Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 1

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http ://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 1 : (2+2+4+2+2 Punkte)
Sei G eine abelsche Gruppe. Betrachte die Menge $C(G)$, deren Elemente die zyklischen Untergruppen von G sind, versehen mit der partiellen Ordnung $\subseteq$, und fasse die partielle geordnete Menge als Kategorie auf. Sei $\alpha : C(G) \to \text{(Grp)}$ der natürliche Funktor.

(a) Zeige, dass die universelle Eigenschaft des Kolimes eine Abbildung

$$f : \varinjlim \alpha \longrightarrow G$$

liefert.

(b) Zeige, dass f surjektiv ist.

(c) Zeige, dass f ein Isomorphismus ist, wenn die partiell Ordnung auf $C(G)$ filtriert ist.

(d) Für $G = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ zeige, dass f kein Isomorphismus ist.

(e) Für $G = \mathbb{Q}$ zeige, dass f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2 : (2+2+2+4+2+4* Punkte)
Für jeden der folgenden Vergissfunktoren finde einen linksadjungierten Funktor.

(a) Der Funktor F_1 : (Top) $\to$ (Set), der einen topologischen Raum auf die zugrundeliegende Menge schickt.

(b) Der Funktor F_2 : (Ab) $\to$ (Set), der eine abelsche Gruppe auf die zugrundeliegende Menge schickt.

(c) Der Funktor F_3 : (A-Alg) $\to$ (Set), der eine $A-$Algebra (A ein kommutativer Ring) auf die zugrundeliegende Menge schickt. (Wir nehmen an, dass jede $A-$Algebra kommutativ ist).

(d) Der Funktor F_4 : (A-Alg) $\to$ (KomMon), der eine $A-$Algebra R auf das zugrundeliegende multiplikative kommutative Monoid $(R, \times)$ schickt (ein Monoid ist eine Menge M zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $M \times M \to M$, $(m, n) \mapsto mn$, so dass ein $e \in M$ existiert mit $em = me = m$ für alle $m \in M$).

(e) Der Funktor F_5 : (A-Alg) $\to$ (Ab), der eine $A-$Algebra R auf die zugrundeliegende additive Gruppe $(R, +)$ schickt.

*(f) Der Funktor F_6 : (Ring) $\to$ (Set), der einen (nicht unbedingt kommutativen) Ring auf die zugrundeliegende Menge schickt.

Aufgabe 3 : (4+4+4 Punkte)
Sei $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie, $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, und seien $\alpha : \mathcal{I} \to (\mathrm{Top})$ und $\beta : \mathcal{I}^{\mathrm{opp}} \to (\mathrm{Top})$ zwei Funktoren.

(a) Für $\mathcal{I}$ eine diskrete Kategorie (d.h. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(x, y) = \emptyset$ für $x \neq y$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(x, x) = \{\mathrm{id}_x\}$) zeige, dass

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\, \alpha = \coprod_{i \in I} \alpha(i) \quad \text{und} \quad \lim_{\mathcal{I}^{\mathrm{opp}}} \beta = \prod_{i \in I} \beta(i)$$

wobei diese Räume mit deren natürlichen Topologien versehen sind.

(b) Betrachte die Teilmenge $X \subseteq \prod_{i \in I} \beta(i)$, die wie folgt definiert ist. Ein Element $x = (x_i)_{i \in I}$ ist in X, wenn für jeden Morphismus $i \xrightarrow{f} j$ in der Kategorie $\mathcal{I}$ gilt, dass $x_i = (\beta f)(x_j)$. Die Teilmenge X wird mit der induzierten Topologie versehen. Zeige, dass $X = \lim_{\mathcal{I}^{\mathrm{opp}}} \beta$.

(c) Es sei $Y = \coprod_{i \in \mathcal{I}} \alpha(i)$ (mit der natürlichen Topologie). Betrachte die Relation $\star$ auf Y :

$$x \star y \iff \exists i, j \in \mathrm{ob}(I),\ \exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j),\ y = (\alpha f)(x)$$

Sei $\sim$ die von $\star$ erzeugte Äquivalenzrelation. Betrachte den Quotienten $Y/\sim$ mit der Quotiententopologie (d.h., eine Teilmenge U von $Y/\sim$ ist offen, wenn ihr Urbild in Y offen ist). Zeige, dass $Y/\sim$ der Kolimes von α ist.

Aufgabe 4 : (3+3+6 Punkte)
Sei $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie, $I = \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ und seien $\alpha : \mathcal{I} \to (\mathrm{Top})$ und $\beta : \mathcal{I}^{\mathrm{opp}} \to (\mathrm{Top})$ zwei Funktoren.

(a) Nehmen wir an, dass $\forall i \in I$, $\beta(i)$ Hausdorff ist. Zeige, dass $\lim_{\mathcal{I}^{\mathrm{opp}}} \beta$ Hausdorff ist.

(b) Nehmen wir an, dass $\forall i \in I$, $\beta(i)$ kompakt ist. Zeige, dass $\lim_{\mathcal{I}^{\mathrm{opp}}} \beta$ kompakt ist.

(c) Zeige, dass zu (a) und (b) analoge Aussage für $\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}\alpha$ im Allgemeinen nicht gelten.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 2

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 5: (8+4+6* Punkte)

Sei X ein topologischer Raum.

(a) Betrachte die Borel σ-Algebra $\mathcal{B}_X$ von X (d.h. $\mathcal{B}_X$ ist die kleinste σ-Algebra auf X die, die die offenen Teilmengen enthält). Wir nehmen an, dass jede offener Teilraum von X ein Lindelöf-Raum ist (ein Lindelöf-Raum ist ein topologischer Raum, so dass jede Überdeckung eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung besitzt). Betrachte die Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, die eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ auf die Menge der messbaren Funktionen $U \to \mathbb{R}$ schickt. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe ?

(b) Betrachte die Prägarbe $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ stetig und beschränkt}\}$.
   - Angenommen $X = \mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathcal{F}$ keine Garbe ist.
   - (*) Angenommen X ist ein metrischer Raum. Zeige, dass $\mathcal{F}$ genau dann eine Garbe ist, wenn X endlich und diskret ist.

Aufgabe 6: (3+3+3+3+3* Punkte)

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen (additiv geschrieben) auf einem topologischen Raum X, und sei $s \in \mathcal{F}(X)$ ein Schnitt. Der *Träger von s* ist die Menge :

$$\operatorname{supp}(s) = \{x \in X;\ s_x \neq 0\}\,,$$

wobei s_x der Keim von s in x ist. Der *Träger von $\mathcal{F}$* ist die Menge

$$\operatorname{supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X;\ \mathcal{F}_x \neq \{0\}\}\,.$$

(a) Zeige, dass $\operatorname{supp}(s) \subseteq \operatorname{supp}(\mathcal{F})$, und dass $\operatorname{supp}(s)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

(b) Für $\mathcal{F} = \mathcal{C}_X$ (die Garbe der stetigen Abbildungen reell-wertigen Abbildungen auf X) zeige, dass $\operatorname{supp}(s)$ der Abschluss von $\{x \in X, s(x) \neq 0\}$ ist. Bestimme $\operatorname{supp}(\mathcal{F})$.

