可換環論と代数幾何学の入門

Jean-Stefan Koskivirta

1　可換環とイデアル

1.1　可換環

定義 1. 集合 R 上に 2 つの演算 $+$ と $\times$ が定義されており，次の条件を満たすとき，R は可換環であるという．積 $a \times b$ は通号 ab または $a \cdot b$ と書くことが多い．

(a) R は $+$ に関してアーベル群をなす．その単位元を 0 で表し, 0 を零元とよぶ.

(b) 積 $\times$ は結合法則を満たす．つまり, R の任意の元 a, b, c に対し, $a(bc) = (ab)c$ が成り立つ.

(c) 積 $\times$ に対して, 単位元 1 が存在する．つまり, R の元 1 が存在し, R の任意の元 a に対して, $a1 = 1a = a$ が成り立つ.

(d) 積 $\times$ は交換法則を満たす．つまり, R の任意の元 a, b に対し, $ab = ba$ が成り立つ.

(e) 積は和に対し分配的である．つまり, R の任意の元 a, b, c に対して, $a(b+c) = ab+ac$ が成り立つ.

複数の可換環が出てくる場合, 混同を避けるために, 可換環 R の 0 と 1 をそれぞれ 0_R と 1_R とも書く.

注意 2. 「$1 \neq 0$」という条件を課さない． $1 = 0$ であれば，任意の元 a に対して $a = a1 = a0 = 0$ となり, $R = \{0\}$ が成り立つ．このとき, R を零環とよぶ.

定義 3. 可換環 R が次の条件を満たすとき, R が可換体であるという.

(a) $1 \neq 0$ である.

(b) 0 でない任意の $a \in R$ が積に関する逆元を持つ．つまり, $ab = 1$ となる $b \in R$ が存在する.

可換環において, 積に関する逆元を持つ元は可逆元あるいは単数と呼ばれる．可逆元全

体のなす集合を $R^\times$ で表す．集合 $R^\times$ は積について閉じていて, R の単数群と呼ばれるアーベル群をなす．例えば, $\mathbb{Z}$ の単数群は $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ である．

1.2 イデアル

定義 4. R を可換環とし, $I \subset R$ を和に関する R の部分群とする．I が

$$a \in R,\ x \in I \Longrightarrow ax \in I$$

を満たすとき, I は R のイデアルであるという．

例 5. $I = \{0\}$ と $I = R$ はともに R のイデアルであり, それらを R の自明なイデアルとよぶ．$\{0\}$ を零イデアルとよび, 単に 0 とも書く．

定義 6. 可換環 R から可換環 R' への写像 $f : R \to R'$ は次の条件を満たすとき, 準同型写像 (または準同型) とよぶ.

(a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(b) $f(ab) = f(a)f(b)$

(c) $f(1_R) = 1_{R'}$.

$f : R \to R'$ を準同型とする．このとき,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in R\}$$

と定義する．$\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ はそれぞれ f の核, f の像とよぶ．準同型 f が全単射であるとき, f は同型写像であるという．そのとき, 逆写像 $f^{-1} : R' \to R$ も同型写像である．同型写像が存在すれば, $R \simeq R'$ と書く．そのとき, R' と R は全く同じ性質を持つので, R' は R と可換環として同一視できる．

問 7. $\mathrm{Ker}(f)$ は R のイデアルであることを示せ.

解答. 定義 4(a) より f が和に関する群準同型なので, $\mathrm{Ker}(f)$ は R の加法部分群である．また, 任意の $a \in R$, $b \in \mathrm{Ker}(f)$ に対し, $f(ab) = f(a)f(b) = f(a)0 = 0$ であり, ゆえ $ab \in \mathrm{Ker}(f)$ となる．したがって, $\mathrm{Ker}(f)$ は R のイデアルである．

注意 8. f の像は R の加法部分群であるが, 一般にイデアルでないことに注意する．実は, f が全射でなければ, $\mathrm{Im}(f)$ はイデアルでない．このことは, 次のように分かる．もし, イ

デアル $I \subset R$ が単数 $a \in R^\times$ を含めば, 各 $b \in R$ に対し, $b = (ba^{-1})a$ と書けるので, イデアルの定義から $b \in I$ となる. よって, $I = R$ が成り立つ. 準同型 f が $f(1) = 1$ を満足するので, $1 \in \mathrm{Im}(f)$ となる. よって, $\mathrm{Im}(f)$ がイデアルであることは, f が全射であることに限る.

補題 9. R を可換環とし, I, J を R のイデアルとする. 次の集合はそれぞれ R のイデアルである.
(1) $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$,
(2) $IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \geq 1, a_i \in I, b_i \in J\}$,
(3) $I \cap J$
このイデアルは, それぞれ I と J の和, I と J の積, I と J の交わりとよぶ.

$a \in R$ のとき, $Ra = \{xa \mid x \in R\}$ は R のイデアルである. このイデアルは, a で生成される単項イデアルでとよび, (a) と書くことも多い.

例 10. $R = \mathbb{Z}$ とする. 整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $(n) = n\mathbb{Z}$ は n の倍数全体の集合となる. 正整数 n, m とし,

$$n = \prod_{p\ \text{素数}} p^{v_p(n)}, \quad m = \prod_{p\ \text{素数}} p^{v_p(m)}$$

を n,m それぞれの素因数分解とおく ($v_p(n)$ は負でない整数であり, 有限個の p を除いて, $v_p(n) = 0$ となる). このとき,

$$\begin{aligned}
(n) + (m) = (\gcd(n, m)), \quad \gcd(n, m) &= \prod_{p\ \text{素数}} p^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}} \\
(n)(m) = (nm), \quad nm &= \prod_{p\ \text{素数}} p^{v_p(m)+v_p(n)} \\
(n) \cap (m) = (\mathrm{lcm}(n, m)), \quad \mathrm{lcm}(n, m) &= \prod_{p\ \text{素数}} p^{\max\{v_p(m), v_p(n)\}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. $\gcd(n, m)$ (greatest common divisor) を整数 n,m の最大公約数とよび, $\mathrm{lcm}(n, m)$ (least common mutiple) を最小公倍数とよぶ.

補題 11. $f : R \to R'$ を準同型とし, J を R' のイデアルとする. このとき, $f^{-1}(J)$ は R のイデアルである.

証明. $f^{-1}(J)$ は R の加法部分群であることは知られている. $a \in R$, $x \in f^{-1}(J)$ に対して, $f(ax) = f(a)f(x)$ であり, $f(ax) \in J$ となる. よって, $ax \in f^{-1}(J)$ である.

部分集合 $S \subset R$ で生成されるイデアルは (S) と書き, 以下のように定義される.

$$(S) = \bigcap_{S \subset I} I.$$

つまり, S を含むイデアル I 全体の共通部分として定める. R が S を含むイデアルであるので, 条件 $S \subset I$ を満たすイデアル I 全体の族は空でないことに注意する. 一般に, イデアルの族の共通部分がイデアルであることは直ちに分かる. よって, (S) がイデアルである. また, S を含むイデアル全体のうち最小のイデアルである. 言い換えれば, もしイデアル I が $S \subset I$ を満たせば, $(S) \subset I$ となる.

補題 12.

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \middle| n \geq 1,\ x_i \in R,\ s_i \in S \right\}.$$

証明. 「$\subset$」を示す. 右辺がイデアルであることを簡単に確認できる. よって, 定義から「$\subset$」となる. 他方, (S) はイデアルなので, $\sum_{i=1}^{n} x_i s_i$ $(n \geq 1, x_i \in R, s_i \in S)$ と表される元が (S) に属する. よって, 「$\supset$」も成り立つ.

定義 13. イデアル I に対して, $I = (S)$ となる有限集合 $S \subset I$ が存在すれば, I は有限生成イデアルであるという.

イデアルによる剰余環の定義を思い出そう. R を可換環とし, I をイデアルとする. I による剰余環 R/I は次のように定義される. まず, $a \in R$ のとき,

$$a + I = \{a + x \mid x \in I\}$$

とおく. これは I に関する剰余類と呼ぶ. $a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in I$ で定める二項関係は, R 上の同値関係であることが分かる. また, 集合 $a + I$ は元 a の同値類である.

定義 14. $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ と定義する. 各 $a, b \in R$ に対し,

$$(a + I) + (b + I) = a + b + I$$
$$(a + I) \times (b + I) = ab + I$$

と定めると, 矛盾なく R/I 上の演算 $+$ と $\times$ を定義できる. これより, $(R/I, +, \times)$ は可換環をなし, これは I による剰余環とよぶ.

R/I の零元は $0 + I = I$ であり, 積に関する単位元は $1 + I$ である. $f(a) = a + I (a \in R)$ で定まる写像 $f : R \to R/I$ は準同型であることを簡単に確認できる. これは自然な準同型

(あるいは自然な射影) とよぶ．剰余環という概念の重要な応用を説明しよう．$f : R \to R'$ を可換環の準同型とする．剰余環を使うことで, f を標準的に分解できる．まず, 部分環の定義を思い出そう．

定義 15. R を可換環とし, S を R の部分集合とする．S は次の条件を満たすとき, R の部分環とよぶ．
(a) $1 \in S$
(b) 任意の S の元 a, b に対し, $a - b \in S$ が成り立つ．
(c) 任意の S の元 a, b に対し, $ab \in S$ が成り立つ．

例 16. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環である．

準同型 $f : R \to R'$ に対し, $\mathrm{Im}(f)$ は R' の部分感である．

定理 17. $f : R \to R'$ を準同型とする． $\pi : R \to R/\operatorname{Ker}(f)$ を自然な射影とおき, $\iota : \mathrm{Im}(f) \to R'$ を包含写像とおく．
(1) $\overline{f}(a + \operatorname{Ker}(f)) = f(a)$ と定めると, 同型写像 $\overline{f} : R/\operatorname{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ が得られる．
(2) $f = \iota \circ \overline{f} \circ \pi$ と分解することができる．つまり, 以下の図式は可換図式である．

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & R' \\
R/\operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

証明. まず, $\overline{f}$ が矛盾なく定義されたことを確かめる．$a + \operatorname{Ker}(f) = b + \operatorname{Ker}(f)$ となる $a, b \in R$ とする．よって, $a - b \in \operatorname{Ker}(f)$ であり, $f(a - b) = 0$ が成り立つ．したがって, $f(a) = f(b)$ であり, ゆえ 矛盾なく写像 $\overline{f} : R/\operatorname{Ker}(f) \to R'$ が得られる．この写像は全射であることは明らか．また, $a + \operatorname{Ker}(f) \in \operatorname{Ker}(\overline{f})$ ならば, $\overline{f}(a + \operatorname{Ker}(f)) = f(a) = 0$ であり, $a \in \operatorname{Ker}(f)$ となる．以上, $\overline{f}$ が同型写像であることを示せた．(2) は $\overline{f}$ の定義の言い換えに過ぎない．

1.3 素イデアル, 極大イデアル

定義 18. R を可換環とし, $\mathfrak{p}$ を R のイデアルとする．$\mathfrak{p}$ は
(a) $\mathfrak{p} \neq R$,
(b) R の任意の元 x, y に対し, $xy \in \mathfrak{p}$ ならば $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$

を満たすとき, 素イデアルであるという.

