解析概論 B 演習ガイダンス(2006 年 4 月 18 日 (火))

各自 B5 のノートを用意すること。毎週、課題を出すので、その課題をノートに解いて、原則その週の金曜日正午迄に数学科事務室に提出すること。
ノート作成時の注意。

1. まず、問題を要約して書く。
2. 下書きをして、答案として完全になってから清書すること。
3. 数式だけの答案は不完全と心得よ。短くても説明の文をいれること。いきなり数式を書かずに、アイデアなどを文章で説明するのもよい。
4. 数式も文章であることを意識して書く。$A = B$ は 「A は B に等しい」と言う文の略記と心得よ。
5. 読みやすくするため、適宜記号を導入すること。論理記号などを適切に用いるのもよろしい。
6. 人に見てもらうことを意識して、出来るだけ読みやすく書くことを心がける。行間を開け、あまり詰めて書かない事。
7. 論理的に隙のない文章を書くように心がけること。証明を書くときは出来るだけ rígorous な証明を心がける。

rígorous = done carefully and with a lot of attention to detail

課題(2006 年 4 月 18 日 (火))

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ。

$\boxed{2}$ n を自然数とする。定義に従い関数 $f(x) = x^n$ の導関数を求めよ。

$\boxed{3}$ 積の微分の公式 $(uv)' = u'v + uv'$ を証明せよ。

$\boxed{4}$ 商の微分の公式 $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ を証明せよ。

$\boxed{5}$ 定義に従い関数 $f(x) = \sin x$ の導関数を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の関数を微分せよ。

1. $(1 - 2x)^3(1 + x^2)^2$
2. $(x + \frac{1}{x})^3$
3. $\log\log x$
4. $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$
5. $3^{\frac{1}{x}}$

解析概論 **B** 演習課題(2006 年 4 月 25 日 (火))

$\boxed{1}$ $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ $(m, n$ は自然数) の原点での右微分係数を求めよ。

$\boxed{2}$ 逆関数の微分の公式を用いて、次を解け。

1. $y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ のグラフを書き、その導関数を求めよ。
2. 逆正弦関数 $y = \cos^{-1} x$ のグラフを書き、その導関数を求めよ。
3. 逆正接関数 $y = \tan^{-1} x$ のグラフを書き、その導関数を求めよ。
4. 逆余接関数 $y = \cot^{-1} x$ のグラフを書き、その導関数を求めよ。

$\boxed{3}$ $f(x)$, $g(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとき、次を示せ。

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)f(a) - g(a)f(x)}{x - a} = g'(a)f(a) - g(a)f'(a)$$

$\boxed{4}$ 2 次関数 $f(x) = px^2 + qx + r$ に対し、次を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ を求めよ。

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$$

また $f(x)$ が 3 次関数のとき、 θ はどうなるか調べ $\lim_{h \to 0} \theta$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ

1. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義を書け。(高校の教科書にある定義でよい)
2. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で 微分可能であることの定義を書け。
3. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で 微分可能であれば、$x = a$ で連続である事を示せ。

解析概論 **B** 演習課題(2006 年 5 月 2 日 (火))

$\boxed{1}$ 次の定義を書け。

1. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界である。
2. 数列 $\{a_n\}$ が下に有界である。
3. 数列 $\{a_n\}$ が有界である。
4. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加である。
5. 数列 $\{a_n\}$ が単調減少である。

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x},\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x},\qquad \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$\boxed{3}$ 対数微分法を用いて、次の関数を微分せよ。但し α は実数とする。

$$x^{\alpha},\qquad x^{x},\qquad x^{(x^x)}$$

$\boxed{4}$ 数学的帰納法を用いて、次の二項定理を証明せよ。

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,\qquad \text{但し}\qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\boxed{5}$ 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとする。もし $|\alpha|<1$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_1a_2\cdots a_n=0$ となることを示せ。
(ヒント：$|\alpha|<r<1$ なる r をとると、ある番号から先の a_n は $|a_n|<r$ を満たす。)

解析概論 **B** 演習課題(2006 年 5 月 9 日 (火))