(c) Sei $D \subseteq X$ eine Teilmenge. Sei $\mathcal{F}_D$ die Prägarbe mit $\mathcal{F}_D(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R} \text{ stetig; } f|_{U\cap D} = 0\}$. Zeige, dass $\mathcal{F}_D$ eine Garbe ist.

(d) Sei $\mathring{D}$ das Innere von D, und sei $\overline{D}$ der Abschluss von D. Zeige, dass $\mathcal{F}_D = \mathcal{F}_{\overline{D}}$ gilt. Zeige, dass

$$X - \overline{D} \subseteq \operatorname{supp}(\mathcal{F}_D) \subseteq X - \mathring{\overline{D}}$$

gilt.

(e*) Wir nehmen an, dass X ein metrischer Raum ist. Zeige, dass

$$\operatorname{supp}(\mathcal{F}_D) = X - \overset{\circ}{\overline{D}}$$

gilt. Hinweis : Betrachte die stetige Abbildung $y \mapsto d(y,\overline{D})$, wobei d die Metrik von X ist.

Aufgabe 7: (2+3+4+3 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Ein étaler Raum über X ist ein topologischer Raum E zusammen mit einem lokalen Homöomorphismus $\pi\colon E \to X$ (ein lokaler Homöomorphismus ist eine stetige Abbildung, so dass für alle $x \in E$ eine Umgebung $V \subseteq E$ von x existiert, so dass $\pi(V)$ offen in X ist, und $\pi : V \to \pi(V)$ ein Homöomorphismus ist). Seien (E_1,π_1) und (E_2,π_2) zwei étale Räume über X. Ein Morphismus $f : (E_1,\pi_1) \to (E_2,\pi_2)$ ist eine stetige Abbildung $f : E_1 \to E_2$, so dass $\pi_2 \circ f = \pi_1$.

(a) Zeige, dass die étalen Räume über X eine Kategorie $(\text{Et} - X)$ bilden.

(b) Sei (E,π) ein étaler Raum über X. Sei $\mathcal{F}$ die Prägarbe, die eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ auf die Menge der Schnitte von π schickt. Das heißt, $\mathcal{F}(U)$ ist die Menge der stetigen Abbildungen $s : U \to E$, so dass $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$. Zeige, dass $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. Konstruiere einen Funktor $(\text{Et} - X) \to (\text{Sh}(X))$, der einen étalen Raum (E,π) auf die Garbe der Schnitte von π schickt.

(c) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe über X. Betrachte die Menge:

$$E = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

Sei $\pi\colon E \to X$ die Abbildung, die ein $y \in \mathcal{F}_x$ auf x schickt. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jedes $s \in \mathcal{F}(U)$ betrachte die Abbildung $f_{U,s}\colon U \to E$, so dass $f_{U,s}(x) = s_x \in \mathcal{F}_x$ für jedes $x \in U$. Versehe E mit der feinsten Topologie, so dass die Abbildungen $f_{U,s}$ (für alle U,s) stetig sind. Zeige, dass (E,π) ein étaler Raum über X ist.

(d) Konstruiere eine Äquivalenz von Kategorien $(\text{Et} - X) \to (\text{Sh}(X))$.

Aufgabe 8: (6+6 Punkte)

Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen über $\mathbb{C}$. Sei $\mathcal{O}^\times$ die Garbe der invertierbaren Elemente von $\mathcal{O}$, das heißt:

$$\mathcal{O}^\times(U) = \{f \in \mathcal{O}(U)\ ;\ \forall x \in U : f(x) \neq 0\} \qquad U \subseteq \mathbb{C} \text{ offen.}$$

Betrachte den Morphismus von Garben

$$\exp\colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times, \qquad \mathcal{O}(U) \ni f \mapsto \exp \circ f \in \mathcal{O}^\times(U).$$

(a) Zeige, dass $\exp$ ein surjektiver Homomorphismus von Garben abelscher Gruppen ist.

(b) Finde $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, so dass $\exp_U\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^\times(U)$ nicht surjektiv ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 3

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 9: (3+5+4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, und sei $Z = X - U$. Seien $j\colon U \hookrightarrow X$ und $i\colon Z \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildungen.

(a) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen über Z. Bestimme den Halm $(i_*(\mathcal{F}))_x$ für jedes $x \in X$.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen über U. Sei $j_!\mathcal{F}$ die Garbifizierung der Prägarbe

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{wenn } V \subseteq U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $V \subseteq X$ offen. Bestimme den Halm $(j_!(\mathcal{F}))_x$ für jedes $x \in X$. Zeige, dass

$$(j_!\mathcal{F})(V) = \{s \in \mathcal{F}(U \cap V)\,;\, \mathrm{supp}(s) \text{ is closed in } V\}$$

Zeige, dass die Inklusion $j_!(\mathcal{F}) \hookrightarrow j_*(\mathcal{F})$ im Allgemeinen nicht bijektiv ist.

(c) Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ drei Garben abelscher Gruppen über X, seien $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ Morphismen von Garben abelscher Gruppen. Für $x \in X$ seien f_x und g_x die induzierten Morphismen auf den Halmen. Die Sequenz

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0$$

heißt *exakt*, wenn für jedes $x \in X$ gilt: (i) $\mathrm{Ker}(f_x) = 0$, (ii) $\mathrm{Im}(f_x) = \mathrm{Ker}(g_x)$, (iii) $\mathrm{Im}(g_x) = \mathcal{C}_x$.

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen über X. Konstruiere Morphismen von Garben abelscher Gruppen $a : j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F}$ und $b : \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z)$ so dass der Sequenz:

$$0 \to j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z) \to 0$$

exakt ist.

Aufgabe 10: (6+6 Punkte)

(a) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Sei (E,π) der assoziierte étale Raum (Konstruktion wie in Aufgabe 7 (c), auch wenn $\mathcal{F}$ nur eine Prägarbe ist). Zeige, dass die Garbe der Schnitte von π (Aufgabe 7 (b)) die Garbifizierung von $\mathcal{F}$ ist.

(b) Sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe über X und sei (E,π) der étale Raum von $\mathcal{F}$. Betrachte das *Faserprodukt topologischer Räume* $E \times_X Y$ (d.h. $E \times_X Y = \{(e,y) \in E \times Y\,;\, \pi(e) = f(x)\}$ versehen mit der Teilraum-Topologie des Produktraums $E \times Y$), und sei $p_Y\colon E \times_X Y \to Y$, $(e,y) \mapsto y$ die Projektion. Zeige, dass $(E \times_X Y, p_Y)$ ein étaler Raum übr Y ist, und dass die assoziierte Garbe über Y das Urbild $f^{-1}\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 11: (4+4+4 Punkte)

(a) Sei X ein lokal kompakter topologischer Raum (d.h. X is Hausdorffsch und jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung). Sei $\mathcal{F}$ die Prägarbe mit $\mathcal{F}(U) = \{U \to \mathbb{R}$, stetig und beschränkt$\}$ für $U \subseteq X$ offen. Bestimme die Garbifizierung von $\mathcal{F}$.

(b) Sei X ein topologischer Raum, sei E eine Menge, und sei $\mathcal{F}$ die Prägarbe mit $\mathcal{F}(U) = E$ für $U \subseteq X$ offen. Betrachte:

$$\mathcal{G}(U) = \{U \to E \text{ lokal konstant}\}$$

Zeige, dass $\mathcal{G}$ die Garbifizierung von $\mathcal{F}$ ist.
Diese Garbe $\mathcal{G}$ heißt die *konstante Garbe auf* X *mit Wert* E und wird auch mit $\underline{E}_X$ bezeichnet.

