Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 1

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 1: (6+6 Punkte)

Beweise die folgenden Aussagen:

(i) In der Kategorie der Menge sind die Epimorphismen (bzw. die Monomorphismen) genau die surjektiven (bzw. injektiven) Abbildungen.

(ii) Sei K ein Körper. In der Kategorie der K-Vektorräume sind die Epimorphismen (bzw. die Monomorphismen) genau die surjektiven (bzw. injektiven) K-linearen Abbildungen.

Aufgabe 2: (3+3+3+3 Punkte)

(i) Sei X eine Menge und sei $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Zeige, dass $\mathcal{P}(X)$ bezüglich $\cap$ (bzw. $\cup$) ein kommutatives Monoid ist. Bestimme das Einselement und die invertierbaren Elemente. Zeige, dass $(\mathcal{P}(X), \cap)$ und $(\mathcal{P}(X), \cup)$ isomorph sind.

(ii) Ist $\mathbb{Z}$ bezüglich der Subtraktion ein Monoid ?

(iii) Sei $(M, \cdot)$ ein Monoid. Zeige, dass die Menge $\mathrm{End}_{\mathrm{Monoid}}(M, \cdot)$ der Monoid-Endomorphismen von $(M, \cdot)$ bezüglich der Verknüpfung der Abbildungen ein Monoid ist. Bestimme $\mathrm{End}_{\mathrm{Monoid}}(\mathbb{N}, +)$.

(iv) Sei $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto \mathrm{kgV}(a, b)$ (das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b). Zeige, dass $(\mathbb{N}, \cdot)$ ein kommutatives Monoid ist. Zeige, dass die Abbildung $(\mathbb{N}, \cdot) \to (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap)$, $n \mapsto n\mathbb{N} := \{kn,\ k \in \mathbb{N}\}$ ein injektiver Homomorphismus von Monoiden ist.

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Sei G eine Menge mit einer Abbildung $\cdot : G \times G \to G$, die assoziativ ist, das heißt für alle $g, h, f \in G$ gilt $(g \cdot h) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$. Für $g \in G$ definieren wir die Links-bzw. Rechtstranslation mit g als

$$\lambda_g : G \to G,\ h \mapsto g \cdot h \quad \text{bzw.} \quad \rho_g : G \to G,\ h \mapsto h \cdot g.$$

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) G ist bezüglich $\cdot$ eine Gruppe.

(ii) Für alle $g \in G$ sind λ_g und ρ_g bijektiv.

(iii) Für alle $g \in G$ ist ρ_g surjektiv und es gibt ein $f \in G$, so dass λ_f surjektiv ist.

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) G ist abelsch.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^n$ ein Gruppenhomomorphismus.

(iii) Für ein $n \in \{-1, 2\}$ ist die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^n$ ein Gruppenhomomorphismus.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 2

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 5: (4+5+3+4* Punkte)

Für eine ganze Zahl $n \geq 3$ sei $\alpha := \frac{2\pi}{n}$ und

$$E_n := \{z_k = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) \end{pmatrix},\ 0 \leq k \leq n-1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Es handelt sich hierbei um die Menge von Eckpunkten eines gleichseitigen n-Ecks im $\mathbb{R}^2$. Wir definieren die Diedergruppe als

$$D_n := \{f \in O_2(\mathbb{R}),\ f(E_n) \subseteq E_n\},$$

das heißt D_n ist die Symmetriegruppe eines gleichseitigen n-Ecks.

(i) Zeige, dass D_n eine Untergruppe von $O_2(\mathbb{R})$ ist.

(ii) Es seien

$$S := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix},\ R := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Also ist S die Spiegelung an der Ursprungsgeraden durch den Mittelpunkt der Strecke von z_0 nach z_1, und R ist die Drehung um den Winkel α. Zeige, dass D_n die von S und R erzeugte Untergruppe von $O_2(\mathbb{R})$ ist.

Hinweis: Aus dem Spektralsatz für Isometrien des $\mathbb{R}^2$ folgt:

$$O_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix},\ 0 \leq t < 2\pi\}.$$

(iii) Bestimme die Ordnung von D_n.

*(iv) Sei $A \in GL_2(\mathbb{R})$ eine Matrix mit $A(E_n) \subseteq E_n$. Zeige, dass A ein Element in D_n ist.

Aufgabe 6: (6+6 Punkte)

(i) Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Wir definieren ein Element $\sigma \in S_n$ durch

$$\sigma(i) = i + 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n-1 \text{ und } \sigma(n) = 1.$$

Sei τ die Transposition von 1 und 2. Zeige, dass $\{\tau, \sigma\}$ ein Erzeugenden-System der symmetrischen Gruppe S_n ist.

(ii) Bestimme alle Untergruppen von S_3.

Aufgabe 7: (6+6 Punkte)

(i) Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +) \times (\{1, -1\}, \cdot)$ isomorph sind.

(ii) Sind die Gruppen $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +)$ isomorph ?

Aufgabe 8: (10+2+4* Punkte)

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, falls für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $\epsilon > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $y - \epsilon < x < y + \epsilon$. Sei nun $G \subseteq \mathbb{R}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$.

(i) Sei $G \neq \{0\}$ nicht dicht in $\mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathbb{R}_{>0} \cap G$ ein minimales Element x besitzt und dass G von x erzeugt wird.

(ii) Folgere: Eine Untergruppe G von $\mathbb{R}$ ist entweder dicht oder $G = \mathbb{Z}x$ für ein $x \in \mathbb{R}$.

