ニュートン図形と特異点解消

数学特別講義 XX 2022 年 10 月 6 日（金）4 限　担当 福井敏純

ニュートン非退化な関数に対しニュートン図形を使った，特異点解消の構成を説明する．

2 変数正則関数 $f(x,y)=\sum_{\boldsymbol{\nu}} c_{\boldsymbol{\nu}} x^{\nu_1}y^{\nu_2}$ に対し，そのニュートン図形 $\Gamma_+(f)$ を次で定める．

$$\Gamma_+(f)=\{\boldsymbol{\nu}+\mathbb{R}^2_+ \mid c_{\boldsymbol{\nu}}\neq 0\} \text{ の凸包}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し $m(\boldsymbol{a})$ と $\gamma(\boldsymbol{a})$ を次で定める．

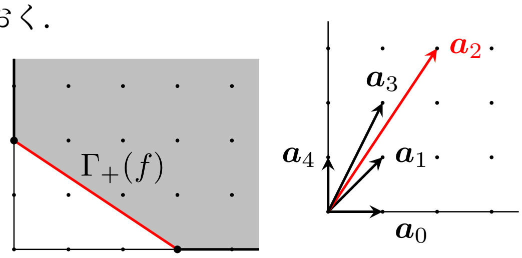
$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{a}) &= \min\{\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{a}\rangle \mid \boldsymbol{\nu}\in\Gamma_+(f)\} \\ \gamma(\boldsymbol{a}) &= \{\boldsymbol{\nu}\in\Gamma_+(f) \mid \langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{a}\rangle=m(\boldsymbol{a})\} \end{aligned}$$

さてベクトル

$$\boldsymbol{a}_0=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix},\ \dots,\ \boldsymbol{a}_{k-1}=\begin{pmatrix}a_{k-1}\\b_{k-1}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_k=\begin{pmatrix}a_k\\b_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

を $\det(\boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_i)=1$ なるように取る．このとき $\gamma(\boldsymbol{a}_i)$ は $\Gamma_+(f)$ の面であるが，すべての $\Gamma_+(f)$ の面がこの形で得られるように $\boldsymbol{a}_i$ を取っておく．

例 $f(x,y)=y^2-x^3$ のとき，ニュートン図形 $\Gamma_+(f)$ は右図のようになり，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は図の様に取れば良い．



$$G=\{(z_0,\dots,z_k)\in(\mathbb{C}^*)^{k+1} \mid z_0^{a_0}z_1^{a_1}\cdots z_k^{a_k}=z_0^{b_0}z_1^{b_1}\cdots z_k^{b_k}=1\}$$

は自然な乗法に関して群になる．G の元 $(z_0,z_1,\dots,z_k)$ は

$$U=\bigcup_{i=1}^{k}U_i,\quad U_i=\{(u_0,u_1,\dots,u_k)\in\mathbb{C}^{k+1} \mid u_j\neq 0, j\neq i-1,i\},$$

に次で作用する．

$$(z_0,z_1,\dots,.z_k):U\longrightarrow U,\ (u_0,u_1,\dots,u_k)\longmapsto(z_0u_0,z_1u_1,\dots,z_ku_k)$$

U の点で G の元で移り合う点を同一視して得られる集合を $M=U/G$ と書く．すると

写像　$\tilde{\pi}:U\longrightarrow\mathbb{C}^2$　は　写像　$\pi:M=U/G\longrightarrow\mathbb{C}^2$ を定める．

$V_i=\{(v_{i-1},v_i)\in\mathbb{C}^2\}$ と $\{(\overset{0}{1},\dots,\overset{i-2}{1},\overset{i-1}{v_{i-1}},\overset{i}{v_i},\overset{i+1}{1},\dots,\overset{k}{1})\in U_i\}$ を同一視しておく．写像

$$\tilde{\pi}|_{V_i}:V_i\longrightarrow\mathbb{C}^2,\quad (v_{i-1},v_i)\longmapsto(x,y)=(v_{i-1}^{a_{i-1}}v_i^{a_i},v_{i-1}^{b_{i-1}}v_i^{b_i}) \tag{1}$$

による $(\mathbb{C}^*)^2$ の点の逆像は 1 点からなる事に注意しよう．実は V_i の M への自然な像が M 全体を覆い，M には多様体の構造が入る．V_i 達は自然に貼り合うが，貼り合わせの関係式を見る

には，次の様にすればよい．V_i の点 (v_{i-1}, v_i) と $V_{i'}$ の点 $(v'_{i'-1}, v'_{i'})$ が G の元で移りあえば，$v_j = 1\ (j \neq i-1, i)$, $v'_j = 1\ (j \neq i'-1, i')$ として関係式

$$z_j v_j = v'_j,\ j = 0, 1, \ldots, k,\ z = (z_0, z_1, \ldots, z_k) \in G \tag{2}$$

があることになる．(2) を z を未知変数とする方程式を見て z について解くことはそれ程難しくない．その解 z を (2) に代入して (v_{i-1}, v_i) と $(v'_{i'-1}, v'_{i'})$ の間の変換式を得る．

