多項式写像の非固有値軌跡とニュートン図形

（土屋健希氏との共同研究）

福井 敏純 (埼玉大学)

可微分写像の特異点論とその応用
鈴木正彦先生退職記念研究集会
2023年2月22日 14:30-15:15
日本大学文理学部

Toshizumi Fukui, Takeki Tsuchiya
Properness of Polynomial Maps with Newton Polyhedra,
Published: 29 June 2022
Arnold Mathematical Journal
https://doi.org/10.1007/s40598-022-00205-2

定義

多項式写像 $f = (f^1, \ldots, f^n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を考える。

定義

点 $y_0 \in \mathbb{C}^n$ が f の固有値 (proper point) とは，任意の弧 $x(t) : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^n$ に対し次が成り立つときをいう。

$$\lim_{t \to 0} f(x(t)) = y_0 \implies \lim_{t \to 0} x(t) \text{ が } \mathbb{C}^n \text{ 内に存在。}$$

f の 非固有値軌跡 (non-properness set) S_f を次で定める。

$$\begin{aligned} S_f &= \{ y_0 \in \mathbb{C}^n : y_0 \text{ は } f \text{ の固有値でない} \} \\ &= \left\{ y_0 \in \mathbb{C}^n : \begin{array}{c} \exists x(t) : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^n \text{ such that} \\ \lim_{t \to 0} f(x(t)) = y_0, \ \lim_{t \to 0} x(t) = \infty \end{array} \right\} \end{aligned}$$

予備的考察

$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ をコンパクト化して得られる写像

$$\bar{f} : X \longrightarrow Y$$

を考える．ここで X, Y は射影多様体．
$X_\infty = X \setminus \mathbb{C}^n$, $Y_\infty = Y \setminus \mathbb{C}^n$　と置く．
X_∞ および Y_∞ は単純正規交差因子と仮定する．すると

$$S_f = \bar{f}(X_\infty) \cap \mathbb{C}^n$$

$\bar{f}$ は固有写像なので，$\bar{f}(X_\infty)$ は Y の閉集合であり，
S_f は $\mathbb{C}^n$ の閉集合である事がわかる．

Jelonek の結果

定理 [Jelonek 1993]

多項式写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が支配的ならば，
S_f は $\mathbb{C}$ 単有理的超曲面か空集合である．

代数多様体が $\mathbb{C}$ 単線織的 とは，ある代数多様体 X に対し
$X \times \mathbb{C}$ の双有理写像の像で書けるときを言う．

Jelonek は S_f の次数の評価も与えている．

Z. Jelonek, The set of points at which a polynomial map is not proper, Ann. Polon. Math. 58 (1993), 259–266.
Z. Jelonek, Testing sets for properness of polynomial mappings, Math. Ann., 315(1), 1–35, 1999.
Z. Jelonek and M. Lasoń, Quantitative properties of the non-properness set of a polynomial map, manuscripta math. 156, 383–397 (2018)

ニュートン図形

$f^j = \sum_\nu c^j_\nu x^\nu$, $j = 1, \ldots, n$, と置く．
f^j のニュートン図形を次で定める．

$$\Delta(f^j) = \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n : c^j_\nu \neq 0\} \text{ の凸包.}$$

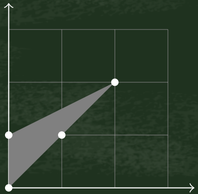
F$\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

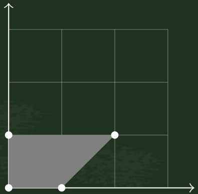
$$d_j(\boldsymbol{p}) = -\min\{\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu} \rangle : \boldsymbol{\nu} \in \Delta(f^j)\}$$
$$\gamma_j(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{\nu} \in \Delta(f^j) : \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu} \rangle = -d_j(\boldsymbol{p})\}$$

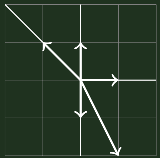
と置く．但し $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\nu} \rangle = p_1\nu_1 + \cdots + p_n\nu_n$.
$\gamma_j(\boldsymbol{p})$ を $\Delta(f^j)$ の $\boldsymbol{p}$ が支持する面と呼ぶ．