例 19. 有理整数環 $\mathbb{Z}$ の場合は, 次の 2 つの種類の素イデアルが存在する.
(1) 零イデアル 0,
(2) 任意の素数 p に生成される単項イデアル $p\mathbb{Z}$.

定義 20. R を可換環とする. R は次の条件を満たすとき, 整域とよぶ.
(a) R は零環でない.
(b) R の任意の元 x, y に対し, $xy = 0$ ならば $x = 0$ または $y = 0$.

つまり, R が整域であることは, 零イデアル 0 が R の素イデアルであることと同値である.

問 21. 次が成り立つことを示せ.

$$R \text{ が整域である} \iff \text{可換体 } K \text{ が存在し, } R \text{ が } K \text{ の部分環である}$$

解答. 「$\Longleftarrow$」: まず, 可換体が整域であることを説明する. K を可換体とし, 0 でない K の元 a, b とする. このとき, K の元 a', b' が存在し, $aa' = bb' = 1$ が成り立つ. よって, $(ab)(a'b') = 1$ なので, ab は零元でない. したがって, K は整域である. そして, R が整域であることは, 整域の部分環は整域であることから分かる.

「$\Longrightarrow$」: R を整域とし, R の分数体 $\mathrm{Frac}(R)$ を考える. $\mathrm{Frac}(R)$ の定義を思い出そう. 集合 $R \times R \setminus \{0\}$ 上に, 次の二項関係を考える:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = ba'.$$

$\sim$ が反射的かつ対称的であることは簡単に確認できる. 推移律を証明するには,「R は整域である」という仮定を使う必要である. もし, $(a, b) \sim (a', b')$ かつ $(a', b') \sim (a'', b'')$ ならば, $ab' = ba'$ かつ $a'b'' = b'a''$ となる. よって, $ab''b' = b''ba' = a''b'b$ であり, $b'(ab'' - ba'') = 0$ となる. $b' \neq 0$ より, R が整域なので, $ab'' = ba''$ が成り立つ. したがって, $\sim$ は同値関係である. 同値類全体のなす集合を $\mathrm{Frac}(R)$ とおき, 元 $(a, b) \in R \times R \setminus \{0\}$ の同値類をしばしば $\frac{a}{b}$ と記す. $\mathrm{Frac}(R)$ 上の和と積は次のように定める.

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$$
$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}.$$

$(\mathrm{Frac}(R), +, \times)$ が可換環であることは簡単に確認できるので, 詳細は読者の練習問題とする. $\mathrm{Frac}(R)$ の零元は $\frac{0}{1}$ であり, 積に関する単位元は $\frac{1}{1}$ である. $a \in R$ のとき, $\frac{a}{1}$ を単に

a とも書く．$\frac{a}{b} \in \mathrm{Frac}(R)$ を 0 でない元とする．特に，$a \in R \setminus \{0\}$ なので，$\frac{b}{a}$ を考えることができる．$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$ より，$\frac{a}{b}$ は $\mathrm{Frac}(R)$ の可逆元である．したがって，$\mathrm{Frac}(R)$ は可換体になる．$\iota(a) = \frac{a}{1}$ で定まる写像 $\iota : R \to \mathrm{Frac}(R)$ は準同型であり，さらに ι は単射である（ι は単準同型であるという）．R を $\iota(R)$ と同一視することにより，R は可換体 $\mathrm{Frac}(R)$ の部分環とみなすことができる．

補題 22. イデアル I とする．

$$I \text{ が素イデアルである} \iff R/I \text{ が整域である．}$$

証明. 「$\Longrightarrow$」：$I \neq R$ より，R/I は零環でない．$a+I$, $b+I$ $(a,b \in R)$ を 0 でない R/I の元とする．よって，$a \notin I$ かつ $b \notin I$ である．I が素イデアルなので，$ab \notin I$ が成り立つ．したがって，$(a+I)(b+I) = ab+I$ は 0 でない．「$\Longleftarrow$」：R/I は零環でないので，$I \neq R$ となる．$ab \in I$ となる R の元 a,b とする．よって，整域 R/I において，$(a+I)(b+I) = 0$ が成り立ち，ゆえ $a+I = 0$ または $b+I = 0$ となる．　言い換えれば，$a \in I$ または $b \in I$ である．したがって，I は素イデアルである．

定義 23. R を可換環とし，$\mathfrak{m}$ を R のイデアルとする．剰余環 $R/\mathfrak{m}$ が可換体であるとき，$\mathfrak{m}$ は極大イデアルであるという．

系 24. R が可換環において，極大イデアルは素イデアルである．

証明. 主張は「可換体が整域であること」から直ちに導くことができる．

例 25. 有理整数 $\mathbb{Z}$ の場合，素数 p が生成する単項イデアル $p\mathbb{Z}$ は極大イデアルである．それは $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が可換体であることから分かる．零イデアル 0 は素イデアルであるが，極大イデアルでない．

補題 26. R を可換環とする．次の条件は互いに同値である．
- (i) R が可換体である．
- (ii) $R \neq 0$ であり，さらに R のイデアル全体は自明イデアル 0, R に限る．言い換えれば，R において，ちょうど 2 つのイデアルしか存在しない．

証明. (i)$\Rightarrow$(ii)：I を R のイデアルとする．もし，$I \neq 0$ ならば，0 でない元 $a \in I$ が存在する．R は可換体なので，$a \in R^{\times}$ であり，よって $(a) = R$ である．特に，$I = R$ となる．(ii)$\Rightarrow$(i)：他方，(ii) が成り立つとし，0 でない $a \in R$ とする．単項イデアル (a) が 0 でないので，$(a) = R$ となり，ゆえ $ab = 1$ となる元 $b \in R$ が存在する．よって，R は可換体になる．

「極大イデアル」という用語が使われる理由は, 定義 23 からよく分からないかもしれない. しかし, その理由は次の補題から分かる.

補題 27. R を可換環とし, I を R のイデアルとする. 次の条件は互いに同値である.

(i) I が極大イデアルである.

(ii) $I \neq R$ であり, さらに任意の R のイデアル J に対し, $I \subset J$ ならば $J = I$ または $J = R$ である.

証明. 可換環 R/I のイデアル全体と I を含む R のイデアル全体は 1 対 1 に対応する（この対応は $J \mapsto J/I$ で定まる). よって, (ii) の条件は, R/I がちょうど 2 つのイデアル（すなわち 0 と R/I）しか持たないことと同値である. この条件は, 補題 26 より, R/I が可換体であることと同値である.

一般に, 0 でない可換環において, 極大イデアルが存在することを説明しよう. 自明イデアル R は, の極大イデアルでないことに注意する. しかし, 自明イデアル 0 が極大イデアルである場合がある (R が可換体であるとき).

命題 28. R を可換環とし, $I \neq R$ をイデアルとする. R において, $I \subset \mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する.

証明. ツォルンの補題を使う必要である. I を含むイデアル $J \neq R$ 全体のなす集合を X とおこう. 明らかに $I \in X$ ので, X は空でない. X を包含関係に関する半順序集合として見なす. 全順序部分集合 $Y \subset X$ とする. このとき, $J_0 := \cup_{J \in Y} J$ とおくと, J_0 はまたイデアルであることを示す. a, a' を J_0 の元とし, $a \in J$ かつ $a' \in J'$ となるイデアル $J, J' \in Y$ を選ぶ. Y は全順序集合であるので, $J \subset J'$ または $J' \subset J$ が成り立つ. 前者が成り立つと仮定してよい. このとき, $a, a' \in J'$ であり, ゆえ $a + a' \in J'$ である. J_0 が和について閉じていることを示せた. 同様に, $a \in J_0$, $r \in R$ に対し, $ra \in J_0$ であることを確認できる. よって, J_0 は R のイデアルである. また, $J_0 \in X$ と示す. もし $J_0 = R$ ならば, 特に $1 \in J_0$ である. よって, $i \in J$ となる $J \in Y$ が存在するが, それは $J \neq R$ に矛盾する. よって, $J_0 \neq R$ である. また, 明らかに $I \subset J_0$ が成り立つので, $J_0 \in X$ であることを証明した. また, J_0 が Y の上界であるのは, 直ちに J_0 の定義から分かる. よって, ツォルン補題を使うことができ, ゆえ X は極大元を持つ. 補題 27 より, X の極大元は極大イデアルである.

1.4　素元, 既約元, UFD

定義 29. R を整域とし, $x \neq 0$ とする.

(a) 単項イデアル (x) は素イデアルであるとき, x を素元とよぶ.

(b) x は「$x = ab$ ならば $a \in R^\times$ または $b \in R^\times$」を満たすとき, 既約元であるという.

問 30.

(1) 整域において, 素元は既約元であることを示せ.

(2) 素元でない既約元の例をあげよ.

解答.

(1) x を素元とする. $x = ab$ ならば, 特に $ab \in (x)$ が成り立つので, $a \in (x)$ または $b \in (x)$ である. $a \in (x)$ と仮定してよい. このとき, $a = xy$ となる $y \in R$ が存在する. したがって, $x = ab = xyb$ である. R が整域なので, $x \neq 0$ より, $1 = yb$ となる. つまり, b は単数である.

(2) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ とする. これは, $a + b\sqrt{-5}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ 全体のなす $\mathbb{C}$ の部分集合である. $z = a + b\sqrt{-5}$, $z' = a' + b'\sqrt{-5}$ を $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の元とすると,

$$
\begin{aligned}
z - z' &= (a - a') + (b - b')\sqrt{-5} \\
zz' &= (aa' - 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{-5}
\end{aligned}
$$

より, $z - z'$, zz' が $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に属する. したがって, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は $\mathbb{C}$ の部分環である.
$x = 3$ は素元でない既約元であること示す. 単数でない $z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ が存在し, $3 = zz'$ であると仮定する. まず, 任意の $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ に対し, $z\overline{z}$ は自然数である. よって, $z\overline{z}z'\overline{z}' = 9$ が成り立つなので, $z\overline{z} \in \{1, 3, 9\}$ となる. もし $z\overline{z} = 1$ ならば, z は単数であり, 矛盾する. 同様に, $z\overline{z} = 9$ ならば, $z'\overline{z}' = 1$ となり, また矛盾する. したがって, $z\overline{z} = 3$ が成り立つ. $z = a + b\sqrt{-5}$ と書くと, $a^2 + 5b^2 = 3$ である. この方程式は解を持たないことを容易に確かめることができる. これより, 3 は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約であることを結論できる.
また, 3 は素元でないことを示す. 以下の恒等式を考える.

