関数のバーサリティ

数学特別講義 XX 2023 年 11 月 10 日（金）4 限　担当 福井敏純

特異点論は、数学のさまざまな分野で現れる．特異点論における重要な概念であるバーサリティの概念を紹介しその微分幾何学への応用を１つ示す．

2 変数の実数値関数 $f(x,y)$ を考えよう．点 (x_0,y_0) が

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$$

を満たすとき，(x_0,y_0) は関数 $f(x,y)$ の特異点であるという．f の特異点とは f の極値の候補となる点のことである．実際，f の特異点 (x_0,y_0) で次のヘッセ行列が正定値（または負定値）ならば f はそこで極小（極大）値を持つことは 2 年生で学習した．

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

ではヘッセ行列が定値でない時は、どうなるのであろうか？

以後簡単のため $(x_0,y_0)=(0,0)$ として話を進める．ヘッセ行列が，定値ではないが，非退化のとき，その特異点は鞍点であり，極大でも極小でもないことがわかる．ではヘッセ行列が退化するときはどうであろうか？実は，このような問に特異点論は答える．単純特異点[*1]という比較的易しい特異点の分類結果のリストは次のようである．

A_k	D_k $(k\geq 4)$	E_6	E_7	E_8
$\pm x^{k+1}\pm y^2$	$x(\pm x^{k-2}\pm y^2)$	$\pm x^4+y^3$	$y(x^3+y^2)$	x^5+y^3

ここで分類と述べたが，このような問題を考えるときは，どのような同値関係を考えているかを意識することが重要である．今の文脈では，右同値と呼ばれる同値関係を使って分類している．それは次のように定義される．f と g が右同値とは，点 (x_0,y_0) の近傍で定義された座標変換 $\varphi:\mathbb{R}^2,(0,0)\to\mathbb{R}^2,(0,0)$ が存在して次の関係式を満たすときを言う．

$$f(\varphi(x,y))=g(x,y)$$

関数 f の変形 $f_{\boldsymbol{a}}$ を考えよう．$\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^s,0$ とし，$f_0=f$ としておく，この変形 $\{f_{\boldsymbol{a}}\}$ がバーサルとは，$\{f_{\boldsymbol{a}}\}$ が f の可能な微小変形すべてを右同値を除いて含むときを言う．

関数がモース関数とは，その特異点でヘッセ行列が非退化で，特異値がすべて異なるときをいう．$f_{\boldsymbol{a}}$ がモース関数でないような，$\boldsymbol{a}$ 全体の集合を変形の分岐集合という．

f のバーサルな変形はパラメータの個数 s が一致すれば互いに同型であることがわかっていて，その分岐集合も同型になる．

曲面と球の接触を測る　$\mathbb{R}^3$ の曲面 $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^2,0\to\mathbb{R}^3,0$ を考えよう．点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ を中心とする半径 r の球の定義方程式は $\|(x,y,z)-(a,b,c)\|^2=r^2$ である．この左辺に曲面の径数表示 $\boldsymbol{g}(x,y)$ を代入し $-\frac{1}{2}$ 倍して得られる次の関数を考える．

$$\phi(x,y)=-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{g}(x,y)-\boldsymbol{a}\|^2 \tag{1}$$

[*1] 単純特異点とは関数全体の空間の中で有限個の関数の同値類の和集合がその特異点の近傍をなす場合をいう．

ϕ の特異点を調べることは，曲面と球の接触を調べることである．

$$\phi_x = \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{g}_x \rangle, \quad \phi_y = \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{g},\ \boldsymbol{g}_y \rangle$$

なので，これらが零となるのは $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}(0,0)$ が曲面の接ベクトル $\boldsymbol{g}_x(0,0), \boldsymbol{g}_y(0,0)$ に直交するときであり，$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{g}(0,0) = \rho \boldsymbol{\nu}(0,0)$ なる実数 ρ が存在する事と同値である．ただし $\boldsymbol{\nu}$ はこの曲面の単位法線ベクトルである．このとき，

(a)　ρ が主曲率半径でないとき，$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で A_1 特異点.

(b)　$(0,0)$ が臍点でないとする．κ_i $(i=1,2)$ を主曲率とし，対応する主ベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ と書く．ρ が主曲率半径 (ここでは $\rho = 1/\kappa_i(0,0)$) とする．

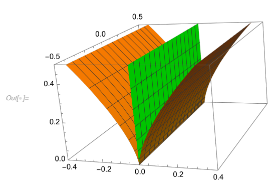
- (b1)　$(0,0)$ が $\boldsymbol{v}_i$ 峰点でなければ（すなわち $\boldsymbol{v}_i\kappa_i(0,0) \neq 0$ ならば）$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で A_2 特異点.
- (b2)　$(0,0)$ が 1 次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点ならば（すなわち $\boldsymbol{v}_i\kappa_i(0,0) = 0$, $\boldsymbol{v}_i^2\kappa_i(0,0) \neq 0$ ならば）$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で A_3 特異点.
- (b3)　$(0,0)$ が 2 次の $\boldsymbol{v}_i$ 峰点ならば（すなわち $\boldsymbol{v}_i\kappa_i(0,0) = 0$, $\boldsymbol{v}_i^2\kappa_i(0,0) = 0$, $\boldsymbol{v}_i^3\kappa_i(0,0) \neq 0$ ならば）$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で A_4 特異点.

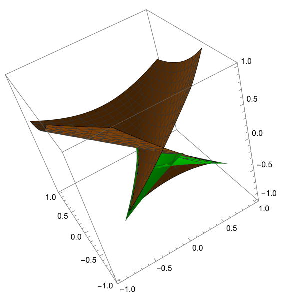
(c)　曲面を次のように表しておく．

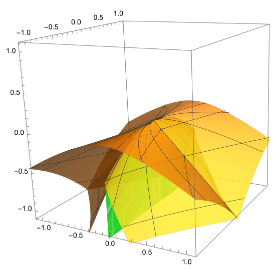
$$\boldsymbol{g}(x,y) = (x, y, \tfrac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + C + O(|x,y|^4)), \quad C \text{ は 3 次同次式}$$

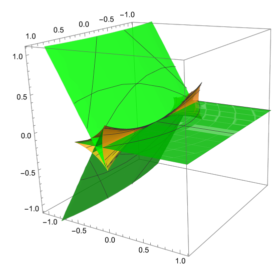
$(0,0)$ が臍点で放物的でなく，ρ が主曲率半径かつ C が重根を持たなければ，$\phi(u,v)$ は $(0,0)$ で D_4 特異点.

(1) を $\boldsymbol{a}$ をパラメーターとする関数の変形と見た時，その分岐集合は元の曲面の焦点集合 (focal set) と対称点集合 (symmetry set) の和集合である．ここで焦点集合とは主曲率中心の軌跡で，対称点集合とは点 P から曲面への距離を実現する点が曲面上に 2 個以上ある様な点 P の軌跡である．実は上記 (a), (b), (c) で述べた条件下では (1) はバーサルであることがわかっているので，その分岐集合は次のようになる．


A_3 の分岐集合


A_4 の分岐集合


D_4^+ の分岐集合


D_4^- の分岐集合