*(iii) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die 1-periodisch und $\sqrt{2}$-periodisch ist (f heißt a-*periodisch*, falls $f(x + a) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Zeige, dass f konstant ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 3

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 9: (4+4+4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Für $g \in G$ sei $\operatorname{int}(g)\colon G \to G$ die Abbildung $h \mapsto ghg^{-1}$. Das *Zentrum von G* ist definiert als

$$Z(G) := \{g \in G\,;\, \forall\, h \in G\colon hg = gh\}.$$

(i) Zeige, dass $\operatorname{int}(g)$ eine Automorphismus der Gruppe G ist und dass die Abbildung $\psi\colon G \to \operatorname{Aut}(G)$, $g \mapsto \operatorname{int}(g)$, ein Homomorphismus von Gruppen mit Kern $Z(G)$ ist.

Das Bild von ψ heißt die Gruppen der *inneren Automorphismen* und wird mit $\operatorname{Inn}(G) \subseteq \operatorname{Aut}(G)$ bezeichnet.

(ii) Zeige, dass $\operatorname{Inn}(G)$ ein Normalteiler von $\operatorname{Aut}(G)$ ist. Der Quotient $\operatorname{Out}(G) := \operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Inn}(G)$ heißt die *Gruppe der äußeren Automorphismen*.

(iii) Zeige für alle $n \geq 1$, dass $\operatorname{Out}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ nicht trivial ist.

Aufgabe 10: (2+2+2+2+2+2 Punkte)

Entscheide in den folgenden Beispielen, ob H ein Normalteiler von G ist (mit Begründung natürlich). Falls H ein Normalteiler ist, gib eine möglichst einfache Beschreibung der Quotientengruppe.

(i) $H = GL_n(\mathbb{R})$ und $G = GL_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$,

(ii) $H = SL_n(K)$ und $G = GL_n(K)$, K Körper, $n \geq 1$.

(iii) $H = \{\text{invertierbare } n \times n \text{ Diagonalmatrizen}\}$ und $G = GL_n(K)$, K Körper, $n \geq 1$.

(iv) Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Die Gruppe G ist die Menge der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen von $GL_n(K)$, und H ist die Teilmenge der Matrizen von G mit Einträgen 1 auf der Hauptdiagonalen.

(v) $G = \mathbb{C}^\times$ und $H = \mu_n(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}^\times, z^n = 1\}$, $n \geq 1$, die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln.

(vi) $G = \mathbb{C}$ und $H = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 11: (6+2+4+4*+2* Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(i) Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeige, dass H ein Normalteiler von G ist.

(ii) Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt *charakteristische Untergruppe*, falls für jeden Automorphismus $\psi\colon G \to G$ von Gruppen gilt, dass $\psi(H) = H$. Zeige, dass eine charakteristische Untergruppe ein Normalteiler ist (*Hinweis*: Aufgabe 9).

(iii) Seien $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ zwei Untergruppen. Sei H_2 ein Normalteiler von G, und sei H_1 eine charakteristische Untergruppe von H_2. Zeige, dass H_1 ein Normalteiler von G ist.

*(iv) Gib ein Beispiel einer Gruppe G und von Untergruppen $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$, so dass H_1 ein Normalteiler von H_2 und H_2 ein Normalteiler von G ist, ohne dass H_1 ein Normalteiler von G ist.

*(v) Zeige, dass das Zentrum $Z(G)$ (Aufgabe 9) eine charakteristische Untergruppe von G ist.

Aufgabe 12: (6+6 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ definiere den *Kommutator von g und h* als $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Dann nennen wir die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe

$$G^{\mathrm{der}} := [G, G] := \langle \{[g, h]\,;\, g, h \in G\} \rangle$$

die *derivierte Gruppe* oder die *Kommutatoruntergruppe von G*.

(i) Zeige, dass G^{der} ein Normalteiler von G ist und dass $G^{\mathrm{ab}} := G/G^{\mathrm{der}}$ abelsch ist.

(ii) Zeige die folgende universelle Eigenschaft: Ist $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und H eine abelsche Gruppe, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H$, so dass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ gilt, wobei $\pi\colon G \to G^{\mathrm{ab}}$ die kanonische Projektion ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 4

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 13: (4+2+2+4+12* Punkte)

Sei X eine Menge und G eine Gruppe, die auf X wirkt. Ein Element $x \in X$ heißt *Fixpunkt*, falls für alle $g \in G$ die Gleichung $g \cdot x = x$ gilt. Die Menge der Fixpunkte wird mit X^G bezeichnet.

(i) Angenommen X ist endlich, sei $\{x_1, ..., x_n\}$ ein Repräsentantsystem der Bahnen unter G, die aus mehr als einem Element bestehen. Zeige:

$$|X| = |X^G| + \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i}).$$

(ii) Für eine beliebige Gruppe G, zeige, dass die Abbildung $G \times G \to G$, $(g, g') \mapsto gg'g^{-1}$ eine Gruppenoperation von G auf sich selbst definiert. Diese Operation heißt *Konjugation*.

(iii) Zeige: das Zentrum von G ist die Menge der Fixpunkte bezüglich dieser Operation.

(iv) Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe der Ordnung p^k, für ein $k \geq 1$. Zeige, dass $Z(G) \neq \{e\}$ gilt.

*(v) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, und sei p ein Primfaktor von n. Zeige, dass ein Element der Ordnung p in G existiert. Hinweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion. Beweise die Aussage zuerst für eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 14: (2+1+1+2+2+2+2 Punkte)

Ist I ein Ideal eines kommutativen Ringes R, so definiert man *das Radikal* von I durch:

$$\sqrt{I} := \{x \in R,\ \exists n \geq 1,\ x^n \in I\}.$$

Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls ein $n \geq 1$ existiert mit $x^n = 0$. Ein Ring heißt *reduziert*, falls 0 das einzige nilpotente Element ist. Beweise die folgenden Aussagen:

(i) $\sqrt{I}$ is ein Ideal von R und es gilt $I \subseteq \sqrt{I}$.

