Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2015/16

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 1

*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Dies ist ein "Literaturzettel". Jeder sei ermutigt, unbekannte Begriffe und Sätze selbst zu recherchieren.

Aufgabe 1: (48* Punkte)

1. Sei X ein kompakter topologischer Raum, und sei $A := C(X)$ die $\mathbb{C}$-Algebra der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$. Für $x \in X$, sei $\mathfrak{m}_x := \{f \in A,\ f(x) = 0\}$.
   (a) Zeige, dass $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal von A mit Restklassenkörper $\mathbb{C}$ ist.
   (b) Sei $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Zeige, dass $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$ gilt.
   (c) Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Zeige, dass ein Punkt $x \in X$ existiert mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Folgere, dass die Abbildung $\varphi : X \to \mathrm{Max}(A)$, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ bijektiv ist.
   (d) Zeige, dass φ stetig ist. Folgere, dass φ ein Homöomorphismus ist.
2. Sei $(A, ||\cdot||)$ eine kommutative Banach-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Eins.
   (a) Zeige, dass jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ abgeschlossen ist.
   Hinweis: Zeige, dass $A^\times \subset A$ offen ist.
   (b) Sei $I \subset A$ ein abgeschlossenes Ideal. Zeige, dass A/I bezüglich der Norm $||x + I|| := \min_{y \in I} ||x + y||$ eine Banach-Algebra ist.
   (c) Zeige, dass der Restklassenkörper von jedem maximalen Ideal in A isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.
   Hinweis: Benutze den Satz von Gelfand-Mazur.
3. Sei $(A, ||\cdot||, *)$ eine kommutative C^*-Algebra mit Eins, und setze $X := \mathrm{Max}(A)$. Für $x \in X$ schreiben wir $\mathfrak{m}_x$ wenn x als Ideal von A aufgefasst wird. Für $f \in A$ definieren wir die Funktion
   $$\hat{f}\colon X \to \mathbb{C},\ x \mapsto f + \mathfrak{m}_x \in A/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C},$$
   wobei die Identifikation $A/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$ aus Aufgabe 2.(c) folgt.
   (a) Zeige, dass die in der Vorlesung definierte Topologie auf X die gröbste Topologie ist, die alle Abbildungen $\hat{f}\colon X \to \mathbb{C}$ für $f \in A$ stetig macht.
   (b) Zeige, dass X ein kompakter topologischer Raum ist.
   (c) Zeige, dass $f \mapsto \hat{f}$ ein Isomorphismus von C^*-Algebren $A \to C(X)$ ist.
4. Zeige, dass der Funktor $X \mapsto C(X)$ eine kontravariante Kategorien-Äquivalenz zwischen der Kategorie der kompakten topologischen Räume und der Kategorie der kommutativen C^*-Algebren mit Eins liefert.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 2

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 2: (6+6 Punkte)

1. Seien $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ Primideale eines kommutativen Ringes A. Zeige: Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A mit $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$, so gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ für ein i.
2. Seien $\mathfrak{a}_1, ..., \mathfrak{a}_n$ Ideale von A. Zeige: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A mit $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, so gilt $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$ für ein i.

Aufgabe 3: (3+9 Punkte)

Seien S, T zwei multipliativ abgeschlossene Teilmengen eines kommutativen Ringes A und sei $\iota : A \to S^{-1}A$ der kanonische Ringenhomomorphismus. Wir definieren $\overline{T} := \iota(T)$ und

$$ST := \{st\,;\ s \in S,\ t \in T\}.$$

1. Zeige, dass $\overline{T}$ (bzw. ST) eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $S^{-1}A$ (bzw. A) ist.
2. Zeige, dass es genau einen Isomorphismus von A-Algebren $\overline{T}^{-1}(S^{-1}A) \simeq (ST)^{-1}A$ gibt.

Aufgabe 4: (6+6 Punkte)

1. Sei A ein kommutativer Ring und $f \in A$ ein Element. Zeige, dass es einen eindeutigen A-Algebra-Isomorphismus $A[X]/(fX - 1) \xrightarrow{\sim} A_f$ gibt.
2. Sei S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, und sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeige, dass $S^{-1}M = 0$ genau dann gilt, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM = 0$.

Aufgabe 5: (2+5+5+5* Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring, S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, und sei $f\colon A \to S^{-1}A$ der kanonische Ringhomomorphismus.

1. Sei R die Menge der Elemente in A die keine Nullteiler sind. Zeige, dass R multiplikativ abgeschlossen ist.

   Bemerkung: Der Ring $R^{-1}A$ heißt der *Ring der totalen Brüche*.

2. Zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn $S \subseteq R$ gilt.

3. Zeige, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $S \subseteq A^{\times}$ gilt.

*4. Sei $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $S := \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Bestimme $S^{-1}A$ und zeige, dass f surjektiv aber kein Isomorphismus ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 3

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 6: (3+5+4 Punkte)

1. Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von X (d.h., jede offene Teilmenge von X ist Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$). Zeige, dass X genau dann quasikompakt (d.h., jede Überdeckung von X durch offene Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung) ist, wenn jede Überdeckung durch Mengen aus $\mathcal{B}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
2. Seien A ein kommutativer Ring, $X := \operatorname{Spec}(A)$ und $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus A. Zeige, dass $X = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ genau dann gilt, wenn das von den $(f_i)_{i \in I}$ erzeugte Ideal A ist.
3. Zeige, dass $X = \operatorname{Spec}(A)$ quasikompakt ist.

Aufgabe 7: (5+2+5 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Wir bezeichnen einen Punkt $x \in X$ mit $\mathfrak{p}_x$, wenn er ausgefasst als Primideal von A wird. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Es gilt $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$, für alle $x \in X$ (dabei bezeichnet $\overline{Y}$ den Abschluss einer Teilmenge Y). Mit anderen Worten: Es gilt $y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$ für alle $x, y \in X$.
2. Für $x \in X$ ist die Menge $\{x\}$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}_x$ ein maximales Ideal ist.
3. Der Raum X ist T_0, d.h. er erfüllt die folgende Eigenschaft: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren eine offene Umgebung U von x mit $y \notin U$ oder eine offene Umgebung V von y mit $x \notin V$.

Aufgabe 8: (6+6 Punkte)

1. Zeige, dass für einen topologischen Raum $X \neq \emptyset$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.
   (i) Jede offene nichtleere Teilmenge U liegt dicht in X (d.h. $\overline{U} = X$).
   (ii) Für alle nichtleeren offenen Teilmengen U und V von X gilt $U \cap V \neq \emptyset$.
   (iii) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subsetneq X$ gilt $A \cup B \neq X$.

   Ein topologischer Raum, der diese Eigenschaften erfüllt, heißt *irreduzibel*.

2. Sei A ein kommutativer Ring und $X = \operatorname{Spec}(A)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (i) X ist irreduzibel.
   (ii) Es gibt genau einen Punkt $\eta \in X$, so dass $\overline{\{\eta\}} = X$.
   (iii) $\operatorname{Nil}(A)$ ist ein Primideal.

   Der Punkt η heißt dann *generischer Punkt von* X.

   Folgere, dass $\operatorname{Spec}(A)$ irreduzibel ist, wenn A nullteilerfrei ist.

Aufgabe 9: (9+3 Punkte)

Sei $\varphi \colon A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe, und sei ${}^a\varphi : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ die assoziierte Abbildung zwischen den entsprechenden topologischen Räumen.

1. Zeige: $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ für alle Ideale $\mathfrak{b} \subseteq B$.

2. Folgere, dass ${}^a\varphi$ genau dann dichtes Bild hat, wenn $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \operatorname{Nil}(A)$ gilt.

Aufgabe 10: (4+4*+4* Punkte)

1. Seien $A_1, ..., A_n$ kommutative Ringe und $A := \prod_{i=1}^n A_i$. Zeige, dass $X = \operatorname{Spec}(A)$ die disjunkte Vereinigung von offenen und abgeschlossenen Teilmengen $X_1, ..., X_n$ ist, sodass X_i zu $\operatorname{Spec}(A_i)$ homöomorph ist.

2. Sei nun A ein kommutativer Ring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (i) $X = \operatorname{Spec}(A)$ ist nicht zusammenhängend (Erinnerung: ein topologischer Raum $X \neq \emptyset$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Teilmengen $\neq \emptyset, X$ gibt, die zugleich offen und abgeschlossen sind).
   (ii) Es existiert Ringe A_1, A_2 verschieden vom Nullring mit $A \simeq A_1 \times A_2$.
   (iii) Es existiert in A ein Element $x \neq 0, 1$ mit $x^2 = x$.
   Bemerkung : Ein Element $x \in A$ mit $x^2 = x$ heißt *idempotent*.

3. Zeige, dass das Spektrum eines lokalen Ringes zusammenhängend ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 4

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 11: (6+6 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring. Man definiert das *Jacobson-Radikal* von A als

$$\mathrm{Jac}(A) := \bigcap_{\mathfrak{m} \subset A \text{ maximales Ideal}} \mathfrak{m}.$$

1. Zeige : $\mathrm{Jac}(A) = \{x \in A\,;\ \forall y \in A\colon\ 1 + xy \in A^\times\}$.
2. Zeige : Ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein Ideal und $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ offen mit $V(\mathfrak{a}) \subset U$, so gilt $U = \mathrm{Spec}(A)$.

Aufgabe 12: (4+4+4+4* Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring.

1. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Famile von A-Moduln. Zeige:
$$\bigoplus_{i \in I} M_i \text{ projektiv } \Leftrightarrow M_i \text{ projektiv für alle } i \in I.$$
2. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeige, dass M genau dann projektiv ist, wenn M ein direkter Summand eines freien endlich erzeugten Moduls ist.
3. Seien M, N zwei projektive endlich erzeugte A-Moduln. Zeige, dass $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ ein projektiver und endlich erzeugter A-Modul ist.

