# 教養数学 II

## 1　いろいろな関数

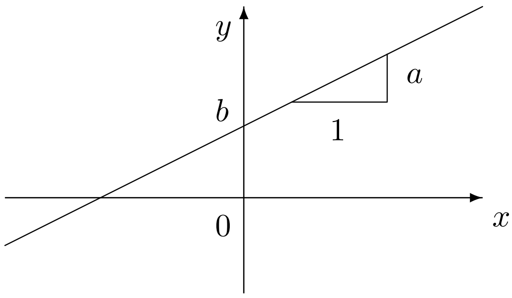
2 つの変数 $x, y$ があって、$x$ を定めるとそれに対応して $y$ の値が 1 つ定まるとき $y$ は $x$ の関数であると言う。$y$ が $x$ の関数であるとき、文字 $f$ などを用いて $y = f(x)$ と表す。

関数 $y = f(x)$ において、変数 $x$ のとる値の範囲を、この関数の**定義域**という。また $x$ が定義域全体を動くとき、 $f(x)$ がとる値の範囲をこの関数の**値域**という。

### 1.1　関数のグラフ

関数 $f(x)$ に対し、点 $(x, f(x))$ 全体の集合を、関数 $f(x)$ の**グラフ**という。いろいろな関数のグラフを描いてみよう。

**例　1 次関数** $a, b$ を定数とし、$a \neq 0$ とする。1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは次のようである。$a$ をこのグラフの**傾き**、$b$ を**切片**(または $y$ 切片) という。

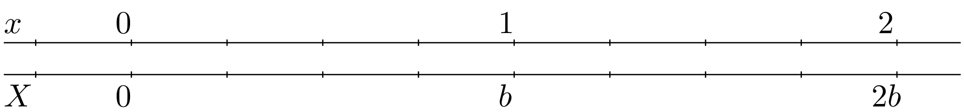



**グラフの拡大**

(i)　関数 $y = af(x)$ のグラフは、関数 $y = f(x)$ のグラフを $y$ 軸方向に $a$ 倍に拡大して得られる。

(ii)　関数 $y = f(bx)$ のグラフは、関数 $y = f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍に拡大して得られる。

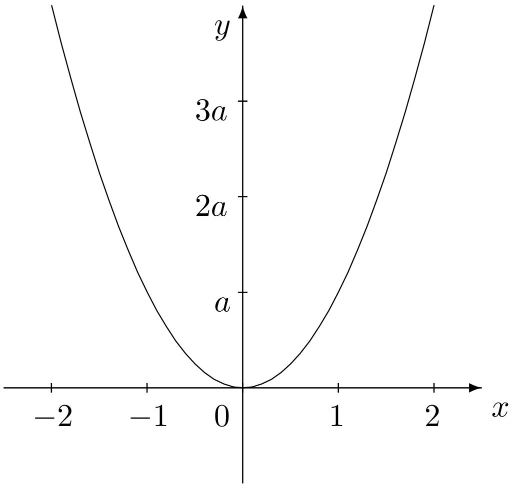
(i) は明らかであろう。(ii) を説明しよう。$X = bx$ とおくと、



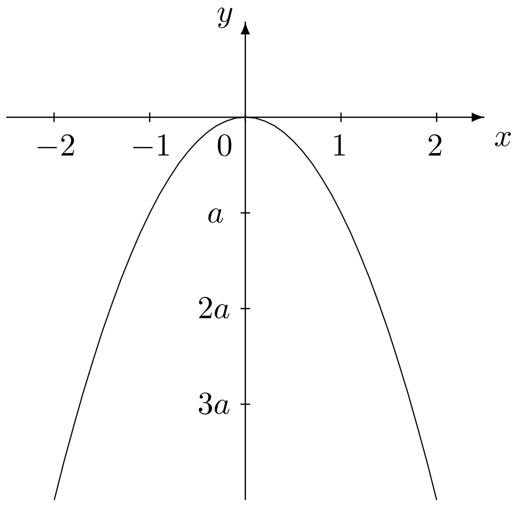

となる。$y = f(bx)$ のグラフは、$y = f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $\frac{1}{b}$ 倍したものである。

**注意**　関数 $y = f(\frac{x}{b})$ のグラフは、関数 $y = f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $b$ 倍して得られる。

**例　2 次関数** $y = ax^2$ **のグラフ**は次のようである。



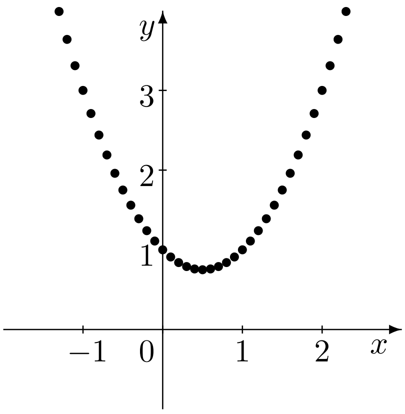
$a > 0$ のとき

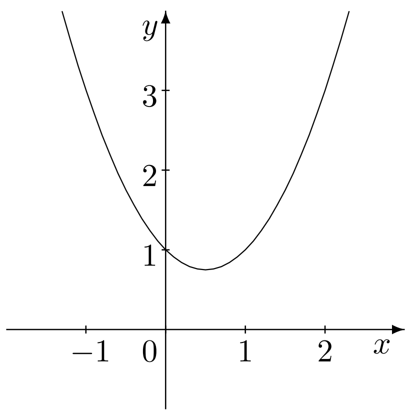


$a < 0$ のとき

**例**　$y = x^2 - x + 1$ **のグラフ**

2 次関数 $f(x) = x^2 - x + 1$ のグラフを描いてみようまず、できるだけ多くの $x$ に対して $f(x)$ の値を計算し、点 $(x, f(x))$ をプロットしてみる (左図)。この関数のグラフは右図のようであることがわかる。