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

これより, $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \in (3)$ である. もし 3 が素元ならば, $1 + \sqrt{-5} \in (3)$ または $1 - \sqrt{-5} \in (3)$ が成り立つ. しかし, (3) の任意の元は $3a + 3b\sqrt{-5}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$

と書けるので, 明らかに $1+\sqrt{-5}$ と $1-\sqrt{-5}$ は (3) に属しない.

定義 31. R を整域とする. R は次の条件を満たすとき, 一意分解環 (あるいは UFD) であるという.

(a) 0 でも単数でもない $a \in R$ に対し, 既約元 $x_1, \dots, x_n \in R$ が存在し, $a = x_1 \dots x_n$.

(b) $x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m$ を満たす既約元 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_m$ とする. このとき, $n = m$ であり, さらに番号をつけ直すことにより, 単数 $u_1, \dots, u_n$ が存在し, $x_1 = u_1 y_1, \dots, x_n = u_n y_n$ である.

以下の R 上の二項関係を考える:

「単数 $u \in R$ が存在し, $x = uy$ である」.

このとき, x と y は同伴であるという. これは R 上の同値関係を与えることを容易に証明できる. 一意分解環 R において, 既約元の集合の完全代表系 $\mathcal{P}$ を固定する. つまり, 次の２つの条件を満たす集合 $\mathcal{P}$ を固定する.

(1) $\mathcal{P}$ は既約元からなる.

(2) 任意の既約元 y に対し, $\mathcal{P}$ の元がただ１つ存在し, x は y と同伴である.

このような集合 $\mathcal{P}$ を固定されており, 任意の $x \in R \setminus \{0\}$ を以下のように表すことができる:

$$x = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(x)}, \quad u \in R^\times, \quad v_p(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \text{有限個の } p \text{ を除いて}, v_p(n) = 0$$

さらにこの表示は一意的に定まる.

例 32. $R = \mathbb{Z}$ とする. 整数 n, m が同伴であることは, $n = \pm m$ と意味する. この場合, $\mathcal{P}$ を素数全体の集合とすることができる.

例 33. R を UFD とし, $K = \mathrm{Frac}(R)$ を R の分数体とおく. 群 $(K^\times, \times)$ を考える. 上のような集合 $\mathcal{P}$ を固定することで, $K^\times$ を求めることができる. 上記の通り, 各 $x \in R \setminus \{0\}$ を $x = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(x)}$ ($u \in R^\times$, $v_p(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で一意的に表すことができる. よって, 0 でない $x \in K \setminus \{0\}$ は、$x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in R \setminus \{0\}$) を書くことにより, 同じような積で表すことができるが, この場合は冪指数 $v_p(x)$ が $\mathbb{Z}$ の整数である. また, 写像 $f : R^\times \times \mathbb{Z}^{(\mathcal{P})} \longrightarrow K^\times$ を, $f : (u, (k_p)_{p \in \mathcal{P}}) \mapsto u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{k_p}$ で定める (ここで, $\mathbb{Z}^{(\mathcal{P})}$ という記号は, 自由群 $\bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}$ を意味する). 族 $(k_p)_{p \in \mathcal{P}}$ は, 有限個の p を除いて, $k_p = 0$ を満たすので, $\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{k_p}$ を考えることができる. 写像 f は, 群準同型であることを簡単に

確かめることができる．f は全単射であるので, 群同型となる．つまり, $K^\times$ の同型類は, R の単数群 $R^\times$ と $\mathcal{P}$ の濃度により一意的に定められる．例えば, UFD $\mathbb{Z}$ の場合を考える．$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ であり, $\mathcal{P} = \{$ 素数 $\}$ とする．よって,

$$\mathbb{Q}^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$$

である ($\mathcal{P}$ は $\mathbb{N}$ と同じ濃度を持つ)．なお, 有限体 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$ 上の多項式環 $R = \mathbb{F}_3[X]$ を考える．R の単数群は, $R^\times = \mathbb{F}_3^\times = \{-1, 1\}$ である．可換環 R は UFD であることが知られている．既約元の完全代表系 $\mathcal{P}$ を明示的に求めるのは難しいが, R が可算集合なので, $\mathcal{P}$ も可算集合である．よって, $\mathbb{Z}$ の例と同様に, $\mathbb{F}_3(X)^\times$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ と同型である．特に, $\mathbb{F}_3(X)^\times$ と $\mathbb{Q}^\times$ は群として同型である．しかし, 具体的な同型写像を書くのは非常に難しい．

補題 34. UFD において, 素元と既約元は一致する．

証明. 既約元が素元であることを証明すればよい．既約元の集合の完全代表系 $\mathcal{P}$ を固定する．x を既約元とし, $ab \in (x)$ $(a, b \in R)$ とする．上記のように $a = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a)}$, $b = u' \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(b)}$ と書く．$ab \in (x)$ なので, $v_x(a) + v_x(b) \geq 1$ となる．したがって, $v_x(a) \geq 1$ または $v_x(b) \geq 1$ である．つまり, $a \in (x)$ または $b \in (x)$．よって, x は素元である．

例 35.
(a) $\mathbb{Z}$ は UFD である．
(b) 問 30 により, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において, 素元でない既約元が存在する．したがって, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は UFD でない．

命題 36. R を整域とする．次の 3 つの条件はどれも互いに同値である．
(i) R は UFD である．
(ii) 0 でも単数でもない x に対し, 素元 $x_1, \ldots, x_n$ が存在し, $x = x_1 \ldots x_n$ である．
(iii) (a) 0 でも単数でもない x に対し, 既約元 $x_1, \ldots, x_n$ が存在し, $x = x_1 \ldots x_n$ であり, かつ (b) 素元と既約元が一致する．

証明. 「(iii)⇒(ii)」は明らか．他方, (ii) が成り立つと仮定し, (iii) を示す．(iii)(a) は明らかなので, (iii)(b) だけ示してよい．a を R の既約元とする．(ii) より, 素元 $x_1, \ldots, x_n$ が存在し, $a = x_1 \ldots x_n$ である．a は既約元なので, $n = 1$ となり, a は素元である．「(i)⇒(ii)」は補題 34 から直ちに分かる．他方, (iii) を仮定し, (i) を示す．定義 31(b) だけ証明し

てよい．それは, 帰納法によって証明する．$x_1, \dots, x_n$ また $y_1, \dots, y_m$ を既約元とし, $x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m$ とする．特に, 積 $y_1 \dots y_m$ が単行イデアル (x_1) に属する．(iii)(b) の仮定より, (x_1) は素イデアルである．よって, ある $1 \leq j \leq m$ が存在し, $y_j \in (x_1)$ である．番号をつけ直すことにより, $j = 1$ であると仮定してよい．よって, ある $z \in R$ が存在し, $y_1 = x_1 z$ である．また, 同じ理由で (y_1) は素イデアルであり, $x_1 \in (y_1)$ または $z \in (y_1)$ が成り立つ．後者の場合は, $z = y_1 w$（$w \in R$）と書くことができ, $y_1 = x_1 z = x_1 y_1 w$. R は整域なので, $1 = x_1 w$ となる．それは x_1 が素元であることに矛盾する（素元は単数でないので）．したがって, $x_1 \in (y_1)$ となり, $x_1 = y_1 r$（$r \in R$）と書くことができる．よって, $y_1 = x_1 z = z y_1 r$ であり, $1 = zr$ となる．つまり, $z, r \in R^\times$ である．つまり, x_1 と y_j は同伴である．さらに等式 $x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m$ から $r x_2 \dots x_n = y_2 \dots y_m$ となる．r は単数なので, $r x_2$ はまた素元である．この等式に帰納法の仮定を適用すると, $n - 1 = m - 1$ となる．さらに $2 \leq i \leq n$ に対し, x_i と y_i は同伴である．これより R は UFD である．

1.5 ネーター環

定義 37. 可換環 R は以下の条件を満たすとき, ネーター環であるという．

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \dots$$

を R のイデアルの任意の無限増加列とすると, ある $N \in \mathbb{N}$ より, $I_N = I_{N+1} = \dots$ が成り立つ.

定理 38. 以下 3 つの条件はどれも互いに同値である.

(i) R はネーター環である.

(ii) 任意の R のイデアル I に対し, $a_1, \dots, a_n \in I$ が存在し, $I = Ra_1 + \dots Ra_n$.

(iii) $X \neq \emptyset$ が R の任意のイデアルの集合ならば, 包含関係に関する極大元 $I \in X$ が存在する.

条件 (iii) を具体的に論理記号で書くと, 「ある $I \in X$ が存在し, 任意の $J \in X$ に対し, もし $I \subset J$ ならば, $I = J$ である」という条件である．例えば、$R = \mathbb{Z}$ とし, 次の集合 X を考える:

$$X = \{4\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}\}.$$

(包含関係に関する)X の極大元全体のなす集合は, $\{4\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}\}$ である．$8\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$, $12\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$ より, $8\mathbb{Z}$ と $12\mathbb{Z}$ は極大元でない．この例では, X が有限集合なので, X が極大元を含むことは明らか (一般に, 半順序集合 X が無限であれば, もちろん X には極大元が存在する).

しかし, 半順序集合 X が無限集合であるときに, 必ずしも極大元が存在しないので, 定理 38(iii) は新しい情報を与える.

注意 39. 「X の極大元」と「極大イデアル」を混同しないように注意. 上の例では, $4\mathbb{Z}$ は $X = \{4\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, 12\mathbb{Z}\}$ の極大元であるが, $\mathbb{Z}$ の極大イデアルでない (4 は素数でないので). 実は,「極大イデアル」というのは, $X = \{I \text{ イデアル} \mid I \neq R\}$ の極大元に他ならない.

<u>定理 38 の証明</u>:

(iii) $\Rightarrow$ (i)：$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \ldots$ を R のイデアルの増加列とする. $X = \{I_n \mid n \geq 1\}$ とおく. R はネーター環なので, X は極大元 I_N を持つ. したがって, $I_N = I_{N+1} = \ldots$ である.

