

# 「特異点入門」(数学特別講義 XX 2014 年 10 月 14 日)

福井敏純

2 変数の関数を例に, 特異点論の 2 大アイデアである特異点の摂動と特異点の解消を説明するのが目的である.

## 1 特異点とは?

関数  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y)$ , があるとき,  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  を満たす点  $(a, b)$  を  $f$  の特異点と言う. 特異点でない点を正則点と言う. 陰関数定理によれば,  $f_y(a, b) \neq 0$  であれば  $f(x, \varphi(x)) = 0$ ,  $\varphi(a) = b$ , を満たす関数  $\varphi(x)$  が  $x = a$  の近傍で存在するので, 局所的には  $f(x, y) = 0$  は  $y = \varphi(x)$  と同じである.  $f_x(x, y) \neq 0$  ならば  $x$  と  $y$  の役割を入れ替えて, 同様な事が出来るが, 特異点ではこれは出来ない.

点  $(a, b)$  が  $f$  の特異点のときは何が言えるのだろうか? 簡単のために  $(a, b) = (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$  とする. このとき, もしヘッセ行列

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{yx}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{pmatrix}$$

が非退化ならば, 適当に座標を取り換えることにより  $f(x, y)$  は  $x^2 + y^2$ ,  $x^2 - y^2$ ,  $-x^2 - y^2$  のいずれかに出来る. 正確には  $\mathbf{R}^2$  の原点近傍  $U$  から  $\mathbf{R}^2$  の点  $(a, b)$  の近傍  $V$  への全単射写像  $h: U \rightarrow V$  があって, かつ  $h$  も  $h^{-1}$  も可微分で

$$f(h(x, y)) = x^2 + y^2 \text{ (または } x^2 - y^2, -x^2 - y^2)$$

とすることが出来る.  $x^2 + y^2$  のときは極小値で,  $-x^2 - y^2$  ときは極大値です. レベル曲線  $\{(x, y) \in U : f(x, y) = c\}$  は  $h$  によって次のレベル曲線に写ることに注意.

$$\{(x, y) \in V : \pm x^2 \pm y^2 = c\} \quad \text{ここで符号は適当に選ぶ}$$

ではヘッセ行列が退化していたらどうであろうか? 詳しい説明は省くが, ヘッセ行列が階数 1 ならば, 次を満たすような  $h$  を選ぶ事が出来る.

$$f(h(x, y)) = \pm x^{\mu+1} \pm y^2 \quad (A_\mu \text{ 特異点})$$

但し  $\mu$  は次式で定まるミルナー数と呼ばれる不変量で, これが有限であると仮定している.

$$\mu = \mu(f) = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R}[[x, y]] / \langle f_x, f_y \rangle$$

ここで、 $\mathbf{R}[[x, y]]$  は  $x, y$  を変数とする形式冪級数環で  $\langle f_x, f_y \rangle$  は  $f$  の偏導関数  $f_x, f_y$  の生成するイデアルを表す。

ヘッセ行列が階数 0 で 3 次の部分が重複因子を持たなければ、次を満たすような  $h$  を選ぶ事が出来る。

$$f(h(x, y)) = (x^2 \pm y^2)y \quad (D_4 \text{ 特異点})$$

特異点論とは、素朴には関数の極値問題の精密化と捉えてよいが、平たく言えば関数の標準形を求める技法である。この技法は多変数関数に一般化されるし、更に写像  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  にも一般化される。写像の特異点の現れ方 (ヒエラルキーや隣接関係、判定法) がわかれば特異点論のプロになれる。

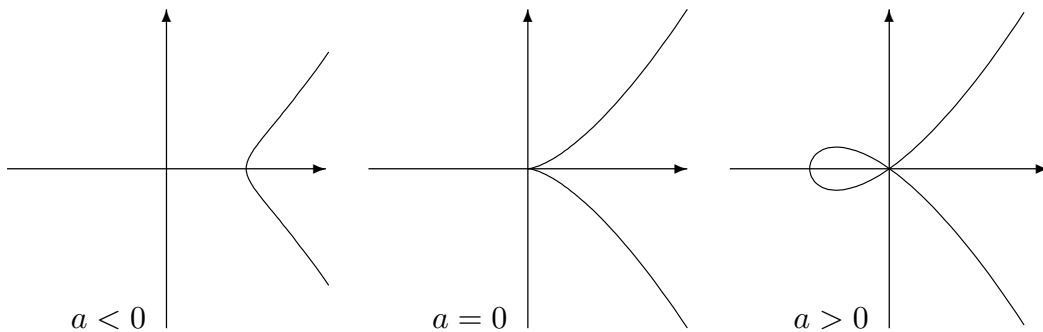
演習 1 陰関数定理と逆関数定理について調べてまとめよ。(証明は省いて良い)