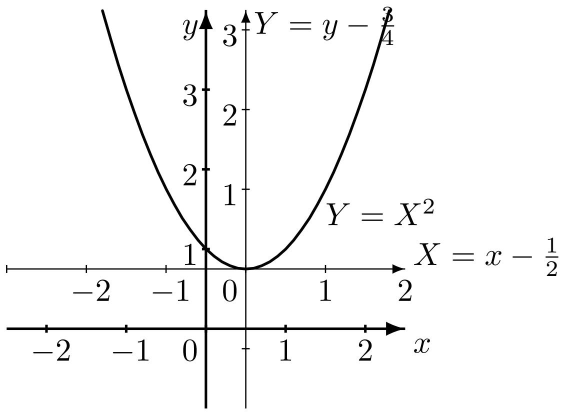




このようにグラフを描くときは多くの点をプロットすることが重要である。

$$y = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

なので、$X = x - \frac{1}{2}$, $Y = y - \frac{3}{4}$ とおくと $Y = X^2$ を得る。$(X, Y)$ 平面で $Y = X^2$ で定まる曲線を、$(x, y)$ 平面で見ると次図のようになり、これが $y = x^2 - x + 1$ のグラフである。$y = x^2 - x + 1$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $\frac{1}{2}$, $y$ 軸方向に $\frac{3}{4}$ 平行移動して得られる。



**演習**　$y=x^2+2x+2$ のグラフを書け。

この事実は次のように一般化される。

**グラフの平行移動**　関数 $y=f(x-p)+q$ のグラフは、関数 $y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$, $y$ 軸方向に $q$ 平行移動して得られる。

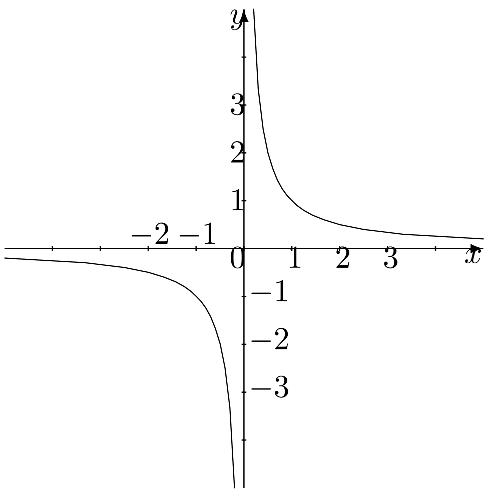
**注意**　関数 $y=f(x+p)$ のグラフは、関数 $y=f(x)$ のグラフを $x$ 軸方向に $-p$ 平行移動して得られる。

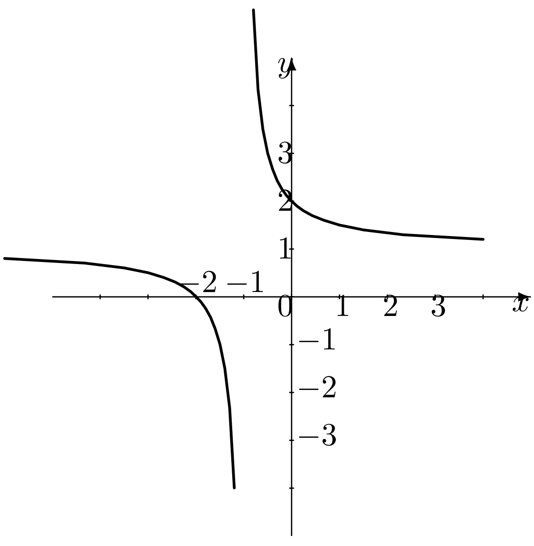
**例**　関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを、$x$ 軸方向に $p$, $y$ 軸方向に $q$ 平行移動して得られる。2 次式 $ax^2+bx+c$ を平方完成すると

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c=&a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\=&a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\=&a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\end{aligned}$$

となるので、関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは、$y=ax^2$ のグラフを $x$ 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$, $y$ 軸方向に $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ 平行移動して得られる。

**例　分数関数 $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフ**　$y=\frac{k}{x}$ のグラフは左図のようである。また、$y=\dfrac{k}{x-p}+q$ のグラフは $y=\dfrac{k}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$, $y$ 軸方向に $q$ 平行移動して得られる。例えば、$y=\frac{x+2}{x+1}=\frac{1}{x+1}+1$ のグラフは $y=\frac{1}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $-1$, $y$ 軸方向に 1 平行移動して得られる。(右図)




$a\neq 0$ とする。

$$\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{cx+d}{a(x+\frac{b}{a})}=\frac{c(x+\frac{b}{a})+d-\frac{bc}{a}}{a(x+\frac{b}{a})}=\frac{c}{a}+\frac{ad-bc}{a^2(x+\frac{b}{a})}$$

なので、 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ のグラフは $y=\frac{k}{x}, k=\frac{ad-bc}{a^2}$, のグラフを $x$ 軸方向に $-\frac{b}{a}$, $y$ 軸方向に $\frac{c}{a}$ 平行移動して得られる。

## 1.2 合成関数

2 つの関数 $y=f(x)$ と $z=g(y)$ があり、$f(x)$ の値域が $g(y)$ の定義域に含まれているとき、$g(y)$ に $y=f(x)$ を代入すると、新しい関数 $z=g(f(x))$ が得られる。この関数を $f(x)$ と $g(y)$ の**合成関数** といい

$$g\circ f(x)=g(f(x))$$

と書く。

**例**　$f(x)=x^2,\ g(x)=2x+1$ のとき

$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2)=2x^2+1$

$f\circ g(x)=f(g(x))=f(2x+1)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

この例からわかるように、一般に合成関数 $g\circ f(x)$ と $f\circ g(x)$ は一致しない。

## 1.3 逆関数とそのグラフ

関数 $y=f(x)$ において、$y$ の値を定めると、$x$ の値が丁度 1 つ定まるとき、すなわち $x$ を $y$ の関数として、$x=g(y)$ と表せるとき、その $x$ と $y$ を入れ替えて $y=g(x)$ としたものを、$f(x)$ の逆関数という。関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ と書くこともある。