(i) $\Rightarrow$ (iii)：R をネーター環とし, 空でない X を R のイデアルの集合とする. そこで, X が極大元を持たないと仮定して, 矛盾を導く. まず, $I_1 \in X$ を選ぶ. I_1 極大元でないので, 別のイデアル $I_2 \in X$ が存在し, $I_1 \subsetneq I_2$ である (真部分集合であることを「$\subsetneq$」という記号で表す). 同様に, I_2 が X の極大元でないので, $I_3 \in X$ が存在し, $I_2 \subsetneq I_3$ である. この通りに続いて, 増加列

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n \subsetneq \ldots$$

を作ることができる. よって, R はネーター環であるので, 矛盾する.

(ii) $\Rightarrow$ (i)：$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \ldots$ を R のイデアルの増加列とする. $I = \bigcup_{n \geq 0} I_n$ とおく. 一般に, イデアルの族 $(I_j)_{j \in J}$ の和集合 $\bigcup_{j \in J} I_j$ 必ずしもたイデアルでないことに注意する. しかし, 増加列の場合は, $I = \bigcup_{n \geq 0} I_n$ またイデアルであることを次のうように確認できる. $x, y \in I$ とし, $x + y$ を考える. ある $n, m \geq 0$ が存在し, $x \in I_n$, $y \in I_m$ である. よって, $N \geq \max n, m$ ならば, $x, y \in I_N$ により, $x + y \in I_N \subset I$ となる. また, $a \in R$, $x \in I$ ならば, $ax \in I$ であるので, I は R のイデアルである. (ii) より, I は有限生成イデアルである. そのため, $x_1, \ldots, x_n \in I$ が存在し, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ が成り立つ. 元 $x_1, \ldots, x_n$ に対し, ある番号 $m \geq 0$ が存在し, $x_1, \ldots, x_m \in I_m$ である. したがって, $I = I_m$ であり, さらに $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \ldots$ となる. R がネーター環であることを証明した.

(i) $\Rightarrow$ (ii)：他方, R がネーター環であると仮定する. I を R のイデアルとする. I が有限生成イデアルであることを示す. 「(i)$\Leftrightarrow$(iii)」をすでに証明したので, (iii) を使うことができる. 次の R のイデアルの集合 X を考える. $J \subset I$ を満たす有限生成イデアル J 全体のなす集合を考え, この集合を X とおく. 例えば, ゼロイデアル 0 が X の元であるので,

X は空集合でない．(iii) を使うことにより, X の極大元 $J \in X$ が存在する．$J = I$ であることを主張する．そうでなければ, $x \in I$ が存在し, $x \notin J$ である．和イデアル $(x) + J$ を考える．$x \notin J$ より, $J \subsetneq J + (x)$ である．それに, $J + (x)$ は有限生成イデアルである (J が元 $y_1, \ldots, y_r \in J$ で生成されると, $J + (x)$ は元 $y_1, \ldots, y_r, x$ で生成される)．よって, イデアル $J + (x)$ は X の元であり, J が X の極大元であることを矛盾する．したがって, $I = J$ であり, I は有限生成イデアルとなる．

命題 40. R を整域とし, R がネーター環であるとする．このとき, 0 でも単数でもない任意の R の元 x を R の既約元の積として表すことができる．つまり, 既約元 $p_1, \ldots, p_n$ が存在し, $x = p_1 \ldots p_n$ である．

証明. 次の R のイデアルの集合を考える．

$$X := \{(x) \mid x \text{ が既約元の積でない }\}$$

つまり,「既約元の積として表すことができる」という条件を満たさない元 x に対して, その元の生成する単項イデアル (x) を考える．そして, そういう単項イデアル (x) 全体のなす集合を X とおく．X が空集合であることを示してよい．X が空集合でないと仮定する．そのとき, R がネーター環なので, X は極大元を含む．$(y) \in X$ をこういう極大元とする．

1.6　単行イデアル整域

単項イデアル整域は, ネーター環の重要な例である．

定義 41. 整域 R とする．任意のイデアルが単項イデアルであるとき, R は単項イデアル整域あるいは PID とよぶ．

定理 42. PID は UFD である．

証明. PIDR とする．PID はネーター環であるので, 命題 40 により定義 31(1) が成り立つ．命題 36 により, 素元と既約元が一致することを示してよい．一般に素元は既約元である．他方, x を既約元とし, x が素元であることを示す．(x) は極大イデアルであることを証明する．イデアル $I \subset R$ とし, $(x) \subset I$ とする．$a \in R$ が存在し, $I = (a)$ である．よって, $x = ab$ ($b \in R$) である．x は既約元なので, $a \in R^\times$ または $b \in R^\times$ である．前者の場合は, $I = R$ であり, 後者の場合は, $I = (x)$ となる．したがって, (x) は極大イデアルであり, x は素元である．

例 43. (a) $\mathbb{Z}$ は PID である.
(b) K を可換体とする．このとき, 多項式環 $K[X]$ は PID である.

問 44. $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とする.
(i) $\mathbb{Z}[i]$ は $\mathbb{C}$ の部分環であることを示せ.
(ii) $\mathbb{Z}[i]$ は PID であることを示せ.

解答. 1 つ目の主張は, 問 30 と同様に確認できる．(ii) を証明するには, $\mathbb{Z}[i]$ はユークリッド環であること示す．その定義を思い出そう．整域 R はユークリッド環であるというのは, 写像 $f : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在し, 次の条件を満たすことである.

任意の $a \in R$, $b \in R \setminus \{0\}$ に対し, $a = bq + r$ を満たす R の元 q, r が存在する．さらに, $r \neq 0$ ならば, $f(r) < f(b)$ である.

例えば, $\mathbb{Z}$ において, 絶対値関数 $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は上記の条件を満たす．また, K は可換体とし, 可換環 $K[X]$ において次数関数 $K[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ もそのような写像である. $\mathbb{Z}[i]$ の場合は, $z \mapsto |z|^2 = z\overline{z}$ で定まる関数 $\mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を考える．まず, $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ ならば, $\overline{z} = a - ib$ はまた $\mathbb{Z}[i]$ の元であり, $z\overline{z} = a^2 + b^2$ は整数である. $\mathbb{Z}[i]$ の元 $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_1 + ib_2$ とし, $z_2 \neq 0$ とする．分数 $\frac{z_1}{z_2}$ は, $\mathbb{Z}[i]$ の分数体の元である．その分数体は $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ であることを簡単に確認できる．よって, 有理数 x, y が存在し, $\frac{z_1}{z_2} = x + iy$ である．整数で有理数を近似することにより, 整数 u, v が存在し, $|x - u| \leq \frac{1}{2}$ かつ $|y - v| \leq \frac{1}{2}$ である. $q = u + iv$ とおき, $r = z_1 - qz_2$ とおく．明らかに $z_1 = qz_2 + r$ が成り立つ．また,

$$|\frac{r}{z_2}|^2 = |(x - u) + i(y - v)|^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2 \leq (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}.$$

よって, $|r|^2 \leq |z_2|^2$ であり, 関数 $||^2$ はユークリッド環の定義の条件を満たす．したがって, $\mathbb{Z}[i]$ は PID である.

命題 45. PID R において, 0 でない素イデアルは極大イデアルである.

証明. 0 でない素イデアル I とする．素元 p が存在し, $I = (p)$ である．もし, R のイデアル J が $I \subset J$ を満たせば, J が p の約元で生成される．よって, $J = (p)$ または $J = R$ となる．これより結論を得る.

1.7　多項式環

1.7.1　R 整域 $\Rightarrow R[X]$ 整域

R を可換環とし, X を文字とする (X は不定元あるいは変数と呼ばれる). X に関する R 上の多項式全体を $R[X]$ と書く. 演算 $+$ と $\times$ は $R[X]$ 上に定義されており, $(R[X], +, \times)$ はまた可換環である. R はある性質を持つときに, $R[X]$ も同じ性質を持つかどうだを調べる. 例えば, R は整域であると, $R[X]$ も整域である. これを示すために, 多項式の次数を考える. 多項式 $f \neq 0$ を $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ ($a_n \neq 0$) という形に表すときに, n を f の次数と呼ぶ. 0 の次数は $-\infty$ と定義される.

補題 46. R を整域とする. このとき, 任意の $f, g \in R[X]$ に対し, $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ が成り立つ.

証明. f と g の最高次の項をそれぞれ $a_n X^n$ と $b_m X^m$ とおく. 明らかに, $i > n + m$ ならば, fg の i 次の項は 0 である. また, $n + m$ 次の項は $a_n b_m X^{n+m}$ である. R が整域なので, $a_n b_m \neq 0$ となり, fg の次数は $n + m$ になる.

しかし, R は整域でない場合は, 積の次数の公式は一般には成り立たないことに注意する. 例えば, $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ のとき, $f = 2X + 1$ の次数は 1 であるが, $f^2 = 4X^2 + 4X + 1 = 1$ の次数は 0 である. 補題 46 の系として, 上記の主張を示す:

系 47. R は整域ならば, $R[X]$ は整域である.

証明. 積の次数の公式からすぐわかる.

なお, R を可換環とし, $R[X]$ の単数を考える. R が整域である場合は, $R[X]^\times$ を簡単に求めることができる. もし, 多項式 f, g が $fg = 1$ を満たせば, 次数を考えることにより, $0 = \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ となる. よって, $\deg(f) = \deg(g) = 0$ であり, f, g は実際に $R^\times$ の元である. したがって, $R[X] = R^\times$. R は一般の可換環である場合, 次の命題が成り立つ.

命題 48. R を可換環とし, 多項式 $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ とする. 次の条件は互いに同値である.

(i) f は $R[X]$ の単数である.

(ii) $a_0 \in R^\times$ であり, さらに $a_1, \ldots, a_n$ は冪零元である.

R はある性質を持つとき, $R[X]$ はその性質を R から継承することがある. ただし, R の全ての性質がこのように $R[X]$ に持ち越されるわけでないことに注意する. 例えば, R は PID ならば, $R[X]$ は一般に PID であるとは限らない. 実は, いつ $R[X]$ は PID であるかは次の命題からわかる.

命題 49. 可換環 R に対し, 次が成り立つ.

$$R[X] \text{ が PID} \iff R \text{ が可換体.}$$

証明. 「$\Longleftarrow$」は知られている. 他方, $R[X]$ は PID であるとする. 特に, $R[X]$ は整域であるので, その部分環 R も整域になる. 単項イデアル (X) を考える. 剰余環 $R[X]/(X)$ は R と同型であるので, (x) は素イデアルである. 一般に, 命題 45 より, PID において 0 でない素イデアルは極大イデアルである. よって, (X) は極大イデアルである, R は可換体になる.

1.7.2　R UFD $\Rightarrow$ $R[X]$ UFD

定理 50. R は UFD ならば, $R[X]$ は UFD である.

まず, UFD は定義から整域であることに注意する. R を UFD とすると, 特に R は整域なので, §1.7.1 により $R[X]$ も整域であることがわかる.