(ii) Aus $I \subseteq J$ folgt $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ für alle Ideale I, J. Aus $\sqrt{I} = R$ folgt $I = R$ für alle Ideale I.

(iii) Es gilt $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ für alle Ideale I.

(iv) Es gilt $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ für alle Ideale I, J.

(v) Es gilt $\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} = \sqrt{I + J}$ für alle Ideale I, J.

(vi) Sei $n = p_1^{k_1} ... p_r^{z_r}$ die Primfaktorzerlegung von $n \geq 2$. Zeige: Es gilt im Ring $R = \mathbb{Z}$

$$\sqrt{n\mathbb{Z}} = p_1 ... p_r \mathbb{Z}.$$

(vii) Der Ring R/I ist genau dann reduziert, wenn $\sqrt{I} = I$ gilt.

Aufgabe 15: (4+4+4 Punkte)

(i) Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Zeige, dass R ein Körper ist.

(ii) Sei R ein Integritätsbereich, der nur endlich viele Ideale besitzt. Zeige, dass R ein Körper ist.

(iii) Sei K ein Körper und $R \neq 0$ ein Ring. Zeige, dass jeder Homomorphismus von Ringen $\varphi : K \to R$ injektiv ist.

Aufgabe 16: (2+3+3+3+1 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $G \subseteq K^\times$ eine endliche Untergruppe der Ordnung n von $(K^\times, \times)$. Sei $n = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$ die Primfaktorzerlegung von n.

(i) Sei H eine Gruppe und $h \in H$ ein Element der Ordnung r. Was ist die Ordnung von x^d, für $d \in \mathbb{Z}$?

(ii) Sei H eine abelsche Gruppe, $x \in H$ ein Element der Ordnung r und $y \in H$ ein Element der Ordnung s. Angenommen r und s sind teilerfremd, zeige, dass xy Ordnung rs hat.

(iii) Sei N das kleinste gemeinsamme Vielfache aller Ordnungen der Elemente aus G. Zeige, dass $N = n$ gilt. Hinweis: Ein Polynom $P \in K[X]$ hat höchstens $\mathrm{Grad}(P)$ Nullstellen in K.

(iv) Folgere: Es existiert für jedes $1 \leq i \leq k$ ein Element in G der Ordnung $p_i^{\alpha_i}$.

(v) Zeige, dass G zyklisch ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 5

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 17: (3+3+3+3 Punkte)

Eine Teilmenge S eines kommutativen Ringes R heißt multiplikativ abgeschlossen, falls $1 \in S$ gilt, und falls $st \in S$ für alle $s, t \in S$ gilt. Wir definieren eine Relation auf der Menge $R \times S$ durch:

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \Leftrightarrow \exists t \in S,\ t(s_1 r_2 - s_2 r_1) = 0.$$

(i) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $R \times S$ ist. Die Äquivalenzklasse von $(r, s) \in R \times S$ wird mit $\frac{r}{s}$ bezeichnet, und man definiert $S^{-1}R := (R \times S)/\sim$.

(ii) Zeige: Man definiert eine Ringstruktur auf $S^{-1}R$ durch:

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} := \frac{s_2 r_1 + s_1 r_2}{s_1 s_2} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

für alle $r_1, r_2 \in R$ und $s_1, s_2 \in S$.

(iii) Zeige: R ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn die Menge $R - \{0\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge ist. Ist $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge eines Integritätsbereichs mit $0 \notin S$, so gilt

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{r}{s} \in \mathrm{Quot}(R),\ r \in R,\ s \in S \right\}.$$

(iv) Zeige, dass die Abbildung $i : R \to S^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ ein Homomorphismus von Ringen ist, und dass $i(s)$ für alle $s \in S$ eine Einheit von $S^{-1}R$ ist. Zeige die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden Ringenhomomorphismus $f : R \to R'$ mit $f(S) \subseteq R'^{\times}$ existiert ein eindeutiger Ringenhomomorphismus $\overline{f} : S^{-1}R \to R'$ mit $\overline{f} \circ i = f$.

Aufgabe 18: (5+5+2 Punkte)

(i) Sei R ein kommutativer Ring. Sind 0 und R die einzigen Ideale von R, zeige, dass R ein Körper ist.

(ii) Sei K ein Körper und sei R eine endlich-dimensionale K-Algebra. Zeige: Ist R ein Integritätsbereich, dann ist R ein Körper.

(iii) Ist die Voraussetzung $\dim_K(R) < +\infty$ notwendig in (ii) ?

Aufgabe 19: (4+4+4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus von V. Ist $P = a_0 + a_1 X + ... + a_N X^N \in K[X]$ ein Polynom, definiert man

$$P(f) := a_0 id_V + a_1 f + ... + a_N f^N.$$

(i) Zeige, dass $K[f] := \{P(f),\ P \in K[X]\}$ eine kommutative K-Unteralgebra von $\operatorname{End}(V)$ ist.

(ii) Sei M_f das Minimalpolynom von f. Zeige: $K[f] \simeq \frac{K[X]}{(M_f)}$ als K-Algebren.

(iii) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und f gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass $\mathbb{R}[f] \simeq \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 20: (3+2+4+3+6* Punkte)

(i) Sei $d \in \mathbb{Z}$ eine Zahl, die kein Quadrat in $\mathbb{Z}$ ist. Zeige, dass die Mengen

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Unterringe von $\mathbb{C}$ sind.

(ii) Zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist.

(iii) Zeige, dass ein eindeutiger Automorphismus σ von $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ existiert, mit $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$.