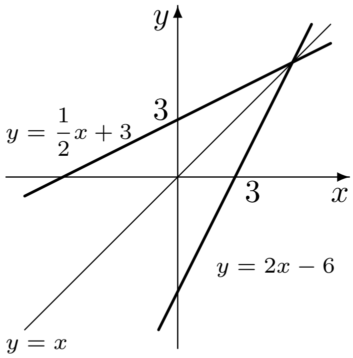
**例　関数 $y=\dfrac{1}{2}x+1$ の逆関数**

$y=\dfrac{1}{2}x+1$ を $y$ について解くと

$x=2y-6$

よって、逆関数は $x$ と $y$ を入れ替えて

$y=2x-6$



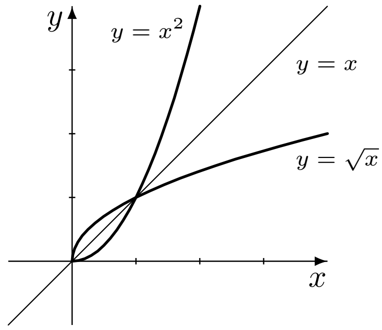

**注意**　$a\neq 0$ のとき、1 次関数 $f(x)=ax+b$ の逆関数は $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ である。傾き $a$ が $\frac{1}{a}$ になったことに注意しておこう。

関数 $y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ は次のようにして求められる。

1. $y=f(x)$ という関係式を $x=g(y)$ の形に変形する。
2. $x$ と $y$ を入れ替えて $y=g(x)$ とする。

関数 $y=x^2$ の逆関数は考えることができない。しかし定義域を制限して得られる関数 $y=x^2$ $(x\geq 0)$ に対しては、逆関数が考えられる。

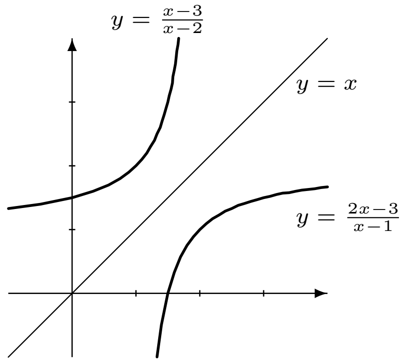
**例　関数 $y = x^2$ $(x \geq 0)$ の逆関数**
値域は $y \geq 0$ である。
$y = x^2$ $(x \geq 0)$ を $x$ について解くと
$x = \sqrt{y}$ $(y \geq 0)$.
$x$ と $y$ を入れ替えて
$y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ が逆関数となる。




関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域は $f(x)$ の値域に一致する。また $f^{-1}(x)$ の値域は $f(x)$ の定義域に一致する。

$y$ を独立変数、$x$ を従属変数とみたとき、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ のグラフは、$y = f(x)$ のグラフと同じものである。よって $x$ と $y$ を入れ替えた $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称の位置にある。

**例　関数 $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ $(x > 1)$ の逆関数**
値域は $y < 2$
$y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ $(x > 1)$ を $x$ について解くと
$x = \dfrac{y-3}{y-2}$ $(y < 2)$
ここで、$x, y$ を入れ替えた
$y = \dfrac{x-3}{x-2}$ $(x < 2)$ が逆関数。




## 1.4　指数関数

正の数 $a$ をとる。$a$ を $n$ 個掛け合わせたものを $a$ の $n$ **乗**といい、$a^n$ と書く。ただし、$a^1 = a$ とする。正の整数 $x, y$ に対して、次の**指数法則**が成り立つ。

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^y \tag{$*$}$$

これから、これらの指数法則を満たすように、$a^x$ の定義を、整数でない $x$ に対して拡張していく。

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定義すると、指数法則 $(*)$ はすべての整数 $x, y$ について成り立つ。

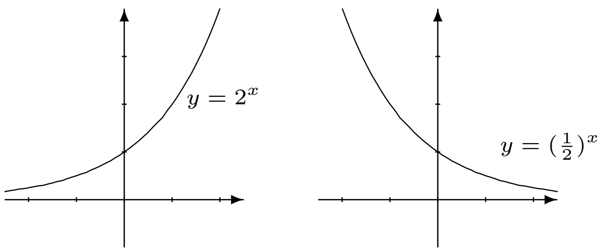
$n$ 乗すると $a$ になる数、すなわち $x^n = a$ となる数 $x$ を、$a$ の $n$ **乗根**という。正の数 $a$ の $n$ 乗根のうち正であるものを $\sqrt[n]{a}$ で表す。

正の有理数 $\dfrac{m}{n}$ に対して $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, 負の有理数 $-\dfrac{m}{n}$ に対して $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ と定める。するとすべての有理数 $x, y$ について指数法則 $(*)$ が成り立つ。

$x$ が無理数のとき、$x$ に近づく有理数の列 $x_1, x_2, \ldots$ をとり、$a^{x_n}$ の近づいていく値を $a^x$ とする。例えば $\sqrt{2} = 1.414\ldots$ に対しては $2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, \ldots$ の近づいていく値を $2^{\sqrt{2}}$ と定める。

| $x$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ | $1.5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | 0.25 | 0.35 | 0.5 | 0.71 | 1 | 1.41 | 2 | 2.83 | 4 |

このように、いろいろな $x$ に対して $2^x$ の値を計算すれば $y = 2^x$ のグラフを描くことができる。




指数関数 $y = a^x$ のグラフは、$a > 1$ のときは左図のように右上りのグラフになり、$0 < a < 1$ のときは右図のように右下がりのグラフになる。