定理 50 を証明するには, UFD 上の多項式の内容（content）を定義する. まず, UFD R における最大公約数の定義を思い出そう. 既約元の集合の完全代表系 $\mathcal{P}$ を選ぶ. これにより, ゼロでない $x \in R$ を一意的に $x = u\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(x)}$（$u \in R^\times$, $v_p(x) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）で表すことができる. ゼロでない元 $x_1, \ldots, x_m$ に対し, その元の最大公約数は, 次のように定義される：

$$\gcd(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\min(v_p(x_1),\ldots,v_p(x_m))}.$$

この元は, 集合 $\mathcal{P}$ の選び方に依存することに注意する. しかし, 別の完全代表系 $\mathcal{P}'$ に関して考えた $\gcd(x_1, \ldots, x_m)$ は, 前の元と同伴である. よって, 単項イデアる $(\gcd(x_1, \ldots, x_m))$ は一意的に定まり, $\mathcal{P}$ の選び方に存在しない. つまり, $\gcd(x_1, \ldots, x_n)$ は同伴を除いて矛盾なく定まる.

R の任意の元 $x_1, \ldots, x_m$ とし, 少なくとも 1 つの x_i は 0 でないとする. このとき, $x_1, \ldots, x_m$ の最大公約数は 0 でない x_i 全体の最大公約数として定義される. 例えば, $\mathbb{Z}$ において, $\gcd(3, 0, 15, -3) = 3$（同伴を除いて).

定義 51. R を UFD とし, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ を 0 でない R 上の多項式とする. f の内容は, f の全ての係数の最大公約数として定義され, $c(f)$ と書く. この元は同伴を除いて一意的に定まる. f の内容は単数であるときに, f を原始多項式と呼ぶ.

例 52.

(a) 例えば, $R = \mathbb{Z}$ の場合, $f = 2X^3 - 4X + 7$ は原始多項式である (同伴を除いて $\gcd(2, -4, 7) = 1$ となる).

(b) $R = \mathbb{C}[Y]$ とする. R 上の X の多項式 $f = YX^2 + Y^3X + Y$ とする. f の内容は同伴を除いて $c(f) = Y$ である.

補題 53. R を UFD とする. $f, g \in R[X]$ に対し, 同伴を除いて

$$c(fg) = c(f)c(g)$$

が成り立つ.

証明. まず, f, g は原始多項式であるときに, fg また原始多項式であることを示す. fg は原始多項式でないと仮定する. このとき, ある既約元 p が存在し, fg の全ての係数は単項イデアル (p) に含まれる. 剰余環 $R' = R/(p)$ とおき, 可換環 $R'[X]$ を考える. この可換環は, $R[X]/(p)$ と同一視して良い (ここで, (p) は定数多項式として満たされた p で生成される $R[X]$ の単項イデアルを表す). $h \in R[X]$ の類を $\overline{h}$ で表す. $f \mapsto \overline{f}$ で定まる写像 $R[X] \to R[X]/(p)$ は準同型である. 仮定から $0 = \overline{fg} = \overline{f}\overline{g}$. 元 p は素元なので, (p) は素イデアルである. したがって, R' は整域であり, 系 47 により $R'[X]$ は整域である. しかし, f, g は原始多項式なので, $\overline{f}$, $\overline{g}$ はゼロでない $R'[X]$ の元になる. これは $R'[X]$ が整域であることに矛盾する. よって, fg は原始多項式である.

任意の多項式 $f, g \in R[X]$ とし, $f' = \frac{f}{c(f)}$ と $g' = \frac{g}{c(g)}$ を考える. 明らかに f', g' は $R[X]$ の元であり, さらに原始多項式である. よって, $f'g'$ は原始多項式になる. $fg = c(f)c(g)f'g'$ より, 補題の公式が従う.

証明 (定理 50 の証明)**.** R の分数体を K とおく. $K[X]$ は PID なので, UFD である. この情報を使い, $R[X]$ も UFD であることを証明できる. まず, $R[X]$ の既約元の集合を求める. $R[X]$ の既約元全体は, 次の形の多項式であると主張する：

(1) 定数多項式として見なされた R の既約元.

(2) $K[X]$ において既約元である $R[X]$ の原始多項式. 特に, このような多項式の次数は ≥ 1 であることに注意する.

明らかに, (1) の形の多項式は $R[X]$ の既約元である．(2) の形の多項式 f とする．もし, f は $R[X]$ において既約元でなければ, $R[X]$ の単数でない a, b が存在し, $f = ab$ である．$K[X]$ の元とした f は既約元なので, $a \in K^{\times}$ または $b \in K^{\times}$．前者が成り立つと仮定して良い．$a \in R[X]$ より, a はゼロでない R の元になる．さらに, 仮定から a は単数でない．しかし, f の内容を考えると, $c(f) = c(ab) = ac(b)$ となり, f が原始多項式であることに矛盾する．よって, (2) の形の多項式も $R[X]$ の既約元である．任意の $f \in R[x]$ は (1) また (2) の形の多項式の積として表すことができることを示す．まず, f は原始多項式である場合を考える．$K[X]$ は UFD なので, $K[X]$ の既約元 $f_1, \dots f_n$ が存在し, $f = f_1 \dots f_n$ となる．この元 f_i は $R[X]$ に属しないかもしれないが, 適当に 0 でない $d_i \in R$ を選ぶことにより, $d_i f_i \in R[X]$ となる．$d = d_1 \dots d_n$ とおき, $df = (d_1 f_1) \dots (d_n f_n)$ となる．その等式の両側の内容を考えると, $c(df) = c(d_1 f_1) \dots c(d_n f_n)$ となる．f は原始多項式なので, $c(df) = dc(f) = d$. よって,

$$f = \frac{df}{d} = \frac{d_1 f_1}{c(d_1 f_1)} \cdots \frac{d_n f_n}{c(d_n f_n)}$$

となる．ここで, $\frac{d_i f_i}{c(d_i f_i)}$ は $R[X]$ の多項式であり, さらに原始多項式である．これにより, 原始多項式 f は (2) の形の多項式の積として表せることを確認できた．また, 任意の R 上の多項式 f とすると, $f = c(f)\frac{f}{c(f)}$ と書くことにより, f は (1) と (2) の形の多項式の積として表すことができる．(1) と (2) のような形の多項式が $R[X]$ の既約元であることを確かめた．他方, $f \in R[X]$ を既約元とする．(1) または (2) のような多項式 $f_1, \dots, f_n$ が存在し, $f = f_1 \dots f_n$ である．f は規約元なので, $n = 1$ となり, f が (1) または (2) のような多項式である．

最後に, $R[X]$ は UFD であることを示す． 命題 36 により, 既約元は素元であることを示して良い． (1) のような元は, 明らかに $R[X]$ において素元である (例えば, $\frac{R[X]}{(p)} \simeq (R/(p))[X]$ より従う)．(2) のようなもの f とする．次の等式を示す:

$$fK[X] \cap R[X] = fR[X].$$

「$\supset$」はすぐにわかる．他方, 「$\subset$」という包含は, もし $g \in R[X]$ は $K[X]$ において f で割れれば, g は $R[X]$ においても f で割れるという意味である．このような元 g とし, $g = fh$ （$h \in K[X]$) とする．適用な 0 でない $d \in R$ が存在し, $dh \in R[X]$ となる．よって, $dg = f(dh)$ である．内容を考えることにより, $dc(g) = c(dg) = c(f)c(dh) = c(dh)$ となる．よって,

$$g = fh = \frac{dh}{d} f = \frac{dh}{c(dh)} c(g) f$$

であり, $g \in fR[X]$ が成り立つ．これより主張が従う．余剰環 $\frac{R[X]}{fR[X]}$ が整域であることを示す．自然な準同型 $\varphi : R[X] \to \frac{K[X]}{fK[X]}$ を考える．φ の核は, $K[X]$ において f で割れる $R[X]$ の多項式である．上記により, $\mathrm{Ker}(\varphi) = fR[X]$ であり, 準同型分解定理 17 により, 単準同型 $\frac{R[X]}{fR[X]} \to \frac{K[X]}{fK[X]}$ になる．よって, $\frac{R[X]}{fR[X]}$ は整域の部分環であるので, 整域になる．したがって, 単項イデアル $fR[X]$ は素イデアルであり, f は素元である．

例 54. $R = \mathbb{Z}$ とし, $\mathbb{Z}[X]$ を考える．定理 50 により, $\mathbb{Z}[X]$ は UFD である．$\mathbb{Z}[X]$ の既約元全体は, 同伴を除いて, (1) 素数 p また (2)$\mathbb{Q}$ 上既約である $\mathbb{Z}[X]$ の原始多項式である．例えば, 次の元は $\mathbb{Z}[X]$ の既約元である：$11, 4X+1, 2X^2+1$．また, $2X+4$ は既約元でない．しかし, $\mathbb{Q}[X]$ の元として, $2X+4$ は既約元であることに注意する．$2X+4 = 2(X+2)$ と書けるが, 2 は $\mathbb{Q}[X]$ の単数であるので, それは規約元の定義に矛盾しない．

1.7.3 R ネーター環 $\Rightarrow$ $R[X]$ ネーター環

定理 55. R はネーター環ならば, $R[X]$ はネーター環である．

証明. I を $R[X]$ のイデアルとする．I は有限イデアルでないと仮定する．I は 0 でないので, ある $f_0 \in I$ が存在し, 0 でない I の元のうちで, 次数が最小のものである．I は有限イデアルでないので, $(f_0) \subsetneq I$ となる．そして, $I \setminus (f_0)$ の元のうちで, 次数が最小の多項式 f_1 を選ぶ．同様に, $(f_0, f_1) \subsetneq I$ なので, 次数が最小の $f_2 \in I \setminus (f_0, f_1)$ を選ぶ．このように, I の元の列 $(f_0, f_1, f_2, \dots)$ が定まる．明らかに, $\deg(f_0) \leq \deg(f_1) \leq \dots$ である．$i \geq 0$ に対し, f_i の主係数を a_i で表す．R のイデアルの列

$$(a_0) \subset (a_0, a_1) \subset (a_0, a_1, a_2) \subset \dots$$

を考える．ネーター環の性質から, ある番号 N よりこの列が停止する．よって, $a_{N+1} \in (a_0, \dots, a_N)$ であり, $a_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} a_i b_i$ $(b_i \in R)$ と書ける．f_i の次数は d_i とおく．次の多項式を考える：

$$g = f_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} b_i f_i X^{d_{N+1} - d_i}$$

明らかに, $g \in (f_0, \dots, f_{N+1})$ であり, さらに g は $(f_0, \dots, f_N)$ に属しない．上記の和の全ての項の次数は $\leq d_{N+1}$ であるので, g の次数も $\leq d_{N+1}$ となる．また, g の d_{N+1} 次の項の係数は $a_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} a_i b_i = 0$ となる．よって, g の次数は $< d_{N+1}$ であり, f_{N+1} の選び方に矛盾する．これより主張が従う．

注意 56. 同様に, ネーター環 R の多変数多項式環 $R[X_1, \ldots, X_n]$ はネーター環である. それは, n に関する帰納法により証明できる.