(iv) Für $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ setze $N(x) := x\sigma(x)$. Zeige, dass $N : \mathbb{Q}[\sqrt{d}]^\times \to \mathbb{Q}^\times$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Zeige:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], N(x) = \pm 1\}.$$

*(v) Bestimme $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ für $d < 0$.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 6

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 21: (4+4+4 Punkte)

Berechne die Polynomdivision mit Rest von P durch Q im Ring $R[X]$ in den folgenden Beispielen:

(i) $P = X^n - 1$, $Q = X^m - 1$ und $R = \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq n$.

(ii) $P = YX^4 + Y^2X + 1$, $Q = X^2 + XY + 1$ und $R = \mathbb{Z}[Y]$.

(iii) $P = X^3 + YX + 1$, $Q = (1+Y)X^2 + YX + 1$ und $R = \frac{\mathbb{Z}[Y]}{(Y^2)}$.

Aufgabe 22: (3+3+3+3+12* Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein Monoid mit Einselement e. Die Menge $R^{(M)}$ wird mit $R[M]$ bezeichnet, und ein Element $(a_m)_{m\in M}$ dieser Menge wird mit $\sum_{m\in M} a_m[m]$ bezeichnet.

(i) Zeige, dass die folgende Addition und Multiplikation einer R-Algebra auf $R[M]$ definiert:

$$f + g = \sum_{m\in M} (a_m + b_m)[m], \quad f \cdot g := \sum_{m\in M} \left(\sum_{\substack{k,l\in M \\ \text{mit } kl=m}} a_k b_l \right) [m], \quad r \cdot f = \sum_{m\in M} (ra_m)[m]$$

für alle $f = \sum_{m\in M} a_m[m]$ und $g = \sum_{m\in M} b_m[m]$.

(ii) Zeige: $R[M]$ kommutativ $\Leftrightarrow$ M kommutativ.

(iii) Für $M = (\mathbb{N}_0^d, +)$ zeige $R[M] \simeq R[X_1, ..., X_d]$.

(iv) Sei A eine R-Algebra. Konstruiere eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Alg}}(R[M], A) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Monoid}}(M, (A, \cdot)).$$

*(iv) Wann ist $R[M]$ ein Integritätsbereich ? Wann ist $R[M]$ ein Körper ?

Aufgabe 23: (4+4+4 Punkte)

(i) Für $d \in \{-2, -1, 2\}$ zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ein euklidischer Ring ist. *Hinweis*: Zeige, dass die Funktion N von Aufgabe 20 eine Gradfunktion ist.

(ii) Sei R ein euklidischer Ring. Zeige, dass ein Element $x \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ existiert, so dass die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi : R \to R/(x)$ auf $A^\times \cup \{0\}$ surjektiv ist.

(iii) Sei $R = \frac{\mathbb{R}[X,Y]}{(X^2+Y^2+1)}$. Zeige, dass $R^\times = \mathbb{R}^\times$ gilt. Folgere, dass R kein Euklidischer Ring ist. *Bemerkung* : Man kann beweisen, dass R ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 24: (2+2+2+2+2+2 Punkte)

(i) Gib ein Beispiel für zwei Ideale I, J eines kommutativen Ringes mit $IJ \neq \{xy,\ x \in I,\ y \in J\}$.

(ii) Sei R ein kommutativer Ring. Zeige: $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ für alle Ideale I, J.

(iii) Zeige: $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$ für alle Ideale I, J.

(iv) Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen. Zeige: $\sqrt{f^{-1}(I)} = f^{-1}(\sqrt{I})$ für alle Ideale I von R'

(v) Zeige: $f^{-1}(I) \cdot f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}(IJ)$ für alle Ideale I, J von R'.

(vi) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$ die natürliche Inklusion und $I = J = (1 + i)$. Zeige, dass die Inklusion von (v) in diesem Fall echt ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 7

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 25: (6+6+6* Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Man definiert eine Potenzreihe mit Koeffizienten in R als eine Folge $\mathbb{N}_0 \to R$. Die Folge $a_0, a_1, a_2, ...$ wird mit $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ bezeichnet. Die Folge $(1, 0, 0, ...)$ wird mit 1 bezeichnet. Die Nullfolge wird mit 0 bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ wird die Folge $(\delta_{k,n})_{n\geq 0} = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ einfach mit X^k bezeichnet. Die Menge der Potenzreihen mit Koeffizienten in R wird mit $R[[X]]$ bezeichnet.

(i) Zeige: Man definiert eine Struktur einer R-Algebra auf $R[[X]]$ durch:

$$f + g = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)X^n, \quad f \cdot g := \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) X^n, \quad r \cdot f = \sum_{n\geq 0}(ra_n)X^n$$

für alle $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, $g = \sum_{n\geq 0} b_n X^n \in R[[X]]$ und $r \in R$. Zeige, dass die Polynomalgebra $R[X]$ eine R-Unteralgebra von $R[[X]]$ ist. Zeige, dass X^k tatsächlich die k-nte Potenz von X ist.

(ii) Zeige: $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in R[[X]]^\times \Leftrightarrow a_0 \in R^\times$.

*(iii) Was sind die Quadrate in $\mathbb{Q}[[X]]$?

Aufgabe 26: (2+2+2+3+3 Punkte)

(i) Berechne die Division mit Rest von $2^{2015} - 1$ durch $2^7 - 1$ im euklidischen Ring $\mathbb{Z}$.

(ii) Seien n, m zwei ganze Zahlen, die nur die Ziffer 3 in ihren Darstellungen besitzen. Mit welcher Ziffer endet n^m ?