## 1.5　対数関数

$a$ を 1 でない正数とするとき、指数関数のグラフからわかるように、任意の正の数 $y$ に対して $a^x = y$ となる $x$ が唯一つ定まる。この $x$ の値を $a$ を底とする $y$ の**対数**といい、$\log_a y$ で表す。$y$ をこの対数の**真数**という。

$$a^x = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \log_a y$$

$a^1 = a,\ a^0 = 1,\ a^{-1} = \frac{1}{a}$ より、次の対数の性質が従う。

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0, \qquad \log_a \frac{1}{a} = -1$$

指数法則は、次のような対数の法則に翻訳される。

$$\log_a PQ = \log_a P + \log_a Q, \qquad \log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q, \qquad \log_a P^k = k \log_a P$$

**証明**　$p = \log_a P,\ q = \log_a Q$ とすると、$a^p = P,\ a^q = Q$. よって $PQ = a^p a^q = a^{p+q}$ となり、$p + q = \log_a PQ$ を得る。

2 番目の式も同様にして示せる。

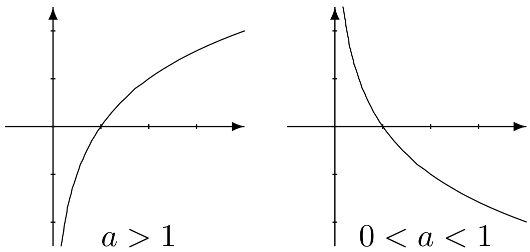
$p = \log_a P$ とすると、$a^p = P$. よって $P^k = (a^p)^k = a^{kp}$ となり、$kp = \log_a P^k$ を得る。これが 3 番目の式である。

**底の変換公式**　$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,　ただし $a, b, c$ は 1 でない正の数。

**証明** $p = \log_a b$ とすると $b = a^p$. $c$ を底とする両辺の対数をとると

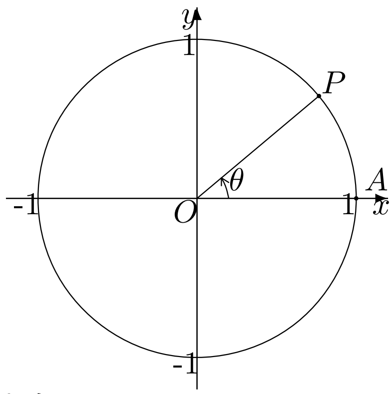
$$\log_c b = \log_c a^p = p \log_c a \qquad \text{なので} \qquad \log_a b = p = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

**系** $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ は指数関数 $y = a^x$ のグラフを直線 $y = x$ について対称移動したものであり、次の様になる。



$a > 1$　　$0 < a < 1$

## 1.6 三角関数




$(x, y)$ 平面で $x$ 軸の正の部分を始線にとり、各 $\theta$ の動径と原点を中心とする半径 1 の円の交点を $P$ とする。始線と原点を中心とする半径 1 の円の交点を $A$ とする。$\angle AOP$ の大きさと弧 $AP$ の長さは比例するので、弧度法 $\angle AOP$ を弧 $AP$ の長さで表す事ができる。角の大きさのこのような表しかたを**弧度法**という。

例えば、$\angle AOP = 180^{\mathrm{o}}$ と置くと、弧長 $AP$ の長さは $\pi$ であるから、

$$180^{\mathrm{o}} = \pi(\text{ラジアン})$$

となる。このように、弧度法の単位としては**ラジアン**を用いるが、多くの場合単位のラジアンを略して書く。

$$90^{\mathrm{o}} = \frac{\pi}{2} \fallingdotseq 1.57, \quad 45^{\mathrm{o}} = \frac{\pi}{2} \fallingdotseq 0.76, \quad 10^{\mathrm{o}} = \frac{\pi}{18} \fallingdotseq 0.17$$

点 $P$ の座標を $(x, y)$ とするとき

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta, \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta$$

であった。

## 1.7 逆三角関数

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ であり、三角関数は 1 対 1 写像でなく、そのままでは三角関数の逆関数を考えることはできない。三角関数の逆関数を考えるためには、定義域を制限する必要がある。

正弦関数 $y=\sin x$ の $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ での逆関数を**逆正弦関数**といい $\sin^{-1}x$ で表し、「アークサイン $x$ 」と読む。

余弦関数 $y=\cos x$ の $0\leq x\leq\pi$ での逆関数を**逆余弦関数**といい $\cos^{-1}x$ で表し、「アークコサイン $x$ 」と読む。

正接関数 $y=\tan x$ の $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ での逆関数を**逆正接関数**といい $\tan^{-1}x$ で表し、「アークタンジェント $x$ 」と読む。

余接関数 $y=\cot x$ の $0<x<\pi$ での逆関数を**逆余接関数**といい $\cot^{-1}x$ で表し、「アークコタンジェント $x$ 」と読む。

**注意**　単に $y=\sin^{-1}x$ と $x=\sin y$ は同値と記憶すると誤りをおかす。$-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ という条件下で同値なのである。

$$y=\sin^{-1}x\Longleftrightarrow x=\sin y\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

**例**　$\sin^{-1}1,\ \cos^{-1}(-\dfrac{1}{2}),\ \tan^{-1}1$ の値を求めよ。

**解**　$\sin^{-1}1=\theta$ とおくと、この式は $1=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と同値。よって $\theta=\dfrac{\pi}{2}.$

同様にして

$$\cos^{-1}(-\frac{1}{2})=\theta\Longleftrightarrow-\frac{1}{2}=\cos\theta\qquad(0\leq\theta\leq\pi)$$

から $\theta=-\frac{\pi}{3}$ を得る。

$$\tan^{-1}1=\theta\Longleftrightarrow 1=\tan\theta\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

から $\theta=\frac{\pi}{4}$ を得る。

**例**　$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ を示せ。

**証明**　$y=\sin^{-1}x,\ z=\cos^{-1}x$ とおき、$y+z=\frac{\pi}{2}$ を示せばよい。

$$y=\sin^{-1}x\Longleftrightarrow\sin y=x\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)$$
$$z=\cos^{-1}x\Longleftrightarrow\cos z=x\qquad(0\leq z\leq\pi)$$