(c) Sei $X = \mathbb{C}$ und $U = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$. Sei $j\colon U \to X$ die Inklusionsabbildung. Bestimme den Halm $(j_*\underline{\mathbb{Z}}_U)_x$ für jedes $x \in X$.

Aufgabe 12: (6+6 Punkte)

Für einen topologischen Raum X sei $\mathcal{C}_X$ die Garbe der reell-wertigen stetigen Funktionen auf X.

(a) Let $e\colon \mathbb{R} \to S^1 := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$, $e(x) := \exp(ix)$. Induziert $e^\sharp_{\mathbb{R}}\colon e^{-1}(\mathcal{C}_{S^1}) \to \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren

$$e^{-1}(\mathcal{C}_{S^1})(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\,;\, f(x+2\pi) = f(x)\}\ ?$$

(b) Sei X ein topologischer Raum, sei Z ein Teilraum, und sei $i\colon Z \to X$ die Inklusion. Zeige, dass $i^\sharp$ im Allgemeinen keinen Isomorphismus $(\mathcal{C}_X)|_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_Z$ induziert. Gib Kriterien für Z an, so dass dies ein Isomorphismus ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 4

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 13: (4+8 Punkte)

Sei $X = \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. Betrachte die Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X mit:

$$\mathcal{O}_X(U) = \Big\{ f : U \to \mathbb{R}\,;\, \forall x \in U\ \exists V_x \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ offen mit } x \in V_x \text{ und } \exists g_x \in \mathcal{C}^\infty(V_x), \text{ so dass } f|_{V_x \cap U} = g_x|_{V_x \cap U} \Big\}$$

für $U \subseteq X$ offen.

(a) Zeige, dass $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokaler $\mathbb{R}$-geringter Raum ist.

(b) Sind $(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}})$ und $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorph ?

Aufgabe 14: (2+3+2+3+2 Punkte)

(a) Man gebe ein Beispiel für eine Prämannigfaltigkeit, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, die aber kein Hausdorff-Raum ist.

(b) (i) Sei $(\Omega, \leq)$ eine unendliche wohlgeordnete Menge (d.h. $\leq$ ist eine totale Ordnung, so dass jede nichtleere Teilmenge von Ω ein kleinstes Element besitzt). Sei $L = \Omega \times]0{,}1]$ versehen mit der lexikographischen Ordnung, die wie folgt definiert ist: Sei (w_1,x) und (w_2,y) zwei Elemente in L. Dann gilt:

$$(w_1,x) \leq (w_2,y) \iff w_1 < w_2 \text{ oder } (w_1 = w_2 \text{ und } x \leq y).$$

Die Ordnungstopologie auf L ist die Topologie, die von den Teilmengen der Form

$$U_\alpha = \{x \in L, x < \alpha\} \text{ und}$$
$$V_\beta = \{x \in L, \beta < x\}$$

(für jede $\alpha,\beta \in L$) erzeugt wird. Zeige, dass L ein zusammenhängender Hausdorff-Raum ist. L heißt auch die *lange Halbgerade*.

(ii) Für $\Omega = \mathbb{N}$ (mit der natürlichen Ordnung) zeige, dass $L \cong \mathbb{R}^{>0}$ (als topologische Räume) gilt.

(iii) Wenn Ω überabzählbar ist, zeige, dass L das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt.

(iv) Für beliebiges Ω wie in (i) zeige, dass eine offene Überdeckung $L = \bigcup_{i\in I} U_i$ und Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to]0,1[$ existieren, so dass $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ ein Atlas ist für eine eindeutige Prämannigfaltigkeitsstruktur auf L (d.h., es existiert eindeutige Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren $\mathcal{C}_L^\infty$ auf L, so dass $(L,\mathcal{C}_L^\infty)$ eine Prämannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ ist).

Aufgabe 15: (6+6*+6 Punkte)

(a) Zeige, dass ein abgeschlossener Teilraum eines parakompakten Raums parakompakt ist.

*(b) Man gebe ein Beispiel für einen parakompakten topologischen Raum X und einen offenen Teilraum $U \subseteq X$, der nicht parakompakt ist.

(c) Ein topologischer Raum X heißt *regulär*, wenn gilt: Für alle $Z \subseteq X$ abgeschlossen und für alle $x \in X \setminus Z$, existieren U, V offen mit $Z \subseteq U$, $x \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
Zeige, dass ein regulärer Lindelöf-Raum parakompakt ist.
(Hinweis: Sei $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Für $x \in X$ wähle $U_x \in \{U_i, i \in I\}$ und V_x offen mit $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$. Sei $\{V_{x_n}\,;\, n \geq 0\}$ eine abzählbare Teilüberdeckung. Dann betrachte $W_n = U_{x_n} - \bigcup_{j<n} \overline{V_{x_j}}$).

Aufgabe 16: (12 Punkte)

Sei X ein lokal kompakter Raum. Zeige, dass X genau dann parakompakt ist, wenn X eine disjunkte Vereinigung σ-kompakter Räume ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 5

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 17: (4+2+6+4* Punkte)

(a) Sei G eine zusammenhängende topologische Gruppe, und sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge. Zeige, dass die von U erzeugte Untergruppe ganz G ist.

(b) Zeige, dass die Gruppen

$$O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R})\,;\, {}^tAA = I_n\right\}$$
$$U_n(\mathbb{C}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{C})\,;\, {}^t\bar{A}A = I_n\right\}$$

mit den Teilraumtopologien als Untergruppen von $GL_n(\mathbb{C})$ kompakte Gruppen sind.

(c) Sei $G = GL_n(\mathbb{K})$, und sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$ ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum der Dimension d. Betrachte die Untergruppe $P := \{g \in G\,;\, g(V) = V\}$. Zeige, dass

$$G/P \to \mathrm{Grass}_d(\mathbb{K}^n) := \{U \subseteq \mathbb{K}^n \text{ } d\text{-dimensionaler } \mathbb{K}\text{-Vektorraum}\}, \qquad gP \mapsto g(V)$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Zeige, dass G/P kompakt ist und dass G/P für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist.
Hinweis : Benutze (b).
Bemerkung: Auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist G/P eine komplexe Mannigfaltigkeit. Man versieht $\mathrm{Grass}_d(\mathbb{K}^n)$ auf diese Weise mit der Struktur einer kompakten Mannigfaltigkeit, genannt die *Grassmannsche der d-dimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^n$*.

*(d) Sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine abgeschlossenene Untergruppe. Wenn G kompakt (bzw. lokal kompakt) ist, zeige, dass G/H (versehen mit der Quotiententopologie) die gleiche Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 18: (12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und betrachte die Determinante $\det\colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Zeige, dass $\det$ ein Morphismus von $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. von komplexen Mannigfaltigkeiten (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist. Bestimme $\mathrm{rk}_p(\det)$ für alle $p \in M_n(\mathbb{K})$.

Aufgabe 19: (2+3+7 Punkte)

Ein surjektive stetige Abbildung $p : M \to N$ von topologischen Räumen heißt *Überlagerung*, wenn für jedes $x \in N$ eine offene Umgebung U von x in N existiert, so dass gilt: $p^{-1}(U) = \coprod_i V_i$ mit $V_i \subseteq M$ offen und $p|_{V_i} : V_i \to U$ ist ein Homöomorphismus.