(iii) Berechne die Division mit Rest von $3 + 5i$ durch $2 + i$ im euklidischen Ring $\mathbb{Z}[i]$.

(iv) Bestimme alle Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ mit $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 2 \pmod 4$, $x \equiv 4 \pmod 7$.

(v) Bestimme alle Elemente $x \in \mathbb{Z}[i]$ mit $x \equiv 1 \pmod 2$, $x \equiv i \pmod{2 + i}$, $x \equiv 1 + i \pmod 3$.

Aufgabe 27: (3+3+3+3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $N := \sqrt{0}$ die Menge der nilpotenten Elemente von R (s. Aufgabe 15).

(i) Zeige :
$$N \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ prim}} \mathfrak{p}.$$

(ii) Sei $S \subseteq R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge mit $0 \notin S$ (s. Aufgabe 17). Zeige, dass die Menge der Ideale I von R mit $I \subseteq R \setminus S$ ein maximales Element I_0 bezüglich der Inklusion besitzt.

(iii) Zeige, dass I_0 ein Primideal ist.

(iv) Zeige, dass die Inklusion von (i) eine Gleichheit ist.

Aufgabe 28: (4+4+4+6* Punkte)

Sei R die Menge
$$R := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X], a_1 = 0 \right\}.$$

(i) Zeige : $R = \mathbb{R}[X^2, X^3]$ in $\mathbb{R}[X]$.

(ii) Konstruire einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren $R \simeq \frac{\mathbb{R}[X,Y]}{(X^2-Y^3)}$.

(iii) Zeige, dass X^2 und X^3 irreduzibel in R aber nicht prim sind.

*(iv) Was sind die Primelemente von R ?

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 8

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 29: (4+4+4 Punkte)

(i) Seien R ein kommutativer Ring, A eine R-Algebra, und M ein R-Modul. Zeige, dass die Strukturen von A-Linksmoduln auf M eins-zu-eins den Homomorphismen von R-Algebren $A \to \mathrm{End}_R(M)$ entsprechen.

(ii) Folgere: Die $R[X_1, ..., X_n]$-Moduln entsprechen eins-zu-eins den Tupeln $(V, f_1, ..., f_n)$ wobei V ein R-Modul ist und $f_1, ..., f_n \in End_R(V)$ paarweise kommutierende Endomorphismen von V.

(iii) Sei K ein Körper. Zeige: Die $\frac{K[X]}{(X^2-X)}$-Moduln entsprechen eins-zu-eins den Paaren (V, W) wobei V ein K-Vektorraum ist und $W \subseteq V$ ein K-Untervektorraum.

Aufgabe 30: (6+6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring

(i) Seien $M_2 \subseteq M_1 \subseteq M$ drei R-Moduln. Konstruiere einen Isomorphismus von Ringen

$$\frac{M/M_2}{M_1/M_2} \simeq \frac{M}{M_1}.$$

(ii) Seien M, M' R-Untermoduln von einem R-Modul N. Konstruiere einen Isomorphismus

$$\frac{M'}{M \cap M'} \simeq \frac{M + M'}{M}.$$

Aufgabe 31: (3+3+3+3 Punkte)

(i) Sei R ein Integritätsbereich. Wir versehen $K := \mathrm{Quot}(R)$ als R-Modul. Was ist die maximale Anzahl von R-linear unabhängigen Elementen in K ?

(ii) Folgere, dass K als R-Modul nicht frei ist.

(iii) Ein R-Modul M heißt *torsionsfrei*, falls $xm = 0 \Rightarrow m = 0$ für alle Elemente $x \in R$ die nicht Nullteiler in R sind. Zeige, dass ein freier Modul torsionsfrei ist.

(iv) Sei M ein R-Modul. Wir definieren $M_{\mathrm{tors}} \subseteq M$ als die Menge der Elemente $m \in M$ mit $xm = 0$ für ein Element $x \in R$ das kein Nullteiler ist. Zeige, dass M_{tors} ein R-Untermodul von M ist, und dass der Quotientenmodul M/M_{tors} torsionsfrei ist.

Aufgabe 32: (4+4+4+6* Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

(i) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus von R-Algebren

$$\mathrm{End}_R(R^n) \simeq M_n(R), \quad f \mapsto A(f).$$

(ii) Sei $f : R^n \to R^r$ ein Endomorphismus. Wir definieren $\det(f) := \det(A(f))$. Zeige, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\det(f) \in R^\times$ gilt. ***Hinweis :*** Benutze die Gleichung $A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)A = \det(A)E_n$, wobei $\mathrm{adj}(A)$ die adjunkte Matrix ist.

(iii) Zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn $\det(f)$ kein Nullteiler in R ist.

(iv)* Angenommen f ist surjektiv, zeige, dass f ein Isomorphismus ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 9

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 33: (10+2 Punkte)

(i) Sei R ein Ring und sei

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[d, "f_4"] \\ N_1 \arrow[r, "v_1"] & N_2 \arrow[r, "v_2"] & N_3 \arrow[r, "v_3"] & N_4 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagram von R-Moduln mit exakten Zeilen. Seien f_1 und f_3 surjektiv und f_4 injektiv. Zeige, dass f_2 surjektiv ist.

(ii) Folgere das *5-er Lemma*: Sei

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "v_1"] & N_2 \arrow[r, "v_2"] & N_3 \arrow[r, "v_3"] & N_4 \arrow[r, "v_4"] & N_5 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagram von R-Moduln mit exakten Zeilen. Seien f_2 und f_4 Isomorphismen, f_5 injektiv und f_1 surjektiv. Zeige, dass f_3 ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 34: (6+2+4+2* Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring.