より

$$\sin y=\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\qquad\left(-\frac{\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}-z\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $y=\frac{\pi}{2}-z$ となり、$y+z=\frac{\pi}{2}$ を得る。

**演習**　次を示せ。

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\qquad\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$$

**関数概念の変遷**

ライプニッツが 1670 年代から使いはじめた関数という言葉は、だんだん一般化されて、何かに従属して変動する量またはそれを表現する式を意味するようになった。1745 年には、オイラーは変数と定数から組み立てられた解析的な式として関数を定義している。コーシーは 1823 年には「多くの変数の間にある関係があり、そのうちの１つの値とともに、他のものの値が決まるときは、通常その１つの変数によって他のものを表して考える。そのときこの１つの変数を独立変数と呼び、他のものはその関数であるという。」と述べている。しかしながらコーシー自身はオイラーと同じ立場に立って関数を扱うことが多かった。ディリクレは $x \in [a, b]$ の関数 $y$ を考え、「$y$ が全区間において同一の法則に従って $x$ に関係することを要しないばかりでなく、その関係が数学的算法で表されると考える必要もない」と述べ（1837 年)、関数とは結局対応に他ならないことを明確に認識した。

## 2　数列とその極限

どこまでも限りなく続く数の列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ を数列と呼び $\{a_n\}$ で表す。

数列 $\{a_n\}$ において、$n$ を限りなく大きくするとき、 $a_n$ が一定の値 $\alpha$ に近づくならば、数列 $\{a_n\}$ は $\alpha$ に**収束**するといい、次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{または} \qquad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

**例**　数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ では $n$ を限りなく大きくすると第 $n$ 項は限りなく $0$ に近づくので、この数列は 0 に収束する。

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、$\{a_n\}$ は**発散**するという。

$n$ を限りなく大きくすると、第 $n$ 項 $a_n$ が限りなく大きくなるとき、数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散**するといい、次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{または} \qquad a_n \to \infty \quad (n \to \infty)$$

**例**　数列 $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ では $n$ を限りなく大きくすると、第 $n$ 項は限りなく大きくなるので、この数列は正の無限大に発散する。

$n$ を限りなく大きくすると、第 $n$ 項 $a_n$ が負でその絶対値が限りなく大きくなるとき、数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散**するといい、次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{または} \qquad a_n \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

**例**　数列 $3, 1, -1, \ldots, 5-2n, \ldots$ では $n$ を限りなく大きくすると、第 $n$ 項は限りなく大きくなるので、この数列は負の無限大に発散する。

**例**　数列 $1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$ は発散するが、この数列は正または負の無限大に発散するわけではない。

**例**　数列 $\{r^n\}$ が収束するための必要十分条件は $-1 < r \leq 1$ である。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & r > 1 \text{ のとき} \\ 1 & r = 1 \text{ のとき} \\ 0 & |r| < 1 \text{ のとき} \\ \text{振動} & r = -1 \text{ のとき (上の例)} \\ \text{振動} & r < -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

収束する数列の極限値については、次のことが成り立つ。

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする。

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　ただし $k$ は定数
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　ただし $\beta \neq 0$
5. すべての $n$ について $a_n \leq b_n$ ならば $\alpha \leq \beta$

5. から次の**はさみうちの原理**が従う。

すべての $n$ について $a_n \leq b_n \leq c_n$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$

また、発散する数列については、5. は次のように一般化される。

すべての $n$ について $a_n \leq b_n$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

**例**　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

## 2.1　無限級数

無限数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ において、各項を前から順に $+$ の記号で結んで得られる式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{$*$}$$

を**無限級数**といい、$a_1$ をその**初項**、$a_n$ を**第 $n$ 項**という。この無限級数を和の記号 $\sum$ をもちいて、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と表すことがある。この無限級数の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ で表す。すなわち

$$\begin{aligned} S_1 =& a_1 \\ S_2 =& a_1 + a_2 \\ S_3 =& a_1 + a_2 + a_3 \\ & \cdots \\ S_n =& a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ & \cdots \end{aligned}$$

$S_n$ を**第** $n$ **部分和**と呼ぶ。数列 $\{S_n\}$ が収束してその極限値が $S$ であるとき、無限級数 $(*)$ は $S$ に**収束**するといい

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書く。

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数 $(*)$ は**発散**するという。

**例**　次の級数の収束発散を調べよ。

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

**解**

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ =& \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ =& 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

**演習**　次の級数の収束発散を調べよ。

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

## 2.2　無限等比級数

$a \neq 0$ として、無限等比級数

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

の収束を考えてみよう。$r \neq 1$ とすると

$$S_n = a(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} + \frac{a}{1-r}r^n$$

となり、$S_n$ が収束する必要十分条件は $|r| < 1$ となり、そのとき $S_n$ は $\frac{a}{1-r}$ に収束する。

$r = 1$ とすると $S_n = na$ であり、これは発散する。

**例**　無限小数 $0.3333\ldots$ は、数列

$$0.3,\ 0.33,\ 0.333, \ldots$$

の極限値である。

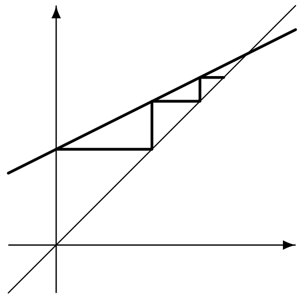
$$\begin{aligned} 0.3 =&0.3 \\ 0.33 =&0.3 + 0.3 \times (0.1) \\ 0.333 =&0.3 + 0.3 \times (0.1) + 0.3 \times (0.1)^2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

なので、これは $a = 0.3$, $r = 0.1$ としたときの無限等比級数の極限値である。和の公式よりその極限値は $0.3/(1 - 0.1) = 1/3$ となる。

**例**　無限小数 $0.9999\ldots$ は、前の例と同様の考察により、これは $a = 0.9$, $r = 0.1$ としたときの無限等比級数の極限値である。和の公式よりその極限値は $0.9/(1 - 0.1) = 1$ となることがわかる。