(a) Angenommen N ist ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass M auch ein Hausdorff-Raum ist.

(b) Angenommen N erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom und angenommen $p^{-1}(x)$ ist abzählbar für jedes $x \in N$. Zeige, dass M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(c) Sei N eine Prämannigfaltigkeit und $p : M \to N$ eine Überlagerung. Zeige, dass M eine eindeutige Struktur einer Prämannigfaltigkeit besitzt, so dass p ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 20: (4+8+4*+4*+4* Punkte)

Sei M eine Prämannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und sei $\mathfrak{m}_p$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{M,p}$. Betrachte die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung:

$$\iota : T_p(M) \hookrightarrow \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_{M,p},\mathbb{K})$$

(a) Zeige, dass

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_{M,p},\mathbb{K}) \to (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*, \qquad \xi \mapsto \xi|_{\mathfrak{m}_p}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen ist (($)^*$ bezeichnet den Dualraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums).

(b) Wenn M eine $\mathcal{C}^\infty-$Mannigfaltigkeit oder eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, zeige, dass ι ein Isomorphismus ist.

*(c) Nehmen wir jetzt an, dass $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und dass M eine $\mathcal{C}^\alpha$-Prämannigfaltigkeit mit $1 \leq \alpha < \infty$ ist. Wir wünschen zu zeigen, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_{M,p},\mathbb{K}))$ unendlich ist. Warum reicht es, den Fall $M = \mathbb{R}$, $p = 0$ zu betrachten?

*(d) Angenommen $M = \mathbb{R}$, $p = 0$ und $f \in \mathfrak{m}_p$ definiere:

$$o(f) = \sup\left\{\beta \geq 0, \lim_{x\to 0} |x|^{-\beta} f(x) = 0\right\}$$

Zeige, dass $o(f) > \alpha + 1$ oder $o(f) \in \mathbb{N}$.

*(e) Zeige, dass $\left\{|x|^\beta, \alpha < \beta < \alpha + 1\right\}$ linear unabhängig in $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ist. Folgere, dass $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{M,p},\mathbb{R}))$ unendlich ist, und dass ι kein Isomorphismus ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 6

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 21: (4+4+4 Punkte)

Für jede der folgenden Gruppen zeige, dass sie reguläre Untermannigfaltigkeiten von $GL_n(\mathbb{K})$ sind. Bestimme die Dimensionen und die Tangentialräume in der Einheitsmatrix I_n als lineare Unterräume von $T_{I_n}(M_n(\mathbb{K})) = M_n(\mathbb{K})$.

(a) $SL_n(\mathbb{K})$, Mannigfaltigkeit = $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und = komplexe Mannigfaltigkeit für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(b) $O(n) := \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,;\, {}^tAA = I_n\}$, Mannigfaltigkeit = $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit.

(c) $U(n) := \left\{A \in GL_n(\mathbb{C})\,;\, {}^t\bar{A}A = I_n\right\}$, Mannigfaltigkeit = $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit (insbesondere wird $GL_n(\mathbb{C})$ als reelle $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit aufgefasst: als offene Teilmenge im $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$).

Aufgabe 22: (4+8 Punkte)

(a) Zeige, dass eine Submersion eine offene Abbildung ist.

(b) Sei $F\colon M \to N$ ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

  (i) Der Rang von F ist lokal konstant.

  (ii) Für jedes $p \in M$ existiert eine Karte $(U, x, V, y, \widetilde{F})$ von F bei p, so dass $\widetilde{F}$ die Einschränkung einer linearen Abbildung ist.

Aufgabe 23: (8+6*+4+4* Punkte)

Seien $m,n \geq 1$ zwei ganze Zahlen. Für jedes $0 \leq k \leq \min(m,n)$ sei $R_k \subseteq M_{m,n}(\mathbb{K})$ die Menge der Matrizen mit Rang k.

(a) Zeige, dass R_1 eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ist.
*(b) Zeige eine analoge Aussage für R_k.
(c) Bestimme den Abschluss $\overline{R_k}$ von R_k.
*(d) Ist $\overline{R_1}$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $M_{m,n}(\mathbb{K})$?

Aufgabe 24: (2+5+5 Punkte)

(a) Sei $F\colon M \to N$ ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten. Zeige, dass F genau dann ein Isomorphismus ist, wenn F bijektiv ist und wenn für alle $p \in M$ die Abbildung $T_p(F)$ bijektiv ist.

(b) Sei $U \subset GL_n(\mathbb{R})$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen 1 auf der Hauptdiagonalen. Betrachte die Abbildung

$$F\colon O(n) \times U \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad (A,B) \mapsto AB.$$

Zeige, dass F ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus von $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten ist.

(c) Sei $r \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $S^{++} \subset GL_n(\mathbb{R})$ die Menge der positiv definiten symmetrischen Matrizen. Betrachte die Abbildung

$$F : S^{++} \longrightarrow S^{++}, \quad A \mapsto A^r$$

Zeige, dass F ein $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus von $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 7

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 25: (5+2+5 Punkte)

Sei M eine Prämannigfaltigkeit.

(a) Sei $S \subseteq T \subseteq M$ zwei Unterräume mit T reguläre Unterprämannigfaltigkeit. Zeige dass S genau dann eine reguläre Unterprämannigfaltigkeit von T ist, wenn S eine reguläre Unterprämannigfaltigkeit von M ist.

(b) Sei N eine Prämannigfaltigkeit und $S \subseteq N$ eine reguläre Unterprämannigfaltigkeit. Sei $F : N \to M$ ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten. Zeige, dass $F|_S : S \to M$ ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten ist.

(c) Sei N eine Prämannigfaltigkeit und $T \subseteq N$ eine reguläre Unterprämannigfaltigkeit. Sei $F : N \to M$ eine Abbildung mit $F(N) \subseteq T$. Zeige, dass $F : N \to M$ genau dann ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten ist, wenn $F : M \to T$ ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 26: (2+4+2+4 Punkte)

Für G eine Gruppe sei $\text{Cent}(G) = \{g \in G\,;\, \forall\, h \in G : gh = hg\}$ das *Zentrum von* G. Für X eine $G-$Menge definiere $X^G = \{x \in X\,;\, g.x = x\, \forall\, g \in G\}$.

(a) Betrachte die Aktion von G auf sich selbst durch Konjugation

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto ghg^{-1}.$$

Zeige, dass dies tatsächlich eine $G-$Aktion ist, dass $G^G = \text{Cent}(G)$ und dass

$$\text{Stab}_G(h) = \{g \in G\,;\, gh = hg\}$$

für alle $h \in G$.

(b) Sei X eine endliche $G-$Menge und seien $\theta_1,\dots,\theta_n \subseteq X$ die $G-$Orbiten. Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$, wähle $x_i \in \theta_i$. Zeige, dass

$$|X| = |X^G| + \sum_{x_i \notin X^G} [G : \text{Stab}_G(x_i)]$$

gilt.

(c) Sei p eine Primzahl. Sei G eine $p-$Gruppe (d.h. $|G| = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$). Sei X eine endliche $G-$Menge. Zeige, dass
$$|X| \equiv |X^G| \bmod p$$
gilt.