*4. Zeige, dass jeder endlich erzeugte projektive A-Modul von endlicher Präsentation ist.

Aufgabe 13: (3+3+3+3+3*+3* Punkte)

Welche von den $\mathbb{Z}$-Moduln (1) $\mathbb{Q}$, (2) $\mathbb{Z}[X]$, (3) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, (4) $\mathbb{Q}^\times_{>0}$, (*5) $\mathbb{Q}^\times$, (*6) $\mathbb{R}^\times_{>0}$ sind projektiv? Welche sind endlich erzeugt? Welche sind von endlicher Präsentation?

Aufgabe 14: (6+6+9* Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring, M, N zwei A-Moduln. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Sind M und N endlich erzeugt, so ist $M \otimes_A N$ endlich erzeugt.
2. Sind M und N projektiv, so ist $M \otimes_A N$ projektiv.

*3. Sind M und N von endlicher Präsentation, so ist $M \otimes_A N$ von endlicher Präsentation.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 5

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 15: (8+4+4* Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul.

1. Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = M$. Zeige, dass $M = 0$ gilt.
2. Sei $A := \mathbb{Z}_{(2)}$ (die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ in Primideal (2)), $\mathfrak{a} := \mathrm{Jac}(A)$ und $N := \mathbb{Q}$. Zeige, dass $\mathfrak{a} = 2\mathbb{Z}_{(2)}$ und $\mathfrak{a}N = N$ gilt. Warum widerspricht dies nicht 1. ?

*3. Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein Ideal mit $N + \mathfrak{a}M = M$. Zeige, dass $N = M$ gilt.

Aufgabe 16: (12 Punkte)

Seien A ein kommutativer Ring, M, N zwei A-Moduln, $u : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) u ist injektiv (bzw. surjektiv).

(ii) Es existieren $f_1, ..., f_r \in A$, die A als Ideal erzeugen, so dass die induzierte Abbildung $u_{f_i} : M_{f_i} \to N_{f_i}$ injektiv (bzw. surjektiv) für alle i ist.

(iii) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist die induzierte Abbildung $u_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ injektiv (bzw. surjektiv).

(iv) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A ist die induzierte Abbildung $u_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ injektiv (bzw. surjektiv).

Aufgabe 17: (6+6 Punkte)

1. Seien M und N flache A-Moduln. Zeige, dass $M \otimes_A N$ ein flacher A-Modul ist.
2. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln. Zeige, dass $\bigoplus_{i\in I} M_i$ genau dann ein flacher A-Modul ist, wenn M_i für alle i ein flacher A-Modul ist.

Aufgabe 18: (2+10 Punkte)

Seien M und N zwei A-Moduln, und sei M flach.

1. Sei N' ein Untermodul von N, und sei $i\colon N' \to N$ die Inklusion.

   Zeige, dass $i \otimes \mathrm{id}_M\colon N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ injektiv ist, so dass man $N' \otimes_A M$ als Untermodul von $N \otimes_A M$ auffassen kann.
2. Zeige, dass für Untermoduln N_1, N_2 von N gilt (als Untermoduln von $N \otimes_A M$):

$$(N_1 \cap N_2) \otimes_A M = N_1 \otimes_A M \cap N_2 \otimes_A M.$$

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 6

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 19: (12 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring. Sei gegeben eine exakte Sequenz von A-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

mit M'' von endlicher Präsentation und M von endlichem Typ. Zeige, dass M' von endlichem Typ ist.
Hinweis: Wähle eine exakte Sequenz $A^s \to A^r \to M'' \to 0$ und benutze das Schlangenlemma.

Aufgabe 20: (4+4+2+2 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring.

(i) Zeige, dass ein flacher A-Modul torsionsfrei ist (dabei heißt ein A-Modul M *torsionsfrei*, falls die Abbildung $M \to M$, $x \mapsto ax$ injektiv ist für alle Elemente $a \in A$, die keine Nullteiler sind).

(ii) Sei A nullteilerfei, und sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Wann ist der A-Modul A/I flach?

(iii) Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass L ein flacher K-Modul ist.

(iv) Zeige, dass $A[X_1, ..., X_n]$ ein flacher A-Modul ist.

Aufgabe 21: (3+3+6 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring, und seien M und N zwei A-Moduln.

1. Sei M flach und N treu flach. Zeige, dass $M \oplus N$ treu flach ist.

2. Sei $M \neq 0$ frei. Zeige, dass M treu flach ist.

3. Sei M treu flach. Zeige, dass $M \otimes_A N$ genau dann flach (bzw. treu flach) ist, wenn M flach (bzw. treu flach ist).

Aufgabe 22: (4+4+4 Punkte)

Seien A, B kommutative Ringe, $\varphi\colon A \to B$ ein Ring-Homomorphismus.