## 2.3　漸化式で決まる数列の極限

**例**　次の数列の収束を調べよ。$a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$



**解**　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 1$ の両辺から $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 1$ の解 $\alpha = 2$ を引くと、

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$$

$\{a_n - 2\}$ は初項 $-2$ 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので

$$a_n - 2 = -2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \qquad (つまり\ a_n = 2 - 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1})$$

を得る。ここで $n \to \infty$ として $a_n \to 2$ を得る。

この例では、漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ で $n \to \infty$ として得られる式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$ を解いて、極限値 $\alpha = 2$ が得られる。しかしながら極限の存在が不明のときには、このようにして、極限値が求まるとは限らない。(例えば漸化式 $a_{n+1} = 2an + 1$ を満たす数列を考えてみよ。) そこで数列の極限値の存在・非存在の判定をすることが、重要となってくる。

　数列 $\{a_n\}$ が**有界**であるとは

$$|a_n| \le K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たすような定数 $K$ が存在することである。

　$a_n < a_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ を満たす数列を**増加**数列という。

　$a_n > a_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ を満たす数列を**減少**数列という。

数列の収束の判定には、次の事実は基本的である。

有界な増加数列は収束する。有界な減少数列は収束する。

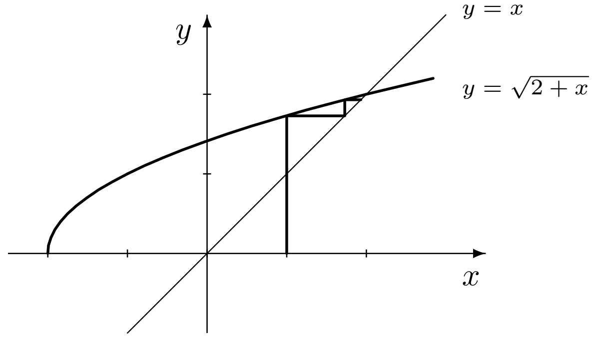
**例**　次の数列の収束を調べよ。

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\ (n = 1, 2, \dots)$

**解**　$a_{n+1}^2 = 2 + a_n,\ a_n^2 = 2 + a_{n-1}$ から、$a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$. この式から

$$0 < a_{n-1} < a_n \qquad \text{ならば} \qquad a_n < a_{n+1}$$

が導かれる。ところが $a_1 = 1,\ a_2 = \sqrt{3}$ であるから、$a_1 < a_2$ これから、すべての $n$ に対して $a_n < a_{n+1}$ であること、つまり $a_n$ は増加数列であること、がわかる。次に $\{a_n\}$ が有界であることを示そう。




数学的帰納法により、すべての $n$ に対して $a_n < 2$ が示せる。$a_1 < 2$ は明らか。$a_n < 2$ とすると $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$ なので $\{a_n\}$ が有界であることがわかった。よって $\{a_n\}$ には極限値が存在する。その極限値を $\alpha$ とすると漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ で $n \to \infty$ として

$$\alpha = \sqrt{2 + \alpha}$$

を得る。よって $\alpha^2 = 2 + \alpha$, すなわち $(\alpha - 2)(\alpha + 1) = 0$. $a_n > 0$ より $\alpha = 2$ がわかる。

**演習**　次の数列の収束を調べよ。

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}\ (n = 1, 2, \dots)$

**例**　$a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}\ (n = 1, 2, \dots)$ を満たす数列を考える。

(1) $a_1 = 1$ のとき収束を調べよ。 (2) $a_1 = \frac{3}{2}$ のとき収束を調べよ。

**解**　この数列の、最初の数項を書いてみる。

(1) $1,\ \frac{7}{5} = 1.4,\ \frac{41}{29} = 1.4137\dots,\ \frac{239}{169} = 1.41420\dots,\ \frac{1393}{985} = 1.41421\dots$

(2) $\frac{3}{2} = 1.5,\ \frac{17}{12} = 1.416\dots,\ \frac{99}{70} = 1.4142\dots,\ \frac{577}{408} = 1.414215\dots,\ \frac{3363}{2378} = 1.4142136\dots$

より (1) は増加数列、(2) は減少数列であることが予想される。

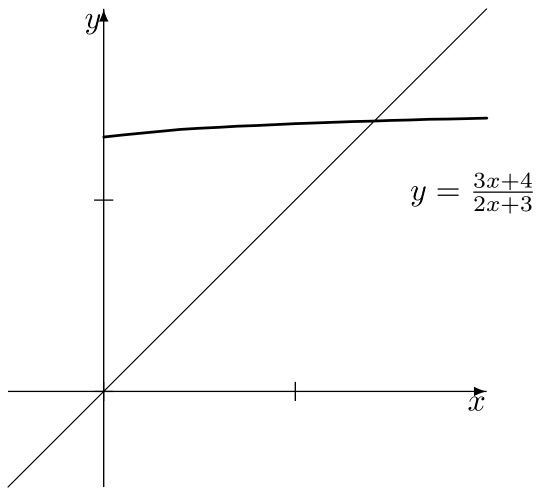
まず (1), (2) の場合ともに $a_n > 0$ であることに注意しておこう。$n \geq 2$ とする。

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} - \frac{3a_{n-1} + 4}{2a_{n-1} + 3} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(2a_n + 3)(2a_{n-1} + 3)}$$

なので、($a_n > 0$ より $(2a_n+3)(2a_{n-1}+3) > 0$ がわかるので) $a_{n+1} - a_n$ の正負と $a_n - a_{n-1}$ の正負は一致する。よって (1) は増加数列、(2) は減少数列であることがわかる。

関数 $f(x) = \frac{3x+4}{2x+3}$ のグラフを書くと次のようになり、区間 $[0, 2]$ で $f(x)$ は有界。よって (1) は有界な増加数列、(2) は有界な減少数列であることがわかる。

従って (1) も (2) も収束する。収束先を $\alpha$ とすると漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$ で $n \to \infty$ として $\alpha = \dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を得る。これを解いて $\alpha = \sqrt{2}$.