(d) Sei G eine $p-$Gruppe mit $|G| = p^n$. Zeige, dass $\mathrm{Cent}(G) \neq \{1\}$. Zeige, dass für jedes $0 \leq k \leq n$ eine Untergruppe $H \subseteq G$ existiert mit $|H| = p^k$.

Aufgabe 27: (4+8 Punkte)

Betrachte die reelle Lie Gruppe $G = (\mathbb{R},+)$. Sei $M = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachte die Abbildung
$$G \times M \to M, \quad (\varphi,(z_1,z_2)) \mapsto \left(e^{2i\pi\varphi} z_1, e^{2i\pi\alpha\varphi} z_2\right)$$

(a) Zeige, dass M eine G-Mannigfaltigkeit ist.

(b) Zeige, dass $\alpha \in \mathbb{Q}$ genau dann, wenn für jedes $m \in M$ die Bahn Gm von m eine reguläre Untermannigfaltigkeit von M ist.

Aufgabe 28: (12 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Definiere
$$\mathscr{L}_f(U) = \{g \colon U \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\,;\ \exp \circ g = f|_U\}$$
für $U \subseteq M$ offen. Konstruiere eine Garbe abelscher Gruppen $\mathscr{A}$ auf M und eine Operation
$$\mathscr{A} \times \mathscr{L}_f \to \mathscr{L}_f$$
so dass $\mathscr{L}_f$ ein $\mathscr{A}-$Pseudotorsor ist. Zeige, dass $\mathscr{L}_f$ genau dann ein $\mathscr{A}-$Torsor ist, wenn $f(z) \neq 0$ für jedes $z \in M$ gilt.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 8

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 29: (4+8 Punkte)

(a) Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Betrachte die natürliche Aktion von $O(n)$ auf der $(n-1)-$dimensionalen Sphäre

$$S^{n-1} = \left\{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \, ; \, x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\right\}$$

Zeige, dass diese Aktion einen Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten

$$O(n)/H \simeq S^{n-1}$$

liefert, wobei $H \subseteq O(n)$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, die isomorph zu $O(n-1)$ ist.

(b) Sei $g \geq 1$ eine ganze Zahl. Betrachte die *Siegelsche obere Halbebene*

$$\mathcal{H}_g = \{M \in M_g(\mathbb{C}) \text{ symmetrisch mit } \mathrm{Im}(M) > 0\},$$

d.h. der Imaginärteil von M ist positiv definit. Die symplektische Gruppe ist

$$Sp_{2g}(\mathbb{R}) = \left\{P \in GL_{2g}(\mathbb{R}) \, ; \, {}^tPJP = J\right\}$$

wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$. Für $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$ (mit $A,B,C,D \in M_g(\mathbb{R})$) und $M \in \mathcal{H}_g$ definiere:

$$P.M := (AM + B)\,(CM + D)^{-1}$$

Zeige, dass dies eine transitive Gruppenoperation von $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ auf $\mathcal{H}_g$ ist. Zeige, dass

$$U(g) \to \mathrm{Stab}_{Sp_{2g}(\mathbb{R})}(iI_g), \qquad A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus von reellen Liegruppen ist und folgere $\mathcal{H}_g \cong Sp_{2g}(\mathbb{R})/U(g)$.

Hinweis: Aus der Linearen Algebra is bekannt, dass jede positiv definite matrix $S \in M_n(\mathbb{R})$ geschrieben werden kann als $S = A\,{}^tA$ für ein $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 30: (1+4+3+4 Punkte)

Bestimme die Gruppe $H^1(X,\mathbb{Z})$ für jeden der folgenden Räume:

(a) $X = \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 0$
(b) $X = S^n$ mit $n \geq 1$
(c) $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ mit $n \geq 0$
(d) $X = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$

Hinweis: Funktionentheorie (inkl. Übungsaufgaben): `www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/archiv/archiv-vorlesungen/funktionentheorie.html`

Aufgabe 31: (3+6+3 Punkte)

(a) Zeige, dass ein bijektiver Morphismus von Prämannigfaltigkeiten mit lokal kontantem Rang ein Isomorphismus ist.
(b) Sei $F\colon X \to Y$ ein Morphismus von Prämannigfaltigkeiten. Betrachte die Menge:

$$V = \{x \in X\,;\, \exists\, U \subseteq X \text{ offen mit } x \in U, \text{ so dass } \mathrm{rk}(F|_U) \text{ konstant ist}\}$$

Zeige, dass V offen und dicht ist.
(c) Bestimme V für $F\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$.

Aufgabe 32: (12 Punkte)

Sei M eine Prämmannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine Teilmenge. Sei $f \in \mathcal{O}_S(S)$. Betrachte die Eigenschaft $\mathcal{P}(f)$, dass "f global Einschränkung einer $\mathcal{C}^\alpha$-/holomorphen Funktion ist", d.h.:

$$\exists U \subseteq M \text{ offen mit } S \subseteq U \text{ und } g \in \mathcal{O}_M(U) \text{ s.d. } f = g|_S \qquad (\mathcal{P}(f))$$

Finde eine Garbe abelscher Gruppen $\mathcal{A}$ auf M und eine Abbildung $\delta : \mathcal{O}_S(S) \to H^1(M,\mathcal{A})$, so dass für alle $f \in \mathcal{O}_S(S)$ die Äquivalenz

$$\mathcal{P}(f) \iff \delta(f) = 0$$

gilt.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2012/13

Übungen Reelle Analysis
Blatt 9

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/archiv/mannigfaltigkeiten-und-garben.html

Aufgabe 33: (6+6 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathscr{F}$ auf X heißt *welk*, wenn für alle $U \subseteq X$ offen die Einschränkungsabildung $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ surjektiv ist.

(a) Sei $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X. Definiere eine welke Garbe $\tilde{\mathscr{F}}$ durch $\tilde{\mathscr{F}}(U) := \prod_{x \in U} \mathscr{F}_x$ (die Restriktionsabbildung sind durch die Projektionen gegeben. Zeige, dass der Morphismus von Garben

$$\mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}, \qquad \mathscr{F}(U) \ni s \mapsto (s_x)_{x \in U} \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$$

injektiv ist.

(b) Sei $\mathscr{A}$ eine welke Garbe von Gruppen. Zeige, dass $H^1(X, \mathscr{A}) = 1$.

Hinweis: Wenn T ein $\mathscr{A}$-Torsor und $s \in T(U)$ sei

$$E := \left\{(V, t), U \subseteq V \subseteq X \text{ offen }, t \in T(V) \text{ mit } t_{|U} = s\right\}$$

Betrachte ein "maximales" Element von E. Benutze dafür das Lemma von Zorn.

Aufgabe 34: (4+4+4 Punkte)

Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathscr{O}_X$-Modul heißt *endlich erzeugt* wenn eine offene Überdeckung $(U_i)_i$ von X und für alle i ein $n_i \in \mathbb{N}_0$ und surjektiver Homomorphismus von $\mathscr{O}_{U_i}$-Moduln $\mathscr{O}_{U_i}^{n_i} \to \mathscr{F}|_{U_i}$ existieren.

Sei $\mathscr{F}$ ein endlich erzeugter $\mathscr{O}_X$-Modul.