例

$$(f^1(x,y), f^2(x,y)) = (x^2y^2 + xy + y + 1, x^2y + y + x + 1)$$


$\Delta(f^1)$


$\Delta(f^2)$


面を支持する
ベクトル達

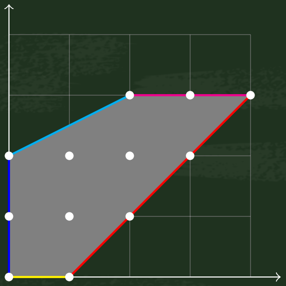
$d_1(0,-1) = 2$ $\quad$ $d_2(0,-1) = 1$

$d_1(-1,1) = 0$ $\quad$ $d_2(-1,1) = 1$

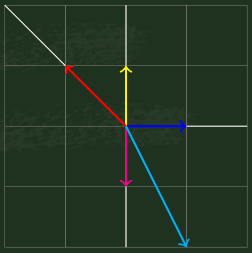
ミンコフスキー和

- $\Delta(\boldsymbol{f}) = \Delta(f^1) + \cdots + \Delta(f^n)$
- Δ^* : $\Delta(\boldsymbol{f})$ の双対扇
- $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}} = (f^1_{\gamma_1}, \ldots, f^n_{\gamma_n})$ 但し $f^j_{\gamma_j} = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\gamma_j} c^j_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\nu}}$

$$(f^1(x,y), f^2(x,y)) = (x^2y^2 + xy + y + 1, x^2y + y + x + 1)$$



$\Delta(\boldsymbol{f})$



Δ^* の１次元錐の生成元

多項式 f^j $(j=1,\dots,n)$ は定数でなく，
かつ0でない定数項を持つと仮定する．
定数項が0なら非零定数を足せばよい．

- $p \in \mathbb{Z}^n$ に対し，$\boldsymbol{\gamma}(p) = (\gamma_1(p),\dots,\gamma_n(p))$.
- $p \in \mathbb{Z}^n$ に対し，$J_{\boldsymbol{\gamma}(p)} = \{j \in \{1,\dots,n\} : 0 \notin \gamma_j\}$.
- $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f}) = \{\boldsymbol{\gamma}(p) : p \in \mathbb{Z}^n \setminus (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n\}$ 非座標面の集合
- $J \subset \{1,\dots,n\}$ に対し，

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^J \times \mathbb{C}^{J^c}, \quad J^c = \{1,\dots,n\} \setminus J$$

- $J \subset \{1,\dots,n\}$ に対し，$\boldsymbol{f}^J = (f^j)_{j\in J}$

$$\boldsymbol{f}^J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^J$$

- $\det \mathrm{Jac}(\boldsymbol{f})$ が恒等的に0でないならば $\boldsymbol{f}$ は支配的である．

主定理

次の記号を用いる．

$$
\begin{aligned}
Z(f_{\gamma}^{J}) =& \{x \in (\mathbb{C}^*)^n : f_{\gamma}^{J}(x) = 0\}, \\
\Sigma(f_{\gamma}^{J}) =& \{x \in (\mathbb{C}^*)^n : \mathrm{rank}\,\mathrm{Jac}(f_{\gamma}^{J}) < \#J\}.
\end{aligned}
$$

定理 1

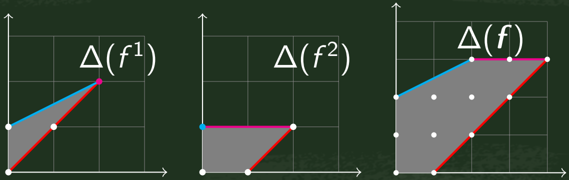
f が支配的で，$\forall \gamma \in \Delta_{\mathrm{nc}}(f)$, $J = J_{\gamma}$, に対し $Z(f_{\gamma}^{J}) \setminus \Sigma(f_{\gamma}^{J})$ が $Z(f_{\gamma}^{J})$ で稠密ならば，

$$
S_f = \bigcup_{\gamma \in \Delta_{\mathrm{nc}}(f)} S_{\gamma}
$$

但し $S_{\gamma} = f^{J^c}(Z(f_{\gamma}^{J})) \times \mathbb{C}^J$.