## 2 特異点の摂動

さて  $A_2$  特異点  $f(x, y) = y^2 - x^3$  を考える。

$$f_a = y^2 - x^3 - ax^2 \quad (1)$$

と置くと、これは  $f$  の摂動ですが、 $a$  が正ならばその特異点は 2 点で非退化であり、負ならば特異点はない。



$f_a$  の零点集合は

$$t \mapsto (x, y) = (t^2 - a, t(t^2 - a)) \quad (2)$$

で径数付けられ、 $a$  が正なら 2 重点を 1 つ持つことに注意。

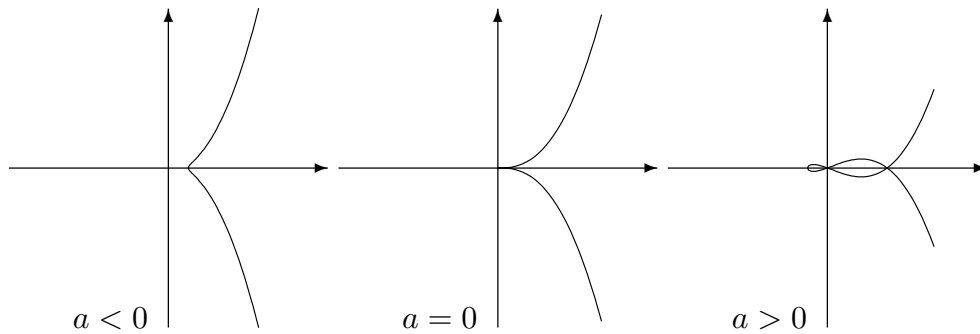
次に  $A_4$  特異点  $g(x, y) = y^2 - x^5$  を考える。零点集合の径数付け  $t \mapsto (t^2, t^5)$  の摂動

$$t \mapsto (x, y) = (t^2 - 2a, t(t^2 - 2a)(t^2 - a/2)) \quad (3)$$

を考えると、 $a$  が正ならこれは 2 重点を 2 つ持つ。(3) から  $t$  を消去すると、

$$g_a(x, y) = y^2 - x^5 + \frac{5}{4}ax^4 - \frac{3a^2}{8}(2 + 3a)x^2 \quad (4)$$

を得るが、この関数は  $a$  が正なら非退化な特異点を 4 つ持ち、 $a$  が負なら特異点を持たない。



演習 2 上の  $f_a, g_a$  の特異点をすべて求めよ。

これらの例は次の様に一般化することができる。 $f(0) = 0$  を満たす任意の関数  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  は非退化な特異点のみを持つ関数で近似することができ (モースの補題)、近似関数に現れる原点近傍内の特異点の個数は  $\mu(f)$  個以下である。

正則関数  $f : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  を正則な範囲で摂動する問題を考えれば、特異点为非退化と言う概念も特異点でのヘッセ行列が非退化ということで一般化でき、その時現れる特異点の個数は丁度  $\mu(f)$  個になる事もわかっている。(複素化したら考え易くなる例<sup>\*1</sup>)

特異点を摂動するという考え方は応用が広く、ホイットニーによる次の有名な定理もこの考え方で証明できる。

- (a)  $m$  次元多様体  $M$  から  $\mathbf{R}^{2m+1}$  への任意の写像は埋込写像で近似できる。
- (b)  $m$  次元多様体  $M$  から  $\mathbf{R}^{2m}$  への任意の写像は嵌め込み写像で近似できる。

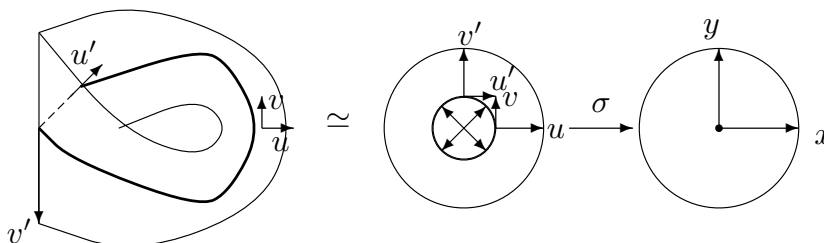
$m$  次元多様体  $M$  から  $\mathbf{R}^n$  ( $n \leq 2m$ ) への写像は微小摂動では回避できない特異点がある事も分かっている、そういった特異点のタイプも次元が低い場合には分類出来ている。

<sup>\*1</sup> 本稿にある話はすべて複素化でき、また複素化した方が易い事が多い。と言っても、例えば (a), (b) は写像の近似が豊富にある状況でないと成立しないので、注意が必要であるが。

### 3 特異点の解消

代数幾何や解析学の問題は特異点があるために問題が複雑になるが、特異点はブローアップと言う操作を繰り返すことにより解消することができる。それは、上手い座標をとれば単項式となる事を意味している。多項式や解析関数には特異点解消が存在することが知られているが、特異点解消の存在定理により、多項式や解析関数の計算は、単項式の計算に還元されるのである。ここでは、例でそのことを解説する。