**演習**　次の数列の収束を調べよ。

$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+2}{a_n+1}\ (n = 1, 2, \ldots)$

　ヒント：項を順番に書いてみると 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{239}{169}$, $\frac{577}{488}$, $\frac{1393}{985}$, $\frac{3363}{2378}$, $\ldots$ となる。

## 3　関数の極限

関数 $f(x)$ において、$x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき、それに応じて $f(x)$ の値が一定の値 $b$ に限りなく近づくとき、$x \to a$ のとき $f(x)$ は $b$ に**収束**するといい、

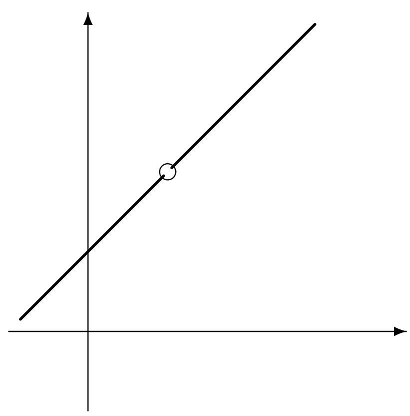
$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{または} \qquad x \to a \text{ のとき } f(x) \to b$$

と書く。$b$ を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。

**例**　関数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ は、$x = 1$ のとき定義されていないが、$x \neq 1$ のとき

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

となるので、$x$ が 1 と異なる値をとりながら 1 に限りなく近づくとき、$f(x)$ は 2 に限りなく近づく。よって $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$



$x \to a$ のとき、関数 $f(x)$, $g(x)$ の極限値が存在するならば、次の式の左辺の極限値が存在して、右辺に等しい。

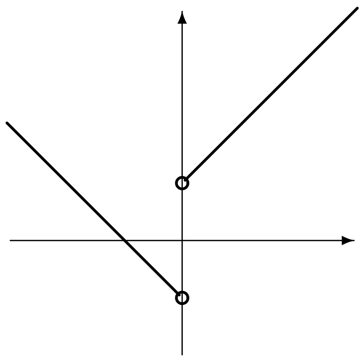
1. $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$　　ただし $k$ は定数
2. $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$　　ただし $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
5. $a$ の近くのすべての $x$ について $f(x) \leq g(x)$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$

**例**　$\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3}{4}$

**例**　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\frac{(x+1)-1}{x+1} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x}\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = 1$

$x$ が点 $a$ の右から $a$ に近づくことを $x \to a+0$ で表し、左から $a$ に近づくことを $x \to a-0$ で表す。$a=0$ のときは、それぞれ $x \to +0$, $x \to -0$ と書く。

$x \to a+0$ のときの $f(x)$ の極限値を**右極限値**といい $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ で表す。同様に、$x \to a-0$ のときの $f(x)$ の極限値を**左極限値**といい $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ で表す。



**例**　$f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}$　$x>0$ のとき

$f(x) = \dfrac{x^2+x}{x} = x+1$ よって $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x) = 1$

$x>0$ のとき

$f(x) = \dfrac{x^2+x}{-x} = -x-1$ よって $\displaystyle\lim_{x\to -0} f(x) = -1$

関数 $f(x)$ において、$x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \text{ は}\textbf{正の無限大に発散}\text{する}$$

といい、次のように表す。

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{または} \quad f(x) \to \infty \quad (x \to a)$$

また $x$ が $a$ と異なる値をとりながら $a$ に限りなく近づくとき、$f(x)$ の値が負で、その絶対値が限りなく大きくなるならば

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \text{ は}\textbf{負の無限大に発散}\text{する}$$

といい、次のように表す。

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{または} \quad f(x) \to -\infty \quad (x \to a)$$

**例**　$a$ を定数とする。

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^2} = \infty, \qquad \lim_{x\to a} -\frac{1}{(x-a)^2} = -\infty.$$

**注意**　$x \to a$ のとき $\frac{1}{x-a}$ は無限大に発散すると言ってよいだろうか?
$x > 0$ と言う条件下で、$x \to 0$ とすると $\frac{1}{x-a} \to \infty$ である。$x < 0$ と言う条件下で、$x \to 0$ とすると $\frac{1}{x-a} \to -\infty$ である。 したがって $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{x-a} = \infty$ と書くのはまずい。次のように書くのがよい。

$$\lim_{x\to a+0} \frac{1}{x-a} = \infty, \qquad \lim_{x\to a-0} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

## 3.1　$x \to \pm\infty$ のときの極限

変数 $x$ が限りなく大きくなることを $x \to \infty$ で表す。また $x$ が負でその絶対値が限りなく大きくなることを $x \to -\infty$ で表す。

$x \to \infty$ のとき、関数 $f(x)$ がある一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくとき、この $\alpha$ を $x \to \infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値であるといい、次のように書く。

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \quad (x \to \infty)$$

同様に、$x \to -\infty$ のとき、関数 $f(x)$ がある一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくとき、この $\alpha$ を $x \to -\infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値であるといい、次のように書く。

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$$

**例**　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

$x \to \infty$ のとき、関数 $f(x)$ が限りなく大きくなるとき、$x \to \infty$ のとき、関数 $f(x)$ は $\infty$ に発散するといい、次のように書く。

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ の意味も、同様に考える。

**例**　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$

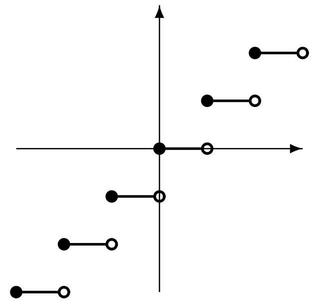
## 3.2　連続関数

これまで学んだ関数では $y = x^2$ や $y = \sin x$ のように、そのグラフが 1 つのつながった曲線になるものが多かった。このような関数を $f(x)$ とすると、定義域の任意の $x$ の値 $a$ に対して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立っている。しかしこのことが成り立たない関数もある。