例（続き）

$$(f^1(x,y), f^2(x,y)) = (x^2y^2 + xy + y + 1, x^2y + y + x + 1)$$



$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}(-1,1)} = (x^2y^2 + xy + 1, x(xy+1)), \quad Z(\boldsymbol{f}^{\{2\}}_{\boldsymbol{\gamma}(1,-1)}) = \{xy + 1 = 0\}$$

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}(0,-1)} = (x^2y^2, (x^2+1)y)), \quad Z(\boldsymbol{f}^{\{1,2\}}_{\boldsymbol{\gamma}(0,-1)}) = \emptyset$$

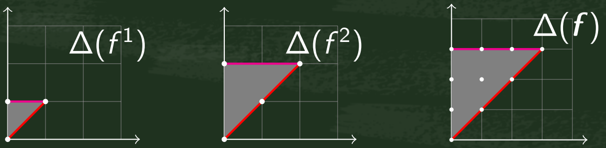
$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}(1,-2)} = (x^2y^2 + y, y), \quad Z(\boldsymbol{f}^{\{1,2\}}_{\boldsymbol{\gamma}(1,-2)}) = \emptyset$$

従って次を得る。

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{f}} &= \{x^2y^2 + xy + 1 : xy + 1 = 0\} \times \mathbb{C} \\ &= \{t^2 + t + 1 : t + 1 = 0\} \times \mathbb{C} = \{1\} \times \mathbb{C} \end{aligned}$$

別の例

$$(f^1(x,y), f^2(x,y)) = (xy + y + 1, x^2y^2 + y^2 + xy + 1)$$



$$f_{\gamma(-1,1)} = (xy + 1, x^2y^2 + xy + 1), \quad Z(f^{\emptyset}_{\gamma(1,-1)}) = (\mathbb{C}^*)^2$$

$$f_{\gamma(0,-1)} = ((x+1)y, (x^2+1)y^2), \quad Z(f^{\{1,2\}}_{\gamma(0,-1)}) = \emptyset$$

従って，

$$\begin{aligned} S_f &= \{(X,Y) : \exists (x,y) \text{ s.t. } (X,Y) = (xy + 1, x^2y^2 + xy + 1)\} \\ &= \{(X,Y) : \exists t \text{ s.t. } (X,Y) = (t + 1, t^2 + t + 1)\} \\ &= \{Y - X^2 + X - 1 = 0\} \end{aligned}$$

固有写像の判定

系

多項式写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が支配的で，
f の各成分の定数項が 0 でなく，
任意の $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(f)$ に対し
γ_i が原点を含まず，
$Z(f_{\boldsymbol{\gamma}}) \setminus \Sigma(f_{\boldsymbol{\gamma}})$ が $Z(f_{\boldsymbol{\gamma}})$ で稠密ならば，
f は固有写像．

非退化条件

Y. Chen, L.R.G. Dias, K. Takeuchi and M. Tibar, Invertible polynomial mappings via Newton non-degeneracy, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 64, 5 (2014), 1807–1822.
は次の非退化条件を定義している．任意の面 $\boldsymbol{\gamma}$ に対し

$$Z(\boldsymbol{f}^J_{\boldsymbol{\gamma}}) \cap \Sigma(\boldsymbol{f}^J_{\boldsymbol{\gamma}}) = \emptyset, \ \ J = J_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

この条件のもと，彼らは次を示している．

$$S_{\boldsymbol{f}} \subset \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

但し $\boldsymbol{f} : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$, $m \geq n$.

主定理の証明

次を示せば十分.

定理 2.

多項式写像 f が支配的ならば

$$\bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S'_{\boldsymbol{\gamma}} \subset S_{\boldsymbol{f}} \subset \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S_{\boldsymbol{\gamma}}. \qquad (1)$$

但し

$$S'_{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{f}^{J^c}\overline{(Z(\boldsymbol{f}^J_{\boldsymbol{\gamma}}) \setminus \Sigma(\boldsymbol{f}^J_{\boldsymbol{\gamma}}))} \times \mathbb{C}^J,\ J = J_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

ここで $\overline{Z}$ は Z の閉包を表す.