1. Seien A und B lokal, und sei φ lokal (d.h. $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und $\mathfrak{n}$ das maximale Ideal von B ist). Zeige, dass φ genau dann flach ist, wenn φ treu flach ist.

2. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeige, dass die Inklusion $\mathbb{Z}_{(p)} \to \mathbb{Q}$ ein flacher Ring-Homomorphismus von lokalen Ringen ist, der nicht treu flach ist.

3. Sei φ treu flach, und sei M ein A-Modul. Zeige, dass M genau dann ein treu flacher A-Modul ist, wenn $\varphi^*(M)$ ein treu flacher B-Modul ist.

***Aufgabe 23:** (3*+2*+3*+3*+3*+2* Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring, sei M ein A-Modul, und sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann heißt der $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum

$$M(\mathfrak{p}) := M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}$$

die *Faser von M in $\mathfrak{p}$*.

Das Ziel der Aufgabe ist es, ein Gegenbeispiel zu der Umkehrung von Aufgabe 20(i) zu geben. Sei nun $A := K[X, Y]$ für einen Körper K und sei $M := \mathfrak{m} := (X, Y)$ das von X und Y erzeugte Ideal, aufgefasst als A-Modul.

1. Zeige, dass M ein torsionsfreier (Augabe 20) A-Modul von endlicher Präsentation ist.

2. Zeige, dass $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A ist.

3. Zeige, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A die Dimension des $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraums $M(\mathfrak{p})$ entweder 1 oder 2 ist.

4. Für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ zeige, dass $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(M(\mathfrak{p})) = 1$ gilt.
   Hinweis: Betrachte die Gleichung $XY - YX = 0$.

5. Zeige, dass $\dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(M(\mathfrak{m})) = 2$. Folgere, dass $M_{\mathfrak{m}}$ kein flacher $A_{\mathfrak{m}}$-Modul ist.

6. Folgere, dass M nicht flach ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 7

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 24: (4+8 Punkte)

Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ und einen A-Modul M definiert man die Faser von M als den $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum $M(\mathfrak{p}) := M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$. Für einen endlich erzeugten A-Modul M definieren wir die Funktion:

$$d_M : \operatorname{Spec}(A) \to \mathbb{N}_0,\ \mathfrak{p} \mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(M(\mathfrak{p})).$$

Sei nun M ein A-Modul von endlicher Präsentation. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Ist M projektiv, so ist die Funktion d_M lokal konstant (d.h., für jeden Punkt $x \in \operatorname{Spec} A$ existiert eine offene Umgebung U von x, so dass $d_{M|U}$ konstant ist).
2. Falls A reduziert ist (d.h. keine nilpotenten Elemente $\neq 0$ besitzt) gilt: M projektiv $\Leftrightarrow$ d_M lokal konstant.

Aufgabe 25: (4+4+4 Punkte)

1. Sei M ein A-Modul und $u : M \to M$ eine A-lineare Abbildung.
   (i) Sei M noethersch und u surjektiv. Benutze die Untermoduln $\operatorname{Ker}(u^n)$, $n \in \mathbb{N}$, um zu zeigen, dass u ein Isomorphismus ist.
   (ii) Sei M artinsch und u injektiv. Zeige, dass u ein Isomorphismus ist.
2. Sei M ein A-Modul, und seien $N_1, N_2 \subseteq M$ zwei Untermoduln. Zeige : Sind M/N_1 und M/N_2 noethersch (bzw. artinsch), so ist $M/(N_1 \cap N_2)$ noethersch (bzw. artinsch).

Aufgabe 26: (9+3 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring.

1. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Ideale von A, die nicht endlich erzeugt sind. Zeige: Ist $\mathcal{E}$ nicht leer, so besitzt die partiell geordnete Menge $(\mathcal{E}, \subseteq)$ ein maximales Element, und dieses ist ein Primideal.
2. Zeige, dass A genau dann noethersch ist, wenn jedes Primideal endlich erzeugt ist.

Aufgabe 27: (6+6 Punkte)

1. Sei $\varphi : A \to B$ treu flach und sei M ein A-Modul. Zeige: Ist $\varphi^*(M)$ ein noetherscher B-Modul. so ist M ein noetherscher A-Modul.

2. Sei M ein A-Modul. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) M ist noethersch.

   (b) Es existieren Elemente $f_1, ..., f_n \in A$, die A als Ideal erzeugen, so dass M_{f_i} für alle i ein noetherscher A_{f_i}-Modul ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 8

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 28: (3+3+3+3 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring. Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen:

1. Ist $A[T]$ noethersch, so ist auch A noethersch.
2. Sei B eine A-Algebra von endlichem Typ, und sei B noethersch. Dann ist A noethersch.
3. Ein Unterring eines noetherschen Ringes ist noethersch.
4. Der Ring A ist genau dann noethersch, wenn jeder endlich erzeugte A-Modul von endlicher Präsentation ist.

