点では双曲線はその漸近線と非常に近い．

このとき x 軸と y 軸をこの双曲線の**主軸** (principal axes) という．e を**離心率**といい，2 直線 $x = a/e$, $x = -a/e$ をそれぞれ焦点 F, F' に対応する**準線**という．双曲線上の点 P から 2 つの準線におろした垂線の足をそれぞれ H, H' とすると，

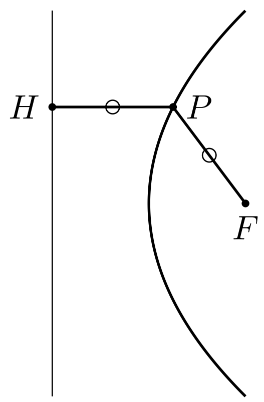
$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\sqrt{(x-ea)^2+y^2}}{a/e - x} = \frac{a - ex}{a/e - x} = e. \quad \text{同様に } \frac{\overline{PF'}}{\overline{PH'}} = e \text{ もわかる．}$$



[*4] 漸(ぜん)は「漸(ようや)く（なかなか実現しなかったことが，待ち望んだ末に実現するさま)」，「漸(ようよ)う（しだいに，だんだん)」に使われる漢字で，「暫(しばら)く（長くはないが，すぐともいえないほどの時間)」，「暫(ざん)時（しばらくの間)」に使われる暫(ざん)と混同しないようにしたい．

■**放物線**　定点 F と定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡を**放物線** (parabola) という．

F を放物線の**焦点**，ℓ を放物線の**準線**という．離心率 e は 1 である．焦点 F を $(a, 0)$, 準線を $x = -a$ とすれば，放物線上の点 $P(x, y)$ は次を満たす．



$$(x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2$$

整理すると放物線の標準形 $4ax = y^2$ を得る．このとき x 軸を放物線の対称軸という．

演習 5.4.3. 点 P での放物線の接線は $\angle FPH$ を 2 等分することを示せ.

演習 5.4.4. 定点 F と定直線 ℓ からの距離の比が一定である点の軌跡は楕円，双曲線，または放物線であることを示せ.

5.4.2　2 次曲線の分類

x, y の 2 次式

$$Q = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$$

を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $Q = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\widetilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$ で，$Q = 0$ の定める図形を考えよう．T を回転を表す直交変換として $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{x}' = \binom{x'}{y'}$, $\boldsymbol{p} = \binom{p_1}{p_2}$ と書くと，点 $\boldsymbol{x}$ は点 $\boldsymbol{x}'$ を T で回転させ更に $\boldsymbol{p}$ 平行移動して得られる．$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} T & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}'$ なので

$$\begin{aligned} Q &= {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\widetilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}'\begin{pmatrix} {}^tT & 0 \\ {}^t\boldsymbol{p} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T & \boldsymbol{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}' = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}'\begin{pmatrix} {}^tT & 0 \\ {}^t\boldsymbol{p} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} AT & A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b}T & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + c \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}' \\ &= {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}'\begin{pmatrix} {}^tTAT & {}^tT(A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}) \\ ({}^t\boldsymbol{p}A + {}^t\boldsymbol{b})T & {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} + 2{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{b} + c \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}' = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}'\begin{pmatrix} {}^tTAT & {}^tT(A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}) \\ {}^t(A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b})T & Q(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}' \end{aligned}$$

回転を表す直交行列 $T = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2)$ を $\boldsymbol{x}_1$ が λ_1 固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_2$ が λ_2 固有ベクトルなるようにとる．$\boldsymbol{b} = \hat{b}_1\boldsymbol{x}_1 + \hat{b}_2\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{p} = \hat{p}_1\boldsymbol{x}_1 + \hat{p}_2\boldsymbol{x}_2$ と書けば次が成り立つ．

$$A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} = (\hat{p}_1\lambda_1 + \hat{b}_1)\boldsymbol{x}_1 + (\hat{p}_2\lambda_2 + \hat{b}_2)\boldsymbol{x}_2 \tag{5.4.5}$$

$$Q(\boldsymbol{p}) = \lambda_1\hat{p}_1^2 + \lambda_2\hat{p}_2^2 + 2(\hat{b}_1\hat{p}_1 + \hat{b}_2\hat{p}_2) + c \tag{5.4.6}$$

■A が零固有値をもたないとき　λ_1, λ_2 共に零でなく $\det(A) \neq 0$. $A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{p}$ を選ぶと,

$$Q = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + Q(\boldsymbol{p})$$

となる. $Q(\boldsymbol{p}) = {}^t\boldsymbol{p}(A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + c = -{}^t\boldsymbol{b}A^{-1}\boldsymbol{b} + c$ に注意する.

(1a) λ_1, λ_2 が異符号で $Q(\boldsymbol{p}) \neq 0$ ならば双曲線
(1b) λ_1, λ_2 が異符号で $Q(\boldsymbol{p}) = 0$ ならば原点で交わる 2 直線
(1c) λ_1, λ_2 が同符号で $Q(\boldsymbol{p})$ がそれと異なる符号ならば楕円
(1d) λ_1, λ_2 が同符号で $Q(\boldsymbol{p}) = 0$ ならば 1 点
(1e) $\lambda_1, \lambda_2, Q(\boldsymbol{p})$ が同符号ならば空集合

■A が零固有値をもつとき　$A \neq O$ のとき $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ とできて $\det(A) = 0$. (5.4.5) より $A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} = \hat{b}_2\boldsymbol{v}_2$ なるように $\hat{p}_1$ を選ぶことができる.

(2a) $\boldsymbol{b}$ が λ_1 固有空間の元（即ち $\hat{b}_2 = 0$）ならば $A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{p}$ が存在し

$$Q = \lambda_1(x')^2 + Q(\boldsymbol{p})$$

なので λ_1 と $Q(\boldsymbol{p})$ が異符号ならば平行 2 直線, λ_1 と $Q(\boldsymbol{p})$ が同符号ならば空集合, $Q(\boldsymbol{p}) = 0$ ならば重なった直線である.

(2b) $\boldsymbol{b}$ が λ_1 固有空間の元でなければ $\hat{b}_2 \neq 0$ で (5.4.6) より, $Q(\boldsymbol{p}) = \lambda_1\hat{p}_1^2 + 2\hat{b}_2\hat{p}_2 + c$ が零となるように $\hat{p}_2$ が選べるので

$$Q = \lambda_1(x')^2 + \hat{b}_2 y',$$

となり, $Q = 0$ は放物線.

後述の定理 5.5.4 も考慮してまとめると次のようになる.

	$\lvert\widetilde{A}\rvert > 0$	$\lvert\widetilde{A}\rvert = 0$	$\lvert\widetilde{A}\rvert < 0$
$\lvert A\rvert > 0$	空集合	1 点	楕円
$\lvert A\rvert = 0$	放物線	(2a)	放物線
$\lvert A\rvert < 0$	双曲線	交わる 2 直線	双曲線

演習 5.4.7. 次の曲線の概形を描け.
(1) $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$　(2) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12x + 12y + 10 = 0$
(3) $x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2\sqrt{3}(x - y) = 0$.

5.4.3　2 次曲線の極双対性

定義 5.4.8 (極線)**.** 2 次曲線

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} \neq 0,$$

に対し，次で定まる直線を点 (p,q) の**極線** (polar) という．

$$(a_{11}p + a_{12}q + b_1)x + (a_{12}p + a_{22}q + b_2)y + b_1p + b_2q + c = 0 \tag{5.4.9}$$

式 (5.4.9) は次のように表示される．

$$\begin{pmatrix} p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.4.10}$$

注意 5.4.11. 楕円または双曲線 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ の準線上の点 $(\frac{a}{e}, q)$ に対応する極線は、

$$0 = \left(\tfrac{a}{e}, q, 1\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & & \\ & \frac{1}{a^2(1-e^2)} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{ea}, \tfrac{q}{a^2(1-e^2)}, 1\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\left(\frac{a}{e} - ae, q\right)\binom{x}{y}}{a^2(1-e^2)} + 1$$

であり，点 $(\frac{a}{e}, q)$ と対応する焦点 $(ae, 0)$ を結ぶ直線に直交する．

放物線 $4ax = y^2$ の準線上の点 $(-a, q)$ に対応する極線は、

$$0 = (-a, q, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (2a, q, -2a^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，点 $(-a, q)$ と焦点 $(a, 0)$ を結ぶ直線に直交する．

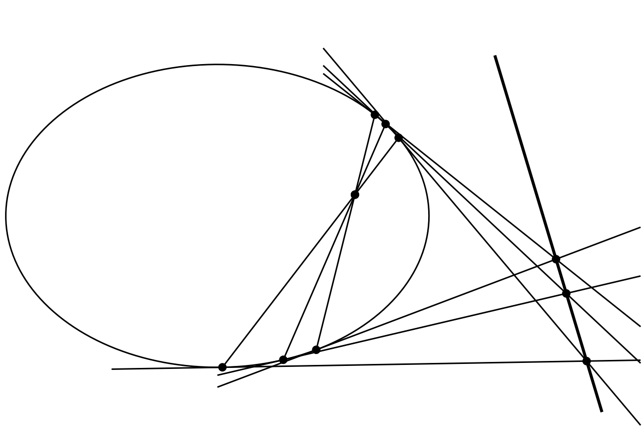
定理 5.4.12. 定義 5.4.8 の記号の下，次が成り立つ．

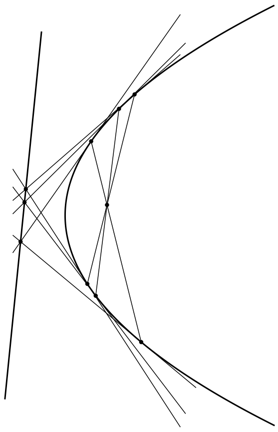
(i) 点 (p,q) が 2 次曲線上にあれば，極線は (p,q) を接点とする接線である．

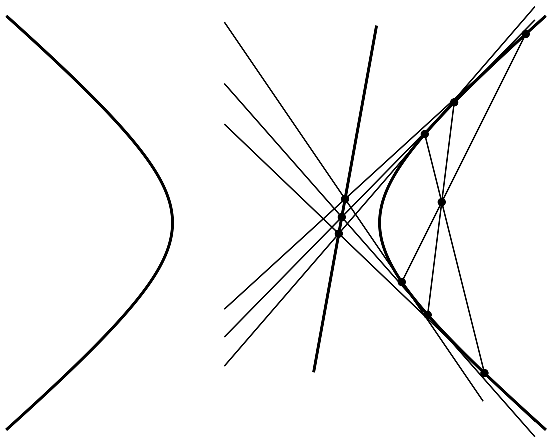
(ii) 点 (p,q) が 2 次曲線上にないとき，

　(a) 点 (p,q) を通る直線と 2 次曲線が 2 点で交われば，それらを接点とする 2 次曲線の 2 接線の交点は極線上にある．

　(b) 点 (p,q) を通る 2 次曲線の接線が 2 本あればそれらの接点は極線上にある．







証明. (i): 点 (p, q) が 2 次曲線上にあれば

$$\begin{pmatrix} p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

よって，点 (p, q) は極線上にある．(x, y) が時間 t に依存して 2 次曲線上を動くとき $Q(x, y) = 0$ を t で微分して次を得る．

$$2a_{11}x\tfrac{dx}{dt} + 2a_{12}\bigl(\tfrac{dx}{dt}y + x\tfrac{dy}{dt}\bigr) + 2a_{22}y\tfrac{dy}{dt} + 2b_1\tfrac{dx}{dt} + 2b_2\tfrac{dy}{dt} = 0$$

整理すると

$$\bigl(a_{11}x + a_{12}y + b_1\bigr)\tfrac{dx}{dt} + \bigl(a_{12}x + a_{22}y + b_2\bigr)\tfrac{dy}{dt} = 0$$

接線の傾きは点 (p, q) での dy/dx の値なので，$-\frac{a_{11}p+a_{12}q+b_1}{a_{12}p+a_{22}q+b_2}$ であり，主張は従う．

(ii)-(a): 2 次曲線上の 2 点 (p_1, q_1), (p_2, q_2) に対し，x, y を未知変数とする方程式

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4.13}$$

の解 (x, y) は，点 (p_1, q_1), (p_2, q_2) を接点とする 2 つの接線の交点である．(x, y) が (5.4.10) を満たす事を示す．(p, q), (p_1, q_1), (p_2, q_2) が同一直線上にあるので

$$\begin{vmatrix} p & q & 1 \\ p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を得る．よって (X, Y, Z) を未知変数とみた，連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} p & q & 1 \\ p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

は非自明解を持つ．(5.4.13) より $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \\ Z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ がその非自明解でなければならず，(5.4.10) が成立する．

(ii)-(b): 点 (p, q) が 2 次曲線上にないとき，接点を (p_1, q_1), (p_2, q_2) とする 2 接線上に点 (p, q) がある条件は次のように表される．

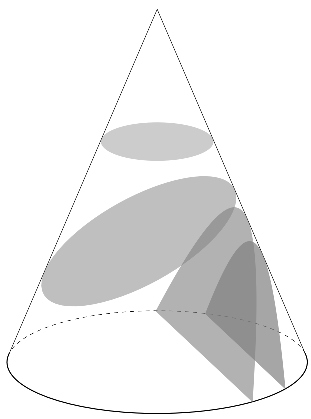
$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

よって $(x, y) = (p_1, q_1), (p_2, q_2)$ は

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

を満たし，2 点 (p_1, q_1), (p_2, q_2) は極線上の点であることがわかる． □

5.4.4　円錐曲線



$h = \tan\alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ を正の定数として，円錐

$$X^2 + Y^2 - \frac{Z^2}{h^2} = 0$$

と，平面 π との共通部分（円錐の平面断面，切り口）として得られる曲線を**円錐曲線** (conic section) という．

定理 5.4.14. 平面 π と Z 軸方向のなす角を θ $(0 \le \theta \le \pi/2)$ とする．

- 平面 π が原点を含まないとき，切り口は $0 \le \theta < \alpha$ ならば楕円，$\theta = \alpha$ ならば放物線，$\alpha < \theta \le \pi/2$ ならば双曲線である．

- 平面 π が原点を含むとき，切り口は $0 \le \theta < \alpha$ ならば原点のみ，$\theta = \alpha$ ならば重複直線，$\alpha < \theta \le \pi/2$ ならば交わる 2 直線である．

証明. 円錐は回転対称であるから，Z 軸の回りに回転させて平面 π の法線ベクトルは YZ 平面に含まれていると仮定して一般性を失わない．平面 π の単位法ベクトルを $(0, \sin\theta, \cos\theta)$, とする．すると平面 π は次の様に表示される．

$$\pi : (x, y) \mapsto (X, Y, Z) = (x, p + y\cos\theta, q - y\sin\theta)$$

ただし p, q, θ は定数とする．この写像 π は等長写像

$$\phi(x, y, z) = (x, p + y\cos\theta + z\sin\theta, q - y\sin\theta + z\cos\theta)$$

に拡張される．すなわち $\pi(x, y) = \phi(x, y, 0)$ で，ϕ は内積を保つ．実際，$\boldsymbol{x} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ と置くと

$$\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}') = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & \sin\theta \\ & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

であるが，この行列が直交行列であることから 2 点間の距離を保つことがわかる．$(X, Y, Z) = \pi(x, y)$ と置くと次式を得る．

$$\begin{aligned} 0 =& X^2 + Y^2 - \frac{Z^2}{h^2} \\ =& x^2 + \Bigl(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{h^2}\Bigr)y^2 + 2\Bigl(p\cos\theta + \frac{q}{h^2}\sin\theta\Bigr)y + p^2 - \tfrac{q^2}{h^2} \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

点 $(0, p, q)$ は平面 π 上にあるので，点 $(0, p, q)$ を点 $(0, p + c\cos\theta, q - c\sin\theta)$ に変えても同じ平面 π を定める．そのとき y の係数は

$$2\Bigl(p\cos\theta + q\frac{\sin\theta}{h^2}\Bigr) + 2c\Bigl(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{h^2}\Bigr)$$

となるので，$\alpha \neq \theta$ ならば $h \neq \tan\theta$ であり c をうまく選んで $p\cos\theta + \frac{q}{h^2}\sin\theta = 0$ であるように (p, q) を選ぶことができる．このとき $q = -ph^2/\tan\theta$ で断面の方程式は次の様になる．

$$x^2 + \Bigl(\cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{h^2}\Bigr)y^2 = \frac{q^2}{h^2} - p^2 = p^2\Bigl(\frac{h^2}{\tan^2\theta} - 1\Bigr)$$

$h = \tan\alpha$ であったから，次の様に整理される．

$$x^2 + \cos^2\theta\Bigl(1 - \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\alpha}\Bigr)y^2 = p^2\Bigl(\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\theta} - 1\Bigr)$$

よって次式を得るので，$0<\theta<\alpha$ のとき楕円，$\alpha<\theta<\pi/2$ のとき双曲線である．

$$\frac{x^2}{\tan^2\alpha-\tan^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\alpha}y^2=\frac{p^2}{\tan^2\theta}$$

$\theta=0,\pi/2$ のときは (5.4.15) に戻ってそれぞれ円，双曲線であることも分かる．ただし $p=0$ のとき例外で，このときは平面 π は原点を含み，$\theta<\alpha$ のとき原点のみからなる集合，$\theta>\alpha$ のとき原点で交わる 2 直線である．

$\theta=\alpha$ のときは $h=\tan\theta$ であり $\cos^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{h^2}$ なので (5.4.15) に戻って

$$x^2+2\cos\theta\Big(p+\frac{q}{\tan\alpha}\Big)y+p^2-\tfrac{q^2}{\tan^2\alpha}=0$$

$p\tan\alpha+q\neq 0$ ならば y の係数は 0 にすることができず, 切り口は放物線, $p\tan\alpha+q\neq 0$ ならば $x^2=0$ となり切り口は重複した直線であることが分かる． □

演習 5.4.16. 円錐 $x^2+y^2=(z/h)^2$ と平面 $y/a-z/h=b/a$ の共通部分は，次の写像の像であることを示せ．

$$\phi(t)=\frac{b}{\sin t-a}(\cos t,\sin t,h)$$

■焦点球（ダンドラン球）　円錐と平面 π 双方に接する球を**焦点球**（または**ダンドラン球**）という．焦点球は平面 π と 1 点で接するが，この点が切り口に表れる円錐曲線の焦点である．

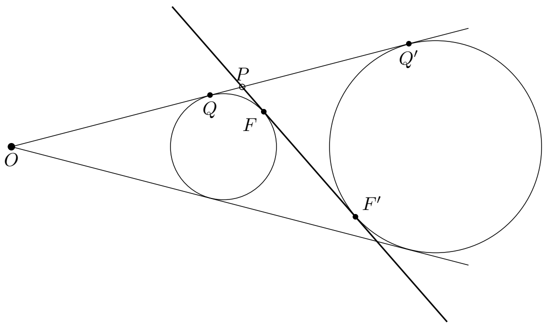
実際，焦点球が 2 つあるとき，その 2 つの焦点球と平面との接点を F, F' とすると，F, F' が切り口に表れた楕円（または双曲線）の焦点であることが次の様に示せる．切り口上の点を P とし，P と円錐の頂点 O を通る直線が 2 つの焦点球と交わる点をそれぞれ Q, Q' とする．点 P から焦点球へ接線をひいたとき，点 P から接点までの距離は接線によらずに一定なので，$\overline{PF}=\overline{PQ}$, $\overline{PF'}=\overline{PQ'}$ となる．点 P が線分 QQ' の内分点ならば,

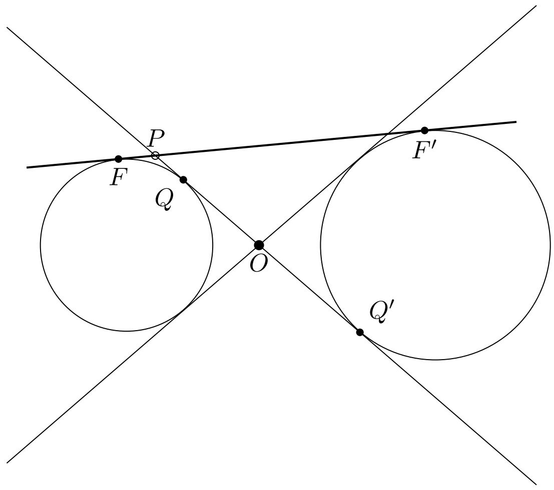
$$\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+\overline{PQ'}=\overline{QQ'}$$

で，これは切り口の点 P の選び方によらない一定値であり，切り口は楕円である．点 P が線分 QQ' の外分点ならば

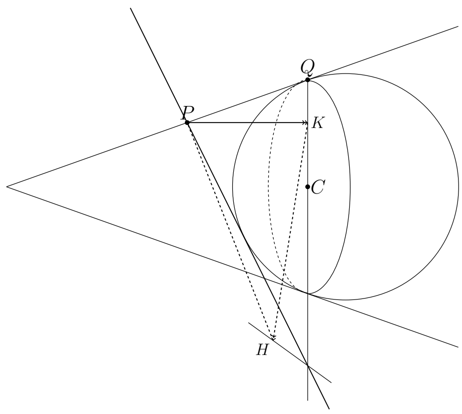
$$|\overline{PF}-\overline{PF'}|=|\overline{PQ}-\overline{PQ'}|=\overline{QQ'}$$

で，これも切り口上の点 P の選び方によらない一定値であり，切り口は双曲線である．





点 F で平面 π と接する焦点球は円錐とある円で接するが，この円を含む平面 ρ と平面 π の共通部分が切り口に表れる円錐曲線の準線である．以下このことを説明する．この円の中心を C と書き，点 P から平面 ρ に下ろした垂線の足を K とすると点 K は直線 CQ にあり，点 K から準線に下ろした垂線の足を H とすると，3 垂線の定理より点 H は点 P から準線に下ろした垂線の足である．$\overrightarrow{PK}$ は z 軸と平行であり，平面 ρ に直交する．



よって $\triangle PQK$, $\triangle PHK$ は直角 3 角形であり

$$\overline{PF} = \overline{PQ} = \frac{\overline{PK}}{\sin\angle PQK}, \quad \overline{PH} = \frac{\overline{PK}}{\sin\angle PHK}$$

を得る．$\alpha = \angle PQK$，$\theta = \angle PHK$ （平面 π が xy 平面となす角が θ）に留意すると

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{PK}/(\sin\angle PQK)}{\overline{PK}/(\sin\angle PHK)} = \frac{\sin\angle PHK}{\sin\angle PQK} = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}$$

であり，$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}$ は P の選び方に依らない一定値（この値が離心率 e であった）であることが分かる．

焦点球を用いた議論の本質は，円錐が回転対称であることである．回転対称な一葉双曲面や回転楕円面の場合も同様の議論が可能であるが詳細は省略する．

5.5　2 次形式の標準形

5.5.1　等長変換

写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が φ は**等長変換**（または**等長写像**）であるとは，φ が任意の 2 点間の距離を変えないとき，即ち，次を満たすときをいう．

$$\|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

例 5.5.1. T を直交行列，$\boldsymbol{p}$ を定ベクトルとすると，変換

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{x} \mapsto T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p} \tag{5.5.2}$$

は等長変換である．実際，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y})\|^2 =& \|(T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}) - (T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{p})\|^2 = \|T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|^2 = {}^t(T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\ =& {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}){}^tTT(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = {}^t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

補題 5.5.3. 等長変換 φ は (5.5.2) の形をしている．

証明. $\phi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{0})$ と置くと

$$\|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})\| = \|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

であり，ϕ は等長変換である．$\phi(\boldsymbol{0}) = \varphi(\boldsymbol{0}) - \varphi(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ なので ϕ は原点を保つ．

$$\|\phi(\boldsymbol{x})\| = \|\phi(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{0}\| \overset{\phi(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}}{=} \|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{0})\| \overset{\phi\text{の等長性}}{=} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つ．すると ϕ は内積を保つことが次のようにして分かる．

$$\begin{aligned}2\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \phi(\boldsymbol{y}) =& \|\phi(\boldsymbol{x})\|^2 + \|\phi(\boldsymbol{y})\|^2 - \|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})\|^2 \\ \overset{\phi\text{の等長性}}{=}& \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}\end{aligned}$$

ϕ が線形であることを示そう．

$$\begin{aligned}&\|\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})\|^2 \\ =& \|\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\|^2 + \|\phi(\boldsymbol{x})\|^2 + \|\phi(\boldsymbol{y})\|^2 - 2\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \phi(\boldsymbol{x}) \\ &- 2\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \phi(\boldsymbol{y}) + 2\phi(\boldsymbol{x}) \cdot \phi(\boldsymbol{y}) \\ =& \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \\ =& \|(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 0\end{aligned}$$

なので $\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\phi(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{y})$ がわかる．

$$\begin{aligned}\|\phi(c\boldsymbol{x})-c\phi(\boldsymbol{x})\|^2 =&\|\phi(c\boldsymbol{x})\|^2+c^2\|\phi(\boldsymbol{x})\|^2-2c\phi(c\boldsymbol{x})\cdot\phi(\boldsymbol{x})\\ =&\|c\boldsymbol{x}\|^2+c^2\|\boldsymbol{x}\|^2-2c(c\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{x}=0\end{aligned}$$

なので $\phi(c\boldsymbol{x})=c\phi(\boldsymbol{x})$ がわかる．よって ϕ は線形写像であり，行列 T を使って $\phi(\boldsymbol{x})=T\boldsymbol{x}$ と書ける．ϕ が内積を保つことから

$$ {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}={}^t(T\boldsymbol{x})(T\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}{}^tTT\boldsymbol{y}$$

であり $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_j$ と置くことにより ${}^tTT$ は単位行列であることがわかる． □

5.5.2 標準形への還元

本節では $x_1,\dots,x_n$ に関する非同次 2 次式

$$Q=Q(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c,\qquad a_{i,j},\ b_i,\ c\in\mathbb{R}$$

を等長変換により出来るだけ簡単な形にする事を問題にする．まず Q を次の様に行列を用いて書いておく．

$$Q=({}^t\boldsymbol{x}\ 1)\begin{pmatrix}A&\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{b}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix},\quad A=(a_{i,j}),\ a_{i,j}=a_{j,i},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

T を直交行列とし変換 $\boldsymbol{x}'\mapsto\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{x}')=T\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{p}$ を考える．

定理 5.5.4. $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ が関係式 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{p}$ を満たし

$$Q=({}^t\boldsymbol{x}\ 1)\widetilde{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}=({}^t\boldsymbol{x}'\ 1)\widetilde{A}'\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}'\\1\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}=\begin{pmatrix}A&\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{b}&c\end{pmatrix},\quad \widetilde{A}'=\begin{pmatrix}A'&\boldsymbol{b}'\\{}^t\boldsymbol{b}'&c'\end{pmatrix}$$

と書くとき，A の固有値と A' の固有値は一致し，$|\widetilde{A}|=|\widetilde{A}'|$ かつ $\operatorname{rank}\widetilde{A}=\operatorname{rank}\widetilde{A}'$.

証明. 行列を用いて書くと $\binom{\boldsymbol{x}}{1}=\begin{pmatrix}T&\boldsymbol{p}\\0&1\end{pmatrix}\binom{\boldsymbol{x}'}{1}$ となるので，

$$\begin{aligned}Q=&({}^t\boldsymbol{x}\ 1)\begin{pmatrix}A&\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{b}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}\\ =&({}^t\boldsymbol{x}'\ 1)\begin{pmatrix}{}^tT&0\\{}^t\boldsymbol{p}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{b}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T&\boldsymbol{p}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}'\\1\end{pmatrix}\\ =&({}^t\boldsymbol{x}'\ 1)\begin{pmatrix}{}^tT&0\\{}^t\boldsymbol{p}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}AT&A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{b}T&{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{p}+c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}'\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=({}^t\boldsymbol{x}' \ 1)\begin{pmatrix} {}^tTAT & {}^tT(A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}) \\ {}^t(A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})T & {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p}+2{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{b}+c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.5.5}$$

なので，$A' = {}^tTAT$ となり A と A' の固有値は一致する事がわかる．

$$\widetilde{A}' = \begin{pmatrix} {}^tT & O \\ {}^t\boldsymbol{p} & 1 \end{pmatrix}\widetilde{A}\begin{pmatrix} T & \boldsymbol{p} \\ O & 1 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad |\widetilde{A}'| = |\widetilde{A}| \quad \text{もわかる．}$$

$\operatorname{rank}\widetilde{A} = \operatorname{rank}\widetilde{A'}$ もわかる． □

上の計算で，直交行列 T を ${}^tTAT$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ なるようにとる．A は実対称行列なのでこれはいつでも可能である．このとき $\det T = 1$ であるように T をとり $T = (\boldsymbol{x}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{x}_n)$ と書いて $\boldsymbol{b} = \hat{b}_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \hat{b}_n\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{p} = \hat{p}_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \hat{p}_n\boldsymbol{x}_n$ と置けば

$$A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b} = (\lambda_1\hat{p}_1+\hat{b}_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_n\hat{p}_n+\hat{b}_n)\boldsymbol{x}_n$$

である．すると (5.5.5) の 1 次の項の係数と定数項は次の様に計算できる．

$$\begin{aligned} {}^tT(A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}) &= {}^t(\boldsymbol{x}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{x}_n)(\lambda_1\hat{p}_1+\hat{b}_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_n\hat{p}_n+\hat{b}_n)\boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} \lambda_1\hat{p}_1+\hat{b}_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\hat{p}_n+\hat{b}_n \end{pmatrix} \\ Q(\boldsymbol{p}) &= {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p}+2{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{b}+c = \lambda_1(\hat{p}_1)^2 + \cdots + \lambda_n(\hat{p}_n)^2 + 2(\hat{b}_1\hat{p}_1 + \cdots + \hat{b}_n\hat{p}_n) + c \end{aligned}$$

従って (5.5.5) は次の様になる．

$$Q = \begin{pmatrix} x_1' & \cdots & x_n' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \lambda_1\hat{p}_1+\hat{b}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_n & \lambda_n\hat{p}_n+\hat{b}_n \\ \lambda_1\hat{p}_1+\hat{b}_1 & \cdots & \lambda_n\hat{p}_n+\hat{b}_n & Q(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を満たす点 $\boldsymbol{p}$ を**中心** (center) という．点 $\boldsymbol{b}$ が，行列 A の表す線形写像の像に入っていれば，中心は存在する．$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{p}$ と置いて計算を続けよう．

■A が零固有値をもたない場合　$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ がどれも零でなく $\det(A) \neq 0$ であり $\boldsymbol{p} = -A^{-1}\boldsymbol{b}$ が中心である．$\det(A) \neq 0$ なので中心 $\boldsymbol{p}$ は一意に定まる．(5.5.5) より

$$Q = {}^t\boldsymbol{x}'\Lambda\boldsymbol{x}' - {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} + c$$

となる．この式は $\boldsymbol{x}'$ を $-\boldsymbol{x}'$ に変えても変わらないので，$Q(\boldsymbol{x}) = 0$ で定まる図形は点 $\boldsymbol{p}$ を中心として点対称である事もわかる．よって $Q = 0$ は次の形になる

$$\lambda_1(x_1')^2 + \cdots + \lambda_n(x_n')^2 = {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} - c$$

このとき ${}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} \neq c$ ならば非退化 2 次超曲面，${}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} = c$ ならば 2 次錐面という．

A の固有値がすべて相異なるとき，中心を通り固有ベクトルに平行な直線を主軸という．主軸を見出すことが 2 次超曲面の形状の決定に重要であるので，2 次超曲面を標準形に還元する問題を**主軸問題**ということがある．

■A が零固有値をもつ場合　$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ を零以外の固有値 $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ とする．$\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を取り替えることにより $\hat{b}_{k+2} = \cdots = \hat{b}_n = 0$ と仮定して良い．なぜなら零固有空間への直交射影 $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考え，$\pi(\boldsymbol{b}) \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}_{k+1} = \pi(\boldsymbol{b})/|\pi(\boldsymbol{b})|$ としそれと直交するように $\boldsymbol{x}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を選べばよいからである．このとき $\boldsymbol{b} = \hat{b}_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \hat{b}_k\boldsymbol{x}_k + \hat{b}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}$ であり

$$A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} = (\lambda_1\hat{p}_1 + \hat{b}_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\lambda_k\hat{p}_k + \hat{b}_k)\boldsymbol{x}_k + \hat{b}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}. \tag{5.5.6}$$

$\lambda_1\hat{p}_1 + \hat{b}_1 = \cdots = \lambda_k\hat{p}_k + \hat{b}_k = 0$ なるように $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_k$ をとる．

$\hat{b}_{k+1} = 0$ ならば $A\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ で，$\boldsymbol{p}$ が中心であることがわかる．

$$Q = \lambda_1(x_1')^2 + \cdots + \lambda_k(x_k')^2 + Q(\boldsymbol{p})$$

となり．$Q = 0$ は柱面である．$x_1 \ldots x_k$ 空間の中でのこの式の零点集合と $\mathbb{R}^{n-k}$ との直積だからである．

$\hat{b}_{k+1} \neq 0$ ならば中心は存在しない．

$$Q(\boldsymbol{p}) = \lambda_1(\hat{p}_1)^2 + \cdots + \lambda_k(\hat{p}_k)^2 + 2\hat{b}_{k+1}\hat{p}_{k+1} + c$$

より $Q(\boldsymbol{p}) = 0$ なるように $\hat{p}_{k+1}$ をとることができる．

$$Q = \lambda_1(x_1')^2 + \cdots + \lambda_k(x_k')^2 + 2\hat{b}_{k+1}x_{k+1}'$$

これを $-2\hat{b}_{k+1}$ で割れば x_{k+1}' の係数は -1 とする事ができる．$k = n-1$ のときは超放物面である．$k < n-1$ のときは $x_1 \ldots x_k x_{k+1}$ 空間の中でのこの式の零点集合（これも超放物面）と $\mathbb{R}^{n-k-1}$ の直積で超放物面柱である．

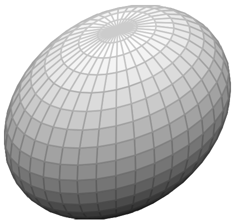
5.5.3　2 次曲面の分類

前節の標準形への還元手続きを，3 変数の場合に適用すると，2 次曲面の分類定理を得る．2 次曲面には名前がついているので，まずそれらを説明しよう．

有心 2 次曲面（中心のある 2 次曲面）

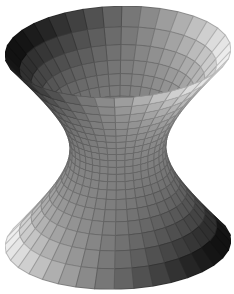
楕円面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



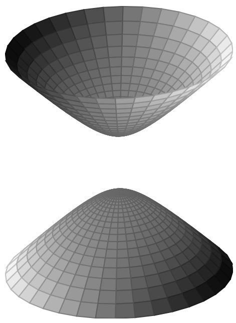
一葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



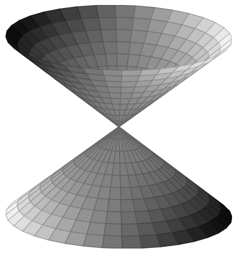
二葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



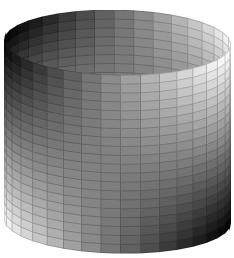
2 次錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$$



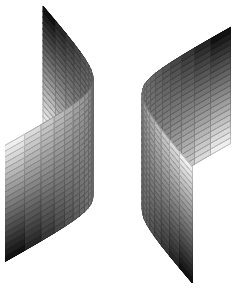
楕円柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



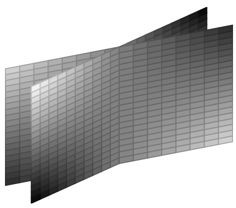
双曲線柱面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



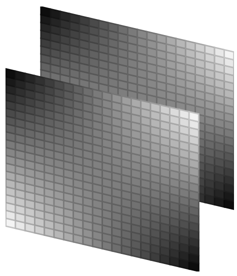
交差 2 平面

$$\frac{x^2}{a^2}-y^2=0$$



平行 2 平面

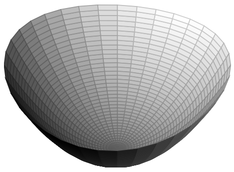
$$\frac{x^2}{a^2}=1$$



無心 2 次曲面（中心のない 2 次曲面）

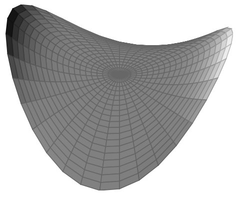
楕円放物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



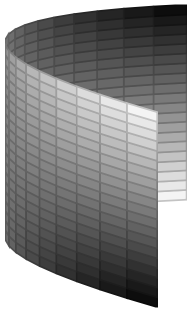
双曲放物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



放物線柱面

$$\frac{x^2}{a^2}=y$$



定理 5.5.7 (2 次曲面の分類)**.** x, y, z の 2 次式

$$Q = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}zx + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c$$