(a) Sei $x \in X$, $x \in U \subseteq X$ offen, und seien $s_1, \dots, s_n \in \mathscr{F}(U)$, so dass die Keime $(s_1)_x, \dots, (s_n)_x$ den $\mathscr{O}_{X,x}$-Modul $\mathscr{F}_x$ erzeugen. Zeige, es existiert $x \in V \subseteq U$ offen, so dass die $(s_j)_y$ den $\mathscr{O}_{X,y}$-Modul $\mathscr{F}_y$ für alle $y \in V$ erzeugen.

(b) Zeige, dass für jede ganze Zahl $r \geq 0$ die Teilmenge

$$X_r := \{x \in X \; ; \; \mathscr{F}_x \text{ kann durch } r \text{ Elemente als } \mathscr{O}_{X,x}\text{-Modul erzeugt werden}\}$$

offen in X ist.

(c) Zeige, dass $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) := \{x \in X; \mathscr{F}_x \neq 0\}$ abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 35: (12 Punkte)

Sei $n \geq 2$. Zeige, dass $H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \underline{\mathbb{Z}}) = 0$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Dies soll aber nicht benutzt werden – es sei denn mit Beweis.

Aufgabe 36: (6+6 Punkte)

Sei $D := (n_z)_{z\in\mathbb{C}}$ ein Tupel ganzer Zahlen $n_z \in \mathbb{Z}$, so dass $\{z \in \mathbb{C}; n_z \neq 0\}$ diskret und abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Definiere eine Garbe $\mathscr{L}_D$ auf $\mathbb{C}$ durch

$$\mathscr{L}_D(U) := \{f \text{ meromorphe Funktion auf } U\ ; \operatorname{ord}_z(f) \geq n_z \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\}$$

für $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(a) Zeige, dass $\mathscr{L}_D$ durch Addition meromorpher Funktionen und Multiplikation mit holomorphen Funktionen zu einem $\mathscr{O}_\mathbb{C}$-Modul wird.

(b) Zeige, dass $\mathscr{L}_D$ ein lokal freier $\mathscr{O}_\mathbb{C}$-Modul vom Rang 1 ist.

Bemerkung: Ein solches Tupel D nennt man auch *Divisor*.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 10

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 37: (12+6* Punkte)

(a) Seien M,N zwei Prämannigfaltigkeiten, sei $\pi : E \to N$ ein Vektorbündel über N, und sei $F : M \to N$ ein Morphismus von Prämannigfaltikeiten. Betrachte das Faserprodukt von topologischen Räumen $E_M := E \times_N M := \{(e,m)\,;\, \pi(e) = F(m)\}$. Zeige, dass eine Struktur einer Prämannigfaltigkeit auf E_M existiert, so dass E_M das Faserprodukt von π und F in der Kategorie der Prämmannigfaltigkeiten ist. Zeige, dass E_M zusammen mit der Projektion $\pi_M : E_M \to M$ ein Vektorbündel ist. Dieses Vektorbündel wird als $F^*(E,\pi)$ bezeichnet.

*(b) Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X-$Moduln. Das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Zeige, dass

$$\mathrm{Mod}(F^*(E,\pi)) = \mathcal{O}_M \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_N} F^{-1}\mathrm{Mod}(E,\pi)$$

Aufgabe 38: (2+2+4+4 Punkte)

(a) Betrachte die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z};\ (x',y') = (x+n,(-1)^n y)$$

Sei $E = \mathbb{R}^2/\sim$ der Quotient (versehen mit der Quotiententopologie), und $q : \mathbb{R}^2 \to E$ die natürliche Abbildung. Zeige, dass es eine eindeutige stetige Abbildung $\pi : E \to S^1$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\epsilon"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $\epsilon(x) = e^{2\pi i x}$.

(b) Zeige, dass E eine eindeutige Struktur von Mannigfaltigkeit besitzt, so dass q ein lokal Diffeomorphismus ist.

(c) Zeige, dass (E,π) ein Geradenbündel auf S^1 ist. Dieses Vektorbündel nennt man *das Möbiusband*.

(d) Zeige, dass (E,π) zum trivialen Geradenbündel $S^1 \times \mathbb{R}$ nicht isomorph ist.

Aufgabe 39: (12+6* Punkte)

(a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und sei $G_k(V)$ die Graßmann-Mannigfaltigkeit der $k-$dimensionalen Untervektorräume von V (Aufgabe 17(d)). Betrachte die Menge

$$T := \{(S,v) \in G_k(V) \times V;\ v \in S\}$$

Versehe T mit der Struktur eines Vektorbündels vom Rang k über $G_k(V)$.

*(b) Für $V = \mathbb{R}^2$ und $k = 1$ betrachte die natürliche Abbildung $F : S^1 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = G_1(\mathbb{R}^2)$. Zeige, dass F^*T zum Möbiusband isomorph ist (Aufgabe 37+38).

Aufgabe 40: (6+3*+3+3 Punkte)

(a) Sei M eine Prämannigfaltigkeit und sei $\mathscr{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_M-$Modul mit konstantem Rang n. Zeige, dass $\mathscr{E} \cong \mathcal{O}_M^n$ genau dann gilt, wenn Schnitte $s_1,\ldots,s_n \in \mathscr{E}(M)$ existieren, so dass $(s_i(p))_{1\leq i\leq n}$ linear unabhängig für jedes $p \in M$ sind.

*(b) Formuliere und beweise eine zu (a) analoge Aussage für einen lokal geringten Raum anstatt einer Prämannigfaltigkeit.

(c) Seien (E,π) und (F,π') zwei Vektorbündel auf einer Prämannigfaltigkeit M, und seien $\mathscr{E},\mathscr{F}$ die assoziierten $\mathcal{O}_M-$Moduln. Sei $w : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ ein Morphismus von $\mathcal{O}_M-$Moduln und sei $\phi : E \to F$ der assoziierte Morphismus von Vektorbündeln. Zeige: Wenn ϕ eine injektive Abbildung ist, ist w ein injektiver Morphismus von $\mathcal{O}_M-$Moduln.

(d) Finde ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von (b).
Hinweis: Benutze Aufgabe 35.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 11

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 41: (12 Punkte)

Sei G eine (relle oder komplexe) Liegruppe und sei $\mathrm{Lie}(G) := T_eG$, wobei $e \in G$ das neutrale Element ist. Für $g \in G$, definiere $\ell_g\colon G \to G,\ h \mapsto gh$. Zeige, dass

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathrm{Lie}(G) & \to & T_G \\ (g,x) & \mapsto & T_e(\ell_g)(x) \end{array}$$

ein Isomorphismus von Vektorbündeln ist. Folgere, dass $\mathscr{T}_M$ und Ω^p_M für alle $p \geq 0$ freie $\mathscr{O}_M$-Moduln sind.

Aufgabe 42: (8+4 Punkte)

Sei A ein Ring und M ein freier $A-$Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$. Sei $u\colon M \to M$ ein A-linearer Endomorphismus.

(a) Zeige:

$$\det(a\,\mathrm{id}_M + b\,u) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{tr}\Big(\bigwedge\nolimits^r(u)\Big)a^{n-r}b^r, \quad \forall a,b \in A.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{tr}(v) \in A$ die Spur eines Endomorphismus v eines freien A-Moduls.

(b) Sei $T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_{n-1}T + a_n \in A[T]$ das charakteristische Polynom von u. Zeige:

$$a_i = (-1)^i\,\mathrm{tr}\Big(\bigwedge^i(u)\Big), \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Aufgabe 43: (12 Punkte)

Sei $\mathscr{O}_\mathbb{C}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Zeige, dass $\mathscr{O}_\mathbb{C}$ nicht weich ist.