Aufgabe 29: (12 Punkte)

Sei A ein noetherscher Ring. Zeige, dass der Ring der formalen Potenzreihen $A[[T]]$ noethersch ist.

Hinweis: Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[[T]]$ und $n \geq 0$ betrachte

$$\mathfrak{a}_n := \{a \in A\,;\, \exists f \in \mathfrak{a},\ f = aT^n + \text{(Terme höherer Ordnung)}\}.$$

Aufgabe 30: (12 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring, und sei M ein noetherscher A-Modul. Setze

$$\mathfrak{a} := \mathrm{Ann}(M) := \{a \in A\,;\, aM = 0\}$$

Zeige, dass $A/\mathfrak{a}$ noethersch ist.

Aufgabe 31: (12 Punkte)

Ein topologischer Raum heißt diskret, falls jede Teilmenge offen ist. Sei A ein noetherscher Ring. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. A ist artinsch.
2. $\mathrm{Spec}(A)$ ist diskret und endlich.
3. $\mathrm{Spec}(A)$ ist diskret.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 9

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 32: (9+3 Punkte)

Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *abgeschlossen*, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ das Bild $f(A)$ abgeschlossen in Y ist.

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ring-Homomorphismus, und sei ${}^a\varphi\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die assoziierte stetige Abbildung.

(1) Zeige, dass für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ gilt: ${}^a\varphi(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$.
Hinweis: Aufgabe 9

(2) Zeige, dass ${}^a\varphi$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 33: (6+6 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring.

(1) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ring-Homomorphismus, und sei C eine kommutative A-Algebra. Zeige, dass $\varphi \otimes \mathrm{id}_C\colon C = A \otimes_A C \to B \otimes_A C$ ganz ist.

(2) Seien $B_1, \dots, B_m$ ($m \in \mathbb{N}$) ganze A-Algebren. Zeige, dass $\prod_{i=1}^m B_i$ eine ganze A-Algebra ist.

Aufgabe 34: (3+3+6 Punkte)

(1) Sei B ein kommutativer Ring, und sei $A \subseteq B$ ein Unterring, so dass $B \setminus A$ eine multiplikative Teilmenge von B ist. Zeige, dass A ganz abgeschlossen in B ist.

(2) Sei A nullteilerfrei. Zeige, dass A ganz abgeschlossen in $A[T]$ ist.

(3) Sei nun A beliebig. Bestimme den ganzen Abschluss von A in $A[T]$.

Aufgabe 35: (6+6 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring, und sei G eine endliche Gruppe von Ring-Automorphismen von A. Sei

$$A^G := \{a \in A\,;\, \sigma(a) = a \text{ for all } \sigma \in G\}.$$

(1) Zeige, dass A^G ein Unterring von A ist und dass A ganz über A^G ist.
Hinweis: Für $a \in A$ betrachte das Polynom $\prod_{\sigma \in G}(T - \sigma(a))$.

(2) Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge mit $\sigma(S) \subseteq S$ für alle $\sigma \in G$, und sei $S^G := S \cap A^G$. Zeige, dass es genau eine Fortsetzung der Operation von G auf A zu einer Operation auf $S^{-1}A$ gibt und dass gilt:

$$(S^G)^{-1}A^G = (S^{-1}A)^G.$$

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 10

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 36: (12 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie Zahl, $d \neq 0, 1$. Sei B der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$. Zeige, dass

$$B = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}], & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod 4; \\ \mathbb{Z}[(1+\sqrt{d})/2], & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4). \end{cases}$$

Aufgabe 37: (4+8 Punkte)

Sei A ein normaler nullteilerfreier Ring, $K := \mathrm{Quot}(A)$, sei L eine endliche Galois-Erweiterung, sei $G := \mathrm{Gal}(L/K)$, und sei B der ganze Abschluss von A in L.

(1) Zeige, dass $\sigma(B) = B$ für alle $\sigma \in G$ und dass

$$A = B^G := \{b \in B\,;\, \sigma(b) = b \text{ für alle } \sigma \in G\}.$$

(2) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, und sei P die Menge der Primideal $\mathfrak{q}$ von B mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Zeige, dass

$$G \times P \longrightarrow P, \qquad (\sigma, \mathfrak{q}) = \sigma(\mathfrak{q})$$

eine transitive Operation von G auf der Menge P ist. Folgere, dass $|P|$ ein Teiler von $[L : K]$ (und insbesondere endlich) ist.
Hinweis: Für die Transitivität betrachte $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in P$ und $x \in \mathfrak{q}$. Zeige $\prod_{\sigma \in G} \sigma(x) \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}'$ und damit $\sigma(x) \in \mathfrak{q}'$ für ein $\sigma \in G$. Folgere $\mathfrak{q} \subseteq \bigcup_\sigma \sigma(\mathfrak{q}')$ und benutze Aufgabe 2.

Aufgabe 38: (5+4+3 Punkte)

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, sei $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge von Untergruppen.