1.8 例と反例

ネーター環、UFD、PID の例と反例をまとめよう. 可換体 K を固定する.

(1) まず, PID の例として次の可換環を考える：$\mathbb{Z}, K[X], \mathbb{Z}[i]$. 一般に, PID は UFD またネーター環であるので, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $K[X]$ は, その 3 つの性質を持つ.

(2) $\mathbb{Z}[X], K[X, Y]$ は, PID でないが, ネーター環かつ UFD という性質を持つ. それは, 次のように確認できる：$\mathbb{Z}$, $K[Y]$ は PID であるので, 特に UFD とネーター環である. よって, 定理 50 と定理 55 から $\mathbb{Z}[X]$, $K[X, Y]$ は UFD またネーター環である. また, $\mathbb{Z}$, $K[Y]$ は可換体でないので, 命題 49 からその上の多項式環は PID でない.

(3) そして, UFD でないネーター環の例として, 次の可換環を挙げられる：$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\frac{K[X,Y]}{(X^2-Y^3)}$. 問 30 により, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は UFD でない. それはネーター環であることは, 次のように確かめられる. 定理 55 により, $\mathbb{Z}[X]$ はネーター環である. また, $P(X) \mapsto P(\sqrt{-5})$ で定まる写像 $\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ は明らかに全準同型である. よって, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ はネーター環の剰余環とみなせるので, ネーター環になる (あるいは, 下記の定理 61 を適用できる). 同じ理由で, $R = \frac{K[X,Y]}{(X^2-Y^3)}$ もネーター環である. しかし, この可換環は UFD でないことを確かめることができる.

(4) 最後に, ネーター環でない UFD の例を考えよう. まず, 無限個の変数の多項式の定理を復習する. S を集合とし, $(X_s)_{s\in S}$ を S の元によって添字付けられた変数とする. S は無限集合であるとき, 多項式環 $R[(X_s)_{s\in S}]$ は下記のように定義される.

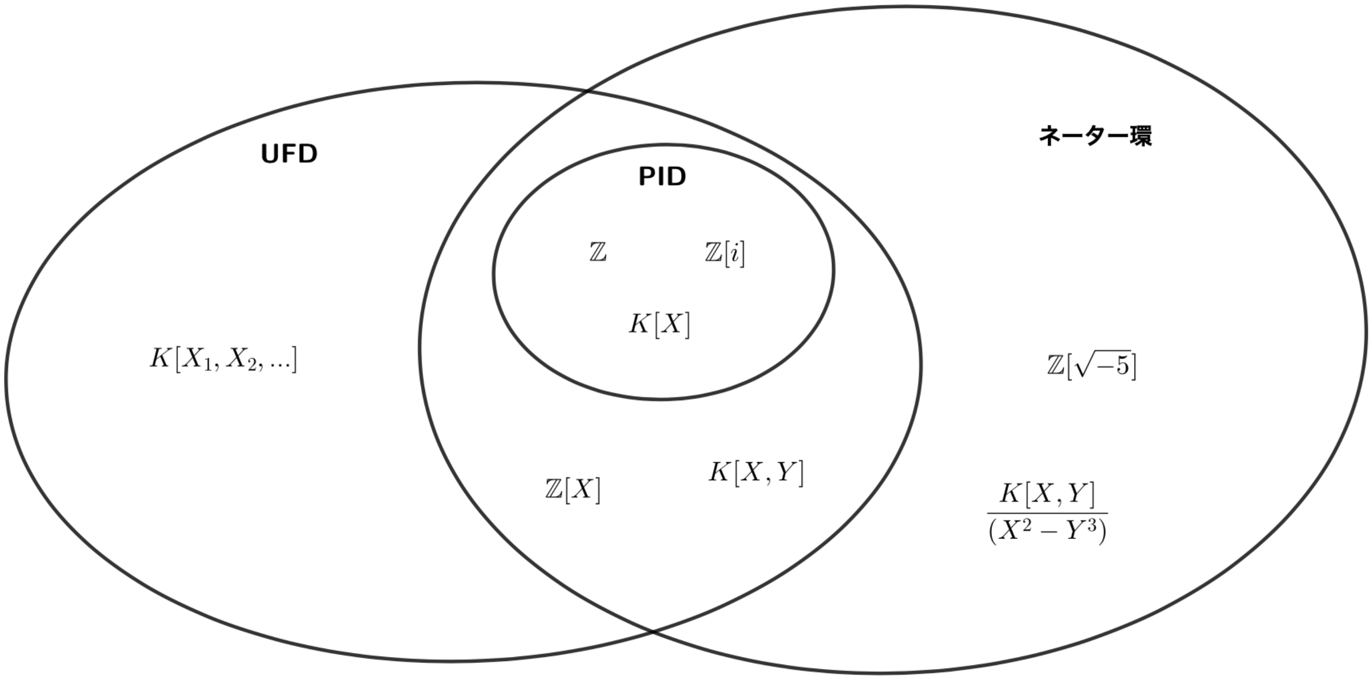
$$R[(X_s)_{s\in S}] = \bigcup_{\text{有限部分集合 } T\subset S} R[(X_s)_{s\in T}]$$

つまり, $(X_s)_{s\in S}$ の多項式は, ある有限部分集合 $T \subset S$ に対して, 変数 $(X_s)_{s\in T}$ の多項式である. $R[(X_s)_{s\in S}]$ 上の演算 $+$ と $\times$ は自然に定義される.

補題 57. 変数 $X_1, X_2, \ldots$ を固定する. 可換環 $K[X_1, X_2, \ldots]$ は UFD であるが, ネーター環でない.

証明. まず, UFD の性質を確かめる. 部分集合 $T \subset S$ に対し, $R_T = R[(X_s)_{s\in T}]$ とおく. 既約元 $f \in R_T$ とする. R_T は UFD であるので, f は R_T において素元である. また, R_S の元としても素元である. よって, 主張が命題 36 から従う. そして, R_S は

ネーター環でないことを証明する．イデアル $I = (X_1, X_2, \dots)$ とする．もし I は有限イデアルならば, $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ $(f_i \in R_S)$ と書ける．多項式 $f_1, f_2, \dots, f_m$ には有限個の変数しか含まれないので, その多項式に含まれない変数 X_N を選ぶことができる．よって, $X_N = \sum_{i=1}^m a_i f_i$ $(a_i \in R_S)$ と書ける．多項式 a_i の X_N を 1 で置き換えたものを a_i' と書く．よって, $1 = \sum_{i=1}^m a_i' f_i$ となり．したがって, $f_1, \dots, f_m$ は自明イデアル R を生成する．これは $I \neq R$ に矛盾する．



1.9 有限 R-代数と有限生成 R-代数

定義 58. R, S を可換環とし, $R \to S$ を準同型とする．このとき, S は R-代数であるという．

例えば, 自然な準同型 $R \to R[X]$ に対して, $R[X]$ は R-代数である．

準同型 $f : R \to S$ を R-代数 S の構造射とよぶ．構造射は文字で表すことなく, $a \in R$, $x \in S$ に対し, $f(a)x$ を単に ax と書く．R-代数 S を R-加群として見なすことができる．そのため, R-加群の記号と合わせて, $ax = f(a)x$ という記号を使用する．

定義 59. R を可換環とし, S を R 上の代数とする．S は有限 R-代数 (finite R-algebra)

であるとは, $x_1,\dots,x_n \in S$ が存在し, 全ての $x \in S$ に対し, $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ となる $a_1,\dots,a_n \in R$ が存在することをいう.

定義 60. R を可換環とし, S を R 上の代数とする. S は有限生成 R-代数 (finitely generated R-algebra) であるとは, $x_1,\dots,x_n \in S$ が存在し, 全ての $x \in S$ に対し, $x = P(x_1,\dots,x_n)$ となる多項式 $P(X_1,\dots,X_n) \in R[X_1,\dots,X_n]$ が存在することときにいう.

S, S' を R-代数とする. R-代数の準同型 $f : S \to S'$ とは, $f(ax) = af(x)$ ($a \in R$, $x \in S$) を満たす環準同型をいう. 例えば, S は R-代数ならば, $x_1,\dots,x_n \in S$ に対し,

$$R[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow S, \quad P \mapsto P(x_1,\dots,x_n)$$

で定まる写像は R-代数の準同型になる. 他方, 全ての R-代数の準同型 $R[X_1,\dots,X_n] \to S$ はこのように元 $x_1,\dots,x_n \in S$ で定まる. したがって, S は有限生成 R-代数であるための必要十分条件として, R-代数の全準同型 $R[X_1,\dots,X_n] \to S$ が存在することである.

定理 61. ネーター環 R 上の有限生成 R-代数はネーター環である.

証明. S を有限生成 R-代数とする. 上記の通り, 全準同型 $f : R[X_1,\dots,X_n] \to S$ が存在する. よって, $I = \mathrm{Ker}(f)$ とおくことにより, 同型 $R[X_1,\dots,X_n]/I \simeq S$ が定まる. 注意 56 より, $R[X_1,\dots,X_n]$ である. イデアルによるネーター環の剰余環はまたネーター環になることは, 直ちに定義から分かる. 主張が従う.

2 可換環のスペクトル

R を可換環とする. R のスペクトルは, R の素イデアル全体のなす集合として定義される. すなわち,

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\text{ 素イデアル } \mathfrak{p}\}.$$

この集合は, ザリスキー位相に関して位相空間になる. また, $\mathrm{Spec}(R)$ は代数幾何の非常に重要な概念になる.

2.1 ザリスキー位相

R のイデアルに対し, 次の $\mathrm{Spec}(R)$ の部分集合を定義する.

$$\begin{aligned} D(I) &= \{\text{ 素イデアル } \mathfrak{p} \mid I \subsetneq \mathfrak{p}\} \\ V(I) &= \{\text{ 素イデアル } \mathfrak{p} \mid I \subset \mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}(R) \setminus D(I). \end{aligned}$$

定理 62. 集合 $\mathcal{O} = \{D(I) \mid I \text{ イデアル }\}$ は $\mathrm{Spec}(R)$ 上の位相を定める. すなわち, $\mathcal{O}$ は開集合系になる.