Aufgabe 44: (2+4+2+4 Punkte)

Sei M eine Prämannigfaltigkeit. Nach Vorlesung kann man für alle $p \geq 0$, $U \subseteq M$ offen, identifizieren

$$\Omega^p_M(U) = \{\alpha\colon \mathscr{T}_M(U)^p \to \mathscr{O}_M(U) \mid \alpha \text{ ist } \mathscr{O}_M(U)\text{-multilinear und alternierend}\}.$$

Die zu $\omega \in \Omega^p_M(U)$ korrespondierende alternierende Multilinearform wird wieder mit ω bezeichnet.

(a) Sei $U \subseteq M$ offen, $X \in \mathscr{T}_M(U)$ ein Vektorfeld über U, und sei $\omega \in \Omega^p_M(U)$, $p \geq 1$. Dann definiere $i_X(\omega) \in \Omega^{p-1}_M(U)$ durch

$$i_X(\omega)(\xi_1,\ldots,\xi_{p-1}) := \omega(X,\xi_1,\ldots,\xi_{p-1})$$

für $\xi_i \in \mathscr{T}_M(U)$. Für $f \in \Omega^0_M(U)$ definiere $i_X(f) := 0$. Zeige, dass dies einen Homomorphismus von $\mathscr{O}_M$-Moduln $i_X\colon \Omega^p_M \to \Omega^{p-1}_M$ definiert.

(b) Zeige:

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X(\eta), \qquad \text{für } \omega \in \Omega^k_M(U), \eta \in \Omega^\ell_M(U).$$

(c) Für $p \geq 0$ definiere die *Lie-Ableitung*

$$\mathcal{L}_X\colon \Omega^p_M \to \Omega^p_M, \qquad \mathcal{L}_X := d \circ i_X + i_X \circ d.$$

Zeige, dass für $p = 0$ dies die in der Vorlesung definierte Lie-Ableitung ist.

(d) Zeige:

$$d \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ d,$$
$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta)$$

für Differentialformen ω und η.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 12

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 45: (6+6 Punkte)

(a) Sei X ein parakompakter Raum. Zeige, dass eine welke Garbe auf X weich ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum, so dass jeder offener Teilraum von X parakompakt ist (z.B., wenn X eine Mannigfaltigkeit oder – allgemeiner – ein metrisierbarer Raum ist). Sei $\mathcal{F}$ eine welke Garbe auf X. Zeige, dass für jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ die Garbe $\mathcal{F}|_Z$ auf Z welk ist.

Aufgabe 46: (6+6+6* Punkte)

Gegeben sei eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}'' \to 0.$$

(a) Sei X parakompakt, und sei $\mathcal{A}'$ weich. Zeige, dass für jede abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq X$ die Abbildung $\mathcal{A}(Z) \to \mathcal{A}''(Z)$ surjektiv ist.
(b) Sei X parakompakt, und seien $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}$ weich. Zeige, dass $\mathcal{A}''$ weich ist.
*(c) Seien $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}$ welk. Zeige, dass $\mathcal{A}''$ welk ist.

Aufgabe 47: (2+4+6+6* Punkte)

Sei R ein Ring

(a) Sei $C^\bullet \in \mathrm{Com}(R)$. Sei $\mathrm{id}_{C^\bullet} \simeq 0$. Zeige, dass $C^\bullet$ exakt ist.
(b) Betrachte den Komplex $C^\bullet$ von freien $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-Moduln

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

Zeige, dass $C^\bullet$ ein Gegenbeispiel für die Umkehrung von (a) ist.
(c) Sei $I^\bullet$ ein exakter nach unten beschränkter Komplex, so dass I^n ein injektiver R-Module ist für alle $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass $\mathrm{id}_{I^\bullet} \simeq 0$ gilt.
*(d) Zeige, dass (b) auch ein Gegenbeispiel zu der Aussage in (c) liefert, wenn man dort die Voraussetzung “nach unten beschränkt” weg lässt.

Aufgabe 48: (2+4+2+4 Punkte)

Sei R ein Ring. Seien $A^\bullet$, $B^\bullet \in \mathrm{Com}(R)$, und sei $u\colon A^\bullet \to B^\bullet$ ein Morphismus von Komplexen. Sei $A^\bullet[1]$ der Komplex $(A^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Definiere $C(u)^\bullet := B^\bullet \oplus A^\bullet[1]$ (i.e., $C(u)^n = B^n \oplus A^{n+1}$) mit Differenzialen

$$d^n_{C(u)} = \begin{pmatrix} d^n_B & u^{n+1} \\ 0 & -d^{n+1}_A \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass mit dieser Definition $C(u)^\bullet$ ein Komplex ist. Dieser Komplex heißt der *Kegel von* u.

(b) Betrachte die Sequenz vom Komplexen

$$A^\bullet \xrightarrow{u} B^\bullet \xrightarrow{v} C(u)^\bullet \xrightarrow{w} A^\bullet[1],$$

wobei $v\colon B^\bullet \to B^\bullet \oplus A^\bullet[1]$, $x \mapsto (x,0)$ und wobei w die Projektion ist. Zeige, dass diese Sequenz eine exakte Sequenz

$$\cdots \to H^{i-1}(C(u)^\bullet) \to H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet) \to H^i(C(u)^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet) \to \cdots$$

liefert.

(c) Folgere, dass u genau dann ein Quasi-Isomorphismus ist, wenn $C(u)^\bullet$ exakt ist.

(d) Zeige, dass $u \simeq 0$ genau dann gilt, wenn u zu einem Morphismus $(u,t)\colon C(\mathrm{id}_{A^\bullet}) \to B$ fortgesetzt werden kann.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 13

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

---

Aufgabe 49: (12+6* Punkte)

Sei R ein Ring und I ein R-Modul. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Der R-Modul I ist injektiv.

(ii) Jede kurze exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \to I \to M \to N \to 0$$

spaltet.

(iii) Jeder Quasi-Isomorphismus $I \to M^\bullet$ in $\mathrm{Com}(R)$ besitzt ein Linksinvers.

(iv) I (aufgefasst als Komplex konzentriert in 0) ist K-injektiv.

*(v) Es existiert ein freier R-Modul M, so dass I ein direkter Summand von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist ($\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist wie folgt versehen mit der Struktur eines R-Moduls: $a \cdot f(x) = f(ax)$ für alle $a \in R$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $x \in M$).

Aufgabe 50: (6+4+2+4* Punkte)

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum.

(a) Zeige, dass jeder injektive $\mathcal{O}_X-$Modul welk ist (*Hinweis*: Aufgabe 33).

(b) Zeige, dass ein direkter Summand eines injektiven $\mathcal{O}_X$-Modul injektiv ist.

(c) Gegeben sei eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X-$Moduln :

$$0 \to \mathcal{I}' \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}'' \to 0$$

mit $\mathcal{I}$ und $\mathcal{I}'$ injektiv. Zeige, dass $\mathcal{I}''$ injektiv ist.

(d)* Sei $U \subseteq X$ offen, und sei $\mathcal{I}$ ein injektiver $\mathcal{O}_X-$Modul. Zeige, dass $\mathcal{I}|_U$ ein injektiver $\mathcal{O}_U-$Modul ist.