(1) Zeige, dass G eine eindeutige Topologie besitzt, so dass G eine topologische Gruppe ist und dass $(G_n)_n$ eine Umgebungsbasis der 0 ist. Sei im Folgenden G mit dieser Topologie versehen.
(2) Zeige, dass für jede Teilmenge Y von G der Abschluss von Y gerade $\bigcap_{n \geq 0}(Y + G_n)$ ist.
(3) Zeige, dass die Toplogie von G genau dann diskret ist, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G_n = 0$ existiert.

Aufgabe 39: (6+6 Punkte)

(1) Sei X ein topologischer Raum, und sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.
   (i) Y ist der Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von X.
   (ii) Y ist offen in seinem Abschluss.
   (iii) Es existiert eine Familie $(U_i)_i$ offener Mengen $U_i \subseteq X$, so dass $Y \subseteq \bigcup_i U_i$ und $Y \cap U_i$ ist abgeschlossen in U_i für alle i.

   Eine Teilmenge, die diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, heißt *lokal abgeschlossen*. Beachte, dass insbesondere jede offene und jede abgeschlossene Menge lokal abgeschlossen ist.

(4) Sei G eine topologische Gruppe, und sei H eine lokal abgeschlossene Untergruppe von G. Zeige, dass H abgeschlossen in G ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 11

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 40: (5+3+4 Punkte)

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, und sei $d\colon G \times G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Pseudometrik, d.h.:

$$d(g,g) = 0, \quad d(g,h) = d(h,g), \quad d(g,k) \leq d(g,h) + d(h,k), \qquad \text{für alle } g,h,k \in G$$

Sei d translationsinvariant. Versehe G mit der Topologie, die von den Mengen der Form

$$B_r(g) := \{h \in G\,;\, d(g,h) < r\}, \qquad g \in G, r \in \mathbb{R}_{>0}$$

erzeugt wird (mit anderen Worten: Eine Teilmenge $U \subseteq G$ ist genau dann offen, wenn für alle $g \in U$ ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit $B_r(g) \subseteq U$).

(1) Zeige, dass G eine topologische Gruppe ist, so dass 0 eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

(2) Setze $|g| := d(g,0)$. Zeige: $|0| = 0$, $|-g| = |g|$, $|g+h| \leq |g| + |h|$ für alle $g, h \in G$.

(3) Für eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sagt man, dass die *Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ *konvergiert*, falls die Folge der Partialsummen $(\sum_{n=0}^{N} g_n)_N$ konvergiert.

Zeige, dass wenn $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ konvergiert, dann ist $(g_n)_n$ eine Nullfolge (d.h., 0 ist ein Grenzwert der Folge $(g_n)_n$).

Aufgabe 41: (12 Punkte)

Notation wie in Aufgabe 40. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) G ist vollständig.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe in G ist konvergent.

(iii) Es gilt das Majorantenkriterium: Für jede Folge $(g_n)_n$ in G and für jede Folge $(r_n)_n$ reeller Zahlen mit $|g_n| \leq r_n$ so dass $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ in G.

Ist d nicht-archimedisch, zeige, dass (i) – (iii) ebenfalls äquivalent sind zu:

(iv) Für jede Nullfolge $(g_n)_n$ in G konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$.

Aufgabe 42: (6+6*+10* Punkte)

Notation wie in Aufgabe 40. Sei G vollständig (Aufgabe 41). Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ in G heißt *kommutativ konvergent*, wenn für jede Bijektion $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_{\sigma(n)}$ konvergiert.

(1) Zeige, dass jede absolut konvergente Reihe in G auch kommutativ konvergent ist.

(2) Zeige, dass für $G = (\mathbb{R}, +)$, versehen mit der üblichen Topologie und dem üblichen Absolutbetrag, auch die Umkehrung gilt.

(3) Zeige die Umkehrung allgemeiner für endlich-dimensionale normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume.
Bemerkung: Für (unendlich-dimensionale) reelle Banachräume ist die Umkehrung im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 43: (2+5+5 Punkte)

Sei $d > 1$ eine ganze Zahl und setze $G_n := d^n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei $\mathbb{Z}$ mit der Struktur einer topologischen Gruppe versehen, so dass $(G_n)_n$ eine Umgebungsbasis der 0 ist. Diese Topologie heißt die *d-adische Topologie*. Es bezeichne $\mathbb{Z}_d$ die Komplettierung.

(1) Zeige, dass der kanonische stetige Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_d$ injektiv ist. Im Folgenden fassen wir $\mathbb{Z}$ als Untergruppe von $\mathbb{Z}_d$ auf.

(2) Zeige, dass man für alle $m \geq 1$ einen Isomorphismus topologischer Gruppen (d.h. ein Gruppenhomomorphismus, der ein Homöomorphismus ist) hat $\mathbb{Z}_d \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{d^m}$.

(3) Sei $d = ef$ wobei $e, f > 1$ teilerfremde Zahlen sind. Zeige dass man einen Isomorphismus topologischer Gruppen $\mathbb{Z}_d \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_e \times \mathbb{Z}_f$ hat.