**例**　実数 $x$ に対し $n \leq x$ となる最大の整数 $n$ を $[x]$ で表す。この記号 [ ] を**ガウス記号**という。関数 $f(x) = [x]$ のグラフは右のようになり、$x$ の値が整数となるところでグラフは切れている。



$\lim_{x \to 1+0} [x] = 1, \qquad \lim_{x \to 1-0} [x] = 0$

関数 $f(x)$ が $x = a$ で**連続**であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことである。すなわち

1. $f(x)$ が $x = a$ で定義されていて $f(a)$ が存在し、
2. $x \to a$ のとき $f(x)$ の極限値が存在し、
3. その極限値が $f(a)$ に一致する

ことである。$f(x)$ が区間 $I$ で**連続**であるとは、区間 $I$ の各点で連続なことである。

**中間値の定理** 関数 $f(x)$ が 閉区間 $[a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の数 $k$ に対して、

$$f(c) = k, \qquad (a < c < b)$$

をみたす $c$ が少なくとも 1 つ存在する。

$e$ **の定義**　関数 $(1 + x)^{1/x}$ の $x = 0$ の近くでの振舞を調べてみよう。

| $x$ | $(1+x)^{1/x}$ | $x$ | $(1+x)^{1/x}$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 2.59374 . . . | $-0.1$ | 2.86797 . . . |
| 0.01 | 2.70481 . . . | $-0.01$ | 2.73199 . . . |
| 0.001 | 2.71692 . . . | $-0.001$ | 2.71964 . . . |
| 0.0001 | 2.71814 . . . | $-0.0001$ | 2.71841 . . . |
| 0.00001 | 2.71826 . . . | $-0.00001$ | 2.71829 . . . |

これから $x \to 0$ のとき $(1+x)^{1/x}$ は一定の値に近づくことが予想される。実際 $x \to 0$ のとき $(1+x)^{1/x}$ の極限値が存在しその値を $e$ で表す。

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

$e$ は無理数でその値は

$$e = 2.718281828459045\ldots$$

であることが知られている。$e$ を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数**といい、底 $e$ を省略して $\log x$ と書くことが多い。ただし、これは日本での習慣であり、欧米では $\log x$ でなく $\ln x$ と書くが多い。

**三角関数の極限**　$x \to 0$ としたときの $\frac{\sin x}{x}$ の挙動を調べてみよう。

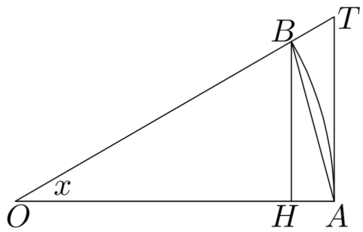
| $x$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\sin x}{x}$ | $0.99833\ldots$ | $0.99998\ldots$ | $0.99999\ldots$ |

なので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

となることが予想される。これは次のように説明される。$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ なので $x > 0$ として示せば十分。

$OA = OB = 1$ となるように $\angle AOB = x$ を作図する。
$\angle OAT = \pi/2$ となるように直線 $OB$ 上に点 $T$ をとる。
点 $B$ から $OA$ に下ろした垂線の足を $H$ とする。
$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times OA \times BH = \frac{1}{2}\sin x$
扇形 $OAB = \frac{1}{2} \times OA \times$ 弧長 $AB = \frac{1}{2}x$
$\triangle OAT = \frac{1}{2} \times OA \times \tan x = \frac{1}{2}\tan x$




図で面積を比較して

$$\triangle OAB < \text{扇形}\, OAB < \triangle OAT$$

を得る。よって $\sin x < x < \tan x$. 両辺を $\sin x$ でわって逆数をとると

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

を得る。$x \to 0$ として所要の極限値を得る。

**例**　$x \to 0$ としたときの $\frac{\sin 2x}{x}$ の挙動を調べてみよう。

| $x$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\sin 2x}{x}$ | $1.98669\ldots$ | $1.99986\ldots$ | $1.99999\ldots$ |

これから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

となることが予想される。これは次のように証明される。$y=2x$ とおくと $x\to 0$ のとき $y\to 0$ である。このとき

$$\frac{\sin 2x}{x}=2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot\frac{\sin y}{y}\to 2$$

**例**　$x\to 0$ としたときの $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ の挙動を調べてみよう。

| $x$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ | $0.672269\ldots$ | $0.666722\ldots$ | $0.666667\ldots$ |

これから

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

となることが予想される。これは次のように証明される。

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\to\frac{2}{3}\qquad(x\to 0)$$

**例**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{x}{(1+\cos x)}\\&=1^2\frac{0}{1+1}=0\end{aligned}$$

**演習**　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x},\qquad\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x},\qquad\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x},\qquad\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

**注意**　本節で扱った極限を使うと指数関数や三角関数の導関数を求める事ができる。

**指数関数の微分**

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

いま $a^h - 1 = y$ とおくと $h = \log_a(1+y)$. $h \to 0$ のとき、$y \to 0$. よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log a$$

従って次の公式を得る。

$$(a^x)' = a^x\log a \qquad \text{とくに} \qquad (e^x)' = e^x$$

**対数関数の微分**

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで $k = \dfrac{h}{x}$ とおくと、$h \to 0$ のとき $k \to 0$ であり

$$(\log_a x)' = \lim_{k\to 0}\frac{1}{xk}\log_a(1+k) = \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{1/k} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log_e a}$$

となり、次を得る。

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a} \qquad \text{とくに} \qquad (\log x)' = \frac{1}{x}$$

**三角関数の微分**

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h - \sin x(1-\cos h)}{h}\\ &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h)}{h}\\ &= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h} - \tan x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h}\left(\frac{1+\tan^2 x}{1-\tan x\tan h}\right) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$