$\boxed{1}$ 平均値の定理を（正確に）述べよ。

$\boxed{2}$ 区間 I において $f(x)$ が微分可能であるとする。平均値の定理を用いて、次を示せ。

- 任意の $x \in I$ に対し $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は狭義単調増加関数。
- 任意の $x \in I$ に対し $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は狭義単調減少関数。
- 任意の $x \in I$ に対し $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は定数関数。

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ。但し n は自然数とする。

$$\lim_{x\to 0+0} x^n \log x, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^n}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x},$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\log(1+2x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Tan}^{-1} x}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$\boxed{4}$ 次の関数のグラフの概形を描け。

$$e^{-1/x}, \qquad \frac{1}{1+a^{1/x}} \quad (a > 0)$$

$\boxed{5}$ $x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(ヒント：$f(x) = \log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})$, $g(x) = \log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4})$ とおいて、$f(x)$, $g(x)$ の増減を調べよ。)

$\boxed{6}$ 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が凸関数ならば、任意の $x_1, \ldots, x_n \in I$ に対して

$$f\Big(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\Big) \le \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

が成り立つことを示せ。また $f(x)$ が 狭義凸関数ならば、等号が成立するのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る事を数学的帰納法で示せ。

解析概論 B 演習課題(2006 年 5 月 16 日 (火))

高次導関数

$\boxed{1}$ 数学的帰納法を用いて、次のライプニッツの公式を証明せよ。

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$\boxed{2}$ 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

$$\log(1+x), \qquad x^3 \sin x, \qquad e^x \sin x$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1} x$ について次を示せ。

1. $(1-x^2)f'' = xf'$
2. $(1-x^2)f^{(n+2)} - (2n+1)xf^{(n+1)} - n^2 f^{(n)} = 0$
3. $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2k-1)^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

$\boxed{4}$ $f(x) = e^{-x^2}$ の n 次導関数は $f^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2}$ の形をしている。

1. $H_1(x), \ldots, H_4(x)$ を求めよ。
2. $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$ を示せ。

解析概論 **B** 演習課題(2006 年 5 月 23 日 (火))

$\boxed{1}$ $f(x)=x^3$ とする。

- $x=1$ での $f(x)$ のテイラー展開を求めよ。
- $x=a$ での $f(x)$ のテイラー展開を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の関数の高次導関数を調べ、マクローリン展開を求めよ。(収束性は議論しなくてよい。)

$$\cos x, \qquad \log(1+x), \qquad (1+x)^{\frac{1}{2}}, \qquad (1+x)^{\alpha}, \qquad \mathrm{Sin}^{-1}x, \qquad \mathrm{Tan}^{-1}x$$

$\boxed{3}$ 上で求めた $\cos x$ のマクローリン展開はすべての x で収束することを示せ。

$\boxed{4}$ h が十分小さいとき、$f(a+h)$ の近似値として $f(a)+f'(a+\frac{h}{2})h$ をとれば、その誤差の絶対値は $\frac{7}{24}M|h|^3$ を越えないことを示せ。ただし、$|f'''(x)|\leq M$ とする。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ が a を含む開区間 I で n 階微分可能ならば、$x\in I$ に対し、

$$f(x)=f(a)+f'(t)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n$$

と書いたとき、$R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n$ を満たす $\theta\ (0<\theta<1)$ が存在することを示せ。この形の剰余項の表示を **Cauchy の表示式**という。(ヒント:

$$F(t)=f(x)-\left\{f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right\}$$

と $G(t)=x-t$ に Cauchy の平均値の定理を適用する。)

$\boxed{\text{研究課題}}$ $\boxed{2}$ で求めた、$(1+x)^{\alpha}$ のマクローリンの展開式は $-1<x<1$ で成り立つ。$\log(1+x)$ のマクローリンの展開式は $-1<x\leq 1$ で成り立つ。なぜかを考えてみよう。

解析概論 B 演習課題(2006 年 5 月 30 日 (火))

$\boxed{1}$ $\log(1+x)$ のマクローリン展開から次の展開式を導け。

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \qquad |x| < 1$$

$\boxed{2}$ $P_n(x)$ を $\sin x$ の Maclaurin 展開の $2n$ 次以下の項からなる多項式とする。

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)$ のグラフの概形を描き、$\sin x$ のグラフと比較せよ。(コンピュータが使える環境にある場合は、コンピュータを使って $P_n(x)$ のグラフをプロットしてみよ。)