Aufgabe 44: (3+3+3+3 Punkte)

Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z}_p$ (Aufgabe 43), wobei p eine Primzahl ist. Welche der folgenden Folgen bzw. Reihen konvergiert in $\mathbb{Z}_p$.

(1) Die Folge $(d^n)_n$ für $d \in \mathbb{Z}$.

(2) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$.

(3) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(4) Die Folge $(a^{p^n})_n$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu p.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 13

Bei fast jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 49: (12 Punkte)

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein kommutativer lokaler noetherscher Ring, sei $I \subseteq \mathfrak{m}$ ein Ideal, und sei $\hat{A}$ die I-adische Komplettierung $\hat{A}$ und $\hat{m}$ die I-adische Komplettierung des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$. Zeige, dass $A/\mathfrak{m} = \widehat{(A/\mathfrak{m})} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$, dass $\hat{A}$ ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\hat{m}$ ist und dass der kanonische Ring-Homomorphismus $A \to \hat{A}$ treu flach ist.

Aufgabe 50: (4+4+4+4+6*+8*+4+4 Punkte)

Sei A ein kommutativer nullteilerfreier noetherscher Ring mit Quotientenkörper K und sei $I(A)$ die Gruppe der invertierbaren gebrochenen Ideale von A. Ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ hat *Höhe 1*, falls kein Primideal $\mathfrak{p}'$ existiert mit $(0) \subsetneq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$.

1. Sei $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal und $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Zeige, dass $(A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ ein Artinring ist und folgere, dass die Zahl

$$\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}) := \ell_{A_\mathfrak{p}}\left((A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p}\right)$$

endlich ist.

2. Sei $I \subseteq K$ ein invertierbares gebrochenes Ideal und $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Sei $x \in A \setminus \{0\}$ mit $xI \subseteq A$. Zeige, dass die Zahl

$$\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(I) := \operatorname{ord}_\mathfrak{p}(xI) - \operatorname{ord}_\mathfrak{p}((x))$$

unabhängig von der Wahl von x ist.

3. Sei

$$D(A) := \bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \subset A \\ \mathfrak{p} \text{ Primideal der Höhe 1}}} \mathbb{Z}\mathfrak{p}.$$

Ein Element von $D(A)$ heißt *Weil-Divisor* von A. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : I(A) \longrightarrow D(A), \quad \mathfrak{a} \mapsto \sum_\mathfrak{p} \operatorname{ord}_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})\mathfrak{p}$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist.

4. Für ein Element $f \in K \setminus \{0\}$ definieren wir den Weil-Divisor $\operatorname{div}(f)$ als $\varphi(fA)$. Ein solcher Weyl-Divisor heißt *Hauptdivisor*. Zeige, dass die Hauptdivisoren eine Untergruppe $D_0(A) \subseteq D(A)$ bilden, und dass φ einen Homomorphismus von Gruppen

$$\tilde{\varphi} : \operatorname{Pic}(A) \longrightarrow D(A)/D_0(A) =: Cl(A)$$

induziert.

*(5) Sei A normal. Zeige, dass φ und $\tilde{\varphi}$ injektiv sind.

*(6) Sei A faktoriell. Zeige, dass jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal ist und dass für jede multiplikative Teilmenge S von A auch $S^{-1}A$ faktoriell ist.

(7) Sei A *lokal faktoriell*, d.h für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A ist die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ faktoriell. Zeige, dass φ und $\tilde{\varphi}$ Isomorphismen sind.

(8) Folgere, dass $\operatorname{Pic}(A) = 0$ gilt.

*Aufgabe 51: (3+3+3+3 Punkte)

In dieser Aufgabe wird mit einer anderen Methode bewiesen, dass die Picard-Gruppe eines faktoriellen Rings trivial ist (Aufgabe 50 (8)). Sei nun A ein faktorieller Ring.

1. Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Zeige, dass die Menge der Hauptideale (x) mit $\mathfrak{a} \subseteq (x)$ ein kleinstes Element $c(\mathfrak{a})$ (bezüglich der Inklusion) besitzt.
2. Was ist $c(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$?
3. Zeige, dass $c(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = c(\mathfrak{a})c(\mathfrak{b})$ für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq A$ gilt.
4. Zeige, dass $\operatorname{Pic}(A) = 0$ gilt.

Aufgabe 52: (12 Punkte)

Ein Ring heißt *semilokal*, falls er endlich viele maximale Ideale besitzt. Zeige, dass ein semilokaler Dedekind-Ring ein Hauptidealring ist.