を考える．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと $Q = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\widetilde{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$ で，$Q = 0$ の定める図形は

- $|A| \neq 0$, $|\widetilde{A}| \neq 0$ のとき
  - $*$ A の固有値の符号がすべて同じならば楕円面 ($|\widetilde{A}| < 0$) か空集合 ($|\widetilde{A}| > 0$),
  - $*$ A が符号の異なる固有値をもてば一葉双曲面 ($|\widetilde{A}| > 0$) か二葉双曲面 ($|\widetilde{A}| < 0$),
- $|A| \neq 0$, $|\widetilde{A}| = 0$ のとき，中心は 1 点で
  - $*$ A の固有値がすべて同符号ならば中心でのみ $Q = 0$ となる．
  - $*$ A の固有値がすべて同符号でないなら 2 次錐面である．
- $\operatorname{rank} A = 2$, $|\widetilde{A}| \neq 0$ のとき
  - $*$ A の 0 でない固有値が同じ符号ならば楕円放物面,
  - $*$ A の 0 でない固有値が異なる符号ならば双曲放物面.
- $\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 3$ のとき
  - $*$ A の 0 でない固有値が同じ符号ならば楕円柱面 (又は空集合),
  - $*$ A の 0 でない固有値が異なる符号ならば双曲柱面.
- $\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$ のとき
  - $*$ A の 0 でない固有値が同じ符号ならば直線,
  - $*$ A の 0 でない固有値が異なる符号ならば交わる 2 平面.
- $\operatorname{rank} A = 1$ のとき
  - $*$ $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 3$ ならば放物線柱面,
  - $*$ $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$ ならば平行 2 平面,
  - $*$ $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 1$ ならば重複 2 平面である．

2 次曲面 $Q = 0$ があるとき，点 (p, q, r) に対し次で決まる平面を**極平面**という．

$$(p\ q\ r\ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.5.8}$$

点 $\boldsymbol{p}=(p,q,r)$ が 2 次曲面 $Q=0$ 上にあるときは，極平面は点 $\boldsymbol{p}$ に於ける 2 次曲面の接平面である．このことを説明しよう．点 $\boldsymbol{p}$ が平面 (5.5.8) 上にあるのは明らかであるし，(5.5.8) の x, y, z の係数は，それぞれ点 $\boldsymbol{p}$ での x, y, z による $\frac{1}{2}Q$ の偏微分係数になっている．即ち，平面 (5.5.8) の法ベクトルは $\frac{1}{2}Q$ の勾配ベクトル

$$\tfrac{1}{2}(Q_x,Q_y,Q_z)(\boldsymbol{p})=(a_{11}p+a_{12}q+a_{13}r,a_{12}p+a_{22}q+a_{23}r,a_{13}p+a_{23}q+a_{33}r)$$

である．点 $\boldsymbol{p}$ で $Q=0$ に接するベクトルはこの勾配ベクトルに直交することを見れば良い．$t=0$ のとき点 $\boldsymbol{p}$ を通る曲線 $(x(t),y(t),z(t))$ が 2 次曲面 $Q=0$ 上にあれば $Q(x(t),y(t),z(t))=0$ である．これを t で微分すると

$$Q_x(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q_y(x(t),y(t),z(t))y'(t)+Q_z(x(t),y(t),z(t))z'(t)=0$$

を得るが，$t=0$ と置くと

$$Q_x(\boldsymbol{p})x'(0)+Q_y(\boldsymbol{p})y'(0)+Q_z(\boldsymbol{p})z'(0)=0$$

を得る．このことは勾配ベクトル $(Q_x(\boldsymbol{p}),Q_y(\boldsymbol{p}),Q_z(\boldsymbol{p}))$ は点 $\boldsymbol{p}$ で $Q=0$ に接するすべてのベクトルと直交することを示している．

注意 5.5.9 (一葉双曲面上の直線)**.** 一葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{5.5.10}$$

の式を次のように変形する．

$$\Big(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\Big)\Big(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\Big)=\Big(1+\frac{x}{a}\Big)\Big(1-\frac{x}{a}\Big)$$

この式は s, t を定数として次のように書き換えることができる．

$$\begin{cases}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=s\big(1+\frac{x}{a}\big),\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{s}\big(1-\frac{x}{a}\big),\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=t\big(1-\frac{x}{a}\big),\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{t}\big(1+\frac{x}{a}\big),\end{cases}$$

この 2 つの連立方程式はそれぞれ 2 平面の共通部分を表すから，一葉双曲面は直線の族 2 つを含むことがわかる．

別証 一葉双曲面 (5.5.10) 上の点 $P(a\cos\theta\cosh\phi,b\sin\theta\cosh\phi,c\sinh\phi)$ に於ける接平面は

$$\frac{x\cos\theta\cosh\phi}{a}+\frac{y\sin\theta\cosh\phi}{b}-\frac{z\sinh\phi}{c}=1$$

である．直線 $P+t(av_1,bv_2,cv_3)$ が一葉双曲面上にあるとすると (5.5.10) より (v_1,v_2,v_3) は

$$v_1\cos\theta\cosh\phi+v_2\sin\theta\cosh\phi-v_3\sinh\phi=0,\qquad v_1^2+v_2^2-v_3^2=0$$

を満たす．これを解いて次を得る．

$$(v_1, v_2, v_3) = (\cos\theta\sinh\phi, \sin\theta\sinh\phi, \cosh\phi) \pm (\sin\theta, -\cos\theta, 0)$$

つまり任意に選んだ点 P を通る一葉双曲面上の直線が丁度 2 本あることがわかる．

別証 写像

$$f(u,v) = \left(a\,\frac{\cos(u+v)}{\cos(u-v)},\ b\,\frac{\sin(u+v)}{\cos(u-v)},\ c\tan(u-v)\right)$$

の像が一葉双曲面である．f の u による偏導関数 $f_u = \cos^2(u-v)(-\sin 2v, \cos 2v, 1)$ は v のみに依存するベクトルと平行なので $u \mapsto f(u,v)$ の像は直線であることがわかる．同様に f の v による偏導関数 $f_v = -\cos^2(u-v)(\sin 2u, -\cos 2u, 1)$ は u のみに依存するベクトルと平行なので $v \mapsto f(u,v)$ の像も直線であることがわかる．

注意 5.5.11 (双曲放物面上の直線)**.** 双曲放物面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = kz$$

は s, t を定数として，

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = s, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{kz}{s}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{kz}{t}, \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t, \end{cases}$$

と書ける．このことより 2 つの直線族が双曲放物面にもあることがわかる．

5.6　エルミート行列

複素数を要素とする行列 A に対し，その共役転置行列 ${}^t\overline{A}$ を $A^\dagger$ で表す[*5]．$A^\dagger = A$ を満たす複素行列を**エルミート行列** (an Hermitian matrix) という．$U^\dagger U = E$ を満たす行列 U を**ユニタリー行列** (an unitary matrix) という．

$\mathbb{C}^n$ の元 $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ に対し，

$${}^t\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{w}} = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n$$

を $\mathbb{C}^n$ の**エルミート内積**という．$z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, $w_i = u_i + \sqrt{-1}v_i$ とおくと

$${}^t\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{w}} = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i\sqrt{-1})(u_i - \sqrt{-1}v_i)$$

[*5] 共役転置行列は A^* で表すことが多い．本稿では余因子行列との混乱を避けるため $A^\dagger$ を用いる．

$$= \sum_{i=1}^{n} [(x_i u_i + y_i v_i) + \sqrt{-1}(y_i u_i - x_i v_i)]$$

なので，エルミート内積の実部は通常のユークリッド内積を与える．

実対称行列について成り立つ多くの事実は，直交行列をユニタリー行列と読み替える事によってエルミート行列についても成り立つ．

定理 5.6.1. 複素エルミート行列の固有値はすべて実数である．

証明. A をエルミート行列とし λ をその固有値とすると $A\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$ なる $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ が存在する．$\overline{A}\bar{\boldsymbol{z}} = \bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{z}}$

$$\bar{\lambda}{}^t\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{z}} = {}^t\boldsymbol{z}(\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{z}}) = {}^t\bar{\boldsymbol{z}}(\overline{A}\bar{\boldsymbol{z}}) = {}^t\boldsymbol{z}{}^tA\bar{\boldsymbol{z}} = {}^t(A\boldsymbol{z})\bar{\boldsymbol{z}} = \lambda{}^t\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{z}}$$

${}^t\boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{z}}$ は零でない実数なので $\lambda = \bar{\lambda}$ であり λ は実数． □

定理 5.6.2. 複素エルミート行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

定理 5.6.3. 複素行列はユニタリー行列により上 3 角化可能である．複素エルミート行列はユニタリー行列により対角化可能である．

証明. n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らか．λ_1 を A の固有値とし $\boldsymbol{x}_1$ をその固有ベクトルとする．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とすると，次のように書ける．

$$A(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{x}_1\ A\boldsymbol{x}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

A_1 の固有値は，A の固有値から λ_1 を（重複度を考慮して）除いたものであるので，

$$P_1^{-1}A_1P_1 = \begin{pmatrix}\lambda_2 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

を満たす $n-1$ 次の正則行列（ユニタリー行列）P_1 が存在する．これより

$$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

を得る．$P_0 = (\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$ とおくと

$$P_0^{-1}AP_0 = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix}^{-1}$$

であるので，$P = P_0\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix}$ とおくと（P_0, P_1 がユニタリー行列ならば，P もユニタ

リー行列で）

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

を得る．A がエルミート行列で P がユニタリー行列ならば，最後の行列もエルミート行列で特に実対角行列である．□

注意 5.6.4. 複素対称行列 A に対し，${}^tUAU$ が対角行列になるようなユニタリー行列 U が存在する．

注意 5.6.5. エルミート行列 H に対し $\sqrt{-1}H$ は歪エルミート行列（${}^t\overline{A} = -A$ なる行列）となる．注意 5.3.5 と同様にして $U = (E + \sqrt{-1}H)(I - \sqrt{-1}H)^{-1}$ はユニタリー行列であることが示せる．

5.7 行列の指数関数

n 次の正方行列 A に対し，$\mathbb{R}^n$ に値を取るベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ で微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

を満たすものを考える．ここでは t を変数としている．そのような $\boldsymbol{x}(t)$ がどのようなものかを決定するのが本節の目標である．この微分方程式を書き換えると次のようになる．

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A\boldsymbol{x}(s)ds \tag{5.7.1}$$

この積分方程式の解の近似関数列 $\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots$ を次の様に帰納的に構成する．

$$\boldsymbol{x}_{k+1}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A\boldsymbol{x}_k(s)ds, \qquad \boldsymbol{x}_0(t) = \boldsymbol{x}_0 \tag{5.7.2}$$

もし極限関数 $\boldsymbol{x}(t) = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ が存在すれば，(5.7.2) で $k \to \infty$ として得られる式 (5.7.1) の解である．そこで (5.7.2) を用いて，順次 $\boldsymbol{x}_k(t)$ を求めてみる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A\boldsymbol{x}_0 ds = \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 t \\ \boldsymbol{x}_2(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A\boldsymbol{x}_1 ds = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A(\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 s)ds \\ &= \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 t + A^2\boldsymbol{x}_0\frac{t^2}{2} \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1}(t) &= \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A\boldsymbol{x}_k(s)ds = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t A\Big(\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 s + \cdots + A^k \boldsymbol{x}_0 \frac{s^k}{k!}\Big)ds \\ &= \boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_0 t + A^2\boldsymbol{x}_0\frac{t^2}{2} + \cdots + A^{k+1}\boldsymbol{x}_0\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\end{aligned}$$

ここで $k \to \infty$ なる極限をとれば，極限関数は

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}\,\boldsymbol{x}_0 \tag{5.7.3}$$

であり，指数関数のテイラー展開の形をしているので，$e^{At}\boldsymbol{x}_0$ と書くべきものとなる．(5.7.3) の右辺は無限級数であるから，収束する事を示さなければならない．そのため，まず次の不等式に注意しよう．

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と書くと，　$\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \le \|\boldsymbol{x}\| \le \sqrt{n}\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ となる．

$A = (a_{i,j})$ の各成分の絶対値の最大値の $n^{\frac{3}{2}}$ 倍を L と書けば $\|A\boldsymbol{x}\| \le L\|\boldsymbol{x}\|$. が成立する．証明は次のようにすれば良い．

$$\begin{aligned}\|A\boldsymbol{x}\| =& \Big\|\Big(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j\Big)\Big\| \\ \le& \sqrt{n}\max\Big\{\Big|\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j\Big|, \dots, \Big|\sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j\Big|\Big\} \\ \le& \sqrt{n}\max\Big\{\sum_{j=1}^n |a_{1,j}||x_j|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{n,j}||x_j|\Big\} \\ \le& \sqrt{n}\max\Big\{\sum_{j=1}^n |a_{1,j}|, \dots, \sum_{j=1}^n |a_{n,j}|\Big\}\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \\ \le& n^{\frac{3}{2}}\max\{|a_{i,j}| : i,j = 1, \dots, n\}\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \le L\|\boldsymbol{x}\|\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{i=0}^k \Big\|A^i \frac{t^i}{i!}\,\boldsymbol{x}_0\Big\| \le \sum_{i=0}^k L^i \frac{|t|^i}{i!}\|\boldsymbol{x}_0\| \to\ \|\boldsymbol{x}_0\|e^{L|t|} \quad (k \to \infty)$$

を得る．よって t を固定したとき (5.7.3) は絶対収束する事が分かる．

定義 5.7.4. n 次正方行列 A に対し e^A を次で定める．

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots \tag{5.7.5}$$

これは無限級数であるから収束する事を示さなければならない．

$$(5.7.6) \qquad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \frac{t^4}{4!} A^4 + \cdots + \frac{t^k}{k!} A^k + \cdots$$

である．$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．上述したように，(5.7.3) は任意の $\boldsymbol{x}_0$ に対して収束する．よって $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{e}_i$ とおけば，e^{At} の第 i 列が収束する事がわかる．これより (5.7.6) が収束する事がわかる．特に $t = 1$ とおけば (5.7.5) が収束する事がわかる．

簡単な例を計算してみよう．

例 5.7.7. A が対角行列のときは，e^A は対角行列で，その成分は対応する対角成分の指数関数となる．例えば

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{のときは} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \quad \text{となる．}$$

例 5.7.8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき e^{At} を求めよ．

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$, E は単位行列，なので $A^3 = -A$, $A^4 = E$, $A^5 = A$, $A^6 = -A, \ldots$ と順に A^k を求める事が出来る．よって次式を得る．

$$\begin{aligned} e^{At} &= E + \frac{t}{1} A + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \frac{t^4}{4!} A^4 + \frac{t^5}{5!} A^5 + \frac{t^6}{6!} A^6 + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \right) E + \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \right) A \\ &= \cos t E + \sin t A \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 5.7.9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，e^{At} を双曲線関数を用いて表せ．

定理 5.7.10. n 次正方行列 A と正則行列 P に対し，

$$\frac{d}{dt}\, e^{At} = A\, e^{At}, \qquad e^{P^{-1}APt} = P^{-1} e^{At} P$$

証明. 最初の式は $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ を t で微分すれば得られる．次の式は次のように示される．$e^{P^{-1}APt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (P^{-1}AP)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P^{-1} A^k P = P^{-1} e^{At} P$ □

定理 5.7.11. n 次正方行列 A, B が交換可能，すなわち $AB = BA$, ならば,

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

証明. $AB = BA$ より B は A^p とも交換可能である．実際,

$$A^p B = A^{p-1} AB = A^{p-1} BA = A^{p-2} ABA = A^{p-2} BA^2 = \cdots = BA^p$$

同様に A は B^q とも交換可能である．これを使って

$$(A+B)^k = \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} A^p B^q$$

がわかる．実際，$k=1$ のときは明らかであり，k のときを仮定すると

$$\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} =& (A+B)^k(A+B) = \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} A^p B^q (A+B) \\
=& \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} (A^{p+1}B^q + A^p B^{q+1}) \\
=& \sum_{p+q=k+1} \left(\frac{k!}{(p-1)!q!} + \frac{k!}{p!(q-1)!} \right) A^p B^q = \sum_{p+q=k+1} \frac{(k+1)!}{p!q!} A^p B^q
\end{aligned}$$

となり $k+1$ のときもわかるからである．

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!q!} A^p B^q = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!} = e^A e^B$$

となり証明された．□

例 5.7.12. 正方行列 A に対し，e^A は可逆行列である．実際，A と $-A$ は交換可能なので

$$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^O = E.$$

となり e^{-A} が e^A の逆行列である．A が交代行列ならば e^A は直交行列である．実際，

$${}^t e^A = e^{{}^t A} = e^{-A} = (e^A)^{-1} \quad \text{より} \quad ({}^t e^A) e^A = E \quad \text{がわかる．}$$

これは例 5.7.8 の一般化と見ることもできる．
同様に A がエルミート交代行列（即ち ${}^t\overline{A} = -A$ が成立する行列）ならば e^A はユニタリー行列である．実際，${}^t\overline{e^A} = e^{{}^t A} = e^{-A} = (e^A)^{-1}$ より $({}^t\overline{e^A})e^A = E$ がわかる．

例 5.7.13. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ のとき $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$A = aE + bJ$, $EJ = JE$ なので

$$e^{At} = e^{Eat+Jbt} = e^{Eat}e^{Jbt} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & -e^{at}\sin bt \\ a^{at}\sin bt & e^{at}\cos at \end{pmatrix}$$

一般に次の式が成り立つ．

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \lambda & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

実際，E を単位行列，$A=\lambda E+N$ と書くと，N の第 (i,j) 成分は $j-i=1$ のとき 1 でそれ以外は 0 である．計算すると N^k の第 (i,j) 成分は $j-i=k$ のとき 1 でそれ以外は 0 である．とくに $N^n=O$ となる．

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda E+N)^k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda^k E + k\lambda^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}N^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}N^{n-1}\right)\frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda^k t^k}{k!}E + \frac{\lambda^{k-1}t^k}{(k-1)!}N + \frac{\lambda^{k-2}t^k}{2(k-2)!}N^2 + \cdots + \frac{\lambda^{k-n+1}t^k}{(n-1)!(k-n+1)!}N^{n-1}\Big) \\
&= e^{\lambda t}\Big(E + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1}\Big)
\end{aligned}
$$

となり主張を得る．

5.8 行列のスペクトル分解

5.8.1 2 次行列のスペクトル分解

2 次行列 A の固有値を λ_1, λ_2 とする．$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれの固有ベクトルとする．すなわち

$$
A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_i \neq 0 \quad i=1,2
$$

すると

$$
A(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2) = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1\ \lambda_2\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}
$$

なので $U=(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)$ の逆行列 U^{-1} が存在すれば A は対角化可能，つまり

$$
U^{-1}AU = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}
$$

となる．以後，逆行列 U^{-1} が存在すると仮定する．この条件は $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ が一次独立である事と同値である．よって，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2$ と表せる．このとき次の対応で定まる 2 つの写像を考える．

$$
p_i : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_i := a_i\boldsymbol{u}_i, \quad i=1,2
$$

この写像は線形写像であり，対応する行列を P_i と書くと，次を満たす．

$$
P_1^2=P_1, \quad P_2^2=P_2, \quad P_1P_2=P_2P_1=O, \quad E=P_1+P_2 \tag{5.8.1}
$$

尚，最後の等式は，任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = P_1\boldsymbol{x} + P_2\boldsymbol{x}$ である事から従う．

$\boldsymbol{x}_i$ は A の固有ベクトルなので $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$．よって

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_1 + A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ は任意であったから，

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

となる．これを 2 次行列 A の**スペクトル分解**と言う．性質 (5.8.1) を用いると，任意の多項式 $f(\lambda)$ に対し次が成立する事がわかる．

$$f(A) = f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2$$

特に，もし $f_1(\lambda_1) = 1$, $f_1(\lambda_2) = 0$ を満たす多項式 $f_1(\lambda)$ があれば $f_1(A) = P_1$ がわかる．そのような多項式は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のときは，$f_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$ と置けば得られる．同様に，$f_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ と置けば，$P_2 = f_2(A)$ が得られる．

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，次が成立する．

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2, \qquad \text{但し} \qquad P_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad P_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

証明は次のようにすればよい．

$$\begin{aligned} e^{At} =& e^{At}E = e^{At}(P_1 + P_2) = e^{(A-\lambda_1 E)t + \lambda_1 Et}P_1 + e^{(A-\lambda_2 E)t + \lambda_2 Et}P_2 \\ =& e^{\lambda_1 Et}e^{(A-\lambda_1 E)t}P_1 + e^{\lambda_2 Et}e^{(A-\lambda_2 E)t}P_2 \\ =& e^{\lambda_1 t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda_1 E)^k P_1 + e^{\lambda_2 t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda_2 E)^k P_2 = e^{\lambda_1 t}P_1 + e^{\lambda_2 t}P_2 \end{aligned}$$

5.8.2 n 次行列のスペクトル分解

$P^2 = P$ を満たす正方行列を**射影**という．冪等性 (idempotence) を満たす行列なので，冪等行列 (idempotent) ということもある．

定理 5.8.2. A を複素 n 次正方行列とし，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を相異なる A の固有値とする．このとき次の性質を持つ r 個の行列 $P_1, \ldots, P_r$ が存在する．

(i) $E = P_1 + \cdots + P_r$,

(ii) $P_i^2 = P_i$, $P_j P_i = O$ $(i \neq j)$,

(iii) ある正の整数 ℓ_i が存在して $(A - \lambda_i E)^{\ell_i} P_i = O$, $i = 1, \ldots, r$.

(iv) $AP_i = P_i A$

実は (i), (ii), (iii) を満たす $P_1, \ldots, P_r$ の存在は一意的で (iv) は (i), (ii), (iii) から従う事がわかるのであるが，この定理の証明はしばらく延期し，この定理からわかることを説明しよう．まず，冪零行列と言う言葉を定義する．

$N^k = O$ を満たす k が存在する正方行列 N を**冪零行列** (nilpotent matrix) という．

定理 5.8.3. $N = A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r$ と書くと，N は冪零行列になる．

証明. $N = A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r$ は冪零である．実際 $k \geq \max\{\ell_1, \ldots, \ell_r\}$ のとき

$$\begin{aligned}
N^k =& N^k E \\
=& (A - \lambda_1 P_1 - \cdots - \lambda_r P_r)^k (P_1 + \cdots + P_r) && (E = P_1 + \cdots + P_r) \\
=& \sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i P_i)^k P_i && (AP_i = P_i A,\ P_i P_j = O,\ i \neq j) \\
=& \sum_{i=1}^{r} (A - \lambda_i E)^k P_i && (P_i^2 = P_i) \\
=& O && (k \geq \ell_i)
\end{aligned}$$

となる． □

よって，正方行列 A に対し，条件 (i), (ii), (iii) を満たす P_i を用いて

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_r P_r + N, \quad N \text{ は冪零行列}, \tag{5.8.4}$$

と表示することが出来る．これを行列 A の**スペクトル分解**と言う．行列のスペクトル分解がわかれば，その指数関数は容易に計算できる．実際，次が成り立つ．

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \left(E + t(A - \lambda_i E) + \frac{t^2}{2}(A - \lambda_i E)^2 + \cdots + \frac{t^{\ell_i - 1}}{(\ell_i - 1)!}(A - \lambda_i E)^{\ell_i - 1} \right) P_i$$

証明. 計算である．

$$\begin{aligned}
e^{At} =& e^{At} E = e^{At}(P_1 + \cdots + P_r) = \sum_{i=1}^{r} e^{At} P_i \\
=& \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i Et + (A - \lambda_i E)t} P_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i Et} e^{(A - \lambda_i E)t} P_i \\
=& \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i E)^k P_i = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{\ell_i - 1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_i E)^k P_i
\end{aligned}$$ □

本節の残りで条件 (i), (ii), (iii) を満たす P_i の存在と構成を議論する．A の固有多項式を

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

とする．m_i は固有値 λ_i の重複度である．λ_i は A の固有値であったから，その固有空間

$$F_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}$$

は 0 ではないベクトル (固有ベクトルと言うのであった) を含んでいる．さて λ_i に対応する**一般固有空間** (generalized eigenspace) G_i を次で定義する．

$$G_i = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_i E)^{m_i} \boldsymbol{x} = 0\} \tag{5.8.5}$$

λ_i の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $(A - \lambda_i E)\boldsymbol{x} = 0$ を満たすから，$F_i \subset G_i$ である．

注意 5.8.6. 線形写像 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を G_i に制限するとその像は G_i 内にある．すなわち線形写像 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ は線形写像 $A : G_i \to G_i$ を定める．実際 $\boldsymbol{x} \in W_i$ と置くと，次のようにして $A\boldsymbol{x} \in G_i$ がわかる．

$$(A - \lambda_i E)^{m_i} A\boldsymbol{x} = A(A - \lambda_i E)^{m_i} \boldsymbol{x} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

一般固有空間を考えるメリットは，全空間が一般固有空間達の直和となる事である．

定理 5.8.7. $\mathbb{C}^n = G_1 \oplus \cdots \oplus G_r$．言い替えると，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_r, \quad \boldsymbol{x}_i \in G_i$$

の形に表され，更にこのような性質を持つ $\boldsymbol{x}_i$ 達は，$\boldsymbol{x}$ から一意に定まる．

定理 5.8.7 を示すために，補題を準備する．

補題 5.8.8. $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ は共通根を持たない多項式とし，

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_1(A)\boldsymbol{x} = 0\}, \\ W_2 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_2(A)\boldsymbol{x} = 0\}, \\ W &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_1(A)f_2(A)\boldsymbol{x} = 0\} \end{aligned}$$

とおくと，$W = W_1 \oplus W_2$．

ここで，$f(A)$ は多項式 $f(\lambda)$ に正方行列 A を代入したもので，定数項は単位行列 E の定数倍と思っている．$g(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ と置くと，$g(A) = f_1(A)f_2(A)$ が成り立つ．

証明. $f_1(\lambda)$ と $f_2(\lambda)$ は共通根を持たないから適当な多項式 $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ を選べば

$$f_1(\lambda)g_1(\lambda) + f_2(\lambda)g_2(\lambda) = 1$$

となる (定理 A.1.4 参照)．λ に A を代入すれば $f_1(A)g_1(A) + f_2(A)g_2(A) = E$ を得るので，$\boldsymbol{x} \in W$ に対し

$$\boldsymbol{x} = f_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} + f_2(A)g_2(A)\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}_1 = f_2(A)g_2(A)\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_2 = f_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x}$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$$

である．$\boldsymbol{x} \in W$ なので

$$\begin{aligned} f_1(A)\boldsymbol{x}_1 =& f_1(A)f_2(A)g_2(A)\boldsymbol{x} = g_2(A)f_1(A)f_2(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \\ f_2(A)\boldsymbol{x}_2 =& f_2(A)f_1(A)g_1(A)\boldsymbol{x} = g_1(A)f_1(A)f_2(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

が成り立ち，$\boldsymbol{x}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ もわかる．よって $W = W_1 + W_2$ である．これが直和であるためには $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ を示せばよい．$\boldsymbol{z} \in W_1 \cap W_2$ とする．

$$\boldsymbol{z} = f_1(A)g_1(A)\boldsymbol{z} + f_2(A)g_2(A)\boldsymbol{z} = g_1(A)f_1(A)\boldsymbol{z} + g_2(A)f_2(A)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

より $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ となる．よって $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. □

この補題を繰り返し適用すれば次を得る．

系 5.8.9. $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ をどの 2 つも共通根を持たない多項式とし，

$$\begin{aligned} V_i =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_i(A)\boldsymbol{x} = 0\}, \quad i = 1, \dots, r, \\ V =& \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid f_1(A)f_2(A)\dots f_r(A)\boldsymbol{x} = 0\} \end{aligned}$$

とおくと，$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$.

定理 5.8.7 **の証明**．前の系で $f_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ とおくと，$G_i = V_i$ である．$G_1 \oplus \dots \oplus G_r = \{\boldsymbol{x} \mid \varphi_A(A)\boldsymbol{x} = 0\}$ であるが，次のケーリー・ハミルトンの定理より，これは全空間 $\mathbb{C}^n$ である． □

補題 5.8.10 (ケーリー・ハミルトンの定理)**.** $\varphi_A(A) = O$.

証明．$A = (a_{ij})$ とする．

$$A\boldsymbol{e}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \dots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n, \quad j = 1, \dots, n$$

なので

$$\begin{aligned} (a_{11}E - A)\boldsymbol{e}_1 + a_{21}E\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n1}E\boldsymbol{e}_n &= \boldsymbol{0} \\ a_{12}E\boldsymbol{e}_1 + (a_{22}E - A)\boldsymbol{e}_2 + \dots + a_{n2}E\boldsymbol{e}_n &= \boldsymbol{0} \\ &\cdots \\ a_{1n}E\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}E\boldsymbol{e}_2 + \dots + (a_{nn}E - A)\boldsymbol{e}_n &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である．これを $\boldsymbol{e}_i$ を未知変数の連立方程式と思って行列表示すると

$$\begin{pmatrix} a_{11}E - A & a_{21}E & \cdots & a_{n1}E \\ a_{12}E & a_{22}E - A & & a_{n2}E \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n}E & a_{2n}E & \cdots & a_{nn}E - A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

を得る．これを連立方程式と思って解く事は，この左辺の「行列」の「余因子行列」を左からかける事である．この「行列」は行列を成分とする行列であるが，各要素は行列 A の多項式で書けるので，問題なく「余因子行列」を左からかける事ができ，それを実行すると

$$\varphi_A(A)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \vdots\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

となる．これより $\varphi_A(A)=O$ を得る． □

注意 5.8.11. ケーリー・ハミルトンの定理の証明で $\varphi_A(t)=\det(A-tE)$ に形式的に A を t に代入して $\det(A-AE)=\det(O)=0$ とやっては誤りである．

定理 5.8.2 の証明. 本節冒頭に述べた P_i を構成するには次のようにすればよい．任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_r,\quad \boldsymbol{x}_i\in G_i,$$

と一意的に表せるのであるから, 射影 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}_i$ の表す行列を P_i とする．つまり $\boldsymbol{x}_i=P_i\boldsymbol{x}$. このとき，次がわかる．

$$E=P_1+\cdots+P_r,\quad P_i^2=P_i,\quad P_jP_i=O\ (i\neq j),\quad (A-\lambda_iE)^{m_i}P_i=O$$

実際, すべての $\boldsymbol{x}$ に対し, $E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_r=P_1\boldsymbol{x}+\cdots+P_r\boldsymbol{x}=(P_1+\cdots+P_r)\boldsymbol{x}$ である．$P_i\boldsymbol{x}$ を $G_1,\ldots,G_r$ の直和に分解すると, $P_i\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}+\boldsymbol{x}_i+\mathbf{0}+\cdots+\mathbf{0}$ となり，このような分解の一意性より，この j 項目が $P_j\boldsymbol{x}_i$ である．よって次が成り立つ．

$$P_i^2\boldsymbol{x}=P_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_i=P_i\boldsymbol{x},\qquad P_jP_i\boldsymbol{x}=P_j\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}=O\boldsymbol{x}.$$

$\boldsymbol{x}_i\in G_i$ より $(A-\lambda_iE)^{m_i}P_i\boldsymbol{x}=(A-\lambda_iE)^{m_i}\boldsymbol{x}_i=\mathbf{0}$ もわかる． □

ここで ℓ_i として，次を満たすような最小の正整数 ℓ_i をとる．

$$G_i=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\mid(A-\lambda_iE)^{\ell_i}\boldsymbol{x}=0\}$$

$\phi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\ell_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{\ell_r}$ としたとき $\phi(A)=O$ となるような最小の正整数 ℓ_i をとると言っても同じことである．このような $\phi(\lambda)$ を行列 A の**最小多項式** (minimal polynomial) という．

注意 5.8.12 (P_i の一意性)**.** (i), (ii), (iii) を満たす $P_1,\ldots,P_r$ が存在したとしよう．(iii) より行列 P_i の表す線形写像の像は一般固有空間 G_i に含まれる．(ii) より，P_i の像上に P_i の表す線形写像を制限すれば恒等写像であることが分かり，$i\neq j$ なら P_j の表す線形写像を P_i の像に制限すれば零写像である．(i) より任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ は $P_i\boldsymbol{x}$ 達の和となることがわかり，$\mathbb{C}^n$ は P_i の像の和で書ける．$\mathbb{C}^n$ は一般固有空間の直和で書けるので，P_i

の像は一般固有空間でなければならず，$\mathbb{C}^n$ は P_i の像の直和であることがわかる．このことより，P_i の表す写像は，この直和分解より定まる一般固有空間への射影であり，(i), (ii), (iii) を満たす $P_1, \ldots, P_r$ の（順番を除いての）一意性もわかる．

P_i の存在証明については以上の議論でよいが，具体的に与えられた A に対して，上述の証明に従い一般固有空間を計算し，そこへの射影を書き下すのは大変であることが多い．P_i を A から簡便に計算する方法があれば便利である．以下，最小多項式から P_i を簡便に構成する方法を説明する．A が対角化可能ならば $\ell_1 = \cdots = \ell_r = 1$ となり，固有空間は一般固有空間に一致している．このときは

$$P_i = \frac{\prod_{j\neq i}(A - \lambda_j E)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)}$$

となる．$(A - \lambda_i E)P_i = O$ なので P_i の像は λ_i 固有空間である．

ここで対角化可能であることの条件をまとめておこう．

定理 5.8.13. 正方行列 A について次の 3 条件は同値である．

- A が対角化可能
- $\mathbb{K}^n$ が A の固有空間の和に分解する．
- A の最小多項式が重複因子を持たない．

定理 5.8.2 の別証明. $\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}$ を A の最小多項式とする．

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_i)^{\ell_i}} = \frac{h_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{\ell_1}} + \cdots + \frac{h_r(\lambda)}{(\lambda - \lambda_r)^{\ell_r}}, \quad h_i(\lambda) \text{ は } \ell_i - 1 \text{ 次以下の多項式,}$$

と部分分数分解しておく．この両辺に $\prod_{i=1}^{r}(\lambda - \lambda_i)^{\ell_i}$ をかけると，

$$1 = h_1(\lambda)g_1(\lambda) + \cdots + h_r(\lambda)g_r(\lambda), \quad g_i(\lambda) = \prod_{j\neq i}(\lambda - \lambda_j)^{\ell_j}$$

となる．このとき λ に A を代入すれば，$P_i = h_i(A)g_i(A)$ と置くと，次を得る．

$$E = P_1 + \cdots + P_r, \quad P_iP_j = O\ (i \neq j), \quad (A - \lambda_i E)^{\ell_i} P_i = O$$

最後の 2 式は $\phi(\lambda)$ が A の最小多項式である事の帰結である．

また $P_i = P_iE = P_i(P_1 + \cdots + P_r) = P_i^2$ もわかる．P_i は A の多項式であるので $AP_i = P_iA$ もわかる．　□

定理 5.8.14. 行列 P_i の表す線形写像 $P_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ の像を W_i と書けば，

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r.$$

証明. $E = P_1 + \cdots + P_r$ より，$\mathbb{C}^n = W_1 + \cdots + W_r$ である．実はこれは直和である．実際，$\boldsymbol{x} \in (W_1 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k$ とすると $\boldsymbol{x} = P_k\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k-1} P_i\boldsymbol{v}_i$ なる $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_i$ が存在するが

$$\boldsymbol{x} = P_k\boldsymbol{u} = P_k^2\boldsymbol{u} = P_k(\sum_{i=1}^{k-1} P_i\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}$$

となるからである． □

$AP_i = P_iA$ より，線形写像 $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を W_i に制限するとその像は W_i に入ることもわかる．

G_i を一般固有空間とすると，$W_i \subset G_i$ である．定理 5.8.7 より，$\mathbb{C}^n = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ であるから $W_i = G_i$ である事がわかる．

5.8.3 ジョルダン標準形

定理 5.8.15. 任意の複素正方行列 A に対し次を満たす対角化可能行列 S と冪零行列 N が存在する．

$$A = S + N, \qquad SN = NS$$

更に，この様な分解は一意的であることも分かる．

証明. (5.8.4) において，$S = \lambda_1P_1 + \cdots + \lambda_rP_r$ と置けば良い．P_i は A の多項式で表せるので，N も A の多項式で表されている．よって P_i と N は交換可能であり，S と N も交換可能である．W_i の基底を並べて，$\mathbb{C}^n$ の基底 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を作れば，$\boldsymbol{x}_i$ はある W_j の元であるから $\boldsymbol{x}_i = P_j\boldsymbol{v}$ なる $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在するので，

$$S\boldsymbol{x}_i = SP_j\boldsymbol{v} = (\lambda_1P_1 + \cdots + \lambda_rP_r)P_j\boldsymbol{v} = \lambda_jP_j^2\boldsymbol{v} = \lambda_jP_j\boldsymbol{v} = \lambda_j\boldsymbol{x}_i.$$

これは S が対角化可能であることを示している．

一意的は次の様にわかる．$A = S + N = S' + N'$ として $S'N' = N'S'$ と仮定すれば S', N' は $A = S' + N'$ と可換であり，A の多項式である S, N とも可換である．2 つの対角化可能行列 S, S' は可換なので同時対角化可能（注意 5.1.20）であり，$S - S'$ が対角化可能である．即ちある正則行列 P が存在して，$P^{-1}SP$, $P^{-1}S'P$ は対角行列であるようにできる．N' は冪零と仮定すると $S - S' = N' - N$ は冪零なので $S - S' = N' - N = O$ がわかる．実際，$(N' - N)^m = O$ なる m を取ると

$$(P^{-1}(S - S')P)^m = P^{-1}(S - S')^mP = P^{-1}(N' - N)^mP = O$$

であるが $P^{-1}(S - S')P$ は対角行列なので，その対角成分はすべて 0 でなければならず，$P^{-1}(S - S')P = O$ であり $S = S'$ がわかる．よって $N = N'$ もわかる． □

実は正則行列 P をうまく選べば，次式を満たすようにできる．

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 + B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r E_r + B_r \end{pmatrix} P \tag{5.8.16}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は（必ずしも相異なるとは限らない）A の固有値で，B_i は後述の (5.8.27) の形をした冪零行列 B_i，E_i は B_i と同じサイズの単位行列である．これを**ジョルダンの標準形**という．各 $\lambda_j E_j + B_j$ を**ジョルダン細胞**（または**ジョルダンブロック**）ということがある．(5.8.16) を認めれば次が容易にわかる．

$$S = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r E_r \end{pmatrix} P, \quad N = P^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} P$$

本節の残りでジョルダンの標準形を説明しよう．

まず冪零行列に関する簡単な注意から始める．

補題 5.8.17. N が冪零行列 $\iff \varphi_N(\lambda) = \lambda^n$

証明. λ を N の固有値，$\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトルとする．N を冪零行列とすると $N^p = O$.

$$\mathbf{0} = N^p \boldsymbol{x} = N^{p-1}\lambda \boldsymbol{x} = N^{p-2}\lambda^2 \boldsymbol{x} = \cdots = \lambda^p \boldsymbol{x}$$

より $\lambda^p = 0$. よって $\lambda = 0$. □

さて，行列 N が定める線形写像 $N : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ に対し，次の列を考える．

$$\operatorname{Ker} N \subset \operatorname{Ker} N^2 \subset \operatorname{Ker} N^3 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} N^{l-1} \subset \operatorname{Ker} N^l \subset \operatorname{Ker} N^{l+1} \subset \cdots \tag{5.8.18}$$

これは，有限次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ 内の部分空間の増大列なのでどこかで増大が止まる．次の補題は (5.8.18) のある箇所で等号が成立すればそこから先はずっと等号である事を示している．

補題 5.8.19. $\operatorname{Ker} N^{l-1} = \operatorname{Ker} N^l$ ならば $\operatorname{Ker} N^l = \operatorname{Ker} N^{l+1}$.