(i) Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ zwei Ideale. Zeige, dass man einen Isomorphismus von R-Algebren hat

$$R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} \xrightarrow{\sim} R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

(ii) Für welche $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = 0$?

(iii) Seien M, N freie R-Moduln von endlichem Rang. Zeige, dass $\mathrm{rk}(M \otimes N) = \mathrm{rk}(M)\,\mathrm{rk}(N)$ gilt.

*(iv) Zeige, dass (iii) auch für beliebige freie R-Moduln gilt, wenn man den Rang als Kardinalzahl auffasst.

Aufgabe 35: (3+3+3+3+3*+3* Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring.

(i) Sei N ein R-Modul, und sei
$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$$
eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, dass die Sequenz
$$M_1 \otimes_R N \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes_R N \xrightarrow{f_2 \otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes_R N \longrightarrow 0$$
exakt ist.

(ii) Gib ein Beispiel einer injektiven $\mathbb{Z}$-linearen Abbildung $f\colon M' \to M$ (d.h. einer exakten Sequenz $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ abelscher Gruppen) und einer abelschen Gruppe N, so dass $f \otimes \mathrm{id}_N$ nicht injektiv ist.

(iii) Zeige, dass für einen R-Modul N die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(a) Für jede exakte Sequenz $M' \to M \to M''$ von R-Moduln ist auch die Sequenz $M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N$ exakt.

(b) Für jede injektive R-lineare Abbildung f ist $f \otimes \mathrm{id}_N$ injektiv.

Der R-Modul N heißt *flach*, falls er diese Eigenschaften besitzt.

(iv) Zeige, dass jeder freier R-Modul flach ist.

*(v) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $K := \mathrm{Quot}(R)$. Zeige, dass K ein flacher R-Modul ist.

*(vi) Sei R ein Integritätsbereich, und sei N ein flacher R-Modul. Zeige, dass N torsionsfrei ist (Aufgabe 31).

Aufgabe 36: (6+6+6* Punkte)

Sei R ein Ring, und sei $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln.

(i) Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind. In diesem Fall sagt man, dass *die kurze exakte Sequenz spaltet*.

(a) Es existiert $u : M_2 \to M_1$ mit $u \circ f = \mathrm{id}_{M_1}$.

(b) Es existiert $v : M_3 \to M_2$ mit $g \circ v = \mathrm{id}_{M_3}$.

(c) Es existiert ein kommutatives Diagramm von R-Moduln
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i"] & M_1 \oplus M_3 \arrow[r, "p"] & M_3 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$
wobei α, β, γ Isomorphismen und i und p die natürlichen Homomorphismen sind.

(ii) Ein R-Modul M heißt *projektiv*, falls jede exakte Sequenz von R-Moduln der Form
$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$
spaltet. Zeige, dass ein R-Modul M genau dann projektiv ist, wenn ein R-Modul N existiert, so dass $M \oplus N$ frei ist. Folgere, dass jeder freie R-Modul projektiv ist.

*(iii) Sei R kommutativ. Zeige, dass jeder projektiver Modul flach ist (Aufgabe 35).

***Aufgabe 37:** (8* Punkte)

Sei K ein Körper, und sei $V := K^{(\mathbb{N}_0)}$. Definiere $R := \mathrm{End}_K(V)$. Konstruiere einen Isomorphismus von R-Moduln $R^2 \cong R$. Folgere, dass $R^n \cong R^m$ für alle $m, n \geq 1$.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 10

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 38: (5+3+4 Punkte)

Sei R ein Ring.

(i) Sei

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Linksmoduln. Seien N_1, N_2 Untermoduln von M mit $i^{-1}(N_1) = i^{-1}(N_2)$ und $p(N_1) = p(N_2)$. Zeige, dass $N_1 = N_2$. Folgere, dass M genau dann noethersch ist, wenn M' und M'' noethersch sind.

(ii) Gegeben seien R-Linksmoduln $M_1, \ldots, M_r$. Zeige:

$$M_1, \ldots, M_r \text{ noethersch} \Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} M_i \text{ noethersch.}$$

(iii) Zeige, dass R genau dann linksnoethersch ist, wenn jeder endliche erzeugte R-Linksmodul noethersch ist.

Aufgabe 39: (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer, noetherscher Ring. Zeige, dass $R[X_1, \ldots, X_n]$ für alle $n \geq 1$ noethersch ist.

Hinweis: Reduziere auf den Fall $n = 1$. Sei $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in $R[X]$. Angenommen, sie ist nicht stationär, definiere $\mathfrak{a} := \bigcup_{i \geq 1} \mathfrak{a}_i$ und $P_i \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}_i$ ein Polynom minimalen Grades für alle $i \geq 1$. Dann betrachte das von den Leitkoeffizienten der P_i erzeugte Ideal von R.

Aufgabe 40: (6+6+6* Punkte)

(i) Sei R ein nullteilerfreier Ring, $a \in R^\times$, $b \in R$. Zeige: $f \in R[X]$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $f(aX+b)$ ist irreduzibel.

(ii) Sei $\varphi\colon R \to R'$ ein Homomorphismus nullteilerfreier Ringe, und sei

$$\tilde{\varphi}\colon R[X] \to R'[X], \qquad \sum_i a_i X^i \mapsto \sum_i \varphi(a_i) X^i.$$

Zeige, dass $\tilde{\varphi}$ ein R-Algebrahomomorphismus ist. Sei $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in R[X]$ mit $a_n \in R^\times$. Zeige: $\tilde{\varphi}(f)$ irreduzibel $\implies$ f irreduzibel.

*(iii) Sei R ein faktorieller Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $0 \notin S$ (Aufgabe 17). Zeige, dass $S^{-1}R$ faktoriell ist.