Prof. Dr. Torsten Wedhorn
Dr. Jean-Stefan Koskivirta

WiSe 2015

Übungen Kommutative Algebra
Blatt 14

Bei jeder Aufgabe kann man 12 Punkte erreichen.
*-Aufgaben sind Zusatzaufgaben und bringen Bonuspunkte.

http://www2.math.uni-paderborn.de/people/torsten-wedhorn/

Aufgabe 53: (2+4+2+4 Punkte)

Sei $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(1) Zeige, dass A ein Dedekindring ist.
Hinweis: Aufgabe 36

(2) Seien $\mathfrak{p}_1 := (3, 1+\sqrt{-5})$, $\mathfrak{p}_2 := (3, 1-\sqrt{-5})$. Zeige, dass $A/\mathfrak{p}_1 \cong A/\mathfrak{p}_2 \cong \mathbb{F}_3$ und folgere, dass $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ maximale Ideale sind. Zeige, dass $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$.

(3) Zeige, dass $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = (3)$, das von 3 in A erzeugte Hauptideal.

(4) Zeige, dass weder $\mathfrak{p}_1$ noch $\mathfrak{p}_2$ Hauptideale sind. Zeige, dass A nicht faktoriell ist.
Hinweis: Falls $\mathfrak{p}_1 = (x+\sqrt{-5}y)$, dann gilt $\mathfrak{p}_2 = (x-\sqrt{-5}y)$ also existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ with $x^2 + 5y^2 = \pm 3$.

Aufgabe 54: (6+6+6*+6* Punkte)

Sei A ein Dedekindring, und sei $0 \neq \mathfrak{p}$ ein Primideal.

(1) Zeige, dass $v_\mathfrak{p}$ dieselben Eigenschaften wie eine diskrete Bewertung hat, d.h.:
(a) $v_\mathfrak{p} \colon I(A) \to \mathbb{Z}$ ist Gruppen-Homomorphismus.
(b) Für zwei gebrochene Ideale $0 \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von A gilt $v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \geq \min\{v_\mathfrak{p}(\mathfrak{a}), v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b})\}$.
Für $x \in K$ setze $v_\mathfrak{p} \colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ mit $v_\mathfrak{p}(0) := \infty$ und $v_\mathfrak{p}(x) := v_\mathfrak{p}(xA)$ für $x \neq 0$. Folgere, dass, $v_\mathfrak{p}$ eine diskrete Bewertung auf K ist mit assoziiertem diskreten Bewertungsring $A_\mathfrak{p}$.

(2) Zeige, dass

$$A = \{x \in K \mid v_\mathfrak{p}(x) \geq 0 \text{ für alle } \mathfrak{p} \neq 0 \text{ Primideal von } A\}$$
$$A^\times = \{x \in K \mid v_\mathfrak{p}(x) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{p} \neq 0 \text{ Primideal von } A\}$$

*(3) Sei $\rho \in \mathbb{R}_{>1}$ und setze $|x|_\mathfrak{p} := \rho^{-v_\mathfrak{p}(x)}$ für $x \in K$ (mit $\rho^{-\infty} := 0$). Versehe A mit der $\mathfrak{p}$-adischen Topologie. Zeige, A Hausdorffsch ist und dass $|\cdot|_\mathfrak{p} \colon A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist und sich auf die $\mathfrak{p}$-adische Komplettierung fortsetzt.

*(4) Zeige, dass der kanonische Homomorphismus $A \to A_\mathfrak{p}$ einen Isomorphismus der $\mathfrak{p}$-adische Komplettierung von A mit der $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-adischen Komplettierung $\hat{A}_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ induziert und dass $\hat{A}_\mathfrak{p}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 55: (12 Punkte)

Sei A ein nullteilerfreier Ring. Zeige, dass A genau dann ein Dedekindring ist, wenn jedes Primideal $\neq 0$ von A invertierbar ist.

Aufgabe 56: (12+8* Punkte)

Sei A ein nullteilerfreier Ring.

(1) Sei A ein Dedekindring. Zeige, dass für jedes Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ gilt: $A/\mathfrak{a}$ ist ein Artinring, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist. Folgere, dass für jedes $0 \neq x \in \mathfrak{a}$ ein $y \in \mathfrak{a}$ existiert mit $\mathfrak{a} = (x, y)$.

*(2) Umgekehrt, existiere für jedes Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq A$ und für jedes $0 \neq x \in \mathfrak{a}$ ein $y \in \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = (x, y)$. Zeige, dass A ein Dedekindring ist.
Hinweis: Zeige, dass $A_\mathfrak{p}$ ein Hauptideal für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist.

Aufgabe 57*: (4+5+3 Punkte)

Erinnerung: $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist ein euklidischer Ring bezüglich der Gradfunktion $N(z) = z\bar{z}$ (Algebra, Aufgabe 23).

(1) Zeige, dass $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$, folgere $A^\times = \{z \in A \mid N(z) = \pm 1\}$ und bestimme $A^\times$.

(2) Sei $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $x^3 - y^2 = 2$. Zeige, dass $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $y + \sqrt{-2}x = (a + \sqrt{-2}b)^3$.

(3) Was sind alle Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}$ der Gleichung $x^3 - y^2 = 2$?