証明. $\operatorname{Ker} N^l \subset \operatorname{Ker} N^{l+1}$ は明らかだから，逆向きの包含関係を示す．$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} N^{l+1}$ とすると $N^{l+1}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より $N\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} N^l = \operatorname{Ker} N^{l-1}$ よって $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} N^l$. □

さて次が成り立つとする．

(5.8.20)

$$0 = \operatorname{Ker} N^0 \subsetneqq \operatorname{Ker} N \subsetneqq \operatorname{Ker} N^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \operatorname{Ker} N^{l-1} \subsetneqq \operatorname{Ker} N^l = \operatorname{Ker} N^{l+1} = \cdots$$

補題 5.8.21. $i \geq 1$ とする． $\operatorname{Ker} N^{i+1}$ の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_a$ の $\operatorname{Ker} N^{i+1}/\operatorname{Ker} N^i$ への像が 1 次独立ならば $N\boldsymbol{v}_1, \ldots, N\boldsymbol{v}_a$ の $\operatorname{Ker} N^i/\operatorname{Ker} N^{i-1}$ への像も 1 次独立である．

証明. $c_1N\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_aN\boldsymbol{v}_a\in\operatorname{Ker}N^{i-1}$ と仮定して，$c_1=\cdots=c_a=0$ を示せば良い．仮定より

$$N(c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_a\boldsymbol{v}_a)\in\operatorname{Ker}N^{i-1}$$

なので $c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_a\boldsymbol{v}_a\in\operatorname{Ker}N^i$ であり $\operatorname{Ker}N^i\subset\operatorname{Ker}N^{i+1}$ より

$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_a\boldsymbol{v}_a$ の $\operatorname{Ker}N^{i+1}/\operatorname{Ker}N^i$ への像は $\mathbf{0}$ である．

$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_a$ の $\operatorname{Ker}N^{i+1}/\operatorname{Ker}N^i$ への像が 1 次独立なので $c_1=\cdots=c_a=0$ が分かる． □

以下 N を線形写像として，$\operatorname{Ker}N^l$ の基底の取り方を示す．このプロセスは一般固有空間の基底の取り方を与えている．

(1) $\operatorname{Ker}N^l$ のベクトル

(5.8.22)
$$\boxed{\boldsymbol{v}_1^{(1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)}}$$

を，それらの像が $\operatorname{Ker}N^l/\operatorname{Ker}N^{l-1}$ の基底をなす様にとる．

(2) 補題 5.8.21 より (5.8.22) の $\operatorname{Ker}N^{l-1}/\operatorname{Ker}N^{l-2}$ への像は 1 次独立である．$\operatorname{Ker}N^{l-1}$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_2}^{(2)}$ を，

(5.8.23)
$$\boxed{N\boldsymbol{v}_1^{(1)},\ldots,N\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)}},\ \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_2}^{(2)}}$$

の像が $\operatorname{Ker}N^{l-1}/\operatorname{Ker}N^{l-2}$ の基底をなす様にとる．

(3) 補題 5.8.21 より (5.8.23) の $\operatorname{Ker}N^{l-2}/\operatorname{Ker}N^{l-3}$ への像は 1 次独立である．

$$\boxed{N^2\boldsymbol{v}_1^{(1)},\ldots,N^2\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)}},\ \boxed{N\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ldots,N\boldsymbol{v}_{a_2}^{(2)}},\ \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(3)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_3}^{(3)}}$$

の像が $\operatorname{Ker}N^{l-2}/\operatorname{Ker}N^{l-3}$ の基底をなす様に $\operatorname{Ker}N^{l-2}$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1^{(3)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_3}^{(3)}$ をとる．

以下このプロセスを繰り返す．

(l) 最後のプロセスでは，$\operatorname{Ker}N$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1^{(l)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_l}^{(l)}$ を，

(5.8.24)
$$\boxed{N^{l-1}\boldsymbol{v}_1^{(1)},\ldots,N^{l-1}\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)}},\ \boxed{N^{l-2}\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ldots,N^{l-2}\boldsymbol{v}_{a_2}^{(2)}},\ \ldots,\ \boxed{N\boldsymbol{v}_1^{(l-1)},\ldots,N\boldsymbol{v}_{a_{l-1}}^{(l-1)}},\ \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(l)},\ldots,\boldsymbol{v}_{a_l}^{(l)}}$$

が $\operatorname{Ker}N$ の基底をなす様にとる．補題 5.8.21 より最初の $l-1$ 個のブロックは 1 次独立である事に注意する．

このようにして得られたベクトルをすべて集めると，これらは

$$\operatorname{Ker} N^l = (\operatorname{Ker} N^l/\operatorname{Ker} N^{l-1})\oplus(\operatorname{Ker} N^{l-1}/\operatorname{Ker} N^{l-2})\oplus\cdots\oplus(\operatorname{Ker} N^2/\operatorname{Ker} N)\oplus\operatorname{Ker} N$$

の基底であるが，これらを次の様に並べ替える．

$$\begin{array}{l} \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(1)},\ N\boldsymbol{v}_1^{(1)},\ldots,N^{l-1}\boldsymbol{v}_1^{(1)}},\quad \ldots,\quad \boxed{\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)},\ N\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)},\cdots,\ N^{l-1}\boldsymbol{v}_{a_1}^{(1)}}, \\ \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ N\boldsymbol{v}_1^{(2)},\ldots,\ N^{l-2}\boldsymbol{v}_1^{(2)}},\quad \ldots,\quad \boxed{\boldsymbol{v}_{a_1}^{(2)},\ N\boldsymbol{v}_{a_1}^{(2)},\cdots,\ N^{l-2}\boldsymbol{v}_{a_2}^{(2)}}, \\ \ldots \\ \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(l-1)},N\boldsymbol{v}_1^{(l-1)}},\quad \ldots,\quad \boxed{\boldsymbol{v}_{a_{l-1}}^{(l-1)},\ N\boldsymbol{v}_{a_{l-1}}^{(l-1)}}, \\ \boxed{\boldsymbol{v}_1^{(l)}},\quad \ldots,\quad \boxed{\boldsymbol{v}_{a_l}^{(l)}} \end{array} \tag{5.8.25}$$

以下 N を $N^l = O$ なる冪零行列とする．このとき (5.8.25) は $\operatorname{Ker} N^l = \mathbb{C}^n$ の基底である．

例 5.8.26. $\dim \operatorname{Ker} N^{i-1}/\operatorname{Ker} N^i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ のとき $\operatorname{Ker} N^l/\operatorname{Ker} N^{l-1}$ の基底を表す $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} N^l$ をすると，$\boldsymbol{v}$, $N\boldsymbol{v}$, $N^2\boldsymbol{v}$, …, $N^{l-1}\boldsymbol{v}$ が $\operatorname{Ker} N^l$ の基底になる．

$$N(N^{l-1}\boldsymbol{v}\ \ldots\ N\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{v}) = (N^{l-1}\boldsymbol{v}\ \ldots\ N\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{v})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，N の表す線形写像の基底 $(N^{l-1}\boldsymbol{v}, \ldots, N\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ に関する表現行列は次で表される．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8.27}$$

この例は，(5.8.25) の各ブロックで生成されるベクトル空間での N の表現行列は (5.8.27) であることを示している．線形写像 N は各ブロックを保つからである．

例 5.8.28. n 次正方行列 A の固有値は λ_1 のみであるとし，$(A-\lambda_1 E)^m = O$ なる最小の m が n であるとしよう．$(A-\lambda_1 E)^n = O$ かつ $(A-\lambda_1 E)^{n-1} = O$ なので

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E) \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)^2 \subset \cdots \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)^{n-1} \subsetneqq \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)^n = \mathbb{C}^n$$

補題 5.8.19 よりこの包含関係はどれも等号でない．従って $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)^k = k$ である．$\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)^n/\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)^{n-1}$ への像が，その基底になるベクトル $\boldsymbol{v}$ をとる．すると，

- 補題 5.8.21 より $(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{v}$ の $\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)^{n-1}/\,\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)^{n-2}$ への像がその基底になり，
- 順に，補題 5.8.21 を使って $(A-\lambda_1 E)^i\boldsymbol{v}$ の $\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)^{n-i}/\,\mathrm{Ker}(A-\lambda_1 E)^{n-i-1}$ への像がその基底になる

事がわかる．よって

$$\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_{n-1}=(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{v},\ \ldots,\boldsymbol{v}_2=(A-\lambda_1 E)^{n-2}\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1=(A-\lambda_1 E)^{n-1}\boldsymbol{v}$$

が $\mathbb{C}^n$ の基底になる．この基底に関して

$$A\boldsymbol{v}_1=\lambda_1\boldsymbol{v}_1,\ A\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+\lambda_1\boldsymbol{v}_2,\ \ldots,\ A\boldsymbol{v}_{n-1}=\boldsymbol{v}_{n-2}+\lambda_1\boldsymbol{v}_{n-1},\ A\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}_{n-1}+\lambda_1\boldsymbol{v}_n$$

なので

$$A(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}$$

であり $P=(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)$ とおくと，これは正則行列で次を得る．

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}$$

注意 5.8.29. 冪零行列の表す線形写像は，うまく基底をとれば表現行列は次の様になる．

$$\begin{pmatrix}B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r\end{pmatrix}\quad \text{但し } B_i \text{ はあるサイズの (5.8.27) の形の行列}$$

定理 5.8.3 を勘案すれば，任意の正方行列 A に対しそれの表す線形写像は，うまく基底をとれば表現行列は次のようになる事がわかる．

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 E_1+B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r E_r+B_r\end{pmatrix}\quad \text{但し } E_i \text{ は } B_i \text{ と同じサイズの単位行列} \tag{5.8.30}$$

言い換えると，正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ は (5.8.30) となる．これを行列 A の**ジョルダン標準形**という．

例 5.8.31. $A=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよう．

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&-1\\1&-\lambda&0&0\\0&1&-\lambda&2\\0&0&1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&0&0\\1&-\lambda&2\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&-\lambda&2\\0&1&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda^2-2)+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

なので $\lambda = 1, -1$ が固有値．固有ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ でこれが各固有空間を生成している．$(A - E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$, $(A + E)\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_3$ を満たす $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_4$ を取れば $P = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_4)$ として次を得る．

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_4$ としては例えば $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と取れば良い．このとき P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

補題 5.8.32. 射影 P の固有値は 1 または 0 で，P の固有値 1 の重複度は P のトレースである．

証明. 射影 P の固有値を λ とすると，$P\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, なる $\boldsymbol{v}$ が存在する．

$$P\boldsymbol{v} = P^2\boldsymbol{v} = P(P\boldsymbol{v}) = P(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}$$

なので $\lambda^2 = \lambda$ となり，$\lambda = 1, 0$．固有多項式は $(-\lambda)^p(1-\lambda)^q$ であり，$p + q - 1$ 次の項を見れば P のトレースは固有値 1 の重複度であることがわかる． □

射影 P の最小多項式は $\lambda(\lambda - 1)$ であり，P は対角化可能である．射影 P の固有値 1 の重複度は P の階数でもある．

例 5.8.33. B を正則行列，N を冪零行列，P を正則行列として，

$$A = P\begin{pmatrix} B & O \\ O & N \end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{で } A \text{ が定まっているとする．このとき} \quad X = P\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1}$$

と置くと，$AX = XA$, $XAX = X$ となる．これは，次の様に確かめられる．

$$\begin{aligned} AX =& P\begin{pmatrix} B & O \\ O & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & O \\ O & N \end{pmatrix}P^{-1} = XA \\ XAX =& P\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & O \\ O & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} \\ =& P\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-1} = X \end{aligned}$$

A に逆行列は存在しないが，X は A の逆行列の満たすべき性質のいくつかを満たしていると考える事ができる．

5.9　正規行列 *

本節では複素行列 A の共役転置行列 ${}^t\overline{A}$ を $A^\dagger$ で表す[*6]．$U^\dagger U = E$ となる正方行列 U をユニタリー行列という．

複素正方行列 A が**正規行列** (normal matrix) とは，$A^\dagger A = AA^\dagger$ を満たすときを言う．

U をユニタリー行列，Λ を対角行列として $A = U\Lambda U^{-1}$ であれば，次式に示すように A は正規行列である．

$$AA^\dagger = U\Lambda U^\dagger (U\Lambda U^\dagger)^\dagger = U\Lambda U^\dagger U\Lambda^\dagger U^\dagger = U\Lambda\Lambda^\dagger U^\dagger = U\Lambda^\dagger\Lambda U^\dagger = U\Lambda^\dagger U^\dagger U\Lambda U^\dagger = A^\dagger A$$

本節の目標はこの逆が成立する事を示す事である．

定理 5.9.1. 正規行列 A はユニタリー行列で対角化可能である．

証明. $n = 1$ のときは自明．n のときを仮定して $n+1$ のときを示す．$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, $\|\boldsymbol{x}\| \neq 1$, なる λ, $\boldsymbol{x}$ をとる．$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が正規直交行列になるようにとる．$U = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}_1\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n)$ はユニタリー行列であり

$$U^\dagger AU = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^\dagger \\ \boldsymbol{x}_1^\dagger \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^\dagger \end{pmatrix} (A\boldsymbol{x}\ A\boldsymbol{x}_1\ \cdots\ A\boldsymbol{x}_n) = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{5.9.2}$$

の形にかける．A が正規行列なので $U^\dagger AU$ も正規行列である．実際，

$$U^\dagger AU(U^\dagger AU)^\dagger = U^\dagger AUU^\dagger A^\dagger U = U^\dagger AA^\dagger U = U^\dagger A^\dagger AU = U^\dagger A^\dagger UU^\dagger AU = (U^\dagger AU)^\dagger U^\dagger AU$$

となる．

$$\begin{pmatrix} \lambda & B \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & B \\ O & A_1 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda & B \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar\lambda & O \\ B^\dagger & A_1^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\bar\lambda + BB^\dagger & BA_1^\dagger \\ A_1B^\dagger & A_1A_1^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\lambda & O \\ B^\dagger & A_1^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & B \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\bar\lambda & \lambda B \\ \lambda B^\dagger & B^\dagger B + A_1^\dagger A_1 \end{pmatrix}$$

なので $B = O$ で A_1 は正規行列である事がわかる．帰納法の仮定よりユニタリー行列 U_1 が存在して $\Lambda_1 = U_1^\dagger A_1 U_1$ は対角行列になる．よって (5.9.2) より

$$\begin{aligned}\left(U\begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}\right)^\dagger AU\begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}^\dagger U^\dagger AU\begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix} \lambda & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & O \\ O & \Lambda_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，主張が示された． □

[*6] A^* で表す事も多い．本稿では A^* を余因子行列の意味で使ったので，ここでは $A^\dagger$ を用いることにする．

5.10　行列の特異値分解 *

本節ではベルトラミとジョルダンによる特異値分解の概要を紹介する．

$m \times n$ 実行列 A の定める線形写像 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$, を考える．$S = {}^t\!AA$ とおくとこれは対称行列なので ${}^t\!USU = \Lambda$ が対角行列になるような直交行列 $U = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ が存在する．$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{x}'$ と置くと

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = {}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}({}^t\!AA)\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}'\,{}^t\!USU\boldsymbol{x}' = {}^t\boldsymbol{x}'\Lambda\boldsymbol{x}'$$

が成り立ち，左辺は非負なので Λ の対角成分は非負である．Λ の対角成分を順に $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると，これらは非負であるから，これらの非負平方根を対角成分とする $m \times n$ 対角行列 Σ を考える事ができる．つまり Σ は次の何れかの形とできる．

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (m > n), \qquad \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix} (m = n),$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (m < n).$$

但し $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. ここで $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = 0$ と仮定して良い．

$${}^t(AU)(AU) = {}^t\!U\,{}^t\!AAU = {}^t\!USU = \Lambda$$

この式は $A\boldsymbol{u}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ の長さは σ_i で，かつ $A\boldsymbol{u}_i$ と $A\boldsymbol{u}_j$ $(i \neq j)$ は直交している事を示している．従って

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\boldsymbol{u}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{v}_r = \frac{1}{\sigma_r}A\boldsymbol{u}_r$$

を延長して直交行列 $V = (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_r \ \cdots \ \boldsymbol{v}_m)$ を作る事ができる．

$$A\boldsymbol{u}_1 = \sigma_1\boldsymbol{v}_1, \ \ldots, \ A\boldsymbol{u}_r = \sigma_r\boldsymbol{v}_r, \ A\boldsymbol{u}_{r+1} = \boldsymbol{0}, \ \ldots, \ A\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

なので $AU = V\Sigma$ となり，次の表示式を得る．

$$A = V\Sigma\,{}^t\!U$$

これを行列 A の**特異値分解** (singular value decomposition) といい σ_i を**特異値** (singular value) という．定義より次がわかる．

$$\sup\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\} = \sup\{\|A\boldsymbol{x}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} = \sigma_1$$

A が正方行列のとき，$M = V\Sigma$ と置けば M は半正値の行列で，$A = M\,{}^t\!U$ となる．これを A の**極分解** (polar decomposition) と呼ぶ事がある．

例 5.10.1. A が対称行列のとき，直交行列 U が存在して $\Lambda = {}^tUAU$ は対角行列となる．$A = U\Lambda{}^tU$ より

$$ {}^tAA = {}^t(U\Lambda{}^tU)U\Lambda{}^tU = T({}^t\Lambda\Lambda){}^tU = U(\Lambda^2){}^tU $$

となり A の特異値 σ_i は A の固有値 λ_i の絶対値である事がわかる．

注意 5.10.2. 複素行列についても転置行列を共役転置行列，直交行列をユニタリー行列と読み替える事により，特異値分解を定義できる．前の例の計算より，正規行列については特異値は固有値の絶対値になる事もわかる．

例 5.10.3. 行列 $\left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ の固有値は $x \pm y\sqrt{-1}$, 特異値は $\sqrt{x^2+y^2}$（重複度 2）である．

定理 5.10.4 (ワイル)**.** n 次正方行列 A の固有値を λ_i, 特異値を σ_i とする．$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n$ とすれば，次が成り立つ．

$$ \prod_{i=1}^{k} |\lambda_i| \leq \prod_{i=1}^{k} \sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i. $$

証明. 注意 C.4.10 の意味で $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ に内積が決まり，$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k$ の長さ $\|\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k\|$ が定まる．固有値 λ_i に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とすれば

$$ \begin{aligned} |\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}| &= \frac{\|\lambda_{i_1}\boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i_k}\boldsymbol{x}_{i_k}\|}{\|\boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i_k}\|} = \frac{\|(A\boldsymbol{x}_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (A\boldsymbol{x}_{i_k})\|}{\|\boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{i_k}\|} \\ &\leq \sup\{\|A\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge A\boldsymbol{v}_k\| : \|\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k\| = 1\} \\ &= \sup\{\|\Sigma\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \Sigma\boldsymbol{u}_k\| : \|\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_k\| = 1\} = \sigma_1 \cdots \sigma_k. \end{aligned} $$

最後の式は $\prod_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \det({}^tAA) = \det({}^t\Sigma\Sigma) = \prod_{i=1}^n \sigma_i^2$ より従う．　□

特異値の意味については後述の 7.4.2 節を見よ．

定理 5.10.4 は次の論文が初出の様である．タイトルを見ると，eigenvalue という言葉が固有値と特異値の両方の意味で使われている．当時はまだ eigenvalue という言葉が，現在使われている意味で確定的には使われていなかった事が推察される．

Hermann Weyl, Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc Natl Acad Sci U S A. 35 (1949), 408 – 411.

第 6 章

双 1 次形式 *

ユークリッド空間では，内積が長さや角度等の幾何学的量を記述する基本的な概念である．内積は曲がった空間にも一般化され，それは計量とも呼ばれる．時空のモデルであるミンコフスキー空間では，正定値でない計量を考え，それで時空を記述する．このような内積やその一般化である双 1 次形式は数学の応用の多くの場面で現れる．ここでは双 1 次形式について，基礎事項を紹介しよう．

6.1　双 1 次形式

6.1.1　双 1 次形式の定義と例

V, W を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

$$\beta : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \longmapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),$$

が $V \times W$ 上の**双 1 次形式**（**双線形形式**）(a bilinear form) とは，片側の変数を固定したとき線形である時をいう．すなわち $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$, $c \in \mathbb{K}$ に対して次が成り立つときをいう．

$$\begin{aligned} \beta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) &= \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}), & \beta(c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= c\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \\ \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') &= \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'), & \beta(\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w}) &= c\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}). \end{aligned}$$

$V = W$ のときは，β を V 上の双 1 次形式という．さらに $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ が成り立つとき V 上の**対称**双 1 次形式，$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = -\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ が成り立つとき V 上の**交代**双 1 次形式という．

例 6.1.1. $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V とその双対空間 V^* に対し自然な次の双 1 次形式がある．

$$V \times V^* \longrightarrow \mathbb{K} \quad (\boldsymbol{v}, \varphi) \longmapsto \varphi(\boldsymbol{v})$$

例 6.1.2. $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$ のとき，$n \times m$ 行列 B に対し $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = {}^t\boldsymbol{v}B\boldsymbol{w}$ は双 1 次形式になる．$m = n$ として，B が対称行列ならば対称双 1 次形式，B が交代行列ならば交代双 1 次形式である．

V, W が有限次元の $\mathbb{K}$ ベクトル空間のとき，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と，W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ をとれば，双 1 次形式 $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ の表現行列を $(\beta(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_j))_{i,j}$ で定めることが出来る．

特に $V = W$ のとき，双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ に対し

$$(\beta(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)) = \begin{pmatrix} \beta(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & \cdots & \beta(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1) & \cdots & \beta(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix}$$

を，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する双 1 次形式 β の**表現行列**という．

例 6.1.3. 実ベクトル空間 V 上の双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ に対し

$$\sigma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}{2}, \quad \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}{2}$$

と置くと，$\sigma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は対称双 1 次形式，$\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は交代双 1 次形式で，次式が成立する．

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sigma(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

定義 6.1.4. 実ベクトル空間上の対称双 1 次形式 β が $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ のとき，β は**正定値** (positive definite) であると言う．このとき β を**内積** (inner product) という事もある．対称双 1 次形式 β が $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$ のとき，β は**負定値** (negative definite) であると言う．正定値または負定値のとき β は**定値** (definite) であると言い，定値でない β を**非定値** (indefinite) という．

注意 6.1.5. 双 1 次形式 $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ があれば，次の自然な線形写像がある．

$$\beta^* : V \longrightarrow W^*, \quad \boldsymbol{v} \longmapsto [\boldsymbol{w} \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})]$$

逆に線形写像 $\beta^* : V \to W^*$ があれば $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta^*(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w})$ で，双 1 次形式 $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ を決めると見る事もできる．

V が有限次元でその基底を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とすると $\beta^*(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j) = \beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b_{i,j}$ となり

$$\beta^*(\boldsymbol{e}_i) = b_{i,1}\boldsymbol{e}_1^* + \cdots + b_{i,n}\boldsymbol{e}_n^*$$

である．但し $\boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$ は $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の双対基底.

対称双 1 次形式や内積を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ と表す事も多い．$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は生成する部分空間（線形包）と紛らわしく，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は座標と紛らわしく，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ は積と紛らわしい．状況に応じて上手に記号を選べばよいが，本稿では主に $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を用いる．

注意 6.1.6. 一般に実ベクトル空間 V 上の 2 次形式 $Q: V \to \mathbb{R}$ とは，対称双 1 次形式 $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ があって，$Q(\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ と書けるものを言う．β が正定値ならば $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に対し $Q(\boldsymbol{v}) > 0$ となる．また，

$$\beta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + 2\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$$

なので，次式を得る．

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}[Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) - Q(\boldsymbol{v}) - Q(\boldsymbol{w})] \tag{6.1.7}$$

この式は 2 次形式 $Q(\boldsymbol{v})$ $(\boldsymbol{v} \in V)$ で，対称双 1 次形式 β が定まる事を示している．

線形写像 $f: V \longrightarrow V$ が双 1 次形式 β を保つとは，次が成り立つときを言う．

$$\beta(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$$

線形写像 $f: V \longrightarrow V$ が双 1 次形式 β を保てば，線形写像 f は 2 次形式 Q を保つ．すなわち次が成り立つ．

$$Q(f(\boldsymbol{v})) = Q(\boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V$$

関係式 (6.1.7) は線形変換 f が 2 次形式 Q を保てば，双 1 次形式 β を保つ事を示している．

例 6.1.8. $V = \mathbb{R}^n$ のとき

$$\beta: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \ \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \longmapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

で定まる双 1 次形式を**ユークリッド内積** (Euclidean inner product) という．$\mathbb{R}^n$ とこの内積を対にしたものを**ユークリッド空間** (Euclid space) という．

例 6.1.9. $V = \mathbb{R}^n$ のとき

$$\beta: V \times V \to \mathbb{R}, \ \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n$$

で定まる双 1 次形式を**ミンコフスキー擬内積** (Minkowski quasi-inner product) という．$\mathbb{R}^n$ とこの双 1 次形式を対にしたものを**ミンコフスキー空間** (Minkowski space) という．

例 6.1.10. $V = \mathbb{R}^n$ のとき

$$\beta: V \times V \to \mathbb{R}, \ \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_n y_n$$

で定まる双 1 次形式を**擬ユークリッド双 1 次形式** (pseudo-Euclidean bilinear form) という．

例 6.1.11. $V = \mathbb{R}^2$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\boldsymbol{a}_n = (n + 1/n, n)$ とおくと $\beta(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) = 2 + 1/n^2 \to 2$ $(n \to \infty)$. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ は無限遠に発散する点列だが，$\beta(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n)$ は収束する．

注意 6.1.12 (エルミート双 1 次形式)**.** 本節では主に実ベクトル空間を扱うが，複素ベクトル空間を考える際，内積や双 1 次形式をどのように考えるのが良いか，簡単に注意しておく．複素ベクトル空間 V に対しては，実ベクトル空間の対称双 1 次形式の代わりにエルミート双 1 次形式を考えるのが普通である．以下定義を述べよう．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in V$, $c \in \mathbb{C}$ に対して次が成り立つとき $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ は**エルミート双 1 次形式**であるという．

$$\begin{aligned} \beta(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) =& \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}), & \beta(c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= c\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \\ \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') =& \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'), & \beta(\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w}) &= \bar{c}\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \\ \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) =& \overline{\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}. \end{aligned}$$

エルミート双 1 次形式が正定値（$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ は正の実数）のとき，**エルミート内積**という．エルミート双 1 次形式の定値性や後述の非退化性（定義 6.1.15）は実の場合と同様に定義される．

エルミート内積の典型的な例は次で与えられる．

$$\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

β の実部 $\operatorname{Re}\beta$ は $\mathbb{C}^n$ のユークリッド内積を与えている．

定義 6.1.13. 実ベクトル空間 V_i とその上の双 1 次形式 $\beta_i : V_i \times V_i \to \mathbb{R}$ の組 (V_i, β_i) $(i = 1, 2)$ が**同型**であるとは，線形同型写像 $f : V_1 \to V_2$ があって，次をみたすときを言う．

$$\beta_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta_2(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})) \qquad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V_1 \tag{6.1.14}$$

6.1.2　非退化双 1 次形式

定義 6.1.15 (非退化双 1 次形式)**.** 対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ が**非退化** (non-degenerate) であるとは，次の条件が成り立つときをいう．

$$\forall \boldsymbol{v} \in V \ [\ (\text{任意の } \boldsymbol{w} \in V \text{ に対し } \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0) \text{ ならば } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ ]$$

系 6.1.16. 対称双 1 次形式 β が定値ならば非退化である．

証明. 定値なので $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である．

任意の $\boldsymbol{w} \in V$ に対し $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{v} \in V$ を取る．$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ より，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ なので，非退化性がわかる． □

注意 6.1.17. 対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ が非退化ならば，次の写像は単射である．

$$V \longrightarrow V^*, \quad \boldsymbol{v} \longmapsto [\boldsymbol{w} \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})] \tag{6.1.18}$$

もし，V が有限次元ならば，この写像は全単射である[*1]．有限次元ベクトル空間に，内積の様な非退化対称 1 次形式があれば，(6.1.18) により双対空間 V^* は V と同一視される．

定理 6.1.19. $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ を n 次元ベクトル空間 V 上の対称双 1 次形式，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を V の基底，$(b_{i,j}) = (\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$ とする．この時次が成り立つ．
$\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ が非退化 $\iff$ $(b_{i,j})$ が正則行列.

証明. β が非退化 $\iff$ $V \to V^*$, $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{w} \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})]$, が単射
$\iff$ $V \to V^*$, $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{w} \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})]$, が全射
$\iff$ $\exists \boldsymbol{a}_i \in V\ \boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{w}), \forall \boldsymbol{w} \in V$,
$\iff$ $\exists \boldsymbol{a}_i \in V\ \beta(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{i,j}$
$\overset{(*)}{\iff}$ $\exists a_{i,j}\ (a_{i,k})(b_{k,j}) = E$ $\iff$ $(b_{i,j})$ は正則行列
ここで $(*)$ の同値性を示すには $\boldsymbol{a}_i = a_{i,1}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{i,n}\boldsymbol{e}_n$ と置けばよい． □

6.1.3　2 次超曲面の極双対性

双対空間 V^* の元 φ に対し $\{\boldsymbol{v} \in V : \varphi(\boldsymbol{v}) = 0\}$ は余次元 1 の部分空間である．これを超平面と呼ぶ．ここでは非退化双 1 次形式の例として，2 次曲線の極線（定義 5.4.8）の 2 次超曲面への一般化である 2 次超曲面に関する極双対性を説明する．

定義 6.1.20. $\mathbb{R}^n$ の 2 次超曲面

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{vmatrix} \neq 0,$$

に対し，次で定まる超平面を点 $\boldsymbol{p}$ の**極超平面** (polar hyperplane) という．

$${}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + c = 0 \tag{6.1.21}$$

次で $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を定めると $Q(\boldsymbol{x}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ で，点 $\boldsymbol{p}$ の極超平面は $B(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = 0$ で定まる．

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\tilde{\boldsymbol{x}}\widetilde{A}\tilde{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} + {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{y} + c, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix},\ \tilde{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*1] 無限次元のときは (6.1.18) の全単射性を非退化性の定義とすることも多い．後述のノルム空間の場合は $V \to V'$ が全単射であることを非退化性の定義とするのも自然である．

行列 $\widetilde{A}$ の定める双 1 次形式を $\beta : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ とすれば，β を部分集合 $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ に制限したものが B になっている．$(\mathbb{R}^{n+1})^*$ の元 φ が定める超曲面 $\{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^{n+1} : \varphi(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}\}$ と $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ の共通部分は (必ずしも $\mathbb{R}^n$ の原点を通らない) 超平面を定めている．$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\tilde{\boldsymbol{p}} = \binom{\boldsymbol{p}}{1}$ と置き，$\beta(\tilde{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = 0$ の定める $\mathbb{R}^n$ の超曲面が極超曲面になっている．$\widetilde{A}$ が正則なので，双 1 次形式 β は非退化であり，対応

$$\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n\text{の必ずしも原点を通らない超平面全体の集合}),\ \boldsymbol{p} \mapsto (\boldsymbol{p}\text{ の定める極超曲面})$$

は全単射である．この対応を 2 次超曲面に付随した**極双対性** (polar duality) という．

定理 6.1.22. 上の記号の下，次が成り立つ．

(i) 点 $\boldsymbol{p}$ が 2 次超曲面上にあれば，極超平面は $\boldsymbol{p}$ を接点とする超平面である．

(ii) 点 $\boldsymbol{p}$ が 2 次超曲面上にないとき，

　(a) 点 $\boldsymbol{p}$ を通る超平面と 2 次超曲面の共通部分に n 個の点をとり，それらを接点とする 2 次超曲面の n 個の超平面の交点は極超平面上にある．

　(b) 点 $\boldsymbol{p}$ を含む 2 次超曲面の接超平面が n 個あればそれらの接点は極超平面上にある．

証明. (i): 点 $\boldsymbol{p}$ が 2 次超曲面上にあるとき，点 $\boldsymbol{p}$ は極超平面上にある．$\boldsymbol{x}$ が時間 t に依存して 2 次超曲面上を動くとき $Q(\boldsymbol{x}) = 0$ を t で微分して次を得る．

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + {}^t\boldsymbol{b}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = 0 \tag{6.1.23}$$

この時，直線 $s \mapsto \boldsymbol{p} + s\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ は極超平面上にある．実際，${}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + c = 0$ であり，(6.1.23) より

$${}^t\boldsymbol{p}A\Big(\boldsymbol{p} + s\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big) + {}^t\boldsymbol{b}\Big(\boldsymbol{p} + s\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big) + c = {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{p} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{p} + c + s\Big({}^t\boldsymbol{x}A\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + {}^t\boldsymbol{b}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\Big) = 0$$

がわかる．

(ii)-(a): 2 次超曲面上の n 点 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ に対し，$\boldsymbol{x}$ を未知変数とする方程式

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p}_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.24}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ は，点 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を接点とする n 個の接超平面の交点である．これが

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.25}$$

を満たす事を示す．点 $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_1$, ..., $\boldsymbol{p}_n$ が同一超平面上にあるので

$$\begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{p} & 1 \\ {}^t\boldsymbol{p}_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であるが，これより $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1})$ を未知変数とする連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p} & 1 \\ {}^t\boldsymbol{p}_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = 0$$

が非自明解を持つことがわかる．(6.1.24) の左辺の行列の階数が n であることに注意すれば,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がこの非自明解でなければならず (6.1.25) が成立することがわかる．

(ii)-(b): 点 $\boldsymbol{p}$ が 2 次超曲面上にないとき，接点を $\boldsymbol{p}_1$, ..., $\boldsymbol{p}_n$ とする n 個の接超平面上に点 $\boldsymbol{p}$ がある条件は,

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{p}_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ {}^t\boldsymbol{p}_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

なので，点 $\boldsymbol{p}_1$, ..., $\boldsymbol{p}_n$ が極超平面

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{x} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

上にあるのは自明である． □

6.1.4　部分空間と非退化性

V の部分集合 A に対し $A^\perp$ を次で定める．

$$A^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V : \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\ \forall \boldsymbol{w} \in A\}$$

$A^\perp$ は V の部分空間である．

V の部分空間 W に双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ を制限して，W 上の双 1 次形式

$$\beta|_W : W \times W \to \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),$$

を考える事ができる．

補題 6.1.26. 対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ.
$\beta|_W$ が非退化 $\iff W \cap W^\perp = 0$ ($\iff W + W^\perp = W \oplus W^\perp$).
さらに W が有限次元なら,「$\beta|_W$ が非退化 $\iff V = W \oplus W^\perp$」

証明. $\beta|_W$ が非退化 $\iff \forall \boldsymbol{w} \in W\ [(\forall \boldsymbol{u} \in W\ \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = 0)$ ならば $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}]$

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall \boldsymbol{w} \in W\ [\boldsymbol{w} \in W^\perp \text{ ならば } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}]\\
&\iff \forall \boldsymbol{w} \in V\ [\boldsymbol{w} \in W \text{ ならば } (\boldsymbol{w} \notin W^\perp \text{ または } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0})]\\
&\iff \forall \boldsymbol{w} \in V\ [\boldsymbol{w} \notin W \text{ または } \boldsymbol{w} \notin W^\perp \text{ または } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}]\\
&\iff \forall \boldsymbol{w} \in V\ [\boldsymbol{w} \notin W \cap W^\perp \text{ または } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}]\\
&\iff W \cap W^\perp = 0.
\end{aligned}
$$

W が有限次元かつ $\beta|_W$ が非退化を仮定して $V = W + W^\perp$ を示す．まず，$W \to W^*$, $\boldsymbol{w} \mapsto [\boldsymbol{u} \mapsto \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u})]$, は単射である．$W$ が有限次元なので，これは特に全単射である．任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとる．$\boldsymbol{v}$ は W^* の元 $W \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$, を定めるので，次をみたす $\boldsymbol{w} \in W$ が存在する.