$\boxed{3}$ $P_n(x)$ を $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開の n 次以下の項からなる多項式とする。

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

1. $P_2(x),\ P_3(x),\ P_4(x)$ のグラフの概形を描き、$\log(1+x)$ のグラフと比較せよ。
2. $P_n(x)$ のグラフの概形を調べ、$\log(1+x)$ のグラフと比較せよ。

$\boxed{4}$ $f(x)$ が n 回連続微分可能で、$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$ とする。次を示せ。

- n が偶数で、$f^{(n)}(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる。
- n が偶数で、$f^{(n)}(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極大値をとる。
- n が奇数なら、$f(x)$ は $x = a$ で極値でない。

$\boxed{5}$ $f(x)$ は C^∞ 関数で、$x = a$ のある近傍 $\{x : |x-a| < r\}$ に対し、定数 $c,\ M$ が存在して

$$|f^{(n)}(x)| < cM^n n! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立っているとき、$f(x)$ は $x = a$ で解析的である事を示せ。

$\boxed{6}$ 次の関数は C^∞ 関数 (何回でも微分可能である関数) であることを示せ。

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

解析概論 **B** 演習課題(2006 年 6 月 6 日 (火))

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して、次の恒等式がある。

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \tag{3}$$

これを一般化した、次の等式が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m-1) = \frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$$

注: (1), (2) を比較すれば $\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式を得る。(1), (2), (3) を比較すれば $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式を得る。確認しておいてほしい。

$\boxed{2}$ 自然数 n に対して、次の恒等式を示せ。

$$(a+b+c)^n = \sum_{i,j,k:i+j+k=n} \binom{n}{i\ j\ k} a^i b^j c^k, \qquad \text{但し} \quad \binom{n}{i\ j\ k} = \frac{n!}{i!\ j!\ k!}$$

$\boxed{3}$ $(3+2x+4y)^6$ の x^3y^2 の係数を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の多項定理を数学的帰納法で証明せよ。

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_m=n} \binom{n}{i_1\ i_2\ \ldots\ i_m} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_m^{i_m},$$

但し

$$\binom{n}{i_1\ i_2\ \ldots i_m} = \frac{n!}{i_1!\ i_2!\ \cdots\ i_m!}$$

$\boxed{5}$ C^{n+k} 級関数 $f(x)$ が、$f^{(n+1)}(a) = \cdots = f^{(n+k-1)}(a) = 0$, $f^{(n+k)}(a) \neq 0$ を満たすとする。

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$$

なる θ $(0 < \theta < 1)$ をとる。$h \to 0$ としたときの θ の極限値を求めよ。(ヒント：$n = k = 1$ としたとき θ は $1/2$ に収束する。先ずこれを証明してみよ。 一般の (n,k) で見当がつかない場合は、例えば $f(x) = x^{n+k}$, $a = 0$ として実験してみよ。)

解析概論 **B** 演習課題(2006 年 6 月 13 日 (火))

$\boxed{0}$ 数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき $-2/3$ に収束するとき次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} a_1 a_2 \dots a_n = 0$$

$\boxed{1}$ X, Y を集合とする。次の定義を述べよ。

- 写像 $f : X \to Y$ が単射である。
- 写像 $f : X \to Y$ が全射である。
- 写像 $f : X \to Y$ が全単射である。

$\boxed{2}$ 有理関数，代数関数，無理関数の定義を述べよ。

$\boxed{3}$ 次の写像は単射か，全射か，全単射か判定せよ。

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n$. 但し　n は自然数。
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^3 - x$.
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto e^x$.
- 写像 $D : \mathbf{R}[x] \to \mathbf{R}[x]$, $P(x) \mapsto P'(x)$. 但し $\mathbf{R}[x]$ は x を変数とする実係数の多項式全体の集合を表す。
- 写像 $D : \mathbf{R}(x) \to \mathbf{R}(x)$, $f(x) \mapsto f'(x)$. 但し $\mathbf{R}(x)$ は x を変数とする実係数の有理関数全体の集合を表す。

$\boxed{4}$ 定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の定義を述べよ。

$\boxed{5}$ $f(t)$ を連続関数とする.