主定理の証明

$\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し，次の弧を考える．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) =& (t^{p_1} v^1(t), \ldots, t^{p_n} v^n(t)), \text{ where} \\ \boldsymbol{v}(t) =& (v^1(t), \ldots, v^n(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{v}_i t^i, \\ \boldsymbol{v}_i =& (v_i^1, \ldots, v_i^n), \ \boldsymbol{v}_0 \in (\mathbb{K}^*)^n. \end{aligned}$$

この様な弧全体を $\mathcal{A}(\boldsymbol{p})$ で表す．

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{A}(\boldsymbol{p}) : \exists \boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{f}} \ \boldsymbol{y} = \lim_{t \to 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\}$$

$S_{\boldsymbol{f}} \subset \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S_{\boldsymbol{\gamma}}$ の証明

合成 $f^j(\boldsymbol{x}(t))$ を次のように表す．

$$f^j(\boldsymbol{x}(t)) = t^{-d_j}(\hat{f}^j_0 + \hat{f}^j_1 t + \cdots + \hat{f}^j_{d_j-1} t^{d_j-1} + \hat{f}^j_{d_j} t^{d_j} + o(t^{d_j}))$$

但し $d_j = d_j(\boldsymbol{p})$． もし $\boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{f}}$ ならば，$\boldsymbol{x}(t) \in \mathcal{A}(\boldsymbol{p})$，
$\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^n \setminus (\mathbb{Z}_{\geq})^n$ が存在して

$$\lim_{t \to 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{y},$$

$$\hat{f}^j_0 = \hat{f}^j_1 = \cdots = \hat{f}^j_{d_j-1} = 0 \quad (j \in J = J_{\boldsymbol{\gamma}}).$$

特に $\hat{f}^j_0 = f^j_{\gamma_j(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}_0) = 0$ $(j \in J)$．
$t \to 0$ のとき，$f^j(\boldsymbol{x}(t)) \to \hat{f}^j_{d_j} = \hat{f}^j_0 = f^j_{\gamma_j(\boldsymbol{p})}(\boldsymbol{v}_0)$ $(j \notin J)$． $\square$

$\bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S'_{\boldsymbol{\gamma}} \subset S_{\boldsymbol{f}}$ の証明

まず次の表示ができることに注意する．

$$\hat{f}_i^j = (df_{\gamma_j}^j)_{\boldsymbol{v}_0}(\boldsymbol{v}_i) + r_i^j(\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

但し $r_i^j(\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1})$ は $\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_{i-1}$ の多項式．
$(a_k^j)_{j \in J; k \geq 1}$ を任意の数列とする．
次を満たす $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$, ..., $\boldsymbol{v}_{i-1}$ が取れたと仮定する．

$$\hat{f}_k^j = a_k^j \quad (1 \leq k < i, j \in J).$$

このとき $(df_{\gamma_j}^j)_{j \in J}$ が $\boldsymbol{v}_0$ で階数最大ならば，$\hat{f}_i^j = a_i^j$, $j \in J$,
を満たす $\boldsymbol{v}_i$ が存在する．

$$\begin{aligned} S'_{\boldsymbol{\gamma}} &= \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^{J^c}\left(\overline{Z(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J) \setminus \Sigma(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J)}\right) \times \mathbb{C}^J \\ &\subset \overline{\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^{J^c}(Z(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J) \setminus \Sigma(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J))} \times \mathbb{C}^J \subset \overline{S_{\boldsymbol{f}}} = S_{\boldsymbol{f}}. \qquad \square \end{aligned}$$