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) \qquad \forall \boldsymbol{u} \in W$$

よって $\beta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}) = 0\ (\forall \boldsymbol{u} \in W)$ であり，$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in W^\perp$. つまり $\boldsymbol{w}' \in W^\perp$ が存在して $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$ と表せる. □

注意 6.1.27. W を V の部分空間とする．V 上の対称双 1 次形式 β の部分空間 W への制限 $\beta|_W$ が退化する事は $W \cap W^\perp \neq 0$ と同値であった．$C = \{\boldsymbol{v} \in V : \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0\}$ と置くと $W \cap W^\perp \subset C$ である．よって次が成り立つ.

$$\boldsymbol{w} \in W \cap W^\perp \iff \boldsymbol{w} \in W \cap C,\ W \subset \langle \boldsymbol{w} \rangle^\perp$$

$\langle \boldsymbol{w} \rangle^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V : \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0\}$ であるが，これは $t = 0$ で $\boldsymbol{w}$ を通る C 内の曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}t + O(t^2)$ の $t = 0$ での速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ 全体という解釈ができる.

$$
\begin{aligned}
0 =& \beta(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\alpha}(t)) = \beta(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}t + O(t^2), \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}t + O(t^2))\\
=& \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + 2\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})t + O(t^2)
\end{aligned}
$$

となるからである.

6.1.5 随伴写像

実ベクトル空間 V 上に対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ があるとき, 線形写像 $f : V \to V$ に対し，次をみたす線形写像 $f^* : V \to V$ を f の（双 1 次形式 β に関する）**随伴写像** (adjoint map) という.

$$\beta(f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{w})), \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$$

定理 6.1.28. n 次元実ベクトル空間 V と内積 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ がある．V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し，$B = (b_{i,j}) = (\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$ とおき，線形写像

$$f : V \longrightarrow V, \quad \boldsymbol{e}_i \mapsto a_{1,i}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{n,i}\boldsymbol{e}_n,$$

とその随伴写像

$$f^* : V \longrightarrow V, \quad \boldsymbol{e}_j \mapsto a^*_{1,j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a^*_{n,j}\boldsymbol{e}_n,$$

に対し，次が成り立つ．

$$ {}^tAB = BA^*. \tag{6.1.29}$$

特に B が非退化ならば $A^* = B^{-1}{}^tAB$.

証明. $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = {}^t\boldsymbol{v}B\boldsymbol{w}$ より

$${}^t\boldsymbol{v}{}^tAB\boldsymbol{w} = {}^t(A\boldsymbol{v})B\boldsymbol{w} = \beta(f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{w})) = {}^t\boldsymbol{v}BA^*\boldsymbol{w}$$

より ${}^tAB = BA^*$．よって $A^* = B^{-1}{}^tAB$. □

この定理より，双 1 次形式 β が非退化ならば，線形写像 f の随伴写像は一意的に定まる事がわかる．

定義 6.1.30 (自己随伴写像)**.** $f = f^*$ であるような線形写像 $f : V \to V$ を**自己随伴**写像 (self-adjoint map) という．即ち，次が成り立つ線形写像である．

$$\beta(f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{w})), \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$$

例 6.1.31. $V = \mathbb{R}^n$ のとき，ユークリッド内積に関する線形写像 $f : V \to V$ が自己随伴であるための必要十分条件は表現行列が対称行列であることである．このことは，式 (6.1.29) で B を単位行列とすればわかる．

定理 6.1.32. 内積 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ に対する自己随伴な線形写像 $f : V \to V$ の固有値は実数である．また相異なる固有値に対応する固有ベクトルは β に関して直交する．

証明. V の基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ を取る．$V_{\mathbb{C}}$ を $\{\boldsymbol{e}_i\}$ が $\mathbb{C}$ 上生成する複素ベクトル空間とする．有限個の $\boldsymbol{e}_i$ 達の実数係数の 1 次結合全体が V であるから，$V_{\mathbb{C}}$ は V を含む．有限和 $\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i$, $\sum_j y_j\boldsymbol{e}_j$, $x_i, y_j \in \mathbb{C}$, に対し

$$\beta_{\mathbb{C}}\Big(\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i, \sum_j y_j\boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{i,j} x_i\overline{y_j}\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$$

でエルミート双 1 次形式 $\beta_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ を定める．$\beta_{\mathbb{C}}$ は β の $V_{\mathbb{C}}$ への拡張である．$f : V \to V$ の $V_{\mathbb{C}}$ への拡張

$$f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \quad f_{\mathbb{C}}\Big(\sum_i x_i\boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_i x_i f(\boldsymbol{e}_i)$$

に対し，$f_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ なる $\boldsymbol{v} \in V_{\mathbb{C}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在するとき, λ を $f_{\mathbb{C}}$ の固有値と呼べば，f の固有値は $f_{\mathbb{C}}$ の固有値である．$f_{\mathbb{C}}$ の固有値 λ に対し

$$\lambda\beta_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \beta_{\mathbb{C}}(\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \beta_{\mathbb{C}}(f(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}) = \beta_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},f(\boldsymbol{v})) = \bar{\lambda}\beta_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$$

なので λ は実数でなければならない．λ_1, λ_2 を相異なる固有値とし，固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ とすると

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \lambda_1\boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{v}_2 \neq \mathbf{0}$$

である．

$$\lambda_1\beta(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = \beta(\lambda_1\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = \beta(f(\boldsymbol{v}_1),\boldsymbol{v}_2) = \beta(\boldsymbol{v}_1,f(\boldsymbol{v}_2)) = \beta(\boldsymbol{v}_1,\lambda_2\boldsymbol{v}_2) = \lambda_2\beta(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$$

なので $\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $\beta(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2) = 0$ が分かる． □

6.2　直交射影

定理 6.2.1. 実ベクトル空間 V に，対称双 1 次形式

$$\beta : V \times V \to \mathbb{R},\ (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \mapsto \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),$$

があり，V の有限次元部分空間 W に対し $\beta|_W$ が非退化ならば $V = W \oplus W^{\perp}$.

最後の同型が定義する線形写像 $V \to W$, $V \to W^{\perp}$ を，それぞれ部分空間 W への直交射影，部分空間 W の直交補空間への**直交射影**という．

証明. W の基底 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ をとる．$\beta|_W$ が非退化なので次が成り立つ．

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix} \neq 0.$$

そこで，線形写像 $\pi_k : V \to V$ を次で定める．

$$\pi_k(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_k) & \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k) & \boldsymbol{a}_k \\ \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_k) & \boldsymbol{v} \end{vmatrix} \tag{6.2.2}$$

$\beta(\pi_k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{a}_i) = 0$ より，$\pi_k(\boldsymbol{v}) \in W^{\perp}$. (6.2.2) の最終列での展開を考えると，

$$\boldsymbol{v} - \pi_k(\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_l) & \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k) & \boldsymbol{a}_k \\ \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_k) & \mathbf{0} \end{vmatrix} \tag{6.2.3}$$

を得るが，最終列をみると $\boldsymbol{v}-\pi_k(\boldsymbol{v})\in W$ がわかる．よって，

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}-\pi_k(\boldsymbol{v}))+\pi_k(\boldsymbol{v}),\quad \boldsymbol{v}-\pi_k(\boldsymbol{v})\in W,\ \pi_k(\boldsymbol{v})\in W^{\perp}$$

となり，$W+W^{\perp}=V$．$\beta|_W$ は非退化なので，$W\cap W^{\perp}=0$ となりこれは直和． □

注意 6.2.4. 上の証明より，$W_k=\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\rangle$, $k=1,2,\dots,$ として $\Delta_k\neq 0$ とすれば直交射影 $V\to W_k$ は (6.2.2) で，直交射影 $V\to W_k^{\perp}$ は (6.2.3) で与えられる事がわかる．$V_k=\sqrt{|\Delta_k|}$ と置くと，$\beta(\pi_k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}-\pi_k(\boldsymbol{v}))=0$ なので，

$$\beta(\pi_k(\boldsymbol{v}),\pi_k(\boldsymbol{v}))=\beta(\pi_k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=\frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix}\beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_k) & \beta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{v})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_k) & \beta(\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{v})\\ \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_1) & \dots & \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}_k) & \beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})\end{vmatrix}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_{k+1}$ と置くと，次式を得る．

$$\beta(\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1}),\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1}))=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k} \tag{6.2.5}$$

$\Delta_0=1$，π_0 を恒等写像とすれば $k=0$ でもこの式は成り立つ．

$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{|\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})|}$ でベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さ[*2]を定め，両辺の絶対値と符号を比較すると，

$$V_{k+1}=V_k\|\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1})\|, \tag{6.2.6}$$
$$\Delta_{k+1}\text{の符号}=[\beta(\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1}),\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1}))\text{ の符号}]\times\Delta_k\text{の符号} \tag{6.2.7}$$

を得る．最初の式 (6.2.6) は V_{k+1} は V_k に $\boldsymbol{a}_{k+1}$ の $\langle \boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\rangle_{\mathbb{R}}$ からの高さ $\|\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1})\|$ を乗じて得られると読める．これより，V_k は平行体

$$P_k=\{t_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+t_k\boldsymbol{a}_k : 0\le t_i\le 1, i=1,\dots,k\}$$

の k 次元体積と呼ぶべき性質をもつ事が分かる．零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ は，

$\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$ のとき空間的，　$\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})<0$ のとき時間的，　$\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ のとき光的

であると言う．これを一般化して平行体 P_k は，

Δ_k が正のとき空間的，　Δ_k が負のとき時間的，　$\Delta_k=0$ のとき光的

であると呼ぶ．このとき，式 (6.2.7) より P_{k+1} の性質は次のようにまとめられる．

P_{k+1} の性質	$\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1})$ が空間的	$\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1})$ が光的	$\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1})$ が時間的
底 P_k が空間的	空間的	光的	時間的
底 P_k が時間的	時間的	光的	空間的

[*2] ここで定めた $\|\boldsymbol{v}\|$ はノルムでない事に注意せよ．

底 P_k が光的ならば，$\Delta_k = 0$ であり，直交射影 π_k は定義されない．それでも $\Delta_{k+1} \neq 0$ となる事はあり得るのである．

注意 6.2.8. $\boldsymbol{b}_j = c_{j,1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{j,k}\boldsymbol{a}_k$, $j = 1, \ldots, k$, とするとき

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) & \ldots & \beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_1) & \ldots & \beta(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{b}_k) \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} \sum_j c_{1,j}\beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_j) & \ldots & \sum_j c_{k,j}\beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_j c_{1,j}\beta(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{a}_j) & \ldots & \sum_j c_{k,j}\beta(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{a}_j) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & \beta(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & \beta(\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix} \det(c_{i,j}) \\
&= \begin{vmatrix} \beta(\sum_j c_{1,j}\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & \beta(\sum_j c_{1,j}\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\sum_j c_{k,j}\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_1) & \ldots & \beta(\sum_j c_{k,j}\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix} \det(c_{i,j}) \\
&= \det(c_{i,j})^2 \Delta_k
\end{aligned}$$

なので Δ_k の符号は基底のとり方に依らず定まる．つまり Δ_k の符号は部分空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ のみから決まる量である．従って部分空間が空間的，時間的，光的という概念も同様に定義する事ができる．

注意 6.2.9. $\Delta_k = 0$, $\Delta_{k+1} \neq 0$ のとき W_k を W_{k+1} の中で少し動かして，光的でないようにできる．これは次の様に示せば良い．Δ_{k+1} は零でないので，Δ_{k+1} の最終列の展開を考えれば，ある i $(1 \leq i \leq k)$ が存在して $\beta(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{k+1})$ とその余因子 c_i は零ではない．$\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i + t\boldsymbol{a}_{k+1}$ とおいて Δ_k で $\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{a}'_i$ に変えたものを計算すると．

$$\begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}'_i) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{a}'_i, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}'_i, \boldsymbol{a}'_i) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}'_i, \boldsymbol{a}_k) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}'_i) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix} = 2c_i t + O(t^2)$$

となって，t を十分小さい正の数とするとこれは零ではない．従って次が示された．

W が光的でない m 次元部分空間とすると W の部分空間の列

$$0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{m-1} \subset W, \quad \dim W_k = k$$

で，どの W_k も光的でないものが存在する．

注意 6.2.10. 光的ベクトル達が生成する部分空間だからといって，その部分空間の元が全て光的というわけではない．（例：$V = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は 2 つの光的ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される．）すべてのベクトルが光的であるような部分空間 W には次元の上限がある．実際，W 上 2 次形式 $\boldsymbol{v} \mapsto \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ は恒等的に零であるとすると, $\dim V = n$, B の正の固有値の個数を p, 負の固有値の個数を q とすれば，例 5.3.14 より次式を得る．

$$\dim W \leq \min\{p + (n - p - q), q + (n - p + q)\} = \min\{n - p, n - q\}$$

注意 6.2.11. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ があるとき，$W_k = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$, $k = 1, \ldots, m$, とおく．W_k がすべて光的でなければ，直交射影 $\pi_k : V \to W_k^{\perp}$ が定義され，それは (6.2.2) で表す事が出来る．

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|},\ \boldsymbol{e}_2 = \frac{\pi_1(\boldsymbol{a}_2)}{\|\pi_1(\boldsymbol{a}_2)\|},\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_m = \frac{\pi_{m-1}(\boldsymbol{a}_m)}{\|\pi_{m-1}(\boldsymbol{a}_m)\|}$$

と置くと，次を得る．

$$\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j,\ \Delta_i \text{と} \Delta_{i-1} \text{が同符号}) \\ -1 & (i = j,\ \Delta_i \text{と} \Delta_{i-1} \text{が異符号}) \end{cases}$$

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ は β に関する W_m の正規直交基底（$\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \pm\delta_{i,j}$ を満たす基底）である．

(6.2.5) より $\|\pi_k(\boldsymbol{a}_{k+1})\| = |\Delta_{k+1}|^{1/2}/|\Delta_k|^{1/2}$ なので，$\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ を次の様に書き表すこともできる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{|\Delta_1|^{1/2}|\Delta_2|^{1/2}} \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \boldsymbol{a}_1 \\ \beta(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & \boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix}, \ \ldots, \\ \boldsymbol{e}_m &= \frac{1}{|\Delta_{m-1}|^{1/2}|\Delta_m|^{1/2}} \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{m-1}) & \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \beta(\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & \beta(\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m-1}) & \boldsymbol{a}_m \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

注意 6.2.13 (グラム・シュミットの正規直交化法)**.** 以下，双 1 次形式 β が内積である（即ち正定値）とする．多くの成書では，内積のある空間の正規直交基底の存在は次のように示している．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が 1 次独立として $\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$ と置き，関係式

$$\boldsymbol{e}_{k+1} = \frac{\tilde{\boldsymbol{e}}_{k+1}}{\|\tilde{\boldsymbol{e}}_{k+1}\|},\ \tilde{\boldsymbol{e}}_{k+1} = \boldsymbol{a}_{k+1} - (\boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - \cdots - -(\boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k, \tag{6.2.14}$$

$k = 1, \ldots, m-1$, で順に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ を定めると $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ は正規直交基底になる．

(6.2.14) は,，前述の直交射影の行列式公式 (6.2.2) を用いた基底の表示式 (6.2.12) の別の表現である[*3]．このように直交射影を用いて正規直交基底を構成する方法をグラム・シュミットの正規直交化法という．このプロセスは次の様に一般化される．

1 次独立とは限らないベクトルの列 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$ があったとき，まず

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_{i_1}}{\|\boldsymbol{v}_{i_1}\|}, \qquad i_1 = \min\{i : \boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}\}$$

[*3] 行列式公式 (6.2.2) は，広く共有された公式ではないと思われる．少なくとも筆者はこれを説明した文献を知らない．その証明のアイデアは定理 2.4.11 の証明（これも後半部分の証明のある文献を知らない）にある．なお，数値的に正規直交基底を求めるには行列式公式より帰納的な公式 (6.2.14) を繰り返し用いて計算するのが良いであろう．

と置く．$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ まで定まったとしたとき $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle^\perp$ への直交射影を π_k と書いて

$$\boldsymbol{e}_{k+1} = \frac{\pi_k(\boldsymbol{v}_{i_{k+1}})}{\|\pi_k(\boldsymbol{v}_{i_{k+1}})\|}, \qquad i_{k+1} = \min\{i : \pi_k(\boldsymbol{v}_i) \neq \boldsymbol{0}\}$$

とすれば，ベクトル空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \rangle$ の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\ldots$, が定まる．この列は，考えているベクトル空間が有限次元ならば有限の，無限次元であれば無限に続く列となる．何れにせよ正規直交系（$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{i,j}$ となる系）が決まる．この構成法もグラム・シュミットの正規直交化法という事がある．

線形写像 $p : V \to V$ が $p^2 = p$ を満たすとき p は**射影**であるという．このとき $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = 0$ である．実際 $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$ とすると $\boldsymbol{v} = p(\boldsymbol{w})$ なる $\boldsymbol{w} \in V$ が存在するので $\boldsymbol{v} = p(\boldsymbol{w}) = p^2(\boldsymbol{w}) = p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. 従って $V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ である．

定理 6.2.15. 射影 p が非退化な双 1 次形式 β に関して直交射影であるための必要十分条件は p が β に関して自己随伴であることである．

証明. p が自己随伴であれば

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} p \iff p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} &\overset{(\beta\text{の非退化性})}{\iff} \beta(p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = 0 \ \forall \boldsymbol{w} \in V \\ &\overset{(\beta\text{の自己随伴性})}{\iff} \beta(\boldsymbol{v}, p(\boldsymbol{w})) = 0 \ \forall \boldsymbol{w} \in V \iff \boldsymbol{v} \in (\operatorname{Im} p)^\perp \end{aligned}$$

となり $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$ である．従って p は直交射影である．

逆に p が直交射影ならば $p(\boldsymbol{v})$ と $\boldsymbol{w} - p(\boldsymbol{w})$ は直交するので，$\beta(p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} - p(\boldsymbol{w})) = 0$ であり $\beta(p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \beta(p(\boldsymbol{v}), p(\boldsymbol{w}))$ である．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を入れ替えても良いから $\beta(\boldsymbol{v}, p(\boldsymbol{w})) = \beta(p(\boldsymbol{v}), p(\boldsymbol{w}))$ もわかる．よって

$$\beta(p(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = \beta(p(\boldsymbol{v}), p(\boldsymbol{w})) = \beta(\boldsymbol{v}, p(\boldsymbol{w}))$$

となり p の自己随伴性がわかる． □

注意 6.2.16. ユークリッド空間における直交射影を表す行列は $P^2 = P$ を満たす対称行列である．補題 5.8.32 より，直交射影の像の次元は P のトレースで与えられる事もわかる．

6.3　コーシー・シュワルツの不等式と 3 角不等式

本節では，常に実ベクトル空間 V に対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ が定められているとする．このとき $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{|\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})|}$ でベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを定めたのであった．

補題 6.3.1. $C = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0\}$ とおく．V の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の生成する部分空間を $W = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ と置く．

- $\beta|_W$ が定値ならば $W \cap C = 0$.
- $\beta|_W$ が非定値非退化ならば $W \cap C$ は原点で交わる 2 直線.
- $\beta|_W$ が退化なら $W \cap C$ は原点を通る直線であるか $W \subset C$.

証明. まず次の事実に注意する．

$$\begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) & \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) & \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \beta|_W \text{ が定値のとき} \\ < 0 & \beta|_W \text{ が非定値非退化のとき} \\ = 0 & \beta|_W \text{ が退化するとき} \end{cases}$$

これと

$$\beta(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a^2\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2ab\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b^2\beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

の判別式を比較すれば良い． □

定理 6.3.2 (コーシー・シュワルツの不等式)**.** 1 次独立な $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し $W = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ と置く．

- $\beta|_W$ が定値ならば $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ は同符号で $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| > |\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$.
- $\beta|_W$ が非定値非退化で $\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ が同符号ならば $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| < |\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$.
- $\beta|_W$ が退化すれば $\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = |\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|$.

証明. 次に注意すればよい．

$$\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) - \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 = \begin{vmatrix} \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) & \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) & \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \beta|_W \text{ が定値} \\ < 0 & \beta|_W \text{ が非定値非退化} \\ = 0 & \beta|_W \text{ が退化} \end{cases}$$

□

注意 6.3.3. $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が 1 次従属ならば，$|\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ である．よってコーシー・シュワルツの不等式で等号が成立するのは，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が 1 次従属か，$\beta|_W$ が退化する場合に限る．

ユークリッド空間のときの類似で，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が空間的平面を生成すれば，ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のなす角度 θ $(0 < \theta < \pi)$ を次式で定めるとするのは自然である．

$$\cos\theta = \frac{\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}, \tag{6.3.4}$$

より一般に $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta})$ を用いて，式 (6.3.4) を満たす複素数 θ をベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ のなす角度とよぶことにしても良い．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が光的ベクトルでなければ角度の概念

が複素数も許せば拡張されるのである．余弦が周期 2π をもつ偶関数である事より，実部 $\mathrm{Re}\,\theta$ が $0 \leq \mathrm{Re}\,\theta \leq \pi$ を満たすように角度 θ を定めることができる．

$$\cos\theta = \cosh \mathrm{Im}\,\theta \cos \mathrm{Re}\,\theta + \sqrt{-1}\sinh \mathrm{Im}\,\theta \sin \mathrm{Re}\,\theta$$

は実数なので，$\sinh \mathrm{Im}\,\theta \sin \mathrm{Re}\,\theta = 0$ であり，角度 θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす実数か，実部が 0 または π の複素数である．前者の場合はベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は実数角をもち (6.3.4) の絶対値は 1 以下であり，後者の場合はベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は虚数角をもち (6.3.4) の絶対値は 1 以上になる．

定理 6.3.5 (3 角不等式)**.** 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し $W = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ と置く．

(a) $\beta|_W$ が定値ならば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

(b) $\beta|_W$ が非定値非退化で
- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$, $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が同符号ならば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.
- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$, $\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ が同符号で，$\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の符号が異なれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

(c) $\beta|_W$ が退化するならば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を逆 3 角不等式ということがある．

証明. (a): $\beta|_W$ が定値ならば前補題より $-\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| < \pm\beta(x,y) < \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ で

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \pm\,\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \pm\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \pm 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \pm \beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ &=\|\boldsymbol{x}\|^2 \pm 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 < \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

で $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を得る．但し複号は同順に取る．

(b): $\beta|_W$ が非定値非退化で $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ が同符号であるとする．前補題より $-|\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| < \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| < |\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$. 特に $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq 0$.

- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$, $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が正ならば

$$\begin{aligned}&\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ =&\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 > \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 > 0\end{aligned}$$

  よって $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ であり $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を得る．
- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ が正 $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が負ならば $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| < -\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

$$\begin{aligned}&\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ =&\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 < \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

  よって $\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) > 0$ ならば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$, $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が負ならば

$$\begin{aligned}&-\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = -\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ =&\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 > \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 > 0\end{aligned}$$

  よって $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = -\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ であり $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| > \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ を得る.
- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ が負 $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が正ならば

$$\begin{aligned}&-\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = -\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ =&\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 < \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

  よって $\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) < 0$ ならば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

(c): $\beta|_W$ が退化すれば $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$.

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

が成り立つ. □

注意 6.3.6. 他にも 3 角不等式が容易に証明できる場合がある. 幾つか例を挙げておく.

- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) < 0$, $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < 0$, $\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) > 0$ ならば

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \|\boldsymbol{y}\|^2 < \|\boldsymbol{x}\|^2$$

- $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0$, $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) < 0$, $\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) > 0$, $\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) < 0$ ならば

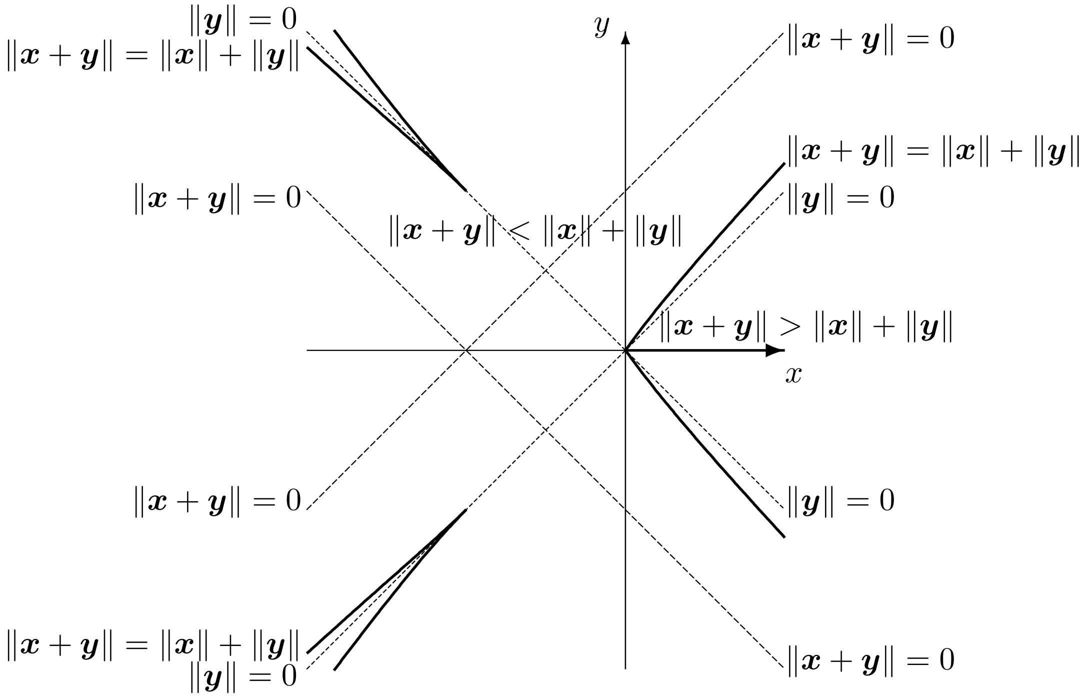
$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = -\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = -\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 < \|\boldsymbol{y}\|^2$$

- $\beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) < 0$, $-\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) < \beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) < 0$, $\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 =& -\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = -\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2\\ <&\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

何れの場合も $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ.

注意 6.3.7. $V = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のとき 3 角不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| < \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ の成立する領域を xy 平面に図示しておく. 太実線で $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ で定まる曲線を表す.



これより $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が共に空間的ベクトルだからと言って 3 角不等式 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ が無条件で成立するわけではない事がわかる.

6.4 直交変換

定義 6.4.1 (直交変換)**.** 線形写像 $T: V \to V$ が双 1 次形式 β に関する**直交変換**とは,

$$\text{任意の } \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \text{ に対し,} \quad \beta(T(\boldsymbol{v}), T(\boldsymbol{w})) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

を満たすときをいう.

補題 6.4.2. 非退化対称双 1 次形式 $\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ に関する直交変換 $f: V \to V$ は単射である.

証明. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ とする. 任意の $\boldsymbol{w} \in V$ に対し

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{w})) = \beta(\boldsymbol{0}, f(\boldsymbol{w})) = 0$$

なので, β の非退化性より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が分かる. □

この事より V が有限次元のとき直交変換は全単射である事がわかる. これは次のようにしても分かる. V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対して, $T(\boldsymbol{e}_i) = a_{i,1}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{i,n}\boldsymbol{e}_n$ と書くと,

$$b_{i,j} = \beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \beta(T(\boldsymbol{e}_i), T(\boldsymbol{e}_j)) = \beta(\sum_k a_{i,k}\boldsymbol{e}_k, \sum_l a_{i,l}\boldsymbol{e}_l) = \sum_{k,l} a_{i,k}\beta_{k,l}a_{j,l}$$

なので $B=(b_{i,j})$, $A=(a_{i,j})$ と置くと $B=A\,B\,{}^tA$ が成り立つ．特に $\det(B)\neq 0$ ならば $\det(A)=\pm\det(B)\neq 0$. この事は非退化双 1 次形式に対する直交変換は全単射である事を示している．

例 6.4.3. $V=\mathbb{R}^n$, $B=E$ のとき，直交変換である条件 $B=A\,B\,{}^tA$ は $A{}^tA=E$ となり，A は直交行列である．

例 6.4.4. $V=\mathbb{R}^2$, $B=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ のとき，直交変換である条件 $B=A\,B\,{}^tA$ は

$$\begin{pmatrix}a_{11}^2-a_{12}^2 & a_{11}a_{21}-a_{12}a_{22}\\ a_{11}a_{21}-a_{12}a_{22} & a_{21}^2-a_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

となり A は次の様に書き表す事ができる．

$$A=\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cosh\theta & -\sinh\theta\\ \sinh\theta & -\cosh\theta\end{pmatrix}$$

例 6.4.5. $V=\mathbb{R}^n$, $B=\left(\begin{smallmatrix}B_1&O\\O&O\end{smallmatrix}\right)$, $\det B_1\neq 0$, のとき，$B=A\,B\,{}^tA$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}B_1&O\\O&O\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^tA_{11}&{}^tA_{21}\\{}^tA_{12}&{}^tA_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_{11}B_1&O\\A_{21}B_1&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^tA_{11}&{}^tA_{21}\\{}^tA_{12}&{}^tA_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_1{}^tA_{11}&A_{11}B_1{}^tA_{21}\\A_{21}B_1{}^tA_{11}&A_{12}B_1{}^tA_{21}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\det B_1\neq 0$, $\det A_{11}\neq 0$ より，$A_{21}=O$. よって

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{pmatrix},\quad A_{11}B_1{}^tA_{11}=B_1$$

定理 6.4.6 (シルベスターの慣性法則 (Sylvester's law of inertia))**.** 有限次元ベクトル空間 V 上の対称双 1 次形式 $\beta: V\times V\to\mathbb{R}$ が非退化であるとする．V の基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ をうまく選べば対称行列 $B=(b_{i,j})$, $b_{i,j}=\beta(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$, は次の形にできる．

$$B=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}\tag{6.4.7}$$

特に，行列 B に現れる 1 の個数（よって -1 の個数も）は基底のとり方に依らない．

証明. $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n$ を V の基底とする．$A=(\beta(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j))$ は対称行列なので直交行列 $T=(t_{i,j})$ が存在して ${}^tTAT$ は対角行列になる．$\boldsymbol{a}_i=t_{i,1}\hat{\boldsymbol{e}}_1+\cdots+t_{i,n}\hat{\boldsymbol{e}}_n$ と置いて別の基底 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, …, $\hat{\boldsymbol{e}}_n$ を定めると $\beta(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\sum_{p,q}t_{i,p}t_{j,q}\beta(\hat{\boldsymbol{e}}_p,\hat{\boldsymbol{e}}_q)$ より $A=TB{}^tT$ であり，

$B = {}^tTAT$ は対角行列である．B の対角成分を順に，$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると，非退化性より $\lambda_i \neq 0$. 必要なら添字を付け替えて

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0 > \lambda_{p+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$$

として良い．p が B の正の固有値の個数，$n-p$ が B の負の固有値の個数である．$\beta(\hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_i) = \lambda_i$ なので $\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}\hat{\boldsymbol{e}}_i$ とおくと $\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = \pm 1$ が分かる．

$\langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p \rangle$ 上 β は正定値なので $\dim W \geq p$ である．

$\dim W = p$ を示したい．$\dim W > p$ と仮定して矛盾を導く．$W_1 = \langle \boldsymbol{e}_{p+1}, \dots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ とおいて $\boldsymbol{w} \in W \cap W_1$ をとる．$\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ と仮定すると $\boldsymbol{w} \in W$ より $\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) > 0$, $\boldsymbol{w} \in W_1$ より $\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) < 0$ となり矛盾．よって W より大きい部分空間上では β は正定値にならない．逆に部分空間 W を $\beta|_W$ は正定値だが，W より真に大きい部分空間上正定値にならない様な空間とすると前述の基底を $W = \langle \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p \rangle$ となるように構成することができるから

$$p = \max\{\dim W : \beta|_W \text{は正定値}\}$$

となる．これは基底の選び方に依らないので証明が完了する． □

p, q をそれぞれ B の正負の固有値の個数とする．(p, q) を β の**符号数** (signature) という．

定理 6.4.8 (シルベスターの慣性法則の一般形). 有限次元ベクトル空間 V 上の対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ に対し，V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を取って定まる対称行列 $B = (b_{i,j})$, $b_{i,j} = \beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, の正の固有値の個数，負の固有値の個数は基底のとり方に依らない．

証明. $N = \{\boldsymbol{v} \in V : \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \ \forall \boldsymbol{w} \in V\}$ は V の部分空間である．

V の部分空間 W を $W + N = V$, $W \cap N = 0$ なるように取る．$\boldsymbol{w} \in W$ に対し，$\beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0$ $(\forall \boldsymbol{v} \in V)$ ならば $\boldsymbol{w} \in N$ なので $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ が分かる．よって $\beta|_W$ は非退化である．W の基底の V/N への像は V/N の基底になり β が V/N に定める双 1 次形式は W も基底の像が決める行列が定める双 1 次形式であり，非退化である．この双一次形式の符号数は $\beta|_W$ の符号数と一致し，前定理より主張は従う． □

注意 6.4.9. 有限次元実ベクトル空間 V 上の非退化双 1 次形式 β に対し次の性質を満たす部分空間 W で次元が最大のものを考える．

$$\beta(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = 0, \quad \forall \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$$

β の表現行列の正の固有値の個数を p，負の固有値の個数を q とするとき，$\dim W = \min\{p, q\}$ である．

補題 6.4.10. 対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ があるとき，$Q(\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ と書く．$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$ に対し次が成り立つ．
(i) $Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) + Q(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = 2[Q(\boldsymbol{v}) + Q(\boldsymbol{w})]$ (中線定理 (parallelogram theorem))
(ii) $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{4}[Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) - Q(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})]$ (分極公式 (polarization identity))

証明. 単なる計算である．

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+&Q(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) \\ &=[\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + 2\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})] + [\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - 2\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})] \\ &=2[Q(\boldsymbol{v}) + Q(\boldsymbol{w})] \\ Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})-&Q(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) \\ &=[\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + 2\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})] - [\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - 2\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \beta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})] \\ &=4\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

□

写像 $f : V \to V$ が β に関する**等長変換**（または**合同変換**，**運動**）であるとは次を満たすときを言う．$Q(\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ と置くとき

$$Q(f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w})) = Q(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}), \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$$

例 6.4.11. $V = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots \rangle_{\mathbb{R}}$ に $\beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ で内積を定める．$g(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{e}_{n+1}$ は等長変換 $g : V \to V$ を定めるが全射ではない．

定理 6.4.12. $f : V \to V$ を等長変換とし，$g(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{0})$ と置くと $g : V \to V$ は双 1 次形式 β を保つ．更に次が成り立つ．

(i) β が非退化ならば g は単射である．
(ii) β が定値ならば g は線形写像である．(i) より特に g は単射線形写像．
(iii) β が非退化で V が有限次元ならば g は線形同型．
(iv) β が非退化かつ g が全射なら g は線形写像である．(i) より特に g は線形同型．

証明. まず，$Q(g(\boldsymbol{v}) - g(\boldsymbol{w})) = Q(f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{w})) = Q(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$ に注意する．

$$\begin{aligned} 2\beta(g(\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{w})) &= Q(g(\boldsymbol{v})) + Q(g(\boldsymbol{w})) - Q(g(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})) \\ &= Q(\boldsymbol{v}) + Q(\boldsymbol{w}) - Q(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = 2\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

