Klausurblatt zur Algebra I
Universität Paderborn WS2015

Jean-Stefan Koskivirta

Aufgabe 1: (Punkte 2+2+1+2+2+3+3+3+2=20)
Sei $(S(\mathbb{C}), \circ)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der natürlichen Verknüpfung. Für $a, b \in \mathbb{C}$ sei $f_{a,b}$ die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$. Die Menge der Elemente in $S(\mathbb{C})$ der Form $f_{a,b}$ wird mit G bezeichnet.

(i) Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ ist $f_{a,b}$ ein Element in $S(\mathbb{C})$?

(ii) Zeige, dass G eine Untergruppe von $S(\mathbb{C})$ ist.

(iii) Zeige: Die Abbildung $\Phi \colon G \to \mathbb{C}^{\times}$, $f_{a,b} \mapsto a$ ist ein Homomorphismus von Gruppen.

(iv) Sei T die Menge der Translationen von $\mathbb{C}$, d.h. der Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + b$ für $b \in \mathbb{C}$. Zeige, dass T ein Normalteiler von G ist, und bestimme die Faktorgruppe G/T.

(v) Sei $H \subset G$ eine endliche Gruppe. Zeige, dass $H \cap T = \{\mathrm{id}\}$ gilt. Folgere, dass H zyklisch ist.

(vi) Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ so, dass $f_{a,b}^n = f_{a_n,b_n}$ gilt. Bestimme a_n und b_n.

(vii) Sei n eine natürliche Zahl. Was sind die Elemente der Ordnung n von G?

(viii) Was ist das Zentrum von G?

Aufgabe 2: (Punkte 15 $\times$ 2=30)
Entscheide jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründe deine Antworten.

(i) Ein Unterring eines Hauptidealrings ist ein Hauptidealring.

(ii) In einem faktoriellen Ring ist jedes Primideal ein maximales Ideal.

(iii) Ist I ein Ideal von $\mathbb{Q}[X]$ mit $I \neq \{0\}$, so ist der Faktorring $\frac{\mathbb{Q}[X]}{I}$ isomorph zu einem direkten Produkt von Körpern.

(iv) Ein kommutativer Ring ist genau dann ein Körper, wenn $\{0\}$ ein maximales Ideal ist.

(v) Für jede Primzahl p ist $\mathbb{F}_p$ bis auf Isomorphie der einzige Ring der Kardinalität p.

(vi) Die Gruppe $(\mathbb{F}_{p^2}, +)$ ist zyklisch.

(vii) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind die einzigen Unterringe von $\mathbb{Q}$.

(viii) Ein unendlicher Ring hat Charakteristik 0.

(ix) Der Faktorring $\frac{\mathbb{Z}[X]}{(2X)}$ ist ein Integritätsbereich.

(x) Der Faktorring $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(2X)}$ ist ein Integritätsbereich.

(xi) Sei $\mathbb{Q} \subset K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Dann existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ oder $K = \mathbb{Q}(i\sqrt{n})$

(xii) Der Faktorring $\frac{\mathbb{Q}(i)[X]}{(X^2+2X+2)}$ ist ein Körper.

(xiii) Die Körper $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind isomorph.

(xiv) Es existiert ein einziger algebraisch abgeschlossener Körper $K \subset \mathbb{C}$, der algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.

(xv) Ist $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ eine Körpererweiterung vom Grad 5, so gilt $K = \mathbb{Q}(\alpha^2)$.