Aufgabe 51: (2+4+6 Punkte)

Für einen topologischer Raum X sei Ab(X) die Kategorie der abelshen Garben auf X.

(a) Sei F : Ab$(Y) \to$ Ab(X) ein exakter Funktor und G : Ab$(X) \to$ Ab(Y) ein rechtsadjungierter Funktor zu F. Wenn $\mathcal{I}$ ein injektives Objekt von Ab(X) ist, zeige, dass $G(\mathcal{I})$ injektiv in Ab(X) ist.

(b) Seien X und Y topologische Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass f^{-1} : Ab$(Y) \to$ Ab(X) exakt ist. Folgere, dass für $\mathcal{I} \in$ Ob(Ab(X)) injektiv $f_*(\mathcal{I})$ injektiv in Ab(Y) ist.

(c) Sei $Z \subseteq X$ abgeschlossen und $i : Z \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Zeige, dass i_* exakt ist. Folgere, dass $H^i(Z,\mathcal{F}) = H^i(X,i_*\mathcal{F})$ für jede abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf Z.

Aufgabe 52: (6+6 Punkte)

(a) Seien $i : A \hookrightarrow X$ und $j : B \hookrightarrow X$ zwei abgeschlossene Teilmengen. Seien $h : A \cup B \hookrightarrow X$ und $k : A \cap B \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildungen. Sei $\mathcal{F} \in$ Ab(X). Zeige, dass die natürliche Sequenz

$$0 \to h_*h^{-1}\mathcal{F} \to i_*i^{-1}\mathcal{F} \oplus j_*j^{-1}\mathcal{F} \to k_*k^{-1}\mathcal{F} \to 0$$

exakt ist.

(b) Zeige, dass dies eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \cdots \to H^p(A \cup B,h^{-1}\mathcal{F}) &\to H^p(A,i^{-1}\mathcal{F}) \oplus H^p(B,j^{-1}\mathcal{F}) \to H^p(A \cap B,k^{-1}\mathcal{F}) \\ &\to H^{p+1}(A \cup B,h^{-1}\mathcal{F}) \to \cdots \end{aligned}$$

liefert. (*Hinweis*: Aufgabe 51). Diese Sequenz wird auch *Mayer-Vietoris-Sequenz* genannt.

(*) Aufgabe 53: (5+5+2 Punkte)

Sei R ein kommutativer nullteilerfreier Ring, und sei M ein R-Modul.

(a) Sei M injektiv. Zeige, dass $\forall r \in R \setminus \{0\}$ die Abbildung $r\colon M \to M$ surjektiv ist (M heißt dann *divisibel*).

(b) Zeige die Umkehrung von (a), wenn R ein Hauptidealring ist. (*Hinweis* : Seien $i : N' \to N$ und $f : N' \to M$ Morphismen von $R-$Moduln mit i injektiv. Betrachte die Menge :

$$X = \{(P,g), P \subset N, g : P \to M \text{ so dass } g \circ i = f\}$$

geordnet durch Inklusion/Einschränkung. Dann benutze das Lemma von Zorn, um ein maximales Element zu finden.)

(c) Sei R ein Hauptidealring, und sei $K =$ Quot(R) der Quotientenkörper. Zeige, dass K und K/R injektive $R-$Moduln sind.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2013/14

Übungen Mannigfaltigkeiten, Garben und Kohomologie
Blatt 14

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn.html

Aufgabe 54: (6+6 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ein *Divisor auf* U ist ein Element $(n_z)_{z\in U} \in \mathbb{Z}^U = \mathrm{Abb}(U,\mathbb{Z})$, so dass die Menge $\{z \in U\,;\, n_z \neq 0\}$ abgeschlossen und diskret in U ist. Die Menge der Divisoren auf U wird $\mathcal{D}(U)$ bezeichnet. Für jede meromorphe Funktion auf U definiere $\mathrm{div}(f) := (\mathrm{ord}_z(f))_{z\in U} \in \mathcal{D}(U)$. Ein Divisor dieser Form heisst *Hauptdivisor*.

Das Ziel dieser Aufgabe ist eine kohomologische Betrachtung des folgenden Satzes von Weierstraß: *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei D ein Divisor auf X. Dann existiert eine meromorphe Funktion f auf X mit* $\mathrm{div}(f) = D$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{D}$ mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen eine Garbe abelscher Gruppen auf $\mathbb{C}$ ist, und dass die Sequenz von Garben abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_X^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathcal{D}|_X \longrightarrow 0$$

exakt ist. Für $U \subseteq X$ sei hierbei $\mathcal{M}_X^\times(U)$ die Gruppe der Einheiten im Ring der meromorphen Funktionen auf U (d.h., die meromorphen Funktionen f auf U, so dass eine meromorphe Funktion g auf U existiert mit $fg = 1$).

(b) Zeige $H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \cong H^2(X,\underline{\mathbb{Z}}_X)$ (*Hinweis*: Exponentialsequenz) und folgere, dass der Satz von Weierstraß gilt, wenn $H^2(X,\underline{\mathbb{Z}}_X) = 0$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $H^2(X,\underline{\mathbb{Z}}_X) = 0$ für jede offene Teilmenge X von $\mathbb{C}$. Die Vorlesung wird $H^2(X,\mathbb{Z}) = 0$ zeigen, wenn X eine einfach zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 55: (2+10 Punkte)

Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und seien $U,V \subseteq X$ offen.

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine welke Garbe abelscher Gruppen auf X. Zeige, dass die Sequenz

$$0 \to \mathcal{A}(U \cup V) \stackrel{s \mapsto (s|U,s|V)}{\longrightarrow} \mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{A}(V) \stackrel{(s,t) \mapsto s-t}{\longrightarrow} \mathcal{A}(U \cap V) \to 0$$

exakt ist.

(b) Sei $\mathcal{F}^\bullet$ ein nach unten beschränkter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Zeige, dass (a) eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H^i(U \cup V,\mathcal{F}^\bullet) \to H^i(U,\mathcal{F}^\bullet) \oplus H^i(V,\mathcal{F}^\bullet) \to H^i(U \cap V,\mathcal{F}^\bullet) \to H^{i+1}(U \cup V,\mathcal{F}^\bullet) \to \cdots$$

liefert. Diese Sequenz heißt *Mayer-Vietoris-Sequenz*.

Aufgabe 56: (12 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ offen, aufgefasst als 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Zeige für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$H^n_{DR}(M) = \frac{\{\text{geschlossene holomorphe } n\text{−Formen auf } M\}}{\{\text{exakte holomorphe } n\text{−Formen auf } M\}} \qquad (*)$$

Bemerkung: Allgemeiner kann man für jede Steinsche Mannigfaltigkeit M zeigen, dass jeder endlich lokal freie $\mathcal{O}_M$-Modul Γ-azyklisch ist und damit folgern dass (*) für jede Steinsche Mannigfaltigkeit M gilt.

Aufgabe 57: (12 Punkte)

Sei $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die $\mathbb{C}$-Vektorräume $H^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathcal{O})$ und $H^n_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ endlich-dimensional sind, und bestimme ihre Dimension. Folgere, dass (*) aus Aufgabe 56 für $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nicht gilt.
Hinweis: Aufgabe 55 und Aufgabe 56.