これより g が内積を保つ事が分かる．
<u>(i)</u>: g の単射性を示そう．V の基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ をとる．$g(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{w})$ とすると

$$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i) = \beta(g(\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{e}_i)) = \beta(g(\boldsymbol{w}), g(\boldsymbol{e}_i)) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_i)$$

なので $\beta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{e}_i) = 0$ であり，β の非退化性より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ がわかる．

(ii): $\phi(\boldsymbol{e}_i) = g(\boldsymbol{e}_i)$ で定まる線形写像 $\phi : V \to V$ を取る．$\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$ と書く．

$$\begin{aligned}
&\beta(g(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x})) \\
=&\beta(g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})) - 2\beta(g(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})) + \beta(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{x})) \\
=&\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\beta(g(\boldsymbol{x}), \sum_i x_i \phi(\boldsymbol{e}_i)) + \beta(\sum_i x_i \phi(\boldsymbol{e}_i), \sum_j x_j \phi(\boldsymbol{e}_j)) \\
=&\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\beta(g(\boldsymbol{x}), \sum_i x_i g(\boldsymbol{e}_i)) + \beta(\sum_i x_i g(\boldsymbol{e}_i), \sum_j x_j g(\boldsymbol{e}_j)) \\
=&\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\sum_i x_i \beta(g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{e}_i)) + \sum_{i,j} x_i x_j \beta(g(\boldsymbol{e}_i), g(\boldsymbol{e}_j)) \\
=&\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\sum_i x_i \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) + \sum_{i,j} x_i x_j \beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\
=&\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\beta(\boldsymbol{x}, \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i) + \beta(\sum_i x_i \boldsymbol{e}_i, \sum_j x_j \boldsymbol{e}_j) \\
=&\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0
\end{aligned}$$

なので，β が定値ならば $g(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$．よって $g(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x})$ を得るので g は線形写像.
(iii): $\boldsymbol{e}_i$ を V の基底とする．$g(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$ と置くと $\{\boldsymbol{a}_i\}$ は 1 次独立である．実際 $\sum_i x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$ と置くと

$$\beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j) = \sum_i x_i \beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_i x_i \beta(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \beta(\sum_i x_i \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \beta(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_j) = 0$$

であり，β の非退化性より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が分かる．よって $\{\boldsymbol{a}_j\}$ は V の基底となる．
$\boldsymbol{v} = \sum_i v_i \boldsymbol{e}_i$（有限和），$g(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$ と置くと

$$\begin{aligned}
\beta(g(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{a}_j) =&\beta(g(\boldsymbol{v}), g(\boldsymbol{e}_j)) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_j) = \beta(\sum_i v_i \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_i v_i \beta(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\
=&\sum_i v_i \beta(g(\boldsymbol{e}_i), g(\boldsymbol{e}_j)) = \sum_i v_i \beta(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \beta(\sum_i v_i \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)
\end{aligned}$$

より $\beta(g(\boldsymbol{v}) - \sum_i v_i \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$ を得る．$\{\boldsymbol{a}_j\}$ は V の基底なので $g(\boldsymbol{v}) - \sum_i v_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$. よって $g(\boldsymbol{v}) = \sum_i v_i \boldsymbol{a}_i = \sum_i v_i g(\boldsymbol{e}_i)$ となり，g は線形写像. (i) より g は単射なので，V の有限次元性から g は全単射である.
(iv): $\phi(\boldsymbol{e}_i) = g(\boldsymbol{e}_i)$ で定まる線形写像 $\phi : V \to V$ を取る．g が全射なら (i) より g は全単射なので，$\varphi = g^{-1} \circ \phi$ とおくと，$\varphi(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ となる．

$$\begin{aligned}
\beta(\varphi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{e}_i) =&\beta(\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{e}_i)) = \beta(g^{-1} \circ \phi(\boldsymbol{x}), g^{-1} \circ \phi(\boldsymbol{e}_i)) = \beta(\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{e}_i)) \\
=&\beta(\sum_j x_j \phi(\boldsymbol{e}_j), \phi(\boldsymbol{e}_i)) = \sum_j x_j \beta(\phi(\boldsymbol{e}_j), \phi(\boldsymbol{e}_i)) \\
=&\sum_j x_j \beta(\varphi(\boldsymbol{e}_j), \varphi(\boldsymbol{e}_i)) = \sum_j x_j \beta(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = \beta(\sum_j x_j \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)
\end{aligned}$$

より $\beta(\varphi(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)=0$. β の非退化性より $\varphi=g^{-1}\circ\phi:V\to V$ は恒等写像．よって $g=\phi$ となりこれは線形写像である． $\square$

例 6.4.13. $V=\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}_3,\dots\rangle_{\mathbb{R}}$ と置いて，次で非退化双 1 次形式を定める．

$$\beta\Big(\sum_i(x_i\boldsymbol{a}_i+y_i\boldsymbol{b}_i),\sum_i(x_i'\boldsymbol{a}_i+y_i'\boldsymbol{b}_i)\Big)=\sum_i(x_iy_i'+x_i'y_i)$$

$\beta(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i)=1$, $\beta(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j)=0$ $(i\neq j)$, $\beta(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\beta(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j)=0$ $(\forall i,j)$ である．

$$g:V\to V,\quad \sum_i(x_i\boldsymbol{a}_i+y_i\boldsymbol{b}_i)\mapsto x_1^2\boldsymbol{b}_1+\sum_i(x_i\boldsymbol{a}_{i+1}+y_i\boldsymbol{b}_{i+1}),$$

と置くと，$g(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ で，g は全射でない等長変換．しかし，g は線形ではない．

第 7 章

無限次元ベクトル空間 *

無限次元ベクトル空間は初学者向けの線形代数の講義では扱われない事が多い．しかし重要なベクトル空間には無限次元のものも沢山あり，有限次元の場合の類似が成立する事も多い．ここでは有限次元の類似を追求する視点から，無限次元ベクトル空間について基礎的な事柄をまとめた．

7.1 基底

体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間の任意の部分集合についても，1 次独立性，生成する部分空間，基底の概念を一般化する事ができる．ここではそれを簡単に説明しておく．

ベクトル空間 V の部分集合 B をとる．B の元の **1 次結合**とは

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_i \boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{v}_i \in B,$ の形の元の事をいう．$\displaystyle\sum_{\boldsymbol{v}\in B} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}$（有限和）の様に書く事もある．

B が **1 次独立**であるとは次の条件が成り立つときを言う．

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in B} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}(\text{有限和}) = 0 \quad \text{ならば} \quad c_{\boldsymbol{v}} = 0 \quad (\forall \boldsymbol{v} \in B)$$

B を含む最小の部分空間を $\langle B\rangle$ または $\langle B\rangle_{\mathbb{K}}$ で表す．これは次のように表示される．

$$\langle B\rangle_{\mathbb{K}} = \left\{ \sum_{\boldsymbol{v}\in B} c_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}(\text{有限和}) : c_{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{K}, \boldsymbol{v} \in B \right\}$$

$\langle B\rangle_{\mathbb{K}}$ を B が**生成する部分空間**（または**線形包** (linear hull)）という．

定義 7.1.1. B が V の**基底**であるとは，次の条件をみたすときを言う．

- B は V を生成する．即ち $V = \langle B\rangle_{\mathbb{K}}$.
- B は 1 次独立.

例 7.1.2. 多項式環 $V = \mathbb{K}[x]$ について $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間としての基底になる．その双対空間 V^* もベクトル空間である．

$$\boldsymbol{e}_i^*(x^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

は V の基底 $\{x^i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ の双対元であるが V^* の基底にはならない．例えば任意の数列 $(p_0, p_1, \dots)$, $p_i \neq 0$, に対し

$$V \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i p_i$$

は V^* の元を表すが $\{\boldsymbol{e}_i^*\}$ の有限個の 1 次結合で表すことはできない．では V^* に基底は存在しないのであろうか？実は次の定理は基底の存在を主張している．

定理 7.1.3. 0 でない任意のベクトル空間 V に対し，基底が存在する．

証明. V の部分集合で 1 次独立なもの全体を $\mathcal{S}$ で表す．$\boldsymbol{v} \neq 0$ ならば $\{\boldsymbol{v}\} \in \mathcal{S}$ なので，$\mathcal{S}$ は空集合でなく $\mathcal{S}$ は包含関係により半順序集合になる．$\mathcal{S}$ は帰納的である事，即ち「$\mathcal{S}$ の空でない全順序部分集合が極大元を持つ」事を示そう．$\mathcal{A}$ を $\mathcal{S}$ の空でない部分集合とする．$M = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$ は極大元である．実際 M から有限個の元 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ を取ってきて，次を仮定する．

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{a}_i \in A_i$ とする．$\mathcal{A}$ は全順序集合なので，適当に番号を付け替えて，$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ として良い．すると $\boldsymbol{a}_i \in A_n$ となり，A_n は 1 次独立なので $c_i = 0$ が分かる．よって，ツォルンの補題より，$\mathcal{S}$ には極大元 B が存在する．$B \in \mathcal{S}$ より，B は 1 次独立である．$V \supsetneq \langle B \rangle$ とすると元 $\boldsymbol{v} \in V \setminus \langle B \rangle$ が存在する．$\boldsymbol{v}$ は B の元の 1 次結合で書けないので，$B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ は 1 次独立となり，B の極大性に反する．よって $\langle B \rangle = V$. □

この証明は，構成的でない方法により存在を示す証明の典型的な例で，具体的に基底を構成したいときに役に立つ訳ではない．例えば $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての $\mathbb{R}$ の基底の存在はこの証明からわかるが，この証明からは基底を具体的に記述する事は出来ない．

注意 7.1.4 (基底の双対)**.** V が無限次元のときも，基底 B を取り $\boldsymbol{b} \in B$ に対し有限次元のときと同様に

$$\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}, \\ 0 & \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{v}, \end{cases} \quad \text{但し } \boldsymbol{v} \in B,$$

で $\boldsymbol{b}^* \in V^*$ を定める事ができる．$\{\boldsymbol{b}^* : \boldsymbol{b} \in B\}$ は V^* の 1 次独立な集合であるが，V^* の基底にはならない．実際，任意の写像 $f : B \to \mathbb{K}$ に対し，

$$\varphi_f\Bigl(\sum_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}\ (\text{有限和})\Bigr) = \sum_{\boldsymbol{b}\in B} c_{\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{b})\ (\text{有限和})$$

で線形写像 $\varphi_f : V \to \mathbb{K}$ が定まるので，V^* は $\mathbb{K}^B$（B から $\mathbb{K}$ への写像全体）と同一視される．しかしながら $\{\boldsymbol{b}^* : \boldsymbol{b} \in B\}$ の 1 次結合で表される写像は，B の有限個の元の 1 次結合の像でのみ非零なので，V^* のすべての元を表す事は出来ない．

$\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての $\mathbb{R}$ の基底や，一般に無限次元ベクトル空間の本節の意味での基底をハメル基底ということがある．ハメル基底以外にも，無限次元ベクトル空間の元を収束する可算無限和で表される 1 次結合で表示することも考えられる．ヒルベルト空間における正規直交基底やその一般化であるシャウダー (Schauder) 基底がそうである．

7.2 ノルム空間

無限次元ベクトル空間では有限和では議論が収まらず，無限和を扱う場面が考えられ，収束の議論が必要になる事もある．そのためには適当なノルムを導入して議論する必要がある．

7.2.1 ノルムと収束

定義 7.2.1 (ノルム)**.** 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 X に関数

$$\|\cdot\| : X \to [0,\infty), \quad \boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$$

が定まっていて，次を満たすとき，$\|\cdot\|$ を**ノルム** (norm) という．

- $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \|\boldsymbol{x}\| = 0$
- $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ (3 角不等式)
- $\|k\boldsymbol{x}\| = |k|\|\boldsymbol{x}\|$, $k \in \mathbb{K}$.

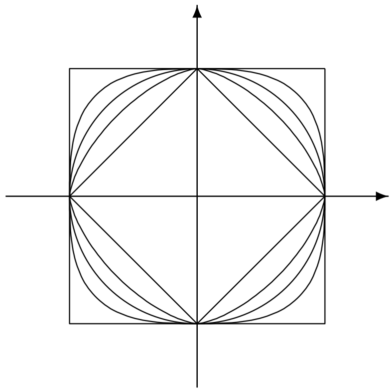
ノルムの定義されたベクトル空間を**ノルム空間** (normed space) という．

ノルム空間の部分空間はノルムを部分空間に制限する事でノルム空間となる．

ベクトル空間の部分空間がノルム空間になり，そのノルムは元のベクトル空間に延びない状況を考えることがある．延びない主たる理由はノルムが発散するからで，その様な時はノルムの値が ∞ という言い方をすることがある．

例 7.2.2 (ℓ_p^n)**.** $\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に次で $\|\cdot\|_p$ を定めるとノルムになる.

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \le p < \infty) \\ \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} & (p = \infty) \end{cases}$$



一般に $1 \le p < q \le \infty$ ならば次が成り立つ.

$$\|\boldsymbol{x}\|_q \le \|\boldsymbol{x}\|_p \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|\boldsymbol{x}\|_q$$

右図に $\mathbb{R}^2$ の場合に, いくつかの p について単位円を示す. 内側から順に $p = 1, 1.5, 2, 3, \infty$ の場合である.

ノルム空間 X は $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X)$ により距離空間となる.

■有界線形写像　X, Y をノルムの定義されたベクトル空間とする.
線形写像 $f : X \to Y$ が**有界** (bounded) とは，次を満たすときを言う.

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V \qquad \|f(\boldsymbol{v})\| \le M\|\boldsymbol{v}\|$$

有界な線形写像 $f : V \to W$ について，そのノルム $\|f\|$ を次で定める.

$$\|f\| = \sup\{\|f(\boldsymbol{v})\| : \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$$

これを f の**作用素ノルム**という事がある. $\|f\| = 0$ は f が零写像である事と同値である.

定理 7.2.3. 線形写像 $f : V \to W$ と $g : X \to V$ に対し，合成 $f \circ g : X \to W$ を考えると $\|f \circ g\| \le \|f\| \|g\|$.

証明.

$$\begin{aligned} \|f \circ g\| &= \sup\left\{\frac{\|f \circ g(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} : \boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}\right\} = \sup\left\{\frac{\|f \circ g(\boldsymbol{x})\|}{\|g(\boldsymbol{x})\|}\frac{\|g(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} : g(\boldsymbol{x}) \ne \boldsymbol{0}\right\} \\ &\le \sup\left\{\frac{\|f \circ g(\boldsymbol{x})\|}{\|g(\boldsymbol{x})\|} : g(\boldsymbol{x}) \ne \boldsymbol{0}\right\} \sup\left\{\frac{\|g(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|} : \boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{0}\right\} \le \|f\|\|g\| \end{aligned}$$ □

写像 $f : V \to W$ が**連続** (continuous) とは，次を満たすときを言う.

$$\forall \boldsymbol{v}_0 \in V \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad [\ \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0\| < \delta \text{ ならば } \|f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}_0)\| < \varepsilon\ ]$$

補題 7.2.4. ノルム空間間の線形作用素 $L : V \to W$ が連続である事と有界である事は同値である.

証明. 有界ならば連続である事は，次式を見れば分かる.

$$\|L(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}) - L(\boldsymbol{v}_0)\| = \|L(\boldsymbol{v})\| \le M\|\boldsymbol{v}\|.$$

原点での連続性よりある $\delta > 0$ が存在して，$|\boldsymbol{v}| \leq \delta$ ならば $\|L(\boldsymbol{v})\| = \|L(\boldsymbol{v}) - L(\boldsymbol{0})\| \leq 1$. $\|L(\boldsymbol{v})\| = \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\delta}\|L(\delta\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|})\| \leq \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\delta}$ より L は有界. □

V から W への有界線形写像全体を $B(V,W)$ で表し，V 上の有界線形関数全体 $B(V,\mathbb{R})$ を V' と略記する．これは連続な線形写像 $V \to \mathbb{R}$ 全体の集合であり，**位相的双対空間**と呼ぶ．明らかに，$V' \subset V^*$ である．V' を単に双対空間と呼ぶこともある[*1]ので，V' と混同を避けるため V^* を**代数的双対空間**ということもある．

補題 7.2.5. ノルム空間間の線形写像はノルムを保てば，単射である．

証明. 線形写像 $L : X \to Y$ がノルムを保つとする．$\|L(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|$ なので $L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{0}$ がわかる． □

■収束と完備性　ノルム $\|\cdot\|$ に関して，V の点列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ の収束を定義する事ができる．

定義 7.2.6 (点列の収束)**.** V の点列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ が $\boldsymbol{x}$ に**収束する**とは，次が成り立つときをいう．

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n\ [n \geq N \text{ ならば } \|\boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{v}\| < \varepsilon]$$

定義 7.2.7 (コーシー列)**.** V の点列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ が**コーシー列**であるとは，次が成り立つときをいう．

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,n\ [m,n \geq N \text{ ならば } \|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_n\| < \varepsilon]$$

定義 7.2.8 (完備性)**.** V の部分集合 A が**完備**とは，A 内の任意のコーシー列が A 内の元に収束する時をいう．

定義 7.2.9.

- A の**閉包** $\overline{A}$ を次で定める．

$$\overline{A} = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \exists \boldsymbol{a}_n \in A\ \boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{x}\}$$

- $\overline{A} = A$ なる集合 A を**閉集合**という．完備ベクトル空間の閉部分空間は完備になる．
- $\overline{A} = V$ なる集合 A を V で**稠密**であるという．
- $\overline{A}$ が空でない開集合を含まないとき A を**全疎集合**であるという．

7.2.2　バナッハ空間

ノルム空間 V 自身が完備なとき，即ち，V のコーシー列は必ず収束するとき，V を**バナッハ空間**という．

[*1] V' は位相ベクトル空間の圏における双対空間なので，ノルム付きベクトル空間の文脈では V' を単に双対空間というのが自然である．

例 7.2.10 (ℓ^p 空間)**.** $1 \leq p \leq \infty$ とする．数列 $\boldsymbol{x} = (x_n)$ に

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \begin{cases} (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup\{|x_n|\} & (p = \infty) \end{cases}$$

でノルムを入れ，このノルムが有限な数列全体を ℓ^p で表す．ℓ^p はバナッハ空間である．$1 \leq p < q \leq \infty$ ならば $\ell^p \subset \ell^q$ である．実際 $\boldsymbol{x} = (x_n) \in \ell^p$ ならば，十分大きい n に対し $|x_n| < 1$ で $|x_n|^q < |x_n|^p$ なので $\boldsymbol{x} \in \ell^q$ がわかる．ℓ^1 は絶対収束する級数全体で ℓ^∞ は有界数列全体である．

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき $q = \frac{p}{p-1}$ である．

定理 7.2.11 (ヘルダーの不等式)**.** $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき $\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \geq \|\boldsymbol{xy}\|_1$. 但し $\boldsymbol{x} = (x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_n)$, $\boldsymbol{xy} = (x_n y_n)$ としている．

証明. $\log x$ は上に凸な関数なので，a, b が正ならば次式が成り立つ．

$$(1-t)\log a + t\log b \leq \log((1-t)a + tb).$$

ここで $1 - t = \frac{1}{p}$, $t = \frac{1}{q}$ とおくと $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ を得る．a, b をそれぞれ a^p, b^q に置き換えると

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{7.2.12}$$

となる．この不等式 (7.2.12) で更に $a = \frac{|x_n|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$, $b = \frac{|y_n|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$ とおくと

$$\frac{|x_n||y_n|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|x_n|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_n|}{\|\boldsymbol{y}\|_a}\right)^q$$

を得る．よって

$$\frac{\|\boldsymbol{xy}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n||y_n|}{\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q} \leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x_n|}{\|\boldsymbol{x}\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|y_n|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}\right)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

となって，求めたい不等式を得る． □

不等式 (7.2.12) を**ヤングの不等式**と呼ぶ．ヤングの不等式で等号成立は $a^p = b^q$ のときのみに限る．

ヘルダーの不等式は $\|\boldsymbol{x}\|_p$ と $\|\boldsymbol{y}\|_p$ が有限ならば $\|\boldsymbol{xy}\|_1$ が有限で $\|\boldsymbol{xy}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ が成り立つと読む．従って，ヘルダーの不等式より $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ならば次の双 1 次形式が定まる事がわかる．

$$\beta : \ell^p \times \ell^q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$\boldsymbol{y} \in \ell^q$ に対して $\phi_{\boldsymbol{y}} : \ell^p \to \mathbb{R}$, $\phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \beta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, で有界線形写像が定まる．

定理 7.2.13. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば，写像 $\ell^q \to (\ell^p)'$, $\boldsymbol{y} \mapsto \phi_{\boldsymbol{y}}$, はバナッハ空間としての同型を定める．

証明. まずヘルダーの不等式より $\|\phi_{\boldsymbol{y}}\| = \sup\{|\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| : \|\boldsymbol{x}\|_p = 1\} \leq \|\boldsymbol{y}\|_q$ を得る．これが $\phi_{\boldsymbol{y}}$ の有界性を保証している．実はこれは等号である．実際，$\boldsymbol{x} = (|y_n|^{\frac{q}{p}})$ とおくと $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \|\boldsymbol{y}\|_q^{\frac{q}{p}} = \|\boldsymbol{y}\|_q^{q-1}$ なので

$$\|\phi_{\boldsymbol{y}}\| \geq \frac{\|\phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|_p} = \frac{\|\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_p} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{1+\frac{q}{p}}}{\|\boldsymbol{y}\|_q^{q-1}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q}{\|\boldsymbol{y}\|_q^{q-1}} = \|\boldsymbol{y}\|_q$$

を得る．よって $\|\phi_{\boldsymbol{y}}\| = \|\boldsymbol{y}\|_q$ がわかった．従って $\ell^q \to (\ell^p)'$, $\boldsymbol{y} \mapsto \phi_{\boldsymbol{y}}$, は単射である (補題 7.2.5)．

任意の $\phi \in (\ell^p)'$ に対し $\phi = \phi_{\boldsymbol{y}}$ となる $\boldsymbol{y} \in \ell^q$ の存在を示したい．$y_n = \phi(\boldsymbol{e}_n)$ と置くと $\boldsymbol{y} = (y_n)$ は ℓ^q の元である．実際 $z_n = \operatorname{sign}(y_n)|y_n|^{q-1}$ と置くと $\phi(\sum_{i=1}^n z_i \boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^n z_i y_i = \sum_{i=1}^n |y_i|^q$ なので

$$\sum_{i=1}^n |y_i|^q = \|\phi(\sum_{i=1}^n z_i \boldsymbol{e}_i)\| \leq \|\phi\| \|\sum_{i=1}^n z_i \boldsymbol{e}_i\|_p \leq \|\phi\| \Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

を得るが $\sum_{i=1}^n |z_i|^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^{p(1-q)} = \sum_{i=1}^n |y_i|^q$ を勘案すると

$$\Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\phi\|$$

を得る．n は任意なので，この左辺は n について単調増加数列でありその極限として $\|\boldsymbol{y}\|_q$ が定まった．よって $\boldsymbol{y} \in \ell^q$ である．

任意の $\boldsymbol{x} \in \ell^p$ に対し $\phi(\boldsymbol{x}) = \phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})$ を示そう．$\boldsymbol{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i$ と置くと $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ であり $\phi(\boldsymbol{e}_i) = \phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{e}_i)$ より $\phi(\boldsymbol{x}^{(n)}) = \phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^{(n)})$ もわかる．従って

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \phi(\boldsymbol{x}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^{(n)}) = \phi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})$$

となる．なお最後の最右辺の値が確定することに，ヘルダーの不等式を使っている．　□

この証明を若干変えることで，ヘルダーの不等式 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \|\boldsymbol{y}\|_\infty$ が存在を保証する双 1 次形式

$$\ell^1 \times \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longmapsto \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

により，$(\ell^1)'$ と ℓ^∞ が同型になっていることが証明できる．しかしながら $\ell^1 \to (\ell^\infty)'$ は全射ではない．実際，収束する数列全体の空間を c と書くと，$|\lim_i x_i| \leq \sup_i |x_i|$ なので $\boldsymbol{x} = (x_i) \mapsto f(\boldsymbol{x}) = \lim_i x_i$ は c' の元を定める．実はこれは ℓ^∞ 上の有界線形関数に拡張

できる[*2]．この拡張が $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle$ の形で書けているとすると $z_n = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}_n \rangle = f(\boldsymbol{e}_n) = 0$ であり $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ でなければならない．すると $\lim_i x_i = f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ となり矛盾．

0 に収束する数列全体の空間を c_0 と書くと c_0 は ℓ^∞ の閉部分空間でありバナッハ空間である．同様の証明で $\ell^1 \subset (c_0)'$ がわかる．$\phi \in (c_0)'$ に対し

$$\boldsymbol{z}_n = (\mathrm{sign}(\phi(\boldsymbol{e}_1)), \ldots, \mathrm{sign}(\phi(\boldsymbol{e}_n)), 0, 0, \ldots)$$

は c_0 の元でその sup ノルムは 1 以下である．$\sum_{i=1}^n |\phi(\boldsymbol{e}_i)| = |\phi(\boldsymbol{z}_n)| \leq \|\phi\|$ なので $(\phi(\boldsymbol{e}_1), \phi(\boldsymbol{e}_2), \ldots) \in \ell^1$ である．従って $\ell^1 = (c_0)'$ がわかった．

$(\ell^\infty)' = (c_0)^\perp \oplus (c_0)'$ を示す．$f \in (\ell^\infty)'$ に対し，$z_n = f(\boldsymbol{e}_n)$ と置くと $\boldsymbol{z} = (z_n) \in \ell^1$．なぜなら $\sum_{i=1}^n |z_i| = \sum_{i=1}^n |f(\boldsymbol{e}_i)| = f(\sum_{i=1}^n (\mathrm{sign} f(\boldsymbol{e}_i))\boldsymbol{e}_i) \leq \|f\|$．$x_i \to 0$ として

$$(f - \boldsymbol{z}^*)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} [f(\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i) - \sum_{i=1}^n z_i x_i] = 0$$

より次の写像は同型である．

$$(\ell^\infty)' \ni f \longmapsto (f - \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{z}^*) \in (c_0)^\perp \oplus (c_0)'$$

収束数列の空間 c も sup ノルムに関してバナッハ空間である．$c = c_0 \oplus \mathbb{R}$ なので

$$c' = (c_0 \oplus \mathbb{R})' = (c_0)' \oplus \mathbb{R}' = \ell^1 \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} \ell^1, \quad (x_1, x_2, \ldots) \oplus x_0 \mapsto (x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

となり $c' = \ell^1$ もわかる．

例 7.2.14 (L^p 空間)**.** $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 f に

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty), \\ \mathrm{esssup}(f) & (p = \infty). \end{cases}$$

でノルムを定義し，このノルムが有限なもの全体を $L^p(\Omega)$ で表す．但し $\mathrm{esssup}(f)$ は f の本質的上限で $\mathrm{esssup}(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \int_{\{x|f(x)>a\}} 1dx = 0\}$ で定義される．実は L^p 空間を考える際は，測度 0 の点を除いて等しい関数を同一視して議論するのが普通で，

$$f \sim g \iff \int_\Omega |f - g| dx = 0$$

で同値関係を定義し，その同値類に対して $L^p(\Omega)$ を定めると考えるのが良い．f の同値類の元で連続なものを $\tilde{f}$ で表す．

証明はしないが $L^p(\Omega)$ は完備であり（リース・フィッシャーの定理）バナッハ空間である．

[*2] Hahn-Banach の拡張定理

定理 7.2.15 (ヘルダーの不等式). $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ のとき $\|f\|_p\|g\|_q \geq \|fg\|_1$.

証明. 不等式 (7.2.12) で $a=\frac{f(x)}{\|f\|_p}$, $b=\frac{g(x)}{\|g\|_q}$ とおくと

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

を得る．両辺を積分して得られる不等式より

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q}=\frac{\int_\Omega |f(x)g(x)|dx}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega |f(x)|^p dx}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{\int_\Omega |g(x)|^q dx}{\|g\|_q^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

となって，求めたい不等式を得る． □

系 7.2.16. Ω の体積 $\mu(\Omega)=\int_\Omega 1dx$ が有限と仮定する．$1\leq p<q\leq\infty$ ならば

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q$$

である．特に $L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$.

証明. 次の $\|f\|_p^p$ の評価式よりわかる．

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p=&\int_\Omega |f|^p dx \leq \|f^p\|_{\frac{q}{p}}\|1\|_{\frac{q}{q-p}}=\Big(\int_\Omega |f|^q dx\Big)^{\frac{p}{q}}\Big(\int_\Omega 1\,dx\Big)^{\frac{q-p}{q}}\\ =&\|f\|_q^p\mu(\Omega)^{\frac{q-p}{q}}=\|f\|_q^p\mu(\Omega)^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})p}\end{aligned}$$

□

ヘルダーの不等式より $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば次の双 1 次形式が定まる事がわかる．

$$\beta : L^p(\Omega)\times L^q(\Omega)\to\mathbb{R},\quad (f,g)\mapsto\beta(f,g)=\int_\Omega fg\ dx$$

$g\in L^q(\Omega)$ に対して $\phi_g : L^p(\Omega)\to\mathbb{R}$, $\phi_g(f)=\beta(f,g)$, で有界線形写像が定まる．

定理 7.2.17. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ならば，写像

$$L^q(\Omega)\longrightarrow L^p(\Omega)',\quad g\longmapsto\phi_g,$$

はバナッハ空間としての同型を定める．

証明. まずヘルダーの不等式より $\|\phi_g\|=\sup\{\|fg\|_1 : \|f\|_p=1\}\leq\|g\|_q$ を得る．これが ϕ_g の有界性を保証している．実はこれは等号である．実際，$f=|g|^{\frac{q}{p}}$ とおくと $\|f\|_p=\left(\int_\Omega |g|^q\right)^{\frac{1}{p}}=\|g\|_q^{\frac{q}{p}}=\|g\|_q^{q-1}$ なので

$$\|\phi_g\|\geq\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p}=\frac{\int_\Omega |g|^{1+\frac{q}{p}}dx}{\|g\|_q^{q-1}}=\frac{\int_\Omega |gy|^q dx}{\|g|_q^{q-1}}=\|g\|_q$$

を得る．よって $\|\phi_g\| = \|g\|_q$ がわかった．従って $L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)'$, $g \mapsto \phi_g$, は単射である（補題 7.2.5）．

写像 $L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)'$, $g \mapsto \phi_g$, の全射性は，しばしば測度論におけるラドン・ニコディムの定理を用いて証明される．詳細は省略する． □

注意 7.2.18. ヘルダーの不等式より次の双 1 次形式が定まる．

$$L^1(\Omega) \times L^\infty(\Omega) \to \mathbb{R},\ (f,g) \mapsto \int_\Omega fg\,dx$$

数列空間のときと同様に，この写像が決める線形写像 $L^\infty(\Omega) \to L^1(\Omega)'$ は同型であるが，線形写像 $L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)'$ は全射でない．実際，$\delta : f \mapsto \tilde{f}(0)$ が定める線形写像 $L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は $|\tilde{f}(0)| \le \|f\|_\infty$ を満たすので $\delta \in L^\infty(\mathbb{R})'$ であるが，$\tilde{f}(0) = \int_\mathbb{R} fg\,dx$ $(\forall f \in L^\infty(\mathbb{R}))$ を満たす $g \in L^0(\mathbb{R})$ は存在しない．

実は，$\delta : f \mapsto \tilde{f}(0)$ が定める線形写像 $L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $p \ne \infty$, は連続でない．$\int_\mathbb{R} fg\,dx = \tilde{f}(0)$ を満たす $g \in L^q(\mathbb{R})$ は存在しないのである．

しかしながら，ベクトル空間を変えれば δ を内積を使って実現する事も可能である．例えば，微分を超関数の意味で考え，

$$H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R}), f \text{ はある有界閉集合の外で恒等的に零}\}$$

とおき内積を $\langle f,g \rangle = \int_\mathbb{R}(fg + f'g')dx$ で定めると $|f(0)| = \int_{-\infty}^0 f'dx = \|f'\|_2 \le \langle f,f \rangle^{1/2}$ なので $\delta \in H^1(\mathbb{R})'$ となる．$g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ と置くと $f(0) = \langle f,g \rangle$ である．

$$\begin{aligned}
\langle f,g \rangle &= \int_{-\infty}^0 (f+f')\frac{e^x}{2}dx + \int_0^\infty (f-f')\frac{e^{-x}}{2}dx \\
&= \int_{-\infty}^0 (f+f')\frac{e^x}{2}dx + \int_{-\infty}^0 (f(-x)-f'(-x))\frac{e^x}{2}dx \\
&= \int_{-\infty}^0 (f(x)+f(-x))\frac{e^x}{2}dx + \int_{-\infty}^0 (f'(x)-f'(-x))\frac{e^x}{2}dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \Big((f(x)+f(-x))\frac{e^x}{2}\Big)'dx = f(0)
\end{aligned}$$

ℓ^p 空間, L^p 空間の ℓ, L は数学者ルベーグ（Lebesgue）の頭文字から来ている．

定理 7.2.19 (ミンコフスキーの不等式)**.** $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

証明. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ なる q を取る．$(p-1)q = p$ なので

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p =& \int_\Omega |f+g|^p dx \le \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|dx + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|dx \\
\le& \||f+g|^{p-1}\|_q\|f\|_p + \||f+g|^{p-1}\|_q\|g\|_p
\end{aligned}$$

$$=\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}(\|f\|_p+\|g\|_p)$$

従って $\|f+g\|_p^{p(1-\frac{1}{q})}\leq\|f\|_p+\|g\|_p$ であり目的の不等式を得た. □

定理 7.2.20 (開写像定理 (open mapping theorem))**.** バナッハ空間 X, Y 間の線形写像 $L:X\to Y$ が連続かつ全射なら開写像である.

証明には次のベールのカテゴリー定理を用いる.

補題 7.2.21 (ベールのカテゴリー定理)**.** 空でない完備距離空間 X の稠密開集合の可算個の共通部分は稠密である. 特に空でない完備距離空間は全疎集合の可算和ではない.

証明. X の稠密開集合の可算列 $V_1, V_2, \ldots$ を取る. 任意の開集合 U に対し, $U\cap\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i$ は空集合でない事を示せば良い. $U\cap V_1$ は開集合なので, $\overline{B_{r_1}(x_1)}\subset U\cap V_1$ なる開球 $B_{r_1}(x_1)$ が存在する. 同様にして $i=1,2,3,\ldots$ に対し $B_{r_i}(x_i)\cap V_i$ は開集合なので, $\overline{B_{r_{i+1}}(x_{i+1})}\subset B_{r_i}(x_i)\cap V_i$ なる開球 $B_{r_{i+1}}(x_{i+1})$ が存在する. 減少列 $r_1>r_2>\ldots$ を 0 に収束するように取れば, 点列 $\{x_i\}$ はコーシー列であり収束する. 収束先を x とすると $x\in U\cap\bigcap_{i=1}^{\infty}B_{r_i}(x_i)\subset U\cap\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i$. □

定理 7.2.20 の証明. U, V をそれぞれ X, Y の単位開球とする. $\varepsilon V\subset F(U)$ なる正の数 ε が存在する事を示せば十分. まず, L が全射なので次が成り立つ.

$$Y=L(X)=L(\cup_{k\in\mathbb{N}}kU)=\cup_{k\in\mathbb{N}}L(kU)=\cup_{k\in\mathbb{N}}kL(U)$$

ベールのカテゴリー定理より, Y は全疎集合の可算和ではないから, ある k に対し $\overline{kL(U)}$ の開核がある開球 $B_r(c)$ を含む. $-c\in\overline{-kL(U)}=\overline{kL(-U)}=\overline{kL(U)}$ より $v\in V$ に対し

$$rv=(c+rv)+(-c)\in\overline{kL(U)}+\overline{kL(U)}\subset\overline{kL(U)+kL(U)}=\overline{2kL(U)}$$

なので $V\subset\overline{L(\frac{2k}{r}U)}$ が分かる.