一般化

- 多項式写像 $\boldsymbol{f}:\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ に対し，f の像内の至る所稠密でない部分集合 S が存在し次の条件を満たせば，
$$y \notin S \text{ ならば } f^{-1}(y) \text{ はコンパクト}$$
しかし $m > n$ のときは，自動的に $S_{\boldsymbol{f}} = \overline{\mathrm{Im}\,\boldsymbol{f}}$.
- 双対版 $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}''):\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k$
$$f: X \to \mathbb{C}^{n-k} \times \{\boldsymbol{y}_0''\} \subset \mathbb{C}^n$$
但し $X = (\boldsymbol{f}'')^{-1}(\boldsymbol{y}_0'')$.
- 退化している場合
$$\exists \boldsymbol{\gamma} \in \Delta_{\mathrm{nc}(\boldsymbol{f})}: \quad Z(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J) \setminus \overline{Z(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J) \setminus \Sigma(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\gamma}}^J)} \neq \emptyset.$$
- 実の場合

相対化

$f' = (f^1, \dots, f^{n-k})$, $f'' = (f^{n-k+1}, \dots, f^n)$ とする.

$$f'|_X : X \to \mathbb{C}^{n-k}, \quad X = (f'')^{-1}(y_0'') \text{ を考える.}$$

X の非特異点軌跡が X で稠密と仮定し,
$f'|_X$ と $f|_X$ を同一視する. $\boldsymbol{\Delta}(f)$ の面 $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ に対し $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k})$, $\boldsymbol{\gamma}'' = (\gamma_{n-k+1}, \dots, \gamma_n)$ と置く.
$J = J_{\boldsymbol{\gamma}'} = \{j \in \{1, \dots, n-k\} : 0 \notin \gamma_j\}$ に対し次を定める.

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{\gamma}';\boldsymbol{\gamma}''} &= f_{\boldsymbol{\gamma}'}^{J^c}(Z(f_{\boldsymbol{\gamma}}^J, f''_{\boldsymbol{\gamma}''} - y_0'')) \times \mathbb{C}^J, \\ S'_{\boldsymbol{\gamma}';\boldsymbol{\gamma}''} &= f_{\boldsymbol{\gamma}'}^{J^c}(\overline{Z(f_{\boldsymbol{\gamma}}^J, f''_{\boldsymbol{\gamma}''} - y_0'') \setminus \Sigma(f_{\boldsymbol{\gamma}}^J)}) \times \mathbb{C}^J. \end{aligned}$$

相対版定理

定理 3

X が $\{x_1 \cdots x_n = 0\}$ 内に既約成分をもたないとき，

$$\bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S'_{\boldsymbol{\gamma}';\boldsymbol{\gamma}''} \subset S_{\boldsymbol{f}|_X} \subset \bigcup_{\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})} S_{\boldsymbol{\gamma}';\boldsymbol{\gamma}''}.$$

もし $Z(\boldsymbol{f}^J_{\boldsymbol{\gamma}'}, \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{\gamma}''} - \boldsymbol{y}''_0)$, $\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{nc}}(\boldsymbol{f})$, が稠密な非特異点軌跡を持てばこれは等号．
もし X が $\{x_1 \cdots x_n = 0\}$ 内に既約成分 X_1 を持てば $\boldsymbol{f}|_{X_1}$ はより変数の個数の少ない多項式写像であり，変数の個数に関する帰納的扱いが可能．さらに $S_{\boldsymbol{f}|_{X_1}} \subset S_{\boldsymbol{f}|_X}$ を得る．

退化した場合

次で定まる多項式写像 $h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ を考える．

$$h(x, y, z) = (1 + x + z^2, 1 + x^2 + z^3, y^2 - x^3 - z).$$

$\mathbb{C}^3$ 内で $z = y^2 - x^3$ で定まる集合を X と書く．写像 $h|_X$ は次の写像 $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ と同型．

$$f(x, y) = (1 + x + (y^2 - x^3)^2, 1 + x^2 + (y^2 - x^3)^3).$$

これは退化した例であり，定理3を適用して，h は固有写像がわかる．よって f も固有写像．

実の場合

$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$に置き換えて
以上の議論の類似が可能．

注意：一般に S_f は半代数的．
$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $m > n$ に対し，
S_f は $\overline{f(\mathbb{R}^m)}$ でないかもしれない．

ご清聴に感謝します．

鈴木正彦先生
ご退職おめでとう
ございます．