Aufgabe 41: (6+6+6* Punkte)

(i) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeige, dass $f := \frac{X^p - 1}{X-1} = X^{p-1} + ... + X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.
Hinweis: Benutze das Eisensteinkriterium für $f(X+1)$.

(ii) Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?
(1) $\frac{4}{5}X^3 + 12X^2 + \frac{42}{5}$ in $\mathbb{Q}[X]$.
(2) $2X^3 + 12X^2 + 14$ in $\mathbb{Z}[X]$ und in $\mathbb{Q}[X]$.
(3) $X^2 + Y^2 - 1$ in $K[X,Y]$, wobei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ ist.

*(iii) Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass $X^{2^m} + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 11

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 42: (4+4+2+2 Punkte)

Sei $K \hookrightarrow L$ eine endliche Körpererweiterung mit Teilerweiterungen $E, F \subseteq L$. Sei EF der kleinste Teilkörper von L, der E und F enthält, d.h. $EF = K(E \cup F)$. E und F heißen *linear disjunkt über* K, wenn der Homomorphismus von K-Algebren $\alpha\colon E \otimes_K F \to EF$, $e \otimes f \mapsto ef$, ein Isomorphismus ist. Zeige:

(i) $[EF : F] \leq [E : E \cap F] \leq [E : K]$,

(ii) α ist surjektiv und $[EF : K] \leq [E : K][F : K]$,

(iii) E und F sind genau dann linear disjunkt über K, wenn $[EF : K] = [E : K][F : K]$.

(iv) Sind $[E : K]$ und $[F : K]$ teilerfremd, so sind E und F linear disjunkt über K.

Aufgabe 43: (Punkte 3+2+4+3+4*)

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $K \hookrightarrow L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $[L : K] = 2^k$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 3, das in L eine Nullstelle besitzt. Zeige, dass f eine Nullstelle in K hat.

(ii) Sei K ein Körper und sei $K(X) = \mathrm{Quot}(K[X])$. Zeige: $[K(X) : K(X^n)] = n$ für alle $n \geq 1$.

(iii) Seien $p_1, ..., p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen und sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n}) \subset \mathbb{R}$. Bestimme den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q} \subset K$.

(iv) Bestimme den Grad von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$.

*(v) Was ist $\mu_{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2},\mathbb{Q}}$?

Aufgabe 44: (6+12*+6 Punkte)

(i) Sei $K \hookrightarrow L$ eine endliche *einfache* Körpererweiterung (d.h. es existiert $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$). Zeige, dass nur endlich viele Teilerweiterungen $E \subseteq L$ existieren.

Hinweis: Zu jedem Teiler $g := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ von $\mu_{\alpha,K}$ in $L[X]$, definiert man einen Zwischenkörper $E_g := K(a_0, ..., a_n)$. Zeige, dass die E_g genau die Zwischenkörper sind.

*(ii) Sei $K \hookrightarrow L$ eine endliche Körpererweiterung, die nur endlich viele Teilerweiterungen besitzt. Zeige, dass diese Erweiterung einfach ist.

Hinweis: Falls K endlich ist, benutze Aufgabe 16. Wenn K unendlich ist, reduziere durch Induktion erst auf den Fall, dass $L = K(b, c)$ für zwei Elemente $b, c \in L$. Finde dann ein $\lambda \in K$, so dass $L = K(b + \lambda c)$.

(iii) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei $K(X, Y) = \mathrm{Quot}(K[X, Y])$. Zeige, dass die Erweiterung $K(X^p, Y^p) \subseteq K(X, Y)$ nicht einfach ist.

Aufgabe 45*: (6*+6* Punkte)

(i) Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad d. Sei L ein Zerfallungskörper von f. Zeige: $[L : K]$ ist ein Teiler von $d!$.

(ii) Falls $[L : K] = d!$ gilt, zeige, dass f irreduzibel über K ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 12

Bei fast jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 46: (5+4+3 Punkte)

Sei $K \hookrightarrow L$ ein Körpererweiterung.

(i) Zeige: $L_a := \{x \in L \mid x \text{ ist algebraisch über } K\}$ ist ein Teilkörper, genannt der *relative algebraische Abschluss von K in L.*

(ii) Sei nun L algebraisch abgeschlossen. Zeige, dass L_a ein algebraischer Abschluss von K ist.

(iii) Sei $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ eine algebraische Körpererweiterung ist, die nicht endlich ist.

Aufgabe 47: (4+5+3+2+4+6 Punkte)

(i) Sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass eine Primzahl p und eine ganze Zahl $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|K| = p^n$. Zeige, dass K ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^{p^n} - X$ über $\mathbb{F}_p$ ist.

(ii) Zeige umgekehrt, dass für jede Primzahl p und für alle $n \geq 1$ ein Zerfällungskörper K des Polynoms $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$ ein Körper mit p^n Elementen ist.

Hinweis: Zeige, dass die Nullstellen in K von $X^{p^n} - X$ einen Teilkörper bilden.

(iii) Folgere, dass für jede Primzahl p und für alle $n \geq 1$ bis auf Isomorphie genau einen Körper mit $q := p^n$ Elementen existiert. Er wird mit $\mathbb{F}_q$ bezeichnet.

(iv) Zeige, dass für $n > 1$ die Ringe $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_{p^n}$ nicht isomorph sind.

(v) Seien p und ℓ Primzahlen und seien $n, m \in \mathbb{N}$. Unter welcher Bedingung ist $\mathbb{F}_{p^n}$ isomorph zu einem Teilkörper von $\mathbb{F}_{\ell^m}$?

(vi) Das Polynom $f = X^4 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ nach Aufgabe 41 (iii). Zeige, dass f über jedem Körper $\mathbb{F}_p$ (mit p eine Primzahl) nicht irreduzibel ist.