任意の $v\in V$ に対し, 次の条件を満たす点列 $\{x_n\}$ を取る事ができる.

$$\|x_n\|_X\leq\frac{2k}{2^{n-1}r},\quad \|v-L(x_1+x_2+\cdots+x_n)\|_Y<\frac{1}{2^n} \tag{7.2.22}$$

実際, これは $V\subset\overline{L(\frac{2k}{r}U)}$ より帰納法で容易に示す事ができる. まず, $x_1\in X$ を $\|x_1\|_X<\frac{2k}{r}, \|v-L(x_1)\|_Y<\frac{1}{2}$ なるようにとる. $n=1,2,\ldots,m$ で (7.2.22) が成り立つように $x_2,\ldots,x_m$ が取れたとして, $n=m+1$ でも (7.2.22) が成り立つように x_{m+1} を取る事ができる. さて, (7.2.22) の最初の不等式より $\{s_n=\sum_{m=1}^{n}x_n\}$ はコーシー列であり, X の完備性より $\{s_n\}$ は収束する. その収束先を x とすれば, L の連続性より

$$L(x)=L(\lim_{n\to\infty}s_n)=\lim_{n\to\infty}L(s_n)=v,\quad (\text{即ち, } v\in L(\tfrac{4k}{r}U)).$$

よって $V\subset L(\frac{4k}{r}U)$ となり $\frac{r}{4k}V\subset L(U)$ を得る. □

補題 7.2.23 (閉グラフ定理 (closed graph theorem)). バナッハ空間 X, Y 間の線形写像 $L: X \to Y$ が連続である事はそのグラフが閉集合である事と同値である．

証明. $L: X \to Y$ が有界であれば，$X \times Y$ で点 (x_0, y_0) に収束する点列 $(x_i, L(x_i))$ は $x_0 = \lim x_i$, $y_0 = \lim L(x_i)$ で L の連続性より，$y_0 = L(x_0)$ がわかり (x_0, y_0) は L のグラフ上の点であり，グラフが閉集合である事がわかる．（完備性は用いてない事に注意）

線形写像のグラフはベクトル空間であるから，そのグラフが閉ならば，グラフは バナッハ空間である．射影 $X \times Y \to X$ のグラフへの制限が $x \mapsto (x, L(x))$ の逆写像である．射影は連続なので，開写像定理より，射影 $X \times Y \to X$ のグラフへの制限は開写像であり，L が連続である事がわかる． □

例 7.2.24. $X = L^2([0,1])$ とおくと，$X \to X$, $f(t) \mapsto f'(t)$, は非有界線形作用素である．実際 $f_n(t) = \sin 2\pi nt$ とおけば

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 |f_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} = (1/2)^{1/2}$$

であるが $f_n'(t) = 2\pi n \cos 2\pi nt$ なので $\|f_n'\|_2 = \sqrt{2} n\pi$.

系 7.2.25 (有界逆写像定理 (Bounded inverse theorem)). バナッハ空間間の線形全単射写像 L に対し，L が連続（即ち有界）なら L^{-1} も連続（即ち有界）である．

証明. L が連続（即ち有界）であれば，グラフは閉で，閉グラフ定理より，逆写像も連続で（従って有界で）ある事がわかる． □

完備性がないと有界逆写像定理は成立しない．

例 7.2.26. $X = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots) :$ 有限個の i を除いて $x_i = 0\}$ とおき，$\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2)^{1/2}$ とおく．有限個の i を除いて $x_i = 0$ なのでこの値は確定する．作用素

$$T: X \to X, \qquad T(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

は，T は有界だが T^{-1} は有界でない．この場合，X の点列 $\boldsymbol{x}_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$ は X で収束しないので X は完備でなく．前定理に矛盾するわけではない．

定義 7.2.27 (スペクトル). X をバナッハ空間とし線形写像 $T: X \to X$ を考える．複素数 λ が T の**スペクトル** (spectrum) であるとは $T - \lambda 1$ が有界な逆写像を持たない，すなわち $\|T(\boldsymbol{x})\| \geq C\|\boldsymbol{x}\|$ なる定数 C が存在しない，ときを言う．T のスペクトル全体を $\sigma(T)$ で表す．ここで $1: X \to X$ は恒等写像である．

- $T - \lambda 1$ が単射でないとき，λ は**点スペクトル** (point spectrum) であるという．

- $T - \lambda 1$ が単射であるが，有界な逆写像をもたず，その像が X の中で稠密なとき，λ は**連続スペクトル** (continuous spectrum) であるという．
- $T - \lambda 1$ が単射であるが，その像が X の中で稠密でないとき，λ は**剰余スペクトル** (residual spectrum) であるという．

T の点スペクトルの全体を $\sigma_p(T)$ で，T の連続スペクトルの全体を $\sigma_c(T)$ で, T の剰余スペクトルの全体を $\sigma_r(T)$ で表す．明らかに次が成り立つ．

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

λ が点スペクトルであれば，$(T - \lambda 1)(\boldsymbol{x}_1) = (T - \lambda 1)(\boldsymbol{x}_2)$ を満たす相異なる $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$ が存在するので $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ は零でなく，$T\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ であり，λ は T の固有値である．

例 7.2.28. X をバナッハ空間，$T : X \to X$ を線形写像とする．$\|T\| < 1$ ならば $1 - T$ は有界逆写像をもつ．実際，任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対し，$S_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} T^k \boldsymbol{x}$ とおくと

$$\|S_n(\boldsymbol{x}) - S_m(\boldsymbol{x})\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|T\|^k \|\boldsymbol{x}\| = \|T\|^{m+1} \|\boldsymbol{x}\|^{m+1} \frac{1 - \|T\|^{n-m}}{1 - \|T\|},\ m \le n$$

なので $\{S_n(\boldsymbol{x})\}_{n=1,2,\ldots}$ コーシー列である．従って $\lim_{n\to\infty} S_n(\boldsymbol{x})$ が存在するが，この極限が $(1 - T)^{-1}(\boldsymbol{x})$ である．$(1 - T)^{-1}$ の有界性も次の様にしてわかる．

$$\|(1 - T)^{-1}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} + T\boldsymbol{x} + T^2\boldsymbol{x} + \cdots\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|T\|\|\boldsymbol{x}\| + \|T\|^2\|\boldsymbol{x}\| + \cdots \le \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{1 - \|T\|}$$

定理 7.2.29. $\sigma(T)$ は $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\|\}$ の閉部分集合である．

証明. まず，スペクトル全体の集合が閉集合であることを示す．T のスペクトルでない複素数全体は開集合であることを示せばよい．実際，$T - \lambda 1$ が有界逆写像を持ち $|\lambda - \lambda'| < \|(T - \lambda 1)^{-1}\|^{-1}$ ならば $T - \lambda' 1$ も有界逆写像をもつことが次のようにしてわかる．

$$T - \lambda' 1 = T - \lambda 1 - (\lambda' - \lambda)1 = (T - \lambda 1)(1 - T'), \quad T' = (T - \lambda 1)^{-1}(\lambda' - \lambda)1$$

なので $\|T'\| \le \|(T - \lambda 1)^{-1}\||\lambda' - \lambda| < 1$ より $1 - T'$ は有界逆写像をもち，$T - \lambda 1$ は有界逆写像をもったので $T - \lambda' 1$ も有界逆写像をもつ．

次に，複素数 $|\lambda|$ が $|\lambda| > \|T\|$ を満たせば $\lambda \notin \sigma(T)$ を示そう．

$$T - \lambda 1 = -\lambda(1 - T'), \quad T' = \tfrac{1}{\lambda} T$$

なので $\|T'\| < 1$ より，$T - \lambda 1$ は有界逆写像をもつ事がわかる． □

例 7.2.30. 線形写像

$$T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2,\ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \longmapsto (x_2, x_3, \dots),$$

は $\|T(\boldsymbol{x})\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2$ を満たし，λ を $|\lambda| < 1$ なる複素数とすると $T(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, である．従って

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}.$$

また $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} = \sigma_p(T)$ で $\sigma(T)$ が閉集合なので $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\} = \sigma(T)$ もわかる．

7.3 内積空間

内積が定義できれば直交射影や内積を用いた双対性を考える事ができる．ここではいつ直交射影が定義できるかという問題と，内積を用いた双対性を考察する．

7.3.1 直交射影

実ベクトル空間 V 上の対称双 1 次形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ が正定値のとき V の**内積**というのであった．このとき $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ で表す．内積の定義されたベクトル空間を**内積空間**という．このとき $\|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^{1/2}$ は V のノルムになる．これを内積の誘導するノルムという．内積空間の部分空間も，内積を制限する事により，内積空間になる．

複素ベクトル空間 V 上のエルミート形式 $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ が正定値のとき V の**エルミート内積**という．このとき $\|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^{1/2}$ は V のノルムになる．以後実ベクトル空間を扱うが複素ベクトル空間についても内積をエルミート内積と読み替えて同様の定理が成り立つ．

定理 7.3.1. 内積 $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ があるとき，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し次が成り立つ．
(i) $\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2)$ (中線定理)
(ii) $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2)$ (分極公式)

証明. 定理 6.4.10 の言い換えである． □

定理 7.3.2. ノルムが内積から誘導される必要十分条件は，中線定理が成立する事である．

証明. 中線定理を満たすノルム空間があるとき，分極公式で内積が定義される事を示せば良い．$\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\|^2$, $\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ は明らか．

$$4\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2\|^2 - \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2\|^2\\
&\quad-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2\|^2-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2\|^2\\
&=\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_2\|^2+\|\boldsymbol{w}_1\|^2+\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_1\|^2+\|\boldsymbol{w}_2\|^2 \quad \text{（中線定理を 4 回用いる）}\\
&\quad-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_2\|^2-\|\boldsymbol{w}_1\|^2-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_1\|^2-\|\boldsymbol{w}_2\|^2\\
&=\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_2\|^2-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_2\|^2+\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}_1\|^2-\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_1\|^2\\
&=4(\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1)+\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2))
\end{aligned}
$$

より $\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)=\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_1)+\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}_2)$ がわかる．よって $\beta(\boldsymbol{v},2\boldsymbol{w})=2\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$. 帰納法で整数 i について $\beta(\boldsymbol{v},i\boldsymbol{w})=i\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ が分かり，$\boldsymbol{w}$ を $\frac{1}{i}\boldsymbol{w}$ に取り替える事で非零整数 i について $\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=i\beta(\boldsymbol{v},\frac{1}{i}\boldsymbol{w})$ が分かる．従って有理数 λ について $\beta(\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{w})=\lambda\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ がわかり，更にノルムの連続性より λ は実数としてよい事もわかる．$\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\beta(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})$ より，β の双線形性が示せた． □

例 7.3.3 (ℓ_p^n)**.** 例 7.2.2 を考える．$\boldsymbol{v}=(1,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{w}=(0,1,0,\ldots,0)$ とする．

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_p^2+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|_p^2 &=2(\|\boldsymbol{v}\|_p^2+\|\boldsymbol{w}\|_p^2) \text{ とすると}\\
\|(1,1,0,\ldots,0)\|_p^2+\|(1,-1,0,\ldots,0)\|_p^2 &=2(\|(1,0,\ldots,0)\|^2+\|(0,1,0,\ldots,0)\|^2) \text{ で}\\
2\cdot 2^{\frac{2}{p}} &=4
\end{aligned}
$$

となり $p=2$ を得るので，$p\neq 2$ ならノルム $\|\cdot\|_p$ は内積からは誘導されない事がわかる．

$$
\|(1+0,0+1)\|_\infty+\|(1-0,0-1)\|_\infty=2<4=2(\|(1,0)\|_\infty+\|(0,1)\|_\infty)
$$

なのでノルム $\|\cdot\|_\infty$ は中線定理は満たさず，ノルム $\|\cdot\|_\infty$ も内積からは誘導されない事がわかる．

例 7.3.4 (ℓ^p 空間)**.** ℓ^2 の元 $\boldsymbol{v}=(v_n)$, $\boldsymbol{w}=(w_n)$ に対し $\boldsymbol{v}\pm\boldsymbol{w}\in\ell^2$ なので分極公式より

$$
\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\sum_{n=1}^{\infty}v_nw_n
$$

で内積が定まる．$\|\cdot\|_2$ はこの内積より誘導されるノルムである．

ℓ^p の元 $\boldsymbol{v}=(1,1,0,\cdots)$, $\boldsymbol{w}=(1,-1,0,\cdots)$ に対し次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|_p^2+\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|_p^2 &=\|(2,0,0,\cdots)\|_p^2+\|(0,2,0,\cdots)\|_p^2=2^2+2^2=2^3\\
\|\boldsymbol{v}\|_p^2+\|\boldsymbol{w}\|_p^2 &=\|(1,1,0\cdots)\|_p^2+\|(1,-1,0\cdots)\|_p^2=2^{2/p}+2^{2/p}=2^{1+2/p}
\end{aligned}
$$

よって中線定理が成り立てば $2^3=2^{2+2/p}$ なので $p=2$. これより ℓ^p $(p\neq 2)$ には内積は定義できない事がわかる．

例 7.3.5 (L^p 空間)**.** $L^2(\Omega)$ には次で内積が定まるのは前例と同様である．

$$f \cdot g = \int_\Omega fg\,dx$$

$B_\varepsilon(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$ とおく．f として $B_\varepsilon(\boldsymbol{0})$ では正，$B_\varepsilon(\boldsymbol{0})$ 以外では 0 であるような連続関数とする．$I_p = \int_{B_\varepsilon(\boldsymbol{0})} |f|^p dx$ と置く．$B_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ と $B_\varepsilon(\boldsymbol{b})$ が共に Ω 内にあるとして $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| > 2\varepsilon$ とすれば $f_{\boldsymbol{a}} = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})$ とおいて

$$\begin{aligned} \|f_{\boldsymbol{a}} + f_{\boldsymbol{b}}\|_p^2 + \|f_{\boldsymbol{a}} - f_{\boldsymbol{b}}\|_p^2 =& 2(\|f_{\boldsymbol{a}}\|_p^2 + \|f_{\boldsymbol{b}}\|_p^2) \qquad \text{とすると} \\ (2I_p)^{\frac{2}{p}} + (2I_p)^{\frac{2}{p}} =& 4(I_p)^{\frac{2}{p}} \quad \text{なので } 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 4,\ 2^{\frac{2}{p}} = 2, \end{aligned}$$

$p = 2$ を得る．よって $p \neq 2$ のときは $\|\cdot\|_p$ は内積から誘導されないことがわかる．同様に $\|\cdot\|_\infty$ も内積から誘導されないことがわかる．

内積のあるベクトル空間 V とその部分集合 A に対し $A^\perp$ を次で定める．

$$A^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{ すべての } \boldsymbol{a} \in A \text{ に対し } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = 0\}$$

$A^\perp$ は V の部分空間で $A \subset B$ ならば $A^\perp \supset B^\perp$ である．$A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$ と置く．

補題 7.3.6. $A \subset A^{\perp\perp}$. $A = A^{\perp\perp}$ は $A = B^\perp$ を満たす B が存在する事と同値.

証明. $\boldsymbol{x} \in A^{\perp\perp} \iff \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = 0\ (\forall \boldsymbol{b} \in A^\perp) \iff \forall \boldsymbol{b}\ [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0\ (\forall \boldsymbol{a} \in A) \to \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = 0]$
なので $A \subset A^{\perp\perp}$.
$A = A^{\perp\perp}$ ならば $B = A^\perp$ と置けば $A = B^\perp$. 逆に $A = B^\perp$ ならば $A^\perp = B^{\perp\perp} \supset B$.
よって $A^{\perp\perp} = B^{\perp\perp\perp} \subset B^\perp = A$. $A \subset A^{\perp\perp}$ であったから $A = A^{\perp\perp}$. □

補題 7.3.7. $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.

証明. $A \subset \overline{A}$ より $A^\perp \supset (\overline{A})^\perp$ なので $A^\perp \subset (\overline{A})^\perp$ を示せば良い．$\boldsymbol{b} \in A^\perp$ をとる．任意の $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$ に対し $\boldsymbol{a}_n \in A$ を $\boldsymbol{a}_n \to \boldsymbol{a}$ なるようにとると，$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \lim \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}_n = 0$. □

V の部分集合 A が**凸**とは，次の条件が成り立つときを言う．

$$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V\ \forall t \in [0,1]\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A \ \text{ ならば } \ t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} \in A]$$

この条件は，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ のとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を結ぶ線分が V に含まれているという条件である．
$\boldsymbol{x} \in V$ と V の部分集合 A に対し $\boldsymbol{x}$ から A への距離 $\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)$ を次で定める．

$$\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A) = \inf\{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| : \boldsymbol{a} \in A\}.$$

定理 7.3.8. A を内積のあるベクトル空間 V の凸部分集合，$\boldsymbol{x} \in V$ とする．
(i) A が完備ならば $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)$ を満たす $\boldsymbol{a} \in A$ が存在する．
(ii) $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)$ を満たす $\boldsymbol{a} \in A$ は存在すれば一意的.

証明. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in A$, $\boldsymbol{x} \in V$ とする．まず $\|2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 = 4\left\|\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right\|^2 \geq 4\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)^2$ に注意する．中線定理で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ とすれば，次を得る．

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\|^2 =& 2(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2) - \|2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|^2 \\ \leq& 2(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2) - 4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)^2\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

(i) $\boldsymbol{a}_n \in A$ を $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n\| \to \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)$ なるように選べば

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_n\|^2 \leq& 2(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_m\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n\|^2) - 4\,\mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)^2 \\ \leq& 2(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_m\|^2 - \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)^2) + 2(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n\|^2 - \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)^2)\end{aligned}$$

となり，$\{\boldsymbol{a}_n\}$ は A のコーシー列である．よって完備性より $\{\boldsymbol{a}_n\}$ はある $\boldsymbol{a} \in A$ に収束する．$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}_n\| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)$ なので，この $\boldsymbol{a}$ が求めるもの．
(ii) もし $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, A)$ ならば，(7.3.9) は零となり $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ が分かる． □

V の有限次元部分空間 W に対しては，公式 (6.2.2), (6.2.3) により直交射影が定まり直和分解 $V = W \oplus W^{\perp}$ が定まる．これは次の様に一般化される．

定理 7.3.10. V の部分空間 W が完備ならば，$V = W \oplus W^{\perp}$．とくに $W = W^{\perp\perp}$.

実ベクトル空間の有限次元部分空間は完備である事に注意．

証明. W を V の完備部分空間とすると，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0\| = \mathrm{dist}(\boldsymbol{v}, W)$ を満たす $\boldsymbol{w}_0 \in W$ が存在する．$\boldsymbol{w} \in W$ に対し

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0\|^2 \leq \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0 + t\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0\|^2 + 2t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0)\cdot\boldsymbol{w} + t^2\|\boldsymbol{w}\|^2$$

であるから，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$0 \leq 2t(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0)\cdot\boldsymbol{w} + t^2\|\boldsymbol{w}\|^2 = \|\boldsymbol{w}\|^2\Big(t - \frac{(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0)\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|^2}\Big)^2 - \frac{((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0)\cdot\boldsymbol{w})^2}{\|\boldsymbol{w}\|^2}$$

が成立し，これより $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0)\cdot\boldsymbol{w} = 0$, 即ち，$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0 \in W^{\perp}$ がわかる．よって

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0) + \boldsymbol{w}_0, \quad (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0) \in W^{\perp},\ \boldsymbol{w}_0 \in W$$

ところで $W \cap W^{\perp} = 0$（実際 $\boldsymbol{w} \in W \cap W^{\perp}$ とすると $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} = 0$ より $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$）なので $V = W \oplus W^{\perp}$.

$W \subset W^{\perp\perp}$ なので $W \supset W^{\perp\perp}$ を示そう．$\boldsymbol{v} \in W^{\perp\perp}$ を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_0 + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0)$, $\boldsymbol{w}_0 \in W$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0 \in W^{\perp}$ と書くとき

$$0 = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0) = \boldsymbol{w}_0\cdot(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0) + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0\|^2 = \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_0\|^2$$

より $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_0 \in W$ が分かる． □

系 7.3.11. W が V の部分空間で $\overline{W}$ が完備ならば $W^{\perp\perp} = \overline{W}$

証明. $\overline{W}$ が完備なので

$$\overline{W} = (\overline{W})^{\perp\perp} = ((\overline{W})^{\perp})^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp} = W^{\perp\perp}$$

が分かる. □

特に V の閉部分空間が完備ならば，$W^{\perp\perp} = W$.

7.3.2　ヒルベルト空間

実ベクトル空間 X に内積が定義されていて，内積から誘導されるノルムに関して完備であるとき X は**実ヒルベルト空間**であると言う．複素ベクトル空間 X にエルミート内積が定義されていて，エルミート内積から誘導されるノルムに関して完備であるとき X は**複素ヒルベルト空間**であると言う．

定理 7.3.12. ヒルベルト空間 X には次を満たす B が存在する．

- B の任意の元 $\boldsymbol{b}$ に対し $\|\boldsymbol{b}\| = 1$.
- B の任意の相異なる元 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'$ に対し $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}' = 0$.
- $\overline{\langle B \rangle} = X$

この B をヒルベルト空間 X の**正規直交基底** (orthnormal base) と言う．

証明. 次の条件を満たすような X の部分集合 A 全体を $\mathcal{A}$ と置く．

- $\forall \boldsymbol{a} \in A \ \|\boldsymbol{a}\| = 1$
- $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in A$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{a}'$ ならば $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = 0$.

$\mathcal{A}$ は空でなく包含関係に関して帰納的半順序集合なので，$\mathcal{A}$ は極大元 B を持つ．$\langle B \rangle$ の閉包 $\overline{\langle B \rangle}$ は完備距離空間の閉部分空間なので完備であり，定理 7.3.10 より次が成り立つ．

$$X = \overline{\langle B \rangle} \oplus \overline{\langle B \rangle}^{\perp}$$

$\overline{\langle B \rangle}^{\perp} \neq 0$ と仮定すると，$\boldsymbol{y} \in \overline{\langle B \rangle}^{\perp}$ を $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ なるようにとれば $B \cup \{\boldsymbol{y}\}$ は $\mathcal{A}$ の元であり，B より真に大きい．よって B の極大性に矛盾するので $\overline{\langle B \rangle}^{\perp} = 0$. よって $X = \overline{\langle B \rangle}$. □

定理 7.3.13. ヒルベルト空間 X に $\overline{Z} = X$ なる部分集合 $Z = \{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1,2\dots}$ が存在すればグラム・シュミットの方法で $\{\boldsymbol{x}_n\}$ から互いに直交する単位ベクトルの列 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ を作ると，X の正規直交基底ができる．

証明. $Z = \{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1,2\ldots}$ を $\overline{Z} = X$ なる X の部分集合とする．グラム・シュミットの方法で $\{\boldsymbol{x}_n\}$ から互いに直交する単位ベクトルの列 $\{\boldsymbol{y}_n\}$ を作ると，

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle \subset \langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

なので $X = \overline{Z} \subset \overline{\langle \{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1,2,\ldots} \rangle} \subset X$ となり，$\overline{\langle \{\boldsymbol{y}_n\}_{n=1,2,\ldots} \rangle} = X$ を得る． □

定理 7.3.14 (リースの表現定理)**.** X が実（複素）ヒルベルト空間のとき，次の写像は全射である．

$$X \longrightarrow X', \quad \boldsymbol{x} \longmapsto [\phi_{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}]$$

証明. 複素の場合も同様であるから実の場合を証明しよう．$\phi \in X'$ を任意にとる．$\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{v} \in X)$ なる $\boldsymbol{x}$ が存在すればよい．$\phi = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と置けば良いので，$\phi \neq 0$ として証明する．$\phi : X \to \mathbb{R}$ は連続なので $\operatorname{Ker}\phi$ は閉集合である．よって X の完備性から $\operatorname{Ker}\phi$ は完備なので，$X = \operatorname{Ker}\phi \oplus (\operatorname{Ker}\phi)^{\perp}$．従って次の同型を得る．

$$\mathbb{R} \simeq \operatorname{Im}\phi \overset{\text{例 } 3.6.20}{\simeq} V/\operatorname{Ker}\phi \simeq (\operatorname{Ker}\phi)^{\perp}$$

$(\operatorname{Ker}\phi)^{\perp}$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は $(\operatorname{Ker}\phi)^{\perp}$ の基底になる．$\operatorname{Ker}\phi$ は閉部分空間なので $(\operatorname{Ker}\phi)^{\perp\perp} = \operatorname{Ker}\phi$ となり，$\phi(\boldsymbol{v}) = 0$ と $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e} = 0$ が同値である．このとき

$$(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{e}) = 0$$

より $\phi(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}) = 0$. $\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ と置くと，任意の $\boldsymbol{v} \in X$ に対して，

$$\phi(\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \cdot (\phi(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e})) = \phi(\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\phi(\boldsymbol{e}) = \phi(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}) = 0$$

つまり，$\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}$ が示せた． □

X がヒルベルト空間ならば，リースの表現定理より，X と X' は

$$X \longrightarrow X', \qquad \boldsymbol{x} \longmapsto [\phi_{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x}]$$

で同型となる．これにより X' も次の内積でヒルベルト空間になる．

$$X' \times X' \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\phi_{\boldsymbol{x}}, \phi_{\boldsymbol{y}}) \longmapsto \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

よって次の同型写像が定義できた．

$$X \simeq (X')', \quad \boldsymbol{x} \longmapsto [\phi_{\boldsymbol{y}} \mapsto \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}]$$

ヒルベルト空間 X, Y に対して，注意 C.2.25 より，$X \otimes Y$ に自然に内積が定まる．この内積に関する $X \otimes Y$ の完備化を $X \widehat{\otimes} Y$ と書く．X の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,,2,\ldots}$ と Y の正規直交基底 $\{\boldsymbol{f}_j\}_{j=1,2,\ldots}$ があれば $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{f}_j\}_{i,j=1,2,\ldots}$ が $X \widehat{\otimes} Y$ の正規直交基底となる．

定義 7.3.15 (回帰的空間)**.** ノルム空間 X に対し自然な線形写像

$$\alpha : X \longrightarrow (X')', \quad \boldsymbol{x} \longmapsto (\phi \mapsto \phi(\boldsymbol{x}))$$

が全単射のとき，X は**回帰的** (reflective) であるという．

ヒルベルト空間は回帰的である．$1 < p < \infty$ のとき ℓ^p や $L^p(\Omega)$ は回帰的である．しかしながら ℓ^1, $L^1(\Omega)$ は回帰的でない．

7.4 作用素ノルム

7.4.1 内積空間における作用素ノルム

V, W を内積のあるベクトル空間とし線形写像 $A : V \to W$ に対しその作用素ノルム $\|A\|$ は次で定められるのであった．

$$\|A\| = \sup\{\|A\boldsymbol{v}\| : \boldsymbol{v} \in V,\ \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$$

随伴写像 $A^* : W \to V$ を $(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \cdot (A^*\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$, で定める．

定理 7.4.1. $\|A^*\| = \|A\|$

証明. コーシー・シュワルツの不等式より $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ であるので，

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = (A\boldsymbol{x}) \cdot (A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot (A^*A\boldsymbol{x}) \leq \|\boldsymbol{x}\|\|A^*A\boldsymbol{x}\| \leq \|A^*A\|\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq \|A^*\|\|A\|\|\boldsymbol{x}\|^2$$

となる．

$$\frac{\|A\boldsymbol{x}\|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} \leq \|A^*\|\|A\|,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0},$$

なので $\|A\|^2 \leq \|A\|\|A^*\|$ となり $\|A\| \leq \|A^*\|$ を得る．$\|A\| \leq \|A^*\| \leq \|(A^*)^*\| = \|A\|$ なので $\|A\| = \|A^*\|$ がわかる． □

ノルム空間の間の線形写像 $A : V \to W$ に対し

$$\sigma(A) = \inf_{\boldsymbol{v}}\{\|A\boldsymbol{v}\| : \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$$

と置く．$\sigma(A) > 0$ ならば $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v} \neq 0$, なる $\boldsymbol{v}$ は存在しないので A は単射である．

定理 7.4.2. $\Sigma = \{B : V \to W$ 全射でない線形写像 $\}$ とおけば

$$\sigma(A) = \sigma(A^*) = \inf_{B \in \Sigma} \|A - B\|$$

証明. $\|A^*\boldsymbol{w}_0\| = \sigma(A^*)$ なる $\boldsymbol{w}_0$ で $\|\boldsymbol{w}_0\| = 1$ なるものを取る．直交射影 $P : W \to W$, $\boldsymbol{w} \mapsto (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}_0)\boldsymbol{w}_0$ をとると，$\|P\boldsymbol{w}\| = |\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}_0|$ であり，また $I - P$ は $\boldsymbol{w}_0$ の直交補空間への射影なので $B_0 = A - PA = (I - P)A$ は全射でない．従って $B_0 \in \Sigma$ である．$V_1 = \{\boldsymbol{v} \in V : \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ と置けば，

$$
\begin{aligned}
\inf_{B\in\Sigma} \|A - B\| \leq & \|A - B_0\| = \|PA\| = \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} \|PA\boldsymbol{v}\| \\
&= \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} |(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}_0| = \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} |\boldsymbol{v} \cdot (A^*\boldsymbol{w}_0)| \\
&\leq \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} \|\boldsymbol{v}\|\|A^*\boldsymbol{w}_0\| \quad \text{(コーシー・シュワルツの不等式)} \\
&= \|A^*\boldsymbol{w}_0\| = \sigma(A^*)
\end{aligned}
$$

であり，$\sigma(A^*) \geq \inf_{B\in\Sigma} \|A - B\|$ を示せた．$W_1 = \{\boldsymbol{w} \in W : \|\boldsymbol{w}\| = 1\}$ と置く．$B \in \Sigma$ に対し

$$
\begin{aligned}
\|A^* - B^*\| &= \sup_{\boldsymbol{w}\in W_1} \|(A^* - B^*)\boldsymbol{w}\| \\
&\geq \sup_{\boldsymbol{w}\in W_1} \{\|(A^* - B^*)\boldsymbol{w}\| : B^*\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\} \\
&= \sup_{\boldsymbol{w}\in W_1} \{\|A^*\boldsymbol{w}\| : B^*\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\} \\
&\geq \inf_{\boldsymbol{w}\in W_1} \{\|A^*\boldsymbol{w}\| : B^*\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\} \\
&\geq \inf_{\boldsymbol{w}\in W_1} \|A^*\boldsymbol{w}\| = \sigma(A^*)
\end{aligned}
$$

であり，$\sigma(A^*) = \inf_{B\in\Sigma} \|A - B\|$ を示せた．同様に，$B \in \Sigma$ に対し

$$
\begin{aligned}
\sigma(A^*) \geq \|A - B\| &= \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} \|(A - B)\boldsymbol{v}\| \\
&\geq \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} \{\|(A - B)\boldsymbol{v}\| : B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \\
&= \sup_{\boldsymbol{v}\in V_1} \{\|A\boldsymbol{v}\| : B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \\
&\geq \inf_{\boldsymbol{v}\in V_1} \{\|A\boldsymbol{v}\| : B\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \\
&\geq \inf_{\boldsymbol{v}\in V_1} \|A\boldsymbol{v}\| = \sigma(A)
\end{aligned}
$$

なので $\sigma(A) \leq \sigma(A^*) \leq \sigma((A^*)^*) = \sigma(A)$ となり証明が完了する． □

7.4.2 有限次元の場合

$m \times n$ 行列 A に対し A の定める線形写像 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考える．$V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ にはユークリッド内積を入れておく．

補題 7.4.3. 正方行列 A が $\sigma(A) > 0$ ならば A は可逆で $\sigma(A)^{-1} = \|A^{-1}\|$.

証明. $\sigma(A) > 0$ ならば $\det(A) \neq 0$ なので A は可逆である．

$$\sigma(A)^{-1} = \sup\left\{\tfrac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|A\boldsymbol{x}\|} : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\} = \sup\left\{\tfrac{\|A^{-1}\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|} : \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}\right\} = \|A^{-1}\|$$

より結果を得る． □

$n \neq m$ のときは常に $\sigma(A) = 0$ であり $\sigma(A)$ には実質的な情報はない．代わりに A の特異値を調べる．$\sigma_1(A), \sigma_2(A), \ldots$ を行列 A の特異値とし $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots$ とする．対称行列 ${}^tAA$ に定理 5.3.10 を適用すると次式を得る．

$$\begin{aligned}\sigma_k(A) =& \min\{\sigma_S(A) : S \text{ は } V \text{ の } (n-k+1) \text{ 次元部分空間 }\}\\ \sigma_S(A) =& \max\{\|A\boldsymbol{v}\| : \boldsymbol{v} \in S, \|\boldsymbol{v}\| = 1\}\end{aligned}$$

さらに 5.10 節の議論より

$$A\boldsymbol{v}_i = \sigma_i(A)\boldsymbol{w}_i, \quad \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{i,j}, \quad \boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{w}_j = \delta_{i,j}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{v}_i \in V\ (i = 1, \ldots, n)$, $\boldsymbol{w}_j \in W\ (j = 1, \ldots, m)$ が存在する．

$\sigma_1(A) = \|A\| = \max\{\|A\boldsymbol{x}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ で，A が n 次正方行列ならば $\sigma(A) = \sigma_n(A)$ である．随伴写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は転置行列 ${}^tA$ で表されるので，$\sigma_k(A^*) = \sigma_k(A)$ にも注意しておこう．さて，階数が k 未満の $m \times n$ 行列全体の集合を $\Sigma_{<k}$ で表す．

定理 7.4.4. $m \times n$ 行列 A に対し

$$\sigma_k(A) = \inf_{B \in \Sigma_{<k}} \|A - B\|.$$

証明. W の部分空間 $\langle \boldsymbol{w}_k, \ldots, \boldsymbol{w}_m \rangle$ への直交射影の行列を P_k で表す．$I - P_k$ は $\langle \boldsymbol{w}_k, \ldots, \boldsymbol{w}_m \rangle$ の直交補空間への射影なので $B_k = A - P_kA = (I - P_k)A$ は階数 $k-1$. 従って $B_k \in \Sigma_{<k}$ である．$V_1 = \{\boldsymbol{v} \in V : \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ と置けば,

$$\begin{aligned}\inf_{B \in \Sigma_{<k}} \|A - B\| \leq& \|A - B_k\| = \|P_kA\| = \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1} \|P_kA\boldsymbol{v}\|\\ =& \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1} \left\|\sum_{i=k}^{m} ((A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i\right\|\\ =& \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1} \left\|\sum_{i=k}^{m} (\boldsymbol{v} \cdot (A^*\boldsymbol{w}_i))\boldsymbol{w}_i\right\|\\ =& \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1} \left\|\sum_{i=k}^{m} \sigma_i(A)(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{w}_i\right\|\\ =& \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1} \left(\sum_{i=k}^{m} \sigma_i(A)^2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leq \sigma_k(A) \qquad (\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_k \text{ のとき等号成立，} |\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_i| \leq \|\boldsymbol{v}\| = 1 \text{ に注意})$$

なので $\sigma_k(A) \geq \inf_{B \in \Sigma_{<k}} \|A - B\|$ がわかった．次に逆向きの不等式を示そう．階数 $k-1$ の行列 B をとると，$B \in \Sigma_{<k}$ であり，$\dim \operatorname{Ker} B = n+1-k$ なので

$$\begin{aligned}
\sigma_k(A) &= \inf_{W : \dim W = n+1-k} \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1 \cap W} \|A\boldsymbol{v}\| \leq \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1 \cap \operatorname{Ker} B} \|A\boldsymbol{v}\| \\
&\leq \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1 \cap \operatorname{Ker} B} \|(A-B)\boldsymbol{v}\| \leq \sup_{\boldsymbol{v} \in V_1} \|(A-B)\boldsymbol{v}\| = \|A - B\|
\end{aligned}$$

なので $\sigma_k(A) \leq \inf_{B \in \Sigma_{<k}} \|A - B\|$ となり，定理の証明が完了する．　□

付録 A

多項式

A.1 互除法

体 $\mathbb{K}$ の元を係数にもつ多項式

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m, \qquad p_i \in \mathbb{K},$$

を考える．$p_m \neq 0$ のとき，この多項式の次数は m であると言い，$\deg P = m$ と書く．定数 p_0 も多項式の特別な場合である．$p_0 \neq 0$ のときは定数 p_0 の次数は 0 である．次数については

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q \tag{A.1.1}$$

が成り立つ．0 の次数は $-\infty$ と約束すると，$P = 0$ のとき $PQ = 0$ であるから，式 (A.1.1) は，$-\infty = -\infty + \deg Q$ となり[*1]，0 を含む多項式で成り立つ式である．

定理 A.1.2 (余りのある割算)**.** 2 つの多項式 P, Q に対し

$$P = QS + R, \quad \deg Q > \deg R$$

を満たす多項式 R, S が一意的に存在する．S を P を Q で割った商，R を P を Q で割った余りという．

証明. $P(x)$ を m 次多項式，$Q(x)$ を n 次多項式として $S(x), R(x)$ が存在する事を m による帰納法で示す．

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_m x^m, \quad Q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_n x^n$$

[*1] 厳密に言えば $-\infty$ に対して加法は定義されていないので，$-\infty$ には何を足しても $-\infty$ と約束すると整数の加法が $-\infty$ を含む集合まで拡張されるというのが正確であろう．

とすると，$p_m \neq 0$, $q_n \neq 0$ である．$m < n$ ならば $S(x) = 0$, $R(x) = P(x)$ と置けば良い．$m \geq n$ ならば $P_1(x) = P(x) - \frac{p_m}{q_n}x^{m-n}Q(x)$ と置くと $\deg P_1(x) < m$ なので帰納法の仮定が使えて

$$P_1(x) = Q(x)S_1(x) + R_1(x), \quad \deg R(x) < n$$

を満たす多項式 $S_1(x)$, $R(x)$ が存在する．よって

$$P(x) = \frac{p_m}{q_n}x^{m-n}Q(x) + P_1(x) = \Big(\frac{p_m}{q_n}x^{m-n} + S_1(x)\Big)Q(x) + R(x)$$