定理 写像 $\pi : M \longrightarrow \mathbb{C}^2$ は固有写像である．即ち，次を満たす．

M の任意の点列 $\{\boldsymbol{p}_m\}$ に対し「$\{\pi(\boldsymbol{p}_m)\}$ が収束すれば $\{\boldsymbol{p}_m\}$ は収束部分列を持つ.」

証明. $\boldsymbol{p}_m \in \pi^{-1}(\mathbb{C}^*)^2$ として証明すれば十分．$\pi(\boldsymbol{p}_m) = (x(\boldsymbol{p}_m), y(\boldsymbol{p}_m))$ は有界なので $\log|x(\boldsymbol{p}_m)| \leq L$, $\log|y(\boldsymbol{p}_m)| \leq L$, なる正定数 L が存在する．$\{\boldsymbol{p}_m\}$ をその部分列に取り直して

$$\begin{pmatrix} L - \log|x(\boldsymbol{p}_m)| \\ L - \log|y(\boldsymbol{p}_m)| \end{pmatrix} \in \langle \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i \rangle_{\mathbb{R}_\geq} \tag{3}$$

を満たす i があるとして良い．$(\boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_i)\binom{L_1}{L_2} = \binom{L}{L}$ なる L_1, L_2 を取ると

$$(\boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{a}_i)\begin{pmatrix} L_1 - \log|v_{i-1}(\boldsymbol{p}_m)| \\ L_2 - \log|v_i(\boldsymbol{p}_m)| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L - \log|x(\boldsymbol{p}_m)| \\ L - \log|y(\boldsymbol{p}_m)| \end{pmatrix}$$

となり，(3) より，$L_1 - \log|v_{i-1}(\boldsymbol{p}_m)| \geq 0,\ L_2 - \log|v_i(\boldsymbol{p}_m)| \geq 0$ がわかる．よって $(v_{i-1}(\boldsymbol{p}_m), v_i(\boldsymbol{p}_m))$ は有界なので収束部分列を持つ． □

f が**ニュートン非退化**とは，$\Gamma_+(f)$ の任意の面 γ に対し

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x\partial_x f_\gamma = y\partial_y f_\gamma = 0\} \subset \{xy = 0\} \tag{4}$$

が成り立つときを言う．ただし $f_\gamma = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\gamma} c_{\boldsymbol{\nu}} x^{\nu_1} y^{\nu_2}$.

定理 f がニュートン非退化なら π は f の特異点解消を与える．つまり，M の任意の点の近傍で $f{\circ}\pi$ が単項式で表されるような座標系が取れる事を主張する．

証明. (1) を使って $\tilde{f}$ を次で定める．

$$f{\circ}\pi = \sum_{\boldsymbol{\nu}} c_{\boldsymbol{\nu}} x^{\nu_1} y^{\nu_2} = \sum_{\boldsymbol{\nu}} c_{\boldsymbol{\nu}} v_{i-1}^{\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{a}_{i-1} \rangle} v_i^{\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{a}_i \rangle} = v_{i-1}^{m(\boldsymbol{a}_{i-1})} v_i^{m(\boldsymbol{a}_i)} \tilde{f} \tag{5}$$

$\tilde{f}$ が $\{v_{i-1} = 0\}$ と横断的に交わることを示す．$\gamma = \gamma(\boldsymbol{a}_{i-1})$, $\gamma' = \gamma(\boldsymbol{a}_i)$ と置くと次がわかる．

$$\tilde{f}|_{\{v_{i-1}=0\}} = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\gamma} c_{\boldsymbol{\nu}} v_i^{\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{a}_i \rangle - m(\boldsymbol{a}_i)} = \widetilde{f_\gamma}, \qquad \tilde{f}|_{\{v_{i-1}=v_i=0\}} = \widetilde{f_{\gamma\cap\gamma'}} \neq 0 \tag{6}$$

(1) から $x_{v_{i-1}} = a_{i-1}x/v_{i-1}$, $x_{v_i} = a_i x/v_{i-1}$, $y_{v_{i-1}} = b_{i-1}y/v_{i-1}$, $y_{v_i} = b_{i-1}y/v_i$ なので

$$v_{i-1}\partial_{v_{i-1}} = a_{i-1}x\partial_x + b_{i-1}y\partial_y, \quad v_i\partial_{v_i} = a_i x\partial_x + b_i y\partial_y \tag{7}$$

を得る．これと (4) より

$$\{(v_{i-1}, v_i) \in \mathbb{C}^2 \mid v_{i-1}(\tilde{f}_\gamma)_{v_{i-1}} = v_i(\tilde{f}_\gamma)_{v_i} = 0\} \subset \{v_{i-1}v_i = 0\}$$

がわかり，$\tilde{f} = v_{i-1} = 0$ のとき $v_i \neq 0$ かつ $f_{v_i} \neq 0$ がわかる． □