アニュラス  $S^1 \times [0, 1]$  の境界成分  $S^1 \times \{0\}$  を 1 点に潰すことにより、アニュラスから円盤への写像ができる。



アニュラスの内側の境界  $S^1 \times \{0\}$  の対蹠点を同一視するとメビウスの帯  $M$  が出来るが、メビウスの帯  $M$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像が定まったと考えることが出来る。

計算をするために、 $M$  に座標を定めよう。 $(u, v)$  を座標に持つ  $\mathbb{R}^2$  と  $(u', v')$  を座標に持つ  $\mathbb{R}^2$  とを  $(u, uv) = (u'v', v')$  で決まる関係式で貼り合わせてメビウスの帯  $M$  を作り

$$(x, y) = (u, uv) = (u'v', v')$$

で写像  $\sigma : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  を定める。この写像を原点でのブローアップという。

さて  $(x, y) = (u, uv)$  を  $f = y^2 - x^3$  に代入すると、

$$y^2 - x^3 = u^2(v^2 - u)$$

$(u, v) = (0, 0)$  で定まる点で局所的に単項式ではないので、ここでさらにブローアップする。 $(u, v) = (st, t)$  を代入すると、

$$y^2 - x^3 = u^2(v^2 - u) = s^2t^3(t - s)$$

$(s, t) = (0, 0)$  で定まる点で局所的に単項式ではないので、更にここでブローアップする。

$(s, t) = (p, pq)$  と置くと

$$y^2 - x^3 = u^2(v^2 - u) = s^2t^3(t - s) = p^6q^3(1 - q)$$

となり, 各点の近傍で単項式となる. これで,  $y^2 - x^3$  の特異点解消が構成できた.

ここで関数  $f(x, y)$  が点  $(a, b)$  の近傍で単項式になるとは, 正確には次の意味である. 点  $(a, b)$  の近傍で定義された関数  $\varphi(x, y), \phi(x, y)$  が存在して次を満たす.

$$\begin{vmatrix} \varphi_x(a, b) & \varphi_y(a, b) \\ \phi_x(a, b) & \phi_y(a, b) \end{vmatrix} \neq 0, \quad f(x, y) = \varphi(x, y)^p \phi(x, y)^q, \quad p, q \text{ は負でない整数.}$$

演習 3 アニュラスの内側の境界  $S^1 \times \{0\}$  の対蹠点を同一視するとメビウスの帯  $M$  が出来る事を説明せよ.

## 4 卒業研究について

特異点論は多くのトピックと接点があるので, 卒業研究で何を勉強するかは希望者との相談で決めたい.

歴史的には特異点論は微分位相幾何学から派生したので, トポロジーとの関連が深いトピックが多い. しかし特異点論の技法は凡そ関数が現れる場面に適用可能なのでその関連する分野は広い. ざっと挙げるだけでも代数幾何, 可換環論, 実代数幾何, 多変数複素関数論, 微分幾何, 微分方程式等と関連がある.

まず, 標準的な教科書を挙げる. 特異点論の基礎知識を得たいなら次を薦める.

C. G. Gibson, Singular points of smooth mappings, Research Notes in Math 25, Pitman 1979.

A. Dimca, Topics on real and complex singularities, Vieweg, 1987

野口広・福田拓生著, 初等カタストロフィー, 共立出版 1976

特異点論の応用であるラグランジュ特異点やルジャンドル特異点論を知りたいなら,

泉屋周一, 石川剛郎 著 応用特異点論, 共立出版 1998

特異点論の微分位相幾何学的側面との関連に興味があるなら

ミルナー著, 佐伯・佐久間訳, 複素超曲面の特異点, シュプリンガー・フェアラク東京

A. Dimca, Singularities and Topology of Hypersurfaces (Universitext), Springer

代数幾何や複素解析幾何学との関連で特異点論に興味を持つなら

T. de Jong, G. Pfister, Local analytic geometry, Advanced lectures in Mathematics, Vieweg, 2000.

G.-M. Greuel and G. Pfister, A SINGULAR Introduction to commutative algebra,

Springer-Verlag

実代数幾何については次の本がある .

J. Bochnak, M. Coste and M.-F. Roy, Real Algebraic Geometry, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 36. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

R. Benedetti and J.-J. Risler, Real algebraic and semi-algebraic sets

特異点論の微分幾何への応用に関心があるなら次の本から入ると良い .

J. W. Bruce and P. J. Giblin, Curves and Singularities, Cambridge University Press,  
泉屋周一, 佐野貴志著 特異点の数理 1. 幾何学と特異点 第 I 部 共立出版

私の研究について知りたいなら, 大学内から MathSciNet で Toshizumi Fukui で検索をして下さい . ArXiv を検索するのも参考になると思います .