この定理を証明する前に, 開集合系の定義を思い出そう. X は集合とし, X の部分集合の集合 $\mathcal{O}$ とする. $\mathcal{O}$ は次の条件を満たすときに, 開集合系であるという.
(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.
(ii) $U, U' \in \mathcal{O}$ ならば, $U \cap U' \in \mathcal{O}$.
(iii) $(U_j)_{i \in J}$ が $\mathcal{O}$ の元の族ならば, $\bigcup_{j \in I} U_j \in \mathcal{O}$.

証明. $I = 0$ とすると, $V(I) = \mathrm{Spec}(R)$ であり, $D(I) = \emptyset$ となる. また, $I = R$ ならば, $V(I) = \emptyset$, $D(I) = \mathrm{Spec}(R)$ となる. よって, 開集合系の定義の (i) が成り立つ. (ii) を証明する. イデアル $I, I' \subset R$ に対し,

$$V(II') = V(I) \cup V(I')$$

であると示す. $II' \subset I$ であるので, $V(I) \subset V(II')$ となり, 同様に $V(I') \subset V(II')$ である. 他方, $II' \subset \mathfrak{p}$ となる素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $I \subset \mathfrak{p}$ または $I' \subset \mathfrak{p}$ であることを示してよい. もし $I \subsetneq \mathfrak{p}$ かつ $I' \subsetneq \mathfrak{p}$ ならば, 元 $x \in I \setminus \mathfrak{p}$ また $x' \in I' \setminus \mathfrak{p}$ が存在する. $\mathfrak{p}$ が素イデアルなので, $xx' \notin \mathfrak{p}$ である. ただし, $xx' \in II'$ であるので, $II' \subset \mathfrak{p}$ という仮定に矛盾する. したがって, 上記の公式が成り立つ. 差集合を考えると, $D(II') = D(I) \cap D(I')$ となり, これより性質 (ii) が従う. 最後に, (iii) を示す. $(I_j)_{j \in J}$ を R のイデアルの族とする. 全ての $(I_j)_{j \in J}$ で生成されるイデアルを I とおく. つまり,

$$I = \left(\bigcup_{j \in J} I_j \right)$$

イデアル K に対し, $I \subset K$ という条件は, $\forall j \in J$, $I_j \subset K$ であるための必要十分条件である. これより, $V(I) = \bigcap_{j \in J} V(I_j)$ となり, さらに $D(I) = \bigcup_{j \in J} D(I_j)$ となる. したがって, (iii) の性質が成り立つ.

例 63. $R=\mathbb{Z}$ とする．$\mathbb{Z}$ の素イデアル全体の集合は，素数 p で生成されるイデアル (p)，またゼロイデアル 0 からなる．自明でないイデアル I とし，$I=(n)$ となる整数 $n\neq 0$ とする．n の素因数分解は $n=\epsilon p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ $(\epsilon\in\{-1,1\})$ とする．そのとき，

$$V(I)=\{(p_1),\cdots,(p_r)\}$$

となる．したがって，$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ の閉集合全体は，

$$\emptyset,\ \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}),\ \{(p_1),\cdots,(p_r)\}\qquad (r\geq 1,\ p_i：素数)$$

である．したがって，$\{(p)\}$ のような単集合は閉であるが，0 は位相空間 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ の稠密な点になることに注意する．

可換環 R とする．元 $f\in R$ で生成される単項イデアル (f) の場合は，$V((f))$，$D((f))$ をそれぞれ単に $V(f)$，$D(f)$ とおく．

一般に，$\mathrm{Spec}(R)$ の開集合 U に対し，定義から $U=D(I)$ となるイデアル I が存在するが，I は単項イデアルであるとは限らない．ただし，U が $D(f)$（$f\in R$）のような開集合の和集合として表すことができる．すなわち，

$$D(I)=\bigcup_{f\in I}D(f)$$

である．$f\in I$ ならば，明らかに $D(f)\subset D(I)$ である．他方は，次の補題から得られる．

補題 64. $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)$ とする．$\{D(f)\mid f\notin\mathfrak{p}\}$ は，$\mathrm{Spec}(R)$ において $\mathfrak{p}$ の基本近傍系をなす．

位相空間 X において，点 $x\in X$ の近傍の族 $(V_j)_{j\in J}$ が基本近傍系であるとは，x の任意の近傍 V に対し，ある $j\in J$ が存在し，$V_j\subset J$ となるときにいう．

証明. $\mathfrak{p}$ の近傍 V とする．まず，近傍の定義から，イデアル $I\subset R$ が存在し，$\mathfrak{p}\in D(I)\subset V$ となる．また，任意のイデアル I に対し，定義から $\mathfrak{p}\in D(I)\Leftrightarrow I\not\subset\mathfrak{p}$ となる．したがって，元 $f\in I\setminus\mathfrak{p}$ が存在する．このような元を選ぶことにより，$\mathfrak{p}\in D(f)\subset D(I)$ となる．

補題 65. $\mathrm{Spec}(R)$ において，素いである $\mathfrak{p}$ に対し，単集合 $\{\mathfrak{p}\}$ が閉であることは，$\mathfrak{p}$ が極大イデアルであることと同値である．

この補題を証明する前，一般の部分集合 $S\subset\mathrm{Spec}(R)$ の閉包を考える．$S=\{\mathfrak{p}_j\mid j\in J\}$ とおく．閉包の定義から，

$$\overline{S}=\bigcap_{S\subset V(I)}V(I)$$

である．$S \subset V(I)$ という条件は, $\forall j \in J,\ I \subset \mathfrak{p}_j$ であることと, また $I \subset \bigcap_{j \in J} \mathfrak{p}_j$ であることと同値である．したがって,

$$\overline{S} = \bigcap_{I \subset \bigcap_{j \in J} \mathfrak{p}_j} V(I) = V(\bigcap_{j \in J} \mathfrak{p}_j)$$

である.

証明. 素イデアル $\mathfrak{p}$ とする．$S = \{\mathfrak{p}\}$ とおき, 上記の公式を使うことにより, $\{\mathfrak{p}\}$ の閉包は $V(\mathfrak{p})$ であることがわから．したがって, $\{\mathfrak{p}\}$ が閉であることは, $V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ であることと同値である．主張は補題 27 から従う.

イデアル I に対し,

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \geq 1, x^n \in I\}$$

とおく．$\sqrt{I}$ は I の根基と呼び, I を含むイデアルである.

補題 66. イデアル I に対し, 次が成り立つ

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I \subset \mathfrak{p} \\ \text{素イデアル}}} \mathfrak{p}.$$

命題 67. イデアル I, J に対し, 次が成り立つ.

$$V(I) \subset V(J) \Longleftrightarrow \sqrt{J} \subset \sqrt{I}$$
$$V(I) = V(J) \Longleftrightarrow \sqrt{J} = \sqrt{I}.$$

2.2　局所化の復習

R を可換環とする．部分集合 $S \subset R$ は乗法的閉集合であるとは, 次の 2 つの条件を満たすときにいう.

(a) $1 \in S$.

(b) $x, y \in S$ ならば, $xy \in S$.

例 68. 以下の 2 つの例は非常に重要である.

(1) 素イデアル $\mathfrak{p}$ とする．$S = R \setminus \mathfrak{p}$ は乗法的閉集合である.

(2) $f \in R$ において, $\{1, f, f^2, \ldots\}$ は乗法的閉集合である.

S は R の乗法的閉集合であるとき, $R \times S$ において同値関係 $\sim$ は次のように定義される. $(x,s),(x',s') \in R \times S$ に対し,

$$(x,s) \sim (x',s') \Longleftrightarrow t \in S \text{ が存在し}, \ t(sx'-s'x)=0.$$

関係 $\sim$ が同値関係であることを確認する. 反射性と対象性は明らか. $\sim$ は推移的であることを証明する. $(x,s),(x',s'),(x'',s'')$ とし, $(x,s) \sim (x',s')$ かつ $(x',s') \sim (x'',s'')$ とする. このときに, $t,t' \in S$ が存在し, $t(sx'-s'x)=0$ であり, $t'(s'x''-s''x')=0$ である. よって, $tt's'sx''=tt's''sx'=tt's's''x$ となり, つまり $tt's'(sx''-s''x)=0$ である. これより, は同値関係である.

$(x,s) \in R \times S$ の同値類を $\frac{x}{s}$ と書き, 同値類全体を $S^{-1}R$ で表す. $S^{-1}R$ 上の演算 $+$ と $\times$ は以下の通り定義される.

$$\frac{x}{s}+\frac{x'}{s'}=\frac{xs'+x's}{ss'}$$
$$\frac{x}{s}\times\frac{x'}{s'}=\frac{xx'}{ss'}.$$

これより $S^{-1}R$ 上の可換環構造が定まることを確認できる. また, $x \mapsto \frac{x}{1}$ で定まる写像 $f: R \to S^{-1}R$ は可換環の準同型である. その写像に対して, $S^{-1}R$ は R-代数になる. 元 $\frac{x}{1}$ を単に x を書くこともあるが, 混同しないよう注意すること. 準同型 f は単射である場合は, その記号を問題なく使うことができる. しかし, f は単射であるとは限らないので, 一般に $\frac{x}{1}$ と書くほうがよい.

注意 69. $S^{-1}R=0$ (零環) となることがある. $S^{-1}R=0$ であるための必要十分条件は, $\frac{1}{1}=\frac{0}{1}$ であることである. それは, $\sim$ の定義から, $0 \in S$ であることと同値である.

上記の写像 $f: R \to S^{-1}R$ は写像 $f': \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to \mathrm{Spec}(R)$ を定める. $S^{-1}R$ の素イデアル $\mathfrak{b}$ に対し, 逆像 $f^{-1}(\mathfrak{b})$ は R の素イデアルになる. 一般に, 可換環の準同型による素イデアルの逆像はまた素イデアルであることを簡単に確かめる. よって, $f'(\mathfrak{b}) := f^{-1}(\mathfrak{b})$ とおくことにより, 写像 f' が定まる.

定理 70. 写像 $f': \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to \mathrm{Spec}(R)$ はザリスキー位相に対して連続である. また, f' は全単射像

$$\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \longrightarrow X = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$$

を定める. さらに, 上記の集合 X を $\mathrm{Spec}(R)$ の部分位相空間として見なすと, その写像は位相同型である.