- $\varphi(x)$ を C^1 関数，a を定数とする。$F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$ の導関数を求めよ。
- $\varphi(x)$, $\phi(x)$ を C^1 関数とする。$G(x) = \int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt$ の導関数を求めよ。

$\boxed{6}$ $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ と書くとき c_n を a_i, b_j を用いて表せ。

$\boxed{7}$ 次の式を考える。

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots)^n$$

- 定数項をもとめよ.
- x の係数を求めよ。
- x^2 の係数を求めよ。q
- x^3 の係数を求めよ。

解析概論 B 演習課題(2006 年 6 月 20 日 (火))

$\boxed{1}$ 部分積分を用いて次の不定積分を計算せよ。

$$\int x^{\alpha} \log x dx \quad (\alpha \neq -1) \qquad \int \mathrm{Tan}^{-1} x dx \qquad \int \mathrm{Sin}^{-1} x dx$$

$\boxed{2}$ 部分分数分解を用いて，次の不定積分を計算せよ。

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}dx \qquad \int \frac{1}{1-x^2}dx \qquad \int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx \qquad \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$\boxed{3}$ $I_n = \int \sin^n x\, dx$ とおくとき，次を示せ。

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$\boxed{4}$ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx,$ とおくとき，次を示せ.

$$I_n = J_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

$\boxed{4'}$ 上式を利用して次を示せ。

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

$\boxed{5}$ $I_n = \int x^n \sin x\ dx$ とおく。次を示せ.

$$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

$\boxed{6}$ 関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が狭義単調増加であれば、単射である事を示せ。

$\boxed{7}$ 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し、次を示せ。

- $g \circ f$ が全射ならば g は全射である。
- $g \circ f$ が単射ならば g は単射である。

$\boxed{8}$ どんな有理関数の不定積分も，有理関数，対数関数，逆正接関数を用いて表すことができることを示せ。

解析概論 B 演習課題(2006 年 6 月 27 日 (火))

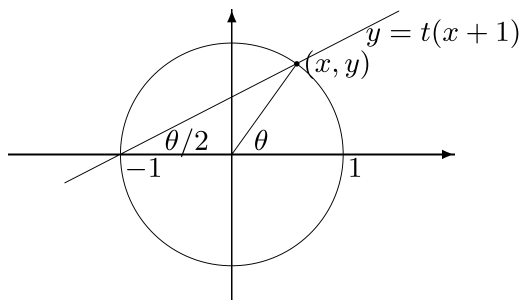
$\boxed{\mathbf{1}}$ x と $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ の有理関数の不定積分は $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ とおけば t の有理関数の積分に帰着する。このことを次を示す事により証明せよ。

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \quad dx = \frac{(ad-bc)t^{n-1}}{a-ct^n}\ dt$$

教科書 106 ページ 問 3.4 にこの置換を用いて計算する問題があるのでやっておくこと。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 三角関数 $\sin\theta, \cos\theta$ の有理関数の積分は $t = \tan\frac{\theta}{2}$ と置く事により t の有理関数の積分に帰着する事を示せ。(方針: まず原点を中心とする単位円上に点 $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ をとり、次に $(-1,0)$ と (x,y) を結ぶ直線 $y = t(x+1)$ を書き, (x,y) を t で表す。)

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \\ \theta &= 2\tan^{-1} t \\ d\theta &= \frac{2}{t^2+1}\ dt. \end{aligned}$$



教科書 107 ページ 問 3.5 にこの置換を用いて計算する問題があるのでやっておくこと。この方法で置換をすると必ず不定積分を求める事が出来るが、最後まで計算するのは大変になる事もある. 例えば次の積分はそのような例である。それぞれの積分は括弧の中に示している方針で計算した方がはるかに簡単である。

$$\int \sin^2 x\ dx \quad (\text{ヒント: } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}), \int \sin^3 x\ dx \quad (\text{ヒント: } t = \cos x \text{ とおく}).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}\right\} \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 定積分の考え方を用いて、次の不等式を示せ。

$$\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)$ を C^n 関数 $(n \geq 1)$

$$R_k = \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

とするとき、次を示せ。

1. $R_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.
2. $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$.

$\boxed{\mathbf{6^*}}$ $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α は実数) とおく. 前問を利用して次の等式を示せ。

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$