なので $S(x) = \frac{p_m}{q_n}x^{m-n} + S_1(x)$ と置けば証明が終わる．

次に $S(x)$, $R(x)$ が一意的である事を示す．

$$P = QS_1 + R_1 = QS_2 + R_2, \quad \deg Q > \deg R_1, \quad \deg Q > \deg R_2$$

とすると，$Q(S_1 - S_2) = R_2 - R_1$ となる．両辺の次数を比較すると，左辺は 0 でなければ $\deg Q$ 以上となり，右辺は $\deg Q$ より小さい．よってこれは 0 となり，$R_1 = R_2$, $S_1 = S_2$ を得る． □

$F_1(x)$, $F_2(x)$ を多項式とする．$F_1(x)$, $F_2(x)$ を共に割り切るような多項式全体の集合を考え，その中で次数最大のものを $F_1(x)$, $F_2(x)$ の**最大公約多項式**という．

注意 A.1.3 (互除法)**.** $\deg F_1(z) \geq \deg F_2(z)$ と仮定し，$F_1(z)$ を $F_2(z)$ で割って

$$F_1(z) = F_2(z)S_1(z) + F_3(z) \quad \deg F_3(z) < \deg F_2(z)$$

と書くと $F_1(z)$ と $F_2(z)$ の最大公約多項式 $H_1(z)$ は $F_2(z)$ と $F_3(z)$ の最大公約多項式 $H_2(z)$ と定数倍を除いて等しい．実際，$F_1 = A_1H_1$, $F_2 = A_2H_1$ と書くと $F_3 = F_1 - S_1F_2 = (A_1 - S_1A_2)H_1$ なので H_1 は F_3 を割り切る．つまり H_1 は H_2 を割り切る．同様に $F_2 = B_1H_2$, $F_3 = B_2H_2$ と書けば，$F_1 = F_2S_1 + F_3 = (B_1S_1 + B_2)H_2$ なので H_2 は H_1 を割り切る．

このプロセスを続けて順に $F_i(z)$ を構成していくと，$F_i(z)$ の次数は下がっていくので，ある $F_{m+1}(z)$ は零でなければならない．このとき $F_m(z)$ が $F_1(z)$ と $F_2(z)$ の最大公約多項式である．実際

$$\begin{aligned}
F_2(z) =& F_3(z)S_2(z) + F_4(z) && \deg F_4 < \deg F_3 \\
& \cdots \\
F_{m-2}(z) =& F_{m-1}(z)S_{m-2}(z) + F_m(z) && \deg F_m < \deg F_{m-1} \\
F_{m-1}(z) =& F_m(z)S_{m-1}(z)
\end{aligned}$$

なので，

$$F_1 \text{と } F_2 \text{の最大公約多項式} = F_2 \text{と } F_3 \text{の最大公約多項式}$$

$$
\begin{aligned}
&= F_3 \text{と } F_4 \text{の最大公約多項式} \\
&= \dots \\
&= F_{m-1} \text{と } F_m \text{の最大公約多項式} = F_m
\end{aligned}
$$

となる．

定理 A.1.4. $F_1(x)$, $F_2(x)$ を多項式とする．

$$I = \{AF_1 + BF_2 : A, B \text{ は多項式 }\}$$

は F_1 と F_2 の最大公約多項式の倍元全体である．

証明. I の中で次数が最小の（0 でない）多項式 Q を取る．I から任意の多項式 P をとると，P を Q で割る事により $P = QS + R$, $\deg R < \deg Q$, となる多項式 R, S がある．$R = P - QS \in I$ で Q は I の次数最小の多項式なので $R = 0$ である．よって $P = QS$ であり P は Q の倍元である．つまり I の任意の元は Q の倍元である．特に，F_1, F_2 も I の元なので Q の倍元である．

G を F_1, F_2 の最大公約多項式とすると G の次数の最大性より $\deg Q \le \deg G$. $F_1, F_2 \in I$ より，Q は F_1, F_2 の公約元である．$F_1 = GH_1$, $F_2 = GH_2$ と書く．$Q = A_1F_1 + B_1F_2$ と書くと，

$$Q = A_1F_1 + B_1F_2 = (A_1H_1 + B_1H_2)G$$

より $\deg Q \ge \deg G$. よって $\deg Q = \deg G$ であり Q は G の非零定数倍である． □

系 A.1.5. 多項式 $F_1(x)$, $F_2(x)$ が共通因子を持たず，$G(x)$ を $\deg G < \deg F_1 + \deg F_2$ を満たす多項式とする．このとき

$$\frac{G(x)}{F_1(x)F_2(x)} = \frac{G_1(x)}{F_1(x)} + \frac{G_2(x)}{F_2(x)}, \quad \deg G_1 < \deg F_1, \quad \deg G_2 < \deg F_2$$

を満たす多項式 G_1, G_2 が存在する．またこのような多項式 G_1, G_2 は一意に定まる．

証明. 多項式 $F_1(x)$, $F_2(x)$ が共通因子を持たないので，$1 = A(x)F_1(x) + B(x)F_2(x)$ を満たす多項式 $A(x)$, $B(x)$ が存在する．$G(x)A(x)$, $G(x)B(x)$ をそれぞれ F_2, F_1 で割って

$$
\begin{aligned}
G(x)A(x) &= H_2(x)F_2(x) + G_2(x), &\qquad \deg G_2 < \deg F_2 \\
G(x)B(x) &= H_1(x)F_1(x) + G_1(x), &\qquad \deg G_1 < \deg F_1
\end{aligned}
$$

と書くと $1 = AF_1 + BF_2$ なので

$$
\begin{aligned}
G &= G(AF_1 + BF_2) = (H_2F_2 + G_2)F_1 + (H_1F_1 + G_1)F_2 \\
&= (H_1 + H_2)F_1F_2 + G_2F_1 + G_1F_2
\end{aligned}
$$

となり，次式を得る．

$$-(H_1 + H_2)F_1F_2 = G_2F_1 + G_1F_2 - G$$

右辺の次数は $\deg F_1 + \deg F_2$ であるから，$H_1 + H_2 = 0$ でなければならず $G_2F_1 + G_1F_2 = G$ を得る．よって条件を満たす G_1, G_2 の存在がわかった．

G_1, G_2 の一意性を示そう．$\hat{G}_1, \hat{G}_2$ が $\hat{G}_2F_1 + \hat{G}_1F_2 = 1$, $\deg \hat{G}_1 < \deg F_1$, $\deg \hat{G}_2 < \deg F_2$ を満たせば，$G_2F_1 + G_1F_2 = G = \hat{G}_2F_1 + \hat{G}_1F_2$ なので，次式を得る．

$$(G_2 - \hat{G}_2)F_1 = (\hat{G}_1 - G_1)F_2$$

F_1 と F_2 は共通因子を持たないので，$G_2 - \hat{G}_2 \neq 0$ ならば F_2 は $G_2 - \hat{G}_2$ を割り切らなければならず[*2]次数の条件に矛盾．よって $G_2 = \hat{G}_2$ がわかる． □

この系を繰り返し使えば次の系を得る．

系 A.1.6. 多項式 $F_1(x), \ldots, F_r(x)$ のどの 2 つも共通因子を持たず，$G(x)$ を $\deg G < \deg F_1 + \cdots + \deg F_r$ なる多項式とする．このとき

$$\frac{G(x)}{F_1(x)\cdots F_r(x)} = \frac{G_1(x)}{F_1(x)} + \cdots + \frac{G_r(x)}{F_r(x)}, \quad \deg G_i < \deg F_i$$

を満たす多項式 $G_1, \ldots, G_r$ が存在する．またこのような多項式 $G_1, \ldots, G_r$ は一意に定まる．

A.2 代数学の基本定理

定理 A.2.1 (代数学の基本定理)**.** $n \geq 1$ として，複素数を係数とする多項式

$$P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n, \qquad a_i \in \mathbb{C},$$

に対し，$P(\alpha) = 0$ となる複素数 α が存在する．

系 A.2.2. 上記の $P(z)$ に対し，複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在し $P(z) = (z - \alpha_1)\cdots(z - \alpha_n)$ となる．また，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の選び方は番号の付け方を除いて一意である．

証明. $P(z)$ に対し $P(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ をとる．多項式 $P(z)$ を $(z - \alpha)$ で割ると余りは零なので $P(z) = (z - \alpha)P_1(z)$ と書け，$P_1(z)$ は $n - 1$ 次の多項式である．よって数学的帰納法により証明が終わる．

[*2] 実は系 A.2.2 を用いている．

次に一意性を示す．n に関する帰納法で示す．$n=1$ のときは明らかである．$n-1$ のときを仮定して n のときを示す．$P(z)=(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)=(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n)$ と書く．

$$0=P(\alpha_1)=(\alpha_1-\beta_1)\cdots(\alpha_1-\beta_n)$$

なので，ある i が存在して $\alpha_1-\beta_i=0$ である．つまり，$\alpha_1=\beta_i$．よって

$$(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)=(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_{i-1})(z-\beta_{i+1})\cdots(z-\beta_n)$$

となり，帰納法の仮定より証明が終わる． □

さて，$R=\max\{((n+1)|a_i|)^{1/i} : i=1,2,\ldots,n\}$ と置く．$R^i \geq (n+1)|a_i|$ に注意する．

補題 A.2.3. $|z|\geq R$ ならば $|P(z)|\geq|P(0)|$.

証明. $z^n=P(z)-a_1z^{n-1}-\cdots-a_n$ なので

$$|z|^n \leq |P(z)|+|a_1||z|^{n-1}+\cdots+|a_{n-1}||z|+|a_n|$$

$|z|\geq R$ ならば $\frac{1}{|z|^i}\leq\frac{1}{R^i}$ であり，$\frac{|a_i|}{R^i}\leq\frac{1}{n+1}$ なので，

$$|P(z)| \geq |z|^n\left(1-\frac{|a_1|}{|z|}-\cdots-\frac{|a_n|}{|z|^n}\right)\geq R^n\left(1-\frac{|a_1|}{R}-\cdots-\frac{|a_n|}{R^n}\right)\geq\frac{R^n}{n+1}\geq|a_n|$$

がわかる．$a_n=P(0)$ なので証明が終わる． □

定理 A.2.1 の証明. 円盤 $|z|\leq R$ 上の $|P(z)|$ の最小値を $|P(\alpha)|$ とする．すると

$$\begin{array}{llll} |z|\leq R & \text{ならば} & |P(z)|\geq|P(\alpha)| & (|P(\alpha)|\text{ の最小性}) \\ |z|\geq R & \text{ならば} & |P(z)|\geq|P(0)|\geq|P(\alpha)| & (\text{前補題と }|P(\alpha)|\text{ の最小性}) \end{array}$$

となる．$|P(\alpha)|\neq 0$ とすると，次の補題より $|P(\beta)|<|P(\alpha)|$ なる複素数 β が存在し，矛盾となる．よって $|P(\alpha)|=0$ となり $P(\alpha)=0$ がわかり主張は従う． □

補題 A.2.4. $P(\alpha)\neq 0$ ならば $|P(\beta)|<|P(\alpha)|$ なる複素数 β が存在する．

証明. $P(\alpha+w)$ は w の n 次多項式で定数項は 0 でない．0 でない最低次の定数項以外の項の次数を k とすると

$$P(\alpha+w)=b(c^k-w^k+c_{k+1}w^{k+1}+\cdots+c_nw^n),\ b,c\neq 0,\ c_{k+1},\ldots,c_n\in\mathbb{C}$$

と書くことができる．w^k の係数が $-b$ で，$P(\alpha)=bc^k$ であることに注意しておこう．$K=|c_{k+1}c|+|c_{k+2}c^2|+\cdots+|c_nc^{n-k}|$ とおく．$0\leq t\leq 1$ のとき

$$|P(\alpha+ct)| = |b||c^k-c^kt^2+c_{k+1}c^{k+1}t^{k+1}+\cdots+c_nc^nt^n|$$

$$
\begin{aligned}
&=|bc^k||1-t^k+c_{k+1}ct^{k+1}+c_{k+2}c^2t^{k+2}+\cdots+c_nc^{n-k}t^n| \\
&\leq|bc^k|(1-t^k+t^{k+1}(|c_{k+1}c|+|c_{k+2}c^2|+\cdots+|c_nc^{n-k}|)) \\
&\leq|bc^k|(1-t^k+t^{k+1}K) \\
&\leq|bc^k|(1-t^k(1-tK)) \\
&<|bc^k|=|P(\alpha)| \qquad\qquad 0<t<\min\{1,1/K\} \text{ のとき}
\end{aligned}
$$

$\beta=\alpha+ct$ $(0<t<\min\{1,1/K\})$ とおけば証明を完了する． □

この証明のポイントは，定理 A.2.1 の証明の冒頭に理由を説明せずに利用した，「円盤 $|z|\leq R$ 上で関数 $|P(z)|$ の最小値が存在する」という主張である．これは証明を要する定理と理解すべきで，通常は「有界閉集合上の連続関数は最大値最小値を持つ」という，最大値最小値の原理の帰結と了解されている．これは解析学の話題であるので，詳細は解析学の基礎を説明した教科書に譲る．

付録 B

距離空間

定義 B.0.1 (距離空間)**.** 空でない集合 X に対し

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto d(x, y),$$

が**距離関数** (distance function) であるとは次の性質を満たす時をいう．

(i) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geq 0$.
(ii) $d(x, y) = 0$ と $x = y$ は同値,
(iii) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$.
(iv) 任意の $x, y, z \in X$ に対し $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

集合 X と距離関数 d とを組にした (X, d) を**距離空間** (metric space) という．

定義 B.0.2 (開球)**.** (X, d) を距離空間とする．X の点 a と正の数 ε に対し a を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の**開球** (open ball) $B(a; \varepsilon)$ を次で定義する．

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

$B(a; \varepsilon)$ を $B_\varepsilon(a)$ と書く事もある．

定義 B.0.3 (開集合)**.** X の部分集合 U が次の条件を満たすとき**開集合** (open set) であるという．

U の各点 x に対しある正の数 ε が存在して $B(x; \varepsilon) \subset U$ となる．

補題 B.0.4. 開球は開集合である．

証明. 任意の $x \in B(a; \varepsilon)$ に対し，$B(x; \delta) \subset B(a; \varepsilon)$ なる開球 $B(x; \delta)$ の存在を示せばよい．$y \in B(x; \delta)$ ならば

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + d(x, a)$$

なので $\delta < \varepsilon - d(x,a)$ なる $\delta > 0$ をとればよい. $\square$

定理 B.0.5 (開集合の性質).

(O1) 空集合 $\varnothing$ と X はともに開集合である.
(O2) 有限個の開集合の共通部分は開集合である. 即ち, U_1, U_2, ..., U_k が開集合ならば $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ も開集合である.
(O3) 任意個の開集合の和集合は開集合である. 即ち, U_λ, $\lambda \in \Lambda$, が開集合ならば $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合である.

証明. U が開集合である事は次の条件が成り立つ事と同値であった.

任意の $x \in X$ に対し $x \in U$ ならば, 開球 $B(x;\varepsilon)$ が存在して $B(x;\varepsilon) \subset U$

(O1): $U = \varnothing$ の時は $x \in U$ が成立せずこの条件式は真. $U = X$ の時も明らかに真.
(O2): $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k = \varnothing$ のときは明らかなので, $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \neq \varnothing$ と仮定する. $x \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ とすると, $x \in U_i$, $i = 1, \ldots, k$. U_i は開集合だから $\varepsilon_i > 0$ が存在して $B(x;\varepsilon_i) \subset U_i$. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ と置くと $B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_i) \subset U_i$ なので $B(x;\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. よって $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ は開集合である.
(O3): $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とすると, ある λ が存在して $x \in U_\lambda$. U_λ は開集合だから $B(x;\varepsilon) \subset U_\lambda \subset_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ よって $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合である. $\square$

付録 C

直和・直積，テンソル

直和は英語では direct sum，直積は direct product，テンソルは tensor で，いずれもベクトル空間から新しいベクトル空間を作る代数的な操作またはその結果得られたものを指す言葉である．ここでは直和，直積，テンソルに関する基礎事項をまとめておく．

C.1 直和・直積

3.5.2 節で扱った部分空間の直和の概念を一般の直和の概念に一般化する．

定義 C.1.1 (直和)**.** ベクトル空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，

$$S = \{(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : \text{有限個の } \lambda \text{ を除いて } \boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{0}\}$$

を考える．S は次の演算でベクトル空間になる．

$$(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (\boldsymbol{v}'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (\boldsymbol{v}_\lambda + \boldsymbol{v}'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \qquad k(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (k\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \tag{C.1.2}$$

この S をベクトル空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和** (direct sum) といい $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ で表す．このとき，自然な単射線形写像 $\iota_\lambda : V_\lambda \to X$, $\boldsymbol{v} \mapsto (\boldsymbol{v}_\mu)_{\mu\in\Lambda}$, が次の規則で定まる．

$$\boldsymbol{v}_\mu = \begin{cases} \boldsymbol{v} & \mu = \lambda \\ \boldsymbol{0} & \mu \neq \lambda \end{cases}$$

ι_λ による V_λ の像を**直和因子** (direct summund) ということがある．

定義 C.1.3 (直積)**.** $P = \{(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : \boldsymbol{v}_\lambda \in V_\lambda\}$ をベクトル空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積** (direct product) といい $\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ で表す．射影とよばれる自然な全射線形写像

$$P \longrightarrow V_\lambda, \quad (\boldsymbol{v}_\mu)_{\mu\in\Lambda} \longmapsto \boldsymbol{v}_\lambda,$$

があり，(C.1.2) で定まる演算で P はベクトル空間になる．

構成より，直和 S は直積 P の部分空間になっている．なお添字集合 Λ が有限集合の場合は，直和と直積は同じものである．

注意 C.1.4 (普遍性による直和・直積の特徴づけ)**.** 直和，直積については次のような普遍性による特徴付けが知られている．

ベクトル空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和**とは，ベクトル空間 S と線形写像の族 $\{\iota_\lambda : V_\lambda \to S\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組で，次の性質を持つものを言う．

任意の線形写像の族 $\{j_\lambda : V_\lambda \to T\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $j_\lambda = \varphi\circ\iota_\lambda$ を満たす線形写像 $\varphi : S \to T$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "\exists 1\varphi"] & T \\ V_\lambda \arrow[u, "\iota_\lambda"] \arrow[ur, "j_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

ベクトル空間の族 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**とは，ベクトル空間 P と線形写像の族 $\{p_\lambda : P \to V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組で，次の性質を持つものを言う．

任意の線形写像の族 $\{q_\lambda : Q \to V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $q_\lambda = p_\lambda\circ\psi$ を満たす線形写像 $\psi : Q \to P$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "p_\lambda"'] & Q \arrow[l, dashed, "\exists 1\psi"'] \arrow[dl, "q_\lambda"] \\ V_\lambda & \end{tikzcd}$$

前述の定義 C.1.1（または C.1.3）で構成したものが，これらの性質を満たす事を注意しておく．また，直和（または直積）の条件で $T = S$ (または $P = Q$) とすれば，一意性より φ (または ψ) は恒等写像でなければならない事に注意する．それから，直和（または直積）は同型を除いて一意的である．実際，2 つ直和があったとしたら，それらを S, S' として，条件より線形写像 $\varphi : S \to S'$ と $\varphi' : S' \to S$ が存在するが，$\varphi'\circ\varphi : S \to S$ は恒等写像でなければならないので，φ' は全射で φ は単射である．同様に $\varphi\circ\varphi' : S' \to S'$ も恒等写像でなければならないので，φ は全射で φ' は単射である事もわかる．直積についても同様である．

注意 C.1.5 (直和，直積と Hom)**.** ベクトル空間 U, V_λ $(\lambda \in \Lambda)$, W に対し，次の同型がある．

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_\lambda V_\lambda, W\Big) &\simeq \prod_\lambda \mathrm{Hom}(V_\lambda, W), && \varphi \longmapsto (\varphi\circ\iota_\lambda)_\lambda, \\ \mathrm{Hom}\Big(U, \prod_\lambda V_\lambda\Big) &\simeq \prod_\lambda \mathrm{Hom}(U, V_\lambda), && \varphi \longmapsto (p_\lambda\circ\varphi)_\lambda. \end{aligned}$$

前者の同型は，ベクトル空間 Q と線形写像の族 $\{q_\lambda : Q \to \mathrm{Hom}(V_\lambda, W)\}_\lambda$ があるとき，$q \in Q$ に対し $\mathrm{Hom}(\bigoplus_\lambda V_\lambda, W)$ の元 $[(\boldsymbol{v}_\lambda)_\lambda \mapsto \sum_\lambda q_\lambda(q)(\boldsymbol{v}_\lambda)$ (有限和)$]$ が定まることからわかる．また，後者の同型を $\mathrm{Hom}(U, \bigoplus_\lambda V_\lambda)$ に制限すると同型 $\mathrm{Hom}(U, \bigoplus_\lambda V_\lambda) \simeq \bigoplus_\lambda \mathrm{Hom}(U, V_\lambda)$ を得る．

C.2　テンソル積

定義 C.2.1 (テンソル積)**.** $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $V_1, \ldots, V_k$ があれば，$\{\boldsymbol{v}_{i,\lambda_i}\}_{\lambda_i}$ を V_i の基底として，形式的にテンソル積 $\boldsymbol{v}_{1,\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{k,\lambda_k}$ と呼ばれる積を考え，それらの 1 次結合

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} c_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} \boldsymbol{v}_{1,\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{k,\lambda_k} \quad \text{（有限和）} \quad c_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} \in \mathbb{K}$$

全体の作るベクトル空間を，ベクトル空間 $V_1, \ldots, V_k$ の**テンソル積**といい $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ で表す．このとき，次の (i), (ii) を満たすとして計算を行う．

(i) $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ の元は $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, なる元の有限個の 1 次結合で書ける．

(ii) $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k$ は各 $\boldsymbol{v}_i$ に関する線形性を満たす．即ち，次の関係式を満たす．

$$\begin{aligned}
(c\boldsymbol{v}_1) \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k = \cdots &= \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{k-1} \otimes (c\boldsymbol{v}_k) = c(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k),\ c \in \mathbb{K} \\
(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}'_1) \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}'_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k \\
&\cdots \\
\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{k-1} \otimes (\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}'_k) &= \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{k-1} \otimes \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_{k-1} \otimes \boldsymbol{v}'_k
\end{aligned}$$

一般に，条件 (i), (ii) を満たす積をテンソル積という事がある．$\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k$ なるテンソルを**単純テンソル**又は**基本テンソル**という．後述の対称積や交代積も一種のテンソルで，それぞれ対称テンソル，交代テンソルと呼ぶ．

体 $\mathbb{K}$ を明示する必要があるときは，テンソル積 $V \otimes W$ を $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ と書く．

注意 C.2.2 (テンソル積の定義について)**.** テンソル積は普遍性を持つ．普遍性とは条件 (i), (ii) を満たすベクトル空間はすべてテンソル積の商として得られる事を要請する条件である．実はこのような普遍性をもつ対象としてテンソル積を定義することもできる．普遍性による $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ の定義を述べる為，まず多重線形写像の定義を述べる．写像 $V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ が多重線形とは，各 V_i について線形のときを言う．

テンソル積の**普遍写像性質** (universal mapping property) とよばれる次の性質を満たすベクトル空間 T と多重線形写像 $\tau : V_1 \times \cdots \times V_k \to T$ が存在するとき T を $V_1, \ldots, V_k$ のテンソル積といい $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ で表す．

任意のベクトル空間 U と任意の多重線形写像 $f_U : V_1 \times \cdots \times V_k \to U$ に対し $f_U = g_U \circ \tau$ を満たす線形写像 $g_U : T \to U$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_k \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f_U"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists 1\ g_U"] \\
& U
\end{tikzcd}$$

$\tau(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ を $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k$ と書く事とする．

この定義より τ は $V_1 \times \cdots \times V_k$ からの最も一般な線形写像であるということができる．

この定義の利点は，テンソル積 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ から別のベクトル空間 U への線形写像を定義するのが容易だと言う事にある．つまり，多重線形性に反しないよう[*1]に $\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_k$, $(\boldsymbol{v}_i\in V_i)$ の行き先を指定すれば，多重線形写像 $V_1\times\cdots\times V_k\to U$ があり，これが線形写像 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k\to U$ に一意的に拡張できる事が結論できるのである．これは大変便利な性質で，テンソル積からの写像の構成はほとんどの場合 $\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_k$ の像を指定する事で行われる．読者は，普遍写像性質を使って，例えば (C.2.7) の写像がうまく定義されている事を確認して欲しい．

普遍写像性質を使ってテンソル積を定義したら，その要請を満たすものの存在が問題になる．以下に構成法を示すがその前に例 3.1.15 を見て，自由ベクトル空間の定義を確認してから次に進んでほしい．

$V_1\times\cdots\times V_k$ の元 $(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)$ が生成する自由ベクトル空間

$$F(V_1\times\cdots\times V_k)=\Big\{\sum_{(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)\in V_1\times\cdots\times V_k}c_{(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)\ (\text{有限和}):c_{(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)}\in\mathbb{K}\Big\}$$

を考える．$F(V_1\times\cdots\times V_k)$ の元で，$\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i'\in V_i$, $c\in\mathbb{K}$ として，

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_1',\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_k)-(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)-(\boldsymbol{v}_1',\dots,\boldsymbol{v}_k),\ (c\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)-c(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)\\ \cdots\\ (\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_{k-1},\boldsymbol{v}_k+\boldsymbol{v}_k')-(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)-(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k'),\ (\boldsymbol{v}_1,\dots,c\boldsymbol{v}_k)-c(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k)\end{gathered}$$

なる形をしたものすべてが生成する $F(V_1\times\cdots\times V_k)$ の部分空間 $\mathcal{T}$ を考え，$F(V_1\times\cdots\times V_k)$ の $\mathcal{T}$ による商空間をテンソル積 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ と定義する．

$$V_1\otimes\cdots\otimes V_k=F(V_1\times\cdots\times V_k)/\mathcal{T}$$

このように構成した $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ が普遍写像性を満たす事の証明は興味ある読者の演習問題とする．

V の元 $\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{v}_i$, W の元 $\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^m b_j,\boldsymbol{w}_j$ に対し，$V\otimes W$ の元として次が成り立つ．

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}=\sum_{i,j}a_ib_j\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j$$

例 C.2.3. $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1=\binom{1}{0}$, $\boldsymbol{e}_2=\binom{0}{1}$ をとると $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$ の生成する 4 次元のベクトル空間である．$\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2$ と $\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1$ は異なる元である事に注意する．

[*1] もし $f((\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\otimes\boldsymbol{w})\neq f(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{w})+f(\boldsymbol{v}_2\otimes\boldsymbol{w})$ や $f(c\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\neq cf(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})$ であったら，もちろん線形写像には拡張できない．

例 C.2.4 (テンソル積の基底)**.** V_i が n_i 次元で V_i の基底を $\boldsymbol{e}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n_i}^{(i)}$ とすれば，$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ は $\boldsymbol{e}_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_k}^{(k)}$ $(1 \leq j_i \leq n_i)$ で生成されるベクトル空間である．特に $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ は $n_1 \cdots n_k$ 次元である．

例 C.2.5. $V \otimes W$ と $W \otimes V$ は異なるベクトル空間であるが $\boldsymbol{v}_i \in V$, $\boldsymbol{w}_i \in W$ として

$$\iota : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V, \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i \otimes \boldsymbol{v}_i \tag{C.2.6}$$

で定まる線形写像で同型である．しばしばこの写像を次の様に略記する．

$$\iota : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V, \quad \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}, \tag{C.2.7}$$

よってテンソル積を考えるときは (C.2.7) 型の表示式から必要に応じ (C.2.6) 型の表示式を思い起こす様，心掛ける必要がある．以下，冗長になるが同型 ι について若干の説明をする．

写像 ι がうまく定義されている事は次のようにわかる．まず

$$V \otimes W = F(V \times W)/\mathcal{T}$$

に注意する．ただし

$$\mathcal{T} = \left\langle \begin{matrix} (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}), & (c\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - c(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), & \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V, & c \in \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'), & (\boldsymbol{v}, c\boldsymbol{w}) - c(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), & \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W & \end{matrix} \right\rangle_{\mathbb{K}}$$

である．線形写像

$$\tilde{\iota} : F(V \times W) \longrightarrow F(W \times V), \quad \sum_{\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W} c_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) (\text{有限和}) \mapsto \sum_{\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W} c_{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}} (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$$

を考えるとこれは同型で，$\tilde{\iota}$ を $\mathcal{T}$ に制限すると $\tilde{\iota}$ は $\mathcal{T}$ から

$$\mathcal{T}' = \left\langle \begin{matrix} (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}), & (c\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) - c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), & \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W, & c \in \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}'), & (\boldsymbol{w}, c\boldsymbol{v}) - c(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}), & \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V & \end{matrix} \right\rangle_{\mathbb{K}}$$

への同型写像を与える．このとき次の可換図式がある．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\iota}"] & F(V \times W) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{\iota}"] & V \otimes W \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\iota"] & 0 & \text{（完全）} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}' \arrow[r] & F(W \times V) \arrow[r, "q"] & W \otimes V \arrow[r] & 0 & \text{（完全）}
\end{tikzcd}$$

左の 2 つの縦矢印が同型であることに注意しよう．するとこれを可換にするような線形写像 $\iota : V \otimes W \to W \otimes V$（右の縦矢印）が定まる．

実際，$V \otimes W$ の任意の元 a に対し，p は全射であるから $p(\tilde{a}) = a$ なる $F(V \times W)$ の元 $\tilde{a}$ が存在する．$\tilde{a}$ を a の $F(V \times W)$ への持ち上げという．a の別の持ち上げ $\tilde{a}'$ を

とった時，その差 $\tilde{a}-\tilde{a}'$ は $\mathcal{T}$ の元である．$\tilde{\iota}$ は線形同型なので $\tilde{\iota}(\tilde{a})-\tilde{\iota}(\tilde{a}')\in\mathcal{T}'$ であり $q(\tilde{\iota}(\tilde{a})-\tilde{\iota}(\tilde{a}'))=0$．よって $q(\tilde{\iota}(\tilde{a}))=q(\tilde{\iota}(\tilde{a}'))$ がわかる．

写像 $\tilde{\iota}$ は線形写像なので，写像 ι も線形写像である．

ι がベクトル空間としての同型であることを示す．そのためには ι が全単射であることを示せばよい．

ι が単射であることを示すには $\iota(a)=0$ ならば $a=0$ を示せばよい．$\iota(a)=0$ ならば $\tilde{\iota}(\tilde{a})\in\mathcal{T}'$ であり $\tilde{a}\in\mathcal{T}$ がわかり $a=0$ がわかるので．ι が単射であることがわかる．

ι が全射であることを示す．任意の $b\in W\otimes V$ に対し $\iota(a)=b$ なる $V\otimes W$ の元を構成すれば良い．b の $F(W\times V)$ への持ち上げ $\tilde{b}$ をとる．$\tilde{\iota}$ は同型なので $\tilde{\iota}^{-1}$ が存在する．そこで $\tilde{a}=\tilde{\iota}^{-1}(\tilde{b})$ として，$a=p(\tilde{a})$ とおけば，$\tilde{a}$ は a の $F(V\times W)$ への持ち上げなので

$$\iota(a)=q(\tilde{\iota}(\tilde{a}))=q(\tilde{\iota}(\tilde{\iota}^{-1}(\tilde{b})))=q(\tilde{b})=b$$

となる．よって証明が完了する．

演習 C.2.8. $(V_1\oplus V_2)\otimes W\simeq(V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)$ を示せ．

例 C.2.9. 双 1 次形式 $\beta:V\times W\to\mathbb{K}$ は，線形写像 $\beta:V\otimes W\to\mathbb{K}$ と解するのが自然である．次式を眺めれば $\beta:V\otimes W\to\mathbb{K}$ の線形性から $\beta:V\times W\to\mathbb{K}$ の双 1 次性が帰結されるからである．

$$\begin{aligned}\beta((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\otimes\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}'\otimes\boldsymbol{w})=&0, \qquad &\beta((c\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}-c(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}))=&0,\\ \beta(\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}')-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}')=&0, \qquad &\beta(\boldsymbol{v}\otimes(c\boldsymbol{w})-c(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}))=&0.\end{aligned}$$

$\beta:V\times W\to\mathbb{K}$ の双 1 次性から

$$\begin{aligned}\beta((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}')\otimes\boldsymbol{w})=&\beta(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})+\beta(\boldsymbol{v}'\otimes\boldsymbol{w}), \qquad &\beta((c\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w})=&c\beta(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}),\\ \beta(\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}'))=&\beta(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})+\beta(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}'), \qquad &\beta(\boldsymbol{v}\otimes(c\boldsymbol{w}))=&c\beta(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}).\end{aligned}$$

となり，$\beta:V\otimes W\to\mathbb{K}$ の線形性も帰結できる．

例 C.2.10 (テンソル積と Hom の随伴性)**.** $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V, W, X に対し，次の同型がある．

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(V\otimes W,X)\ &\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Hom}(V,\mathrm{Hom}(W,X)),\\ [\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\mapsto\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})]\ &\longmapsto[\boldsymbol{v}\mapsto\{\boldsymbol{w}\mapsto\beta(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\}].\end{aligned}$$

逆写像は $\boldsymbol{v}\mapsto[\phi_{\boldsymbol{v}}:\boldsymbol{w}\mapsto\phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})]$ に対し $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\mapsto\phi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})$ を対応させる事で得られる．

特に $\mathrm{Hom}(V\otimes W,\mathbb{K})\simeq\mathrm{Hom}(V,W^*)$ である．

例 C.2.11 (係数拡大)**.** $\mathbb{K}$ の拡大体 $\mathbb{L}$ があると $\mathbb{L}$ の元に $\mathbb{K}$ の元を乗ずる事ができるので $\mathbb{L}$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる．したがって $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V があれば，$\mathbb{K}$ ベクトル空間としてのテンソル積 $V_{\mathbb{L}} = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ は，次式で $\mathbb{L}$ ベクトル空間と見る事ができる．

$$c(\boldsymbol{v} \otimes \ell) = \boldsymbol{v} \otimes (c\ell), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ c, \ell \in \mathbb{L},$$

写像 $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{L} \to \mathbb{L}^n$, $\boldsymbol{v} \otimes \ell \mapsto \ell\boldsymbol{v}$, はベクトル空間としての同型である．実際，写像

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i \otimes \ell_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \ell_i v_i \boldsymbol{e}_i, \quad v_i \in \mathbb{K}, \ell_i \in \mathbb{L}$$

が全単射であることは容易にわかる．よって $\mathbb{Q}^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$ がわかる．

例 C.2.12. ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と，ベクトル空間 W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ をとる．線形写像 $f : V \to W$ があるとき，これらの基底に関する f の表現行列 $(a_{i,j})$ は次の式で定まる．

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1,j}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{m,j}\boldsymbol{w}_m$$

すると，$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$ に対し次式が成り立つ．

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{w}_i \tag{C.2.13}$$

但し $\boldsymbol{v}_j^*$ は $\boldsymbol{v}_j$ の双対基底である．$x_j = \boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{v})$ に注意．式 (C.2.13) は，写像

$$\boldsymbol{v} \longmapsto \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{w}_i$$

は線形写像 $f : V \to W$ と一致する事を示している．従って，テンソル $V^* \otimes W$ の元

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \boldsymbol{v}_j^* \otimes \boldsymbol{w}_i$$

を次の写像で写せば，$\mathrm{Hom}(V, W)$ の元 f を表す事がわかる．

$$V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \quad (\varphi, \boldsymbol{w}) \longmapsto [\boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}]$$

例 C.2.14 ($V^* \otimes W$ と $\mathrm{Hom}(V, W)$)**.** ベクトル空間 V, W に対し $V^* \otimes W$ から線形写像全体の空間 $\mathrm{Hom}(V, W)$ への線形写像

$$\iota : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W), \qquad \varphi \otimes \boldsymbol{w} \longmapsto [\boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}], \tag{C.2.15}$$

が定義できる．V または W が有限次元ならば，次に見るようにこれは同型である．

$$(\mathbb{K}^n)^* \otimes W \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}^*\right) \otimes W \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, W) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, W) \tag{C.2.16}$$

$$V^* \otimes \mathbb{K}^n \simeq V^* \bigotimes (\oplus_{i=1}^n \mathbb{K}) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}^n) \tag{C.2.17}$$

V, W ともに無限次元だと (C.2.15) は単射だが全射でない．なぜなら $V^* \otimes W$ の元 $\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \boldsymbol{w}_i$ の像で表される線形写像 φ は，$W_1 = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle_{\mathbb{K}}$ と置いたとき，$V \otimes W_1 \to \mathrm{Hom}(V, W_1)$ の像であり，$\mathrm{Im}\,\varphi \subset W_1$ なので像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ は有限次元である．よって (C.2.17) より (C.2.15) は単射である事がわかる．このような線形写像 φ の像の次元は，そのテンソルがいくつの単純テンソルの和で表せるかで定まっている．この数をテンソルの**階数**という．

また完全列 $0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to V \to \mathrm{Im}\,\varphi \to 0$ を見れば，核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は有限次元にはなり得ない．従って像が無限次元（または核が有限次元）であるような線形写像 $f: V \to W$ は (C.2.15) の像ではなく，(C.2.15) は全射ではない．例えば，$V = W$ で無限次元のとき，恒等写像は $\mathrm{Hom}(V, V)$ の元であるが (C.2.15) の像ではない．

冗長になるが，写像 (C.2.15) が定義される事を確認しておこう．まず $V^* \otimes W = F(V^* \times W)/\mathcal{T}$ に注意する．ただし

$$\mathcal{T} = \left\langle \begin{matrix} (\varphi + \varphi', \boldsymbol{w}) - (\varphi, \boldsymbol{w}) - (\varphi', \boldsymbol{w}), & (c\varphi, \boldsymbol{w}) - c(\varphi, \boldsymbol{w}), & \varphi, \varphi \in V^*, & c \in \mathbb{K} \\ (\varphi, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') - (\varphi, \boldsymbol{w}) - (\varphi, \boldsymbol{w}'), & (\varphi, c\boldsymbol{w}) - c(\varphi, \boldsymbol{w}), & \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W & \end{matrix} \right\rangle_{\mathbb{K}}$$

である．線形写像

$$\tilde{\iota}: F(V^* \times W) \to \mathrm{Hom}(V, W), \quad \sum_{\varphi \in V^*, \boldsymbol{w} \in W} c_{\varphi, \boldsymbol{w}} (\varphi, \boldsymbol{w}) (\text{有限和}) \mapsto \left[\boldsymbol{v} \mapsto \sum_{\varphi, \boldsymbol{w}} c_{\varphi, \boldsymbol{w}} \varphi(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{w}\right]$$

は，線形写像 $\iota: V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ を誘導する．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] & F(V \times W) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\iota}"'] & V \otimes W \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\iota"] & 0 \ (\text{完全}) \\ & & \mathrm{Hom}(V, W) & & \end{tikzcd}$$

そのためには，線形写像 $\tilde{\iota}$ を $\mathcal{T}$ に制限したら 0 写像であることを示せばよいが，それは次の式を確認すればわかる．

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}[(\varphi + \varphi', \boldsymbol{w}) - (\varphi, \boldsymbol{w}) - (\varphi', \boldsymbol{w})](\boldsymbol{v}) &= (\varphi(\boldsymbol{v}) + \varphi'(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{w} - \varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - \varphi'(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = 0, \\ \tilde{\iota}[(\varphi, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') - (\varphi, \boldsymbol{w}) - (\varphi, \boldsymbol{w}')](\boldsymbol{v}) &= \varphi(\boldsymbol{v})(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') - \varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} - \varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}' = 0, \\ \tilde{\iota}[(c\varphi, \boldsymbol{w}) - c(\varphi, \boldsymbol{w})](\boldsymbol{v}) &= (c\varphi(\boldsymbol{v}))\boldsymbol{w} - c(\varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}) = 0, \\ \tilde{\iota}[(\varphi, c\boldsymbol{w}) - c(\varphi, \boldsymbol{w})](\boldsymbol{v}) &= \varphi(\boldsymbol{v})(c\boldsymbol{w}) - c(\varphi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}) = 0. \end{aligned}$$

写像の合成が定義する写像

$$\mathrm{Hom}(U, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W)$$

に対応して，次の自然な写像がある．

$$(U^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes W) \longrightarrow U^* \otimes W, \quad (\phi \otimes \boldsymbol{v}) \otimes (\varphi \otimes \boldsymbol{w}) \longmapsto \varphi(\boldsymbol{v})(\phi \otimes \boldsymbol{w})$$

例 C.2.18 (テンソルとトレース)**.** 線形写像 $f: V \to V$ があるとする．V が有限次元ならば基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に関する表現行列 $(a_{i,j})$ と双対基底 $\boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_n^*$ を用いて，f はテンソル $\hat{f} = \sum_{i.j=1}^n a_{i,j} \boldsymbol{e}_j^* \otimes \boldsymbol{e}_i$ の像として表せる．このテンソルの自然な写像

$$\mathrm{ev}: V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi \otimes \boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}),$$

による $\hat{f}$ の像は，$\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ であり，f のトレース（表現行列 $(a_{i,j})$ のトレース）と一致している．

V が無限次元のとき，一般に線形写像 $f: V \to V$ のトレースは定義されないが，$V^* \otimes V$ の $\mathrm{Hom}(V, V)$ への像上では，$\mathrm{ev}: V^* \otimes V \to \mathbb{K}$ でトレースを定義する事ができる．$V^* \otimes V$ の $\mathrm{Hom}(V, V)$ への像の元 f に対し，f の像は有限次元なので，有限次元のときと同様にトレースが定義されるのである．

例 C.2.19 (テンソルと双対空間)**.** ベクトル空間 V, W に対し，次の線形写像を考える．

$$V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*, \ (\varphi, \phi) \longmapsto [\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v})\phi(\boldsymbol{w})] \tag{C.2.20}$$

この写像は次の合成と解釈できる．

$$V^* \otimes W^* \subset \mathrm{Hom}(V, W^*) = \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, \mathbb{K})) \simeq \mathrm{Hom}(V \otimes W, \mathbb{K}) = (V \otimes W)^*$$

従って, V または W が有限次元ならば (C.2.20) は同型で, V, W が無限次元だと (C.2.20) は単射であるが全射ではない.