Hinweis: Zeige, dass f eine Nullstelle in $\mathbb{F}_{p^2}$ hat.

Aufgabe 48*: (3*+3*+3*+3* Punkte)

Sei f ein irreduzibles Polynom über $\mathbb{F}_p$ vom Grad $n \geq 1$.

(i) Zeige, dass f über $\mathbb{F}_{p^n}$ zerfällt.

(ii) Sei $d \geq 1$ ein Teiler von n. Sei g ein Primfaktor von f in $\mathbb{F}_{p^d}[X]$. Was ist der Grad von g ?

(iii) Sei $m \geq 1$. Zeige: f ist genau dann über $\mathbb{F}_{p^m}$ irreduzibel, wenn m teilerfremd zu n ist.

(iv) Zeige: Die irreduziblen Polynome über $\mathbb{F}_p$ vom Grad $n \geq 1$ sind genau die Primfaktoren vom Grad n des Polynoms $X^{p^n} - X$ über $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 49: (6+6 Punkte)

(i) Sei $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Bestimme das Minimalpoynom $\mu_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von α über $\mathbb{Q}$.

(ii) Bestimme ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ minimalen Grades mit $\alpha^{-1} = P(\alpha)$.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta SoSe 2015

Übungen Algebra
Blatt 13

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 50: (2+6+4 Punkte)

Sei $K \hookrightarrow L$ eine endliche Körpererweiterung mit Teilerweiterungen $E, F \subseteq L$, und sei $EF = K(E \cup F)$ (Aufgabe 42).

(i) Wir nehmen an, dass $E \cap F \hookrightarrow E$ eine Galois-Erweiterung ist. Zeige: $F \hookrightarrow EF$ ist eine Galois-Erweiterung, und man hat einen natürlichen injektiven Homomorphismus von Gruppen

$$\iota : \mathrm{Gal}(EF/F) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(F/E \cap F).$$

(ii) Falls beide Erweiterungen $E \cap F \hookrightarrow E$ und $E \cap F \hookrightarrow F$ Galois-Erweiterungen sind, zeige, dass ι ein Isomorphismus ist.

(iii) Falls außerdem $E \cap F = K$ gilt, zeige, dass E und F linear disjunkt über K sind (Aufgabe 42). Zeige, dass man einen Isomorphismus hat:

$$\mathrm{Gal}(EF/K) \simeq \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(F/K).$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass der injektive Homomorphismus von (ii) ein Isomorphismus ist. Außerdem sind E nd F linear disjunkt, wenn $E \cap F = K$ gilt, und wenn nur eine der Erweiterungen $K \hookrightarrow E$ oder $K \hookrightarrow F$ eine Galois-Erweiterung ist.

Aufgabe 51: (6+6 Punkte)

Sei p eine Primzahl.

(i) Bestimme einen Zerfällungskörper K von $X^4 - p$ über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ isomorph zu der Diedergruppe D_4 ist (Aufgabe 5).

(ii) Bestimme alle Teilkörper von K.

Aufgabe 52: (2+5+5 Punkte)

(i) Sei $K \hookrightarrow L$ eine endliche Körpererweiterung, und sei Ω ein algebraischer Abschluss von L. Beweise die Ungleichungen:

$$|\operatorname{Aut}_K(L)| \leq |\operatorname{Hom}_K(L, \Omega)| \leq [L : K].$$

Zeige, dass $K \hookrightarrow L$ genau dann normal (bzw. separabel) ist, wenn die erste (bzw. zweite) Unngleichung eine Gleichheit ist.

(ii) Zeige, dass die Erweiterung $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^n}$ (für $n \geq 1$) eine Galois-Erweiterung ist, und zeige, dass $\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n ist, die vom Automorphismus $\sigma : x \mapsto x^p$ erzeugt wird.

(iii) Sei M ein Monoid und K ein Körper. Zeige, dass $\operatorname{Hom}_{\text{Monoid}}(M, K) \subseteq K^M$ eine linear unabhängige Menge ist. *Hinweis:* Betrachte die K-Algebra $K[M]$ und benutze Proposition 11.4.

Aufgabe 53: (8+4 Punkte)

(i) Sei L ein Körper, sei $G \subseteq \operatorname{Aut}(L)$ eine endliche Untergruppe, und setze $K := L^G$. Zeige, dass $K \hookrightarrow L$ eine Galois-erweiterung ist.

Hinweis: Für $x \in L$ betrachte das Polynom

$$P(X) := \prod_{y \in G \cdot x} (X - y)$$

wobei $G \cdot x$ die Bahn von x unter G ist.

(ii) Zeige, dass $\operatorname{Gal}(L : K) = G$ gilt.

Aufgabe 54: (Punkte 10+2)

Sei $K \subset L$ ein Galois-Körpererweiterung vom Grad $n \geq 1$ mit Galois-gruppe $G = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$.

(i) Zeige, dass ein $x \in L$ existiert, so dass $(\sigma_1(x), ..., \sigma_n(x))$ eine Basis von L als K-Vektorraum ist.

Hinweis: Falls K endlich ist, benutze Aufgaben 52 (ii) und (iii). Wenn K unendlich ist, sei $a \in L$ mit $L = K(a)$ und definiere $a_i := \sigma_i(a)$ und $g_i = \frac{f(X)}{(X-a_i)f'(a_i)}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann wähle $x \in L$ so dass

$$\det(\sigma_i(g_j(x)))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$$

gilt.

(ii) Zeige, dass L eine natürliche Struktur als $K[G]$-Modul besitzt, und dass L ein freier $K[G]$-Modul vom Rang 1 ist.