定義 C.2.21 (線形写像のテンソル積)**.** ベクトル空間の間の線形写像 $A_i: V_i \to W_i$ $(1 \leq i \leq k)$ があれば，次式で線形写像のテンソル積が定まる．

$$A_1 \otimes \cdots \otimes A_k : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to W_1 \otimes \cdots \otimes W_k, \ \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k \mapsto A_1\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes A_k\boldsymbol{v}_k$$

V_i, W_i がすべて有限次元なら，V_i の基底 $\boldsymbol{e}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n_i}^{(i)}$, W_i の基底 $\bar{\boldsymbol{e}}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\boldsymbol{e}}_{m_i}^{(i)}$ をとる事により A_i の表現行列（記号 $(a_{j,s}^{(i)})$ で表す）が

$$A_i(\boldsymbol{e}_j) = a_{j,1}^{(i)} \bar{\boldsymbol{e}}_1 + \cdots + a_{j,m_i}^{(i)} \bar{\boldsymbol{e}}_{m_i}$$

で定まる．これらの基底のテンソル積が与える $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ と $W_1 \otimes \cdots \otimes W_k$ の基底に関して，線形写像 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_k$ の表現行列は次式で定まる．

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_k)(\boldsymbol{e}_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_k}^{(k)}) = \sum_{j_1, \ldots, j_k} a_{i_1, j_1}^{(1)} \cdots a_{i_k, j_k}^{(k)} \bar{\boldsymbol{e}}_{j_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \bar{\boldsymbol{e}}_{j_k}^{(k)}$$

例 C.2.22. 例えば，行列 $\left(\begin{smallmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$ の定める線形写像 $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と, 行列 $\left(\begin{smallmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$ の定める線形写像 $B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ のテンソル積 $A \otimes B: \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ は,

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 \longmapsto (a_{1,1}\boldsymbol{e}_1 + a_{1,2}\boldsymbol{e}_2) \otimes (b_{1,1}\boldsymbol{e}_1 + b_{1,2}\boldsymbol{e}_2)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 &\longmapsto (a_{1,1}\boldsymbol{e}_1 + a_{1,2}\boldsymbol{e}_2) \otimes (b_{2,1}\boldsymbol{e}_1 + b_{2,2}\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 &\longmapsto (a_{2,1}\boldsymbol{e}_1 + a_{2,2}\boldsymbol{e}_2) \otimes (b_{1,1}\boldsymbol{e}_1 + b_{1,2}\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 &\longmapsto (a_{2,1}\boldsymbol{e}_1 + a_{2,2}\boldsymbol{e}_2) \otimes (b_{2,1}\boldsymbol{e}_1 + b_{2,2}\boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

で定まるので，基底 $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2$ に関する表現行列は次で与えられる．

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}$$

これを $A \otimes B$, $((a_{i,j}) \otimes B)$, $(A \otimes (b_{i,j}))$, $(a_{i,j}) \otimes (b_{i,j})$ 等と書く事もある．

例 C.2.23 (テンソル積の固有値)**.** 線形写像 $A_i : V_i \to V_i$ $(1 \leq i \leq k)$ の固有値を λ_i, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする．このとき積 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ は線形写像 $A_1 \otimes \cdots \otimes A_k$ の固有値で，対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k$ である．これは次の計算から分る．

$$\begin{aligned} (A_1 \otimes \cdots \otimes A_k)(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) &= (A_1\boldsymbol{x}_1) \otimes \cdots \otimes (A_k\boldsymbol{x}_k) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{x}_1) \otimes \cdots \otimes (\lambda_k\boldsymbol{x}_k) = (\lambda_1 \cdots \lambda_k)(\boldsymbol{x}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_k) \end{aligned}$$

注意 C.2.24. 固有値 λ のサイズ p のジョルダン細胞と，固有値 μ のサイズ q のジョルダン細胞の $\mathbb{C}$ 上のテンソル積のジョルダン分解については，Horn, Roger A., and Charles R. Johnson, Matrix analysis, Cambridge university press, 1990 の 4.3.17 に次のように述べられている．

- $\lambda\mu \neq 0$ のとき，サイズ $p + q - 2k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, \min\{p, q\})$ のジョルダン細胞が丁度 1 個ずつ存在する．
- $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ のとき，サイズ q のジョルダン細胞が丁度 p 個存在する．
- $\lambda = \mu = 0$ のとき，サイズ $\min\{p, q\}$ のジョルダン細胞が $|p - q| + 1$ 個，サイズ $k = 1, \ldots, \min\{p, q\} - 1$ のジョルダン細胞が丁度 2 個ずつ存在する．

注意 C.2.25 ($V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ の内積)**.** 各 V_i に内積があるとき $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ にも次式で内積が定義できる．

(C.2.26)
$$(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k) \cdot (\boldsymbol{w}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_k) = (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1) \cdots (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{w}_k)$$

V_i の内積が定める線形写像 $B_i : V_i \to V_i^*$, $\boldsymbol{v}_i \mapsto [\boldsymbol{w}_i \mapsto (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{w}_i)]$，のテンソル積

$$B_1 \otimes \cdots \otimes B_k : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \longrightarrow V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$$

が内積 (C.2.26) を定めていると見る事ができる．

テンソル積の内積の正値性を示すには正規直交基底の存在を仮定して示すのが簡単である．V, W を内積のあるベクトル空間とし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$ を V の正規直交基底，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots$ を W の正規直交基底とする．$V \otimes W$ の元 $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{z} = \sum_{i,j} c_{i,j} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j$ と書けるので

$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z} = \left(\sum_{i,j} c_{i,j} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j \right) \cdot \left(\sum_{p,q} c_{p,q} \boldsymbol{v}_p \otimes \boldsymbol{w}_q \right) = \sum_{i,j,p,q} c_{i,j} c_{p,q} (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_p)(\boldsymbol{w}_j \cdot \boldsymbol{w}_q) = \sum_{i,j} c_{i,j}^2$$

となり正値性がわかる．

注意 C.2.27. $V_1 = \cdots = V_k = V$ のとき $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ を $\bigotimes^k V$ または $\overset{k}{\bigotimes} V$ と書く．

定義 C.2.28 (テンソル代数)**.** 上では k を固定して $\bigotimes^k V$ を構成したが，すべての k について $\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k$ を考えそれらの有限個の 1 次結合で作られるベクトル空間を V の**テンソル代数**といい $\bigotimes V$ で表す．

$$\bigotimes V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigotimes{}^k V, \quad \text{ただし} \bigotimes{}^1 V = V, \ \bigotimes{}^0 V = \mathbb{K}$$

である．テンソル代数には次で積を定める事ができる．

$$\begin{aligned} \bigotimes{}^k V \times \bigotimes{}^l V &\longrightarrow \bigotimes{}^{k+l} V \\ (\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_l) &\longmapsto \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k \otimes \boldsymbol{w}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}_l \end{aligned}$$

注意 C.2.29. $\bigotimes^p V \otimes \bigotimes^q V^*$ の元を (p, q) 型のテンソルという事がある．

C.3　対称積

定義 C.3.1 (対称積)**.** $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_\lambda\}$ をとり，$\boldsymbol{v}_{\lambda_1} \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_{\lambda_k}$ の生成するベクトル空間を V の**対称積** (the symmetric product)　$S^k V$ という．対称積は次を満たすとする．

(i) $S^k V$ の元は $\boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_i \in V_i$, なる元の有限個の 1 次結合で書ける．

(ii) $\boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k$ は各 $\boldsymbol{v}_i$ に関する線形性を満たす．即ち，次の関係式を満たす．

$$\begin{aligned} (c\boldsymbol{v}_1) \bullet \boldsymbol{v}_2 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k = \cdots &= \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_{k-1} \bullet (c\boldsymbol{v}_k) = c(\boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k), \ c \in \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1') \bullet \boldsymbol{v}_2 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{v}_1 \bullet \boldsymbol{v}_2 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_1' \bullet \boldsymbol{v}_2 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k \\ &\cdots \\ \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_{k-1} \bullet (\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_k') &= \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_{k-1} \bullet \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_{k-1} \bullet \boldsymbol{v}_k' \end{aligned}$$

(iii) $\boldsymbol{v}_{i_1} \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_{i_k} = \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_i \in V$, $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{1, \ldots, k\}$.

条件 (i), (ii) はテンソル積の (i), (ii) と同じである．(iii) の性質を対称性という．

対称積は $\boldsymbol{vw}$ の様に表す事もあるが，ここでは積である事を強調するため，$\boldsymbol{v}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{w}$ の様に記号 $\boldsymbol{\cdot}$ を用いて表す．

注意 C.3.2 (対称積の定義について)**.** 普遍性による対称積の定義を述べる為，対称多重線形写像の定義を述べよう．V の k 個の直積 $V^k = V \times \cdots \times V$ から W への多重線形写像 $f : V^k \to W$ が対称であるとは，どの 2 つの変数を入れ替えてもその値が変わらないときを言う．

対称積の**普遍写像性質** (universal mapping property) とよばれる次の性質を満たすベクトル空間 S と対称多重線形写像 $\sigma : V^k \to S$ が存在するとき S を V の k 次対称積といい S^kV で表す．

任意のベクトル空間 U と任意の対称多重線形写像 $f_U : V^k \to U$ に対し $f_U = g_U \circ \sigma$ を満たす線形写像 $g_U : S \to U$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f_U"'] & S \arrow[d, dashed, "\exists 1\ g_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$\sigma(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v_k})$ を $\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\cdot}\cdots\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v}_k$ と書く事とする．

このように対称積を定義すれば，その要請を満たすものの存在が問題になるのも注意 C.2.2 のときと同様である．存在は次を示す事によって保証される．次式で定義される S^kV は対称積の普遍写像性質を持つ．

$$S^kV = F(V^k)/(\mathcal{T} + \mathcal{S})$$

但し $\mathcal{T}$ は注意 C.2.2 で $V_i = V$ としたときの $\mathcal{T}$ とし，$\mathcal{S}$ は $\boldsymbol{v}_i \in V$ として

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \overset{i}{\boldsymbol{v}_j}, \ldots, \overset{j}{\boldsymbol{v}_i}, \ldots, \boldsymbol{v}_n) - (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n),\ 1 \leq i < j \leq n,$$

なる元全体が生成する $F(V^k)$ の部分空間である．

定義から次の自然な線形写像がある．

$$\bigotimes^k V \longrightarrow S^kV, \qquad \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k \longmapsto \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\cdot}\cdots\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v}_k$$

S^kV を k 次の対称テンソルと呼ぶ事もある．

例 C.3.3 (対称積の基底)**.** V が有限次元でその基底を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とすれば，S^kV は $\boldsymbol{e}_{j_1}\boldsymbol{\cdot}\cdots\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{e}_{j_k}$ $(1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_k \leq n)$ で生成される $\binom{n+k-1}{k}$ 次元のベクトル空間である．

例えば，$V = \mathbb{R}^2$ のとき $\boldsymbol{e}_1 = \binom{1}{0}$, $\boldsymbol{e}_2 = \binom{0}{1}$ とおくと $S^2\mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{e}_2$ の生成する 3 次元のベクトル空間である．

定義 C.3.4 (線形写像の対称積)**.** ベクトル空間の間の線形写像 $A : V \to V'$ があれば，次で線形写像の対称積が定まる．

$$S^kA : S^kV \longrightarrow S^kV', \qquad \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\cdot}\cdots\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v}_k \longmapsto A\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{\cdot}\cdots\boldsymbol{\cdot}A\boldsymbol{v}_k$$

V, V' が有限次元であれば V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ と V' の基底 $\boldsymbol{e}'_1, \dots, \boldsymbol{e}'_{n'}$ をとる事により A の表現行列（記号 $(a_{i,j})$ で表す）が $A(\boldsymbol{e}_i) = a_{i,1}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{i,n}\boldsymbol{e}'_{n'}$ で定まる．基底の対称積が S^kV, S^kV' の基底を定めるが，これらの基底に関する線形写像 S^kA の表現行列は次の様に計算される．

$$\begin{aligned} S^kA(\boldsymbol{e}_{i_1}\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{e}_{i_k}) =& A\boldsymbol{e}_{i_1}\bullet\cdots\bullet A\boldsymbol{e}_{i_k} \\ =& (a_{i_1,1}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{i_1,n}\boldsymbol{e}'_{n'})\bullet\cdots\bullet(a_{i_k,1}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{i_k,n}\boldsymbol{e}'_{n'}) \\ =& \sum_{j_1,\dots,j_k} a_{i_1,j_1}\cdots a_{i_k,j_k}\boldsymbol{e}'_{j_1}\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{e}'_{j_k} \\ =& \sum_{1\le j_1\le\cdots\le j_k\le n'} \sum_{\sigma} a_{i_1,\sigma(j_1)}\cdots a_{i_k,\sigma(j_k)}\boldsymbol{e}'_{j_1}\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{e}'_{j_k} \end{aligned}$$

ただし σ は $\{j_1, \dots, j_k\}$ から $\{j_1, \dots, j_k\}$ への全単射である．よって次がわかった．

$$S^k((a_{i,j})) = \Bigl(\sum_{\sigma} a_{i_1,\sigma(j_1)}\cdots a_{i_k,\sigma(j_k)}\Bigr)_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n,\ 1\le j_1\le\cdots\le j_k\le n'}$$

例 C.3.5. 例えば，線形写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を行列 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ で定めると，$S^2A : S^2\mathbb{R}^2 \to S^2\mathbb{R}^2$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_1 &\longmapsto (a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2)\bullet(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2) = a^2\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_1 + 2ab\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_2 + b^2\boldsymbol{e}_2\bullet\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_2 &\longmapsto (a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2)\bullet(c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) = ac\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_1 + (ad+bc)\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_2 + bd\boldsymbol{e}_2\bullet\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\bullet\boldsymbol{e}_2 &\longmapsto (c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2)\bullet(c\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) = c^2\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_1 + 2cd\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_2 + d^2\boldsymbol{e}_2\bullet\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

なので，基底 $\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1\bullet\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2\bullet\boldsymbol{e}_2$ に関する S^2A の表現行列は次で与えられる．

$$S^2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}$$

定理 C.3.6 (対称積の固有値)**.** 線形写像 $A : V \to V$ の固有値を λ_i, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする．このとき積 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ は対称積 $S^kA : S^kV \to S^kV$ の固有値で，対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{x}_k$ である．但し λ_i, $\boldsymbol{x}_i$ は重複して選ぶ事を許す．

証明. $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\boldsymbol{x}_i$ なので

$$\begin{aligned} S^kA(\boldsymbol{x}_1\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{x}_k) =& (A\boldsymbol{x}_1)\bullet\dots\bullet(A\boldsymbol{x}_k) \\ =& (\lambda_1\boldsymbol{x}_1)\bullet\cdots\bullet(\lambda_k\boldsymbol{x}_k) = (\lambda_1\cdots\lambda_k)(\boldsymbol{x}_1\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{x}_k) \end{aligned}$$

となり $\lambda_1\cdots\lambda_k$ が S^kA の固有値． □

注意 C.3.7 (S^kV の内積)**.** V に内積があれば S^kV にも次式で内積が定義できる．

$$(\boldsymbol{v}_1\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{v}_k)\cdot(\boldsymbol{w}_1\bullet\cdots\bullet\boldsymbol{w}_k) = (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{w}_1)\cdots(\boldsymbol{v}_k\cdot\boldsymbol{w}_k) \tag{C.3.8}$$

これは線形写像 $B : V \to V^*$, $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}]$, の対称積

$$S^k B : S^k V \longrightarrow (S^k V)^*, \quad \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k \longmapsto [\boldsymbol{w}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{w}_k \mapsto (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1) \cdots (\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{w}_k)]$$

が定める内積と見る事ができる．

定義 C.3.9 (対称代数)**.** 上では k を固定して $S^k V$ を構成したが，すべての k について $\boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k$ を考えそれらの有限個の 1 次結合で作られるベクトル空間を V の**対称代数**といい SV で表す．

$$SV = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k V, \quad \text{ただし } S^1 V = V,\ S^0 V = \mathbb{K}$$

である．対称代数には次で積を定める事ができる．

$$S^k V \times S^l V \longrightarrow S^{k+l} V, \quad (\boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{w}_l) \longmapsto \boldsymbol{v}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{v}_k \bullet \boldsymbol{w}_1 \bullet \cdots \bullet \boldsymbol{w}_l$$

例 C.3.10 (多項式環)**.** V^* は線形関数 $V \to \mathbb{K}$ 全体の成すベクトル空間であるので SV^* の元は多項式関数 $V \to \mathbb{K}$ である．実際，$V = \mathbb{K}^n$ を座標系 $(x_1, \ldots, x_n)$ をもつとし，$\boldsymbol{e}_i$ を標準基底とすると $x_i = \boldsymbol{e}_i^*$ である．$x_1^2 x_2$ は $\boldsymbol{e}_1^* \bullet \boldsymbol{e}_1^* \bullet \boldsymbol{e}_2^*$ であり $x_1^2 + x_2^2$ は $\boldsymbol{e}_1^* \bullet \boldsymbol{e}_1^* + \boldsymbol{e}_2^* \bullet \boldsymbol{e}_2^*$ である．体 $\mathbb{K}$ を係数とし $x_1, \ldots, x_n$ を変数とする多項式の全体を $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ で表す．$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V に対し V 上の多項式関数全体を $\mathbb{K}[V]$ と書く．$\mathbb{K}[V] = SV^*$ である．

C.4　交代積

定義 C.4.1 (交代積)**.** $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V があれば，その k 次の**交代積** (the alternating product) $\bigwedge^k V$ と呼ばれるベクトル空間を次の様に定義する事ができる．

(i) $\bigwedge^k V$ の元は $\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_i \in V$, なる元の有限個の 1 次結合で書ける．$\wedge$ はウェッジ (wedge) と読むのでウェッジ積という事もある．

(ii) ウェッジ積は各 $\boldsymbol{v}_i$ に対し線形である，即ち，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(c\boldsymbol{v}_1) \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = \cdots =& \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_{k-1} \wedge (c\boldsymbol{v}_k) = c(\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k), c \in \mathbb{K} \\ (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1') \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k =& \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_1' \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k \\ &\cdots \\ \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_{k-1} \wedge (\boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_k') =& \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_{k-1} \wedge \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_{k-1} \wedge \boldsymbol{v}_k'\end{aligned}$$

(iii) $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{v} \in V$．言い換えると $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ $(i \neq j)$ ならば $\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = 0$.

条件 (i), (ii) はテンソル積の (i), (ii) と同じである．(iii) の性質を交代性という．

$$0 = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v}$$

なので $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}$ である．この性質を**歪対称性** (skew-symmetry) という．[*2]

k 次の交代積は k 次の**交代テンソル**，または**外積**と言う事もある．

注意 C.4.2 (交代積の定義について)**.** 交代積は普遍性を持つ．普遍性とは条件 (i), (ii), (iii) を満たすベクトル空間はすべて交代積の商として得られる事を要請する条件である．

普遍性による交代積の定義を述べる為，交代多重線形写像の定義を述べよう．多重線形写像 $f : V^k \to W$ が交代であるとは，2 つの変数が一致すればその値は 0 となるときを言う．

交代積の**普遍写像性質** (universal mapping property) とよばれる次の性質を満たすベクトル空間 A と交代多重線形写像 $\alpha : V^k \to A$ が存在するとき A を V の k 次交代積といい $\bigwedge^k V$ で表す．

任意のベクトル空間 U と任意の交代多重線形写像 $f_U : V^k \to U$ に対し $f_U = g_U \circ \alpha$ を満たす線形写像 $g_U : A \to U$ が唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V^k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f_U"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists 1\ g_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$\alpha(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k)$ を $\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k$ と書く事とする．

交代積の存在は次を示す事によって保証される．次式で定義される $\bigwedge^k V$ は交代積の普遍写像性質を持つ．

$$\bigwedge\nolimits^k V = F(V^k)/(\mathcal{T} + \mathcal{A})$$

但し $\mathcal{T}$ は注意 C.2.2 で $V_i = V$ としたときの $\mathcal{T}$ とし，$\mathcal{A}$ は $\boldsymbol{v}_i \in V$ として

$$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \overset{i}{\boldsymbol{v}_i}, \ldots, \overset{j}{\boldsymbol{v}_i}, \ldots, \boldsymbol{v}_n),\ 1 \leq i < j \leq n,$$

なる元全体が生成する $F(V^k)$ の部分空間である．

定義から次の自然な線形写像がある．

$$\bigotimes\nolimits^k V \longrightarrow \bigwedge\nolimits^k V, \qquad \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_k \longmapsto \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k$$

補題 C.4.3. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = 0$.

証明. $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ とする．$c_1 \neq 0$ と仮定すると $\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{c_1}(c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k)$. よって

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = -\frac{1}{c_1}(c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = 0$$ □

例 C.4.4 (交代積の基底)**.** 有限次元ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ をとると

$$\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n)$$

[*2] 歪対称性を仮定すれば $2\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ がわかる．従って体 $\mathbb{K}$ の標数が 2 でなければ歪対称性から交代性が帰結できる．

が $\bigwedge^k V$ の基底になる．$\bigwedge^k V$ は $\binom{n}{k}$ 次元のベクトル空間である．$k > n$ のときは $\bigwedge^k V = 0$ である．

$I = (i_1, \ldots, i_k)$ に対し $\boldsymbol{e}_I = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}$ と書く．$\sigma(I) = (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$ と置けば $\boldsymbol{e}_{\sigma(I)} = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{e}_I$ である．ここで $\varepsilon(\sigma)$ は σ を $\{i_1, \ldots, i_k\}$ の置換と見たときの符号数である．

例えば，$V = \mathbb{R}^3$ のとき $\wedge^k V$ は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
\wedge^0 V =& \mathbb{R} = \langle 1 \rangle \\
\wedge^1 V =& \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle \\
\wedge^2 V =& \langle \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \rangle \\
\wedge^3 V =& \langle \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \rangle
\end{aligned}$$

例 C.4.5. 有限次元ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ をとり，$\boldsymbol{v}_i = a_{i,1}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{i,n}\boldsymbol{e}_n$ $(i = 1, \ldots, k)$ とおくと，次式が成立する．

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_1} & \cdots & a_{k,i_k} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}$$

これは次の計算でわかる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k &= \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{1,i_1} \cdots a_{k,i_k} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{\sigma} a_{1,\sigma(i_1)} \cdots a_{k,\sigma(i_k)} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & \cdots & a_{1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_1} & \cdots & a_{k,i_k} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}
\end{aligned}$$

ただし σ は $\{i_1, \ldots, i_k\}$ から $\{i_1, \ldots, i_k\}$ の全単射で，$\varepsilon(\sigma)$ はこれを対称群 S_k の元と見たときの符号数を表す．

定義 C.4.6 (線形写像の交代積)**.** ベクトル空間の間の線形写像 $A : V \to V'$ があれば，次で線形写像の交代積が定まる．

$$\bigwedge^k A : \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^k V', \qquad \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k \longmapsto A\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge A\boldsymbol{v}_k$$

定理 C.4.7 (交代積の表現行列)**.** V, V' が有限次元であれば V の基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ と V' の基底 $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n'}$ をとる事により線形写像 $A : V \to V'$ の表現行列（記号 $(a_{i,j})$ で表す）が $A(\boldsymbol{e}_i) = a_{i,1}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{i,n'}\boldsymbol{e}'_{n'}$ で定まる．このとき $\wedge^k A$ の表現行列は A の k 次の小行列式を並べて得られる複合行列 $C_k((a_{i,j}))$ である．

証明. $\boldsymbol{e}_I = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_k}$, $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $\boldsymbol{e}'_J = \boldsymbol{e}'_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}'_{j_k}$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$, と書く．$\wedge^k A(\boldsymbol{e}_I) = \sum_J |A_{I,J}| \boldsymbol{e}'_J$ となる事を示す．

$$\begin{aligned}
\wedge^k A(\boldsymbol{e}_I) =& A\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge A\boldsymbol{e}_{i_k} \\
=& (a_{i_1,1}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{i_1,n'}\boldsymbol{e}'_{n'}) \wedge \cdots \wedge (a_{i_k,1}\boldsymbol{e}'_1 + \cdots + a_{i_k,n'}\boldsymbol{e}'_{n'}) \\
=& \sum_{j_1,\cdots,j_k} a_{i_1,j_1} \cdots a_{i_k,j_k} \boldsymbol{e}'_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}'_{j_k} \\
=& \sum_{j_1<\cdots<j_k} \sum_{\sigma} a_{i_1,\sigma(j_1)} \cdots a_{i_k,\sigma(j_k)} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{e}'_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}'_{j_k} = \sum_J |A_{I,J}| \boldsymbol{e}'_J
\end{aligned}$$

ただし σ は $\{j_1, \ldots, j_k\}$ から $\{j_1, \ldots, j_k\}$ への全単射である． □

注意 C.4.8. 前定理で $\dim V = \dim V' = n$ のとき，$\wedge^n A : \bigwedge^n V \to \bigwedge^n V'$ の表現行列は A の表現行列の行列式で表される．

定理 C.4.9 (交代積の固有値)**.** 線形写像 $A : V \to V$ の固有値を λ_i, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とする．但し $i = 1, \ldots, k$．もし $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が 1 次独立ならば，積 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ は交代積 $\wedge^k A : \bigwedge^k V \to \bigwedge^k V$ の固有値で，対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k$ である．

証明. $A\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ なので

$$\begin{aligned}
\wedge^k A(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k) =& (A\boldsymbol{x}_1) \wedge \cdots \wedge (A\boldsymbol{x}_k) \\
=& (\lambda_1 \boldsymbol{x}_1) \wedge \cdots \wedge (\lambda_k \boldsymbol{x}_k) = (\lambda_1 \cdots \lambda_k)(\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k)
\end{aligned}$$

となり $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ が $\wedge^k A$ の固有値． □

注意 C.4.10 ($\bigwedge^k V$ の内積)**.** V に内積 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ を考えると，$\bigwedge^k V$ に

$$(\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k) \cdot (\boldsymbol{w}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_k) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{w}_k \end{vmatrix} \tag{C.4.11}$$

で内積が定まる．V の内積が決める線形写像 $B : V \to V^*$, $\boldsymbol{v} \mapsto [\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}]$, の交代積

$$\begin{aligned}
\wedge^k B : \textstyle\bigwedge^k V \quad &\longrightarrow \quad \left(\textstyle\bigwedge^k V\right)^* \\
\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k &\longmapsto \left(\boldsymbol{w}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_k \mapsto \begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{w}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{w}_k \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$

が定める内積である．

例 C.4.12. $\mathbb{K}$ ベクトル空間 V とその双対空間 V^* に対し，次で双一次形式を定める事が出来る．

$$\textstyle\bigwedge^k V \times \bigwedge^k V^* \qquad \longrightarrow \quad \mathbb{K}$$

$$(\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k) \longmapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \varphi_1(\boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & \varphi_k(\boldsymbol{v}_k) \end{vmatrix}$$

定義 C.4.13 (交代代数)**.** 上では k を固定して $\bigwedge^k V$ を構成したが，すべての k について $\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k$ を考えそれらの有限個の 1 次結合で作られるベクトル空間を V の**交代代数**（または**グラスマン代数**，**外積代数**）といい $\bigwedge V$ で表す.

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V, \quad \text{ただし } \bigwedge^1 V = V,\ \bigwedge^0 V = \mathbb{K}$$

である．$\dim V = n$ ならば次のようになる.

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigwedge^k V$$

交代代数には次で積を定める事ができる.

$$\bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \to \bigwedge^{k+l} V, \quad (\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_l) \mapsto \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_k \wedge \boldsymbol{w}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}_l$$

付録 D

数学者

現代で言う線形代数学が成立したのは 18 – 19 世紀と考えられるが，誰が何を示したかは現在では余り意識されることはない．今見れば当たり前になっている事も多く，当たり前に利用する事柄にいちいち名前をつけるのは妥当でないとの判断があるためと思われる．しかし現在当たり前なことも，先人達の努力の集積であるから，できれば先人達に敬意を表したいと思い，本文の随所に先人の名前を引用した．先人の名前を冠した記号も幾つかある．しかし，なぜそのような名前で呼ばれるようになったかよくわからないものもある．例えばクロネッカーのデルタなど，どうしてその様に呼ばれるようになったか，筆者には由来がわからない．影響力のある誰かが使い始めて，それが広く流布したということであろうか？名前を冠された先人は，その理論に関して何らかの功績があったと思われるが，どのような功績であったかまでは調べることはできなかった．

以下，本文中に名前が現れた数学者を生年順に並べる．本文中に現れた言葉の由来を想像しながら，彼らが活躍した時代に思いを馳せたい．

ユークリッド Euclid (紀元前 3 世紀) 古代ギリシャの数学者，天文学者、エウクレイデスと表記されることもある．

関孝和 (1642? – 1708) 日本（江戸時代）の数学者

ライプニッツ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) ドイツの哲学者，数学者

久留島 義太 (1690?–1758) 日本（江戸時代）の数学者

クラメル Gabriel Cramer (1704 – 1752) スイスの数学者

オイラー Leonhard Euler (1707 –1783) スイスに生まれロシアとプロイセンで活躍した数学者

ヴァンデルモンド Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796) フランスの数学者

ラグランジュ Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813）フランスの数学者，天文学者

モンジュ Gaspard Monge (1746 – 1818) フランスの数学者・科学者・工学者・貴族 エコール・ポリテクニークの創設者

ラプラス Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) フランスの数学者，物理学者，天文学者
ガウス Carolus Fridericus Gauss (1777 – 1855) ドイツの数学者，天文学者，物理学者
ビネ Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856) フランスの数学者
サラス Pierre Frederic Sarrus (1798 – 1861) フランスの数学者
コーシー Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) フランスの数学者
ダンドラン Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847) ベルギーの数学者，物理学者
アーベル Niels Henrik Abel (1802 – 1829) ノルウェーの数学者
ハミルトン William Rowan Hamilton (1805 – 1865) アイルランドの数学者，物理学者
グラスマン Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877）ドイツの数学者，物理学者，言語学者
ガロア Évariste Galois (1811 – 1832) フランスの数学者
カタラン Eugéne Charles Catalan (1814 – 1894) ベルギーの数学者
シルベスター James Joseph Sylvester (1814 – 1897) イギリスの数学者
クロネッカー Leopold Kronecker (1823 – 1891) ドイツの数学者
ケーリー Arthur Cayley (1821 – 1895) イギリスの数学者
ベルトラミ Eugenio Beltrami (1835 – 1900) イタリアの数学者
エルミート Charles Hermite (1822 – 1901）フランスの数学者
ジョルダン Camille Jordan (1838 – 1922）フランスの数学者
シュワルツ Hermann Schwarz (1843 – 1921) ドイツの数学者
グラム Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916) デンマークの数学者
ペアノ Giuseppe Peano (1858 – 1932) イタリアの数学者
ヘルダー Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937) ドイツの数学者
ヒルベルト David Hilbert (1862 – 1943) ドイツの数学者
ヤング William Henry Young (1863 – 1942) イギリスの数学者
ミンコフスキー Hermann Minkowski (1864 – 1909) ドイツの数学者
ベール René-Louis Baire (1874 – 1932) フランスの数学者
ルベーグ Henri Leon Lebesgue (1875 – 1941) フランスの数学者
ハメル Georg Hamel (1877 – 1954) ドイツの数学者，物理学者
シューア Issai Schur (1875 – 1941) ドイツとイスラエルで活動したユダヤ系の数学者
リース Frigyes Riesz (1880 – 1956) ハンガリーの数学者
クーラント Richard Courant (1888 – 1972) ドイツおよびアメリカ合衆国の数学者
ワイル Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 – 1955）ドイツの数学者
バナッハ Stefan Banach (1892 – 1945) ポーランドの数学者
シャウダー Juliusz Pawełl Schauder (1899 – 1943) ポーランドの数学者
ツォルン Max August Zorn (1906 – 1993）ドイツ生まれのアメリカ合衆国の数学者