証明. まず, f' が写像 $\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \longrightarrow X$ を定めることを示す．$S^{-1}R$ の素イデアル $\mathfrak{b}$ とし, $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{b})$ とする．$\mathfrak{p} \cap S$ は空でないとし, $s \in \mathfrak{p} \cap S$ とする．このとき, $f(s) = \frac{s}{1} \in \mathfrak{b}$ であり, さらに $f(s)$ は $S^{-1}R$ の単数である ($\frac{s}{1} \times \frac{1}{s} = 1$ であるので)．イデアル $\mathfrak{b}$ は単数を含むので, $\mathfrak{b} = S^{-1}R$ となる．これは $\mathfrak{b}$ が素イデアルであることに矛盾する．よって, f' の像は X に含まれる．X の元 $\mathfrak{p}$ とし,

$$\mathfrak{b} = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in \mathfrak{p},\ s \in S \right\}$$

とおく．$\mathfrak{b}$ は $S^{-1}R$ のイデアルであることは明らか．$\mathfrak{b}$ は素イデアルであることを示す．もし, 元 $x, x' \in R$ また $s, s' \in S$ に対し, $\frac{x}{s} \times \frac{x'}{s'} \in \mathfrak{b}$ であれば, $\frac{xx'}{ss'} = \frac{x''}{s''}$ となる $x'' \in \mathfrak{p}$, $s'' \in S$ が存在する．このとき, $t \in S$ で, $t(ss'x'' - s''xx') = 0$ となる．よって, $ts''xx' \in \mathfrak{p}$ である．$\mathfrak{p}$ は素イデアルであり, さらに t, s'' は $\mathfrak{p}$ の元でないので, $x \in \mathfrak{p}$ または $x' \in \mathfrak{p}$ となる．したがって, $\mathfrak{b}$ は素イデアルである．$f'(\mathfrak{b}) = f^{-1}(\mathfrak{b})$ は, $\frac{x}{1} \in \mathfrak{b}$ となる R の元 x 全体のなすイデアルである．明らかに, $\mathfrak{p} \subset f^{-1}(\mathfrak{b})$．他方, $\frac{x}{1} \in \mathfrak{b}$ ならば, $\frac{x}{1} = \frac{x'}{s'}$ となる $x' \in \mathfrak{p}$, $s' \in S$ が存在する．よって, ある $t \in S$ で, $t(s'x - x) = 0$ である．ゆえ, $tx \in \mathfrak{p}$ となる．$t \notin \mathfrak{p}$ より, $x \in \mathfrak{p}$ となる．したがって, $f^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{p}$ と確認した．そのため, 写像 $f' : \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to X$ は全射である．f' は単射であることを示す．素イデアル $\mathfrak{b} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ に対し, $f^{-1}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{p}$ とおくと, 上記の公式 2.2 のように $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{p}$ から一意に定まることを示してよい．実は, 一般のイデアル $J \subset S^{-1}R$ に対し,

$$J = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in f^{-1}(J),\ s \in S \right\} \tag{1}$$

であることを示す．$x \in f^{-1}(J)$, $s \in S$ ならば, $\frac{x}{s} = \frac{1}{s} \times f(x)$ を書くことにより,「$\supset$」が従う．他方, $\frac{x}{s} \in J$ となる $x \in R$, $s \in S$ とする．$\frac{x}{1} = \frac{x}{s} \times \frac{s}{1}$ より, $\frac{x}{1} \in J$, ゆえ $x \in f^{-1}(J)$ である．よって, 主張が従う．$f' : \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to X$ が全単射であることを証明した．次に, 位相同型であることを確認する．イデアル $I \subset R$ に対し,

$$\begin{aligned} f'^{-1}(V(I)) &= \{\mathfrak{b} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \mid I \subset f^{-1}(\mathfrak{b})\} \\ &= \{\mathfrak{b} \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \mid (f(I)) \subset \mathfrak{b}\} = V((f(I))) \end{aligned}$$

より, f' による閉集合の逆像はまた逆像である．よって, f' は連続である．最後に, イデアル $J \subset S^{-1}R$ に対し, X 上の部分空間位相に対して $f'(V(J))$ が X の閉集合であることを証明する．定義から

$$f'(V(J)) = \{f^{-1}(\mathfrak{b}) \mid J \subset \mathfrak{b}\}.$$

が成り立つ．この集合は $V(f^{-1}(V)) \cap X$ に等しいことを示す．$J \subset \mathfrak{b}$ ならば, $f^{-1}(J) \subset f^{-1}(\mathfrak{b})$ となるので, 包含 $f'(V(J)) \subset V(f^{-1}(V)) \cap X$ が成り立つ．逆に,「$\supset$」を示すた

めに, $S^{-1}R$ の素イデアル $\mathfrak{b}$ に対し, もし $f^{-1}(J) \subset f^{-1}(\mathfrak{b})$ ならば, $J \subset \mathfrak{b}$ であることを確認すれば十分である. それは簡単に公式 (1) から従う.

R を可換環とする. 素イデアル $\mathfrak{p}$ において, 乗法的閉集合 $R \setminus \mathfrak{p}$ による局所化は $R_{\mathfrak{p}}$ と書く. また, $f \in R$ において, $\{1, f, f^2, \dots\}$ による局所化は R_f と書く.

例 71. 例えば, $R = \mathbb{Z}$ とし, 素数 p とする. $\mathbb{Z} \setminus (p)$ による局所化は

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$$

である. また, $S = \{1, 2, 2^2, \dots\}$ による局所化は

$$S^{-1}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{a}{2^m} \mid a \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \right\}$$

である. この場合は, 2 進整数の記号との混同を避けるために, 局所化を"$\mathbb{Z}_2$"という記号で表すことを控える.

R を可換環とし, $\mathfrak{p}$ を素イデアルとする. $S = R \setminus \mathfrak{p}$ の場合は, 定理 70 を用いることにより, 位相同型

$$f' : \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow X = \{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}\}$$

が得られる. この写像はイデアルの包含関係を保つ (すなわち, 素イデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{Spec}(R_{\mathfrak{p}})$ に対し, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \iff f'(\mathfrak{a}) \subset f'(\mathfrak{b})$ となる). 上記の集合 X において, $\mathfrak{p}$ は明らかに包含関係に関する最大元である. よって, $R_{\mathfrak{p}}$ も包含関係に関する最大の素イデアルを持つ. 具体的に, そのイデアルは

$$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in \mathfrak{p}, s \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

である. 特に, $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の唯一の極大イデアルである.

定義 72. 一般に, 極大イデアルを唯一つだけ持つ可換環は, 局所環であるという.

2.3 前層と層

定義 73. X を位相空間とし, $\mathcal{T}$ を X の開集合全体の集合とする. X 上の集合の前層とは, 全ての開集合 $U \in \mathcal{T}$ に集合 $\mathcal{F}(U)$ を対応させる規則である. さらに, $U \subset V$ ならば, 制限写像 $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ が定まり, 次の条件を満たす.
(a) $U = V$ の場合は, 制限写像 $\rho_U^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ は恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ である.

(b) 開集合 U, V, W に対し, $U \subset V \subset W$ ならば, $\rho_U^V \circ \rho_V^W = \rho_U^W$ である.

開集合 U において, $\mathcal{F}(U)$ の元を U 上の $\mathcal{F}$ の切断と呼ぶ. $U \subset V$ となる開集合 U, V において, 制限写像による $s \in \mathcal{F}(V)$ の像 $\rho_U^V(s)$ を単に

$$s|_U$$

と書き, S の U への制限と呼ぶ. 前層を単に文字 $\mathcal{F}$ などで表す.

同様に, アーベル群の前層とは, 全ての X の開集合 U にアーベル群 $\mathcal{F}(U)$ を対応させる規則である. また, $U \subset V$ となる開集合 U, V において, 群準同型 $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ が定まり, 集合の前層の定義と同じ条件 (a), (b) を満たす. なお, 環の前層は同じように定義される. この場合に, $\mathcal{F}(U)$ は可換環であり, さらに制限写像は可換環の準同型である.

例 74. 普通の位相を入れた $X = \mathbb{C}$ とする. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid \text{正則関数}\}$$

とおく. また, $U \subset V$ ならば, 制限写像 $\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ を自然に定まる写像として定義する. これより, 集合 $\mathcal{O}(U)$ 全体, 制限写像 ρ_U^V 全体が定まるものは $\mathbb{C}$ 上の前層 $\mathcal{O}$ である. また, 明らかに $\mathcal{O}(U)$ は自然な可換環の構造を持ち, さらに制限写像は可換環の準同型であるので, $\mathcal{O}$ は環の前層になる.

定義 75. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ とする. $\mathcal{F}$ が層であるとは, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ となる開集合 $U, (U_i)_{i \in I}$ に対し, $\mathcal{F}$ が次の 2 つの条件を満たすときにいう.

(a) $s, t \in \mathcal{F}(U)$ に対し, もし $\forall i \in I$, $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ ならば, $s = t$ となる.

(b) 切断の族 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ に対し, $\forall i, j \in I$, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ ならば, U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在し, $s|_{U_i} = s_i$ となる.

条件 (a) から, (b) の U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ は一意に存在する. (a) の条件を局所性条件といい, (b) の条件を張り合わせ条件という. 例えば, 上記の例に定義された $\mathbb{C}$ 上の正則関数の前層は, 層であることを簡単に確認できる.

$U = \bigcup_{i \in I} U_i$ となる開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ は, U の開被覆と呼ぶ.

注意 76. 開集合 $\emptyset$ の開被覆に関して考えよう. まず, 一般に開集合 U の開被覆とは, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ となる集合 I によって添字付けられた開集合の族 $(U_i)_{i \in I}$ として定義された. ここで, $(U_i)_{i \in I}$ という記号は, $i \mapsto U_i$ で定まる写像を表す. つまり, U の開被覆は, ある集合 I から U に含まれる開集合全体の集合への写像として見なすことができる.

$U=\emptyset$ の場合は, U に含まれる開集合全体の集合は, 単集合 $\{\emptyset\}$ である．よって, $\emptyset$ の開被覆は, 写像 $I\to\{\emptyset\}$ で定まる．例えば, $I=\{1\}$ とし, $1\mapsto\emptyset$ とおくと, 開被覆が得られる．しかし, もう一つの開被覆が存在することに注意すること．$I=\emptyset$ とし, $\emptyset\to\{\emptyset\}$ を空写像とする．これも $\emptyset$ の開被覆である．

今, X 上の層とし, $\mathcal{F}(\emptyset)$ の値について考えよう．空写像 $I=\emptyset\to\{\emptyset\}$ で定まる $U=\emptyset$ の開被覆に層の定義を適用しよう． 定義から, $\forall i,j\in I$, $s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$ となる $(s_i)_{i\in I}$ に対し, ただ１つの切断 $s\in\mathcal{F}(U)$ が存在し, $s|_{U_i}=s_i$ である．ここで, $(s_i)_{i\in I}$ という記号は, $i\mapsto s_i$ で定まる写像 $\gamma: I\to\{$ 開集合上の切断 $\}$ を表す. $U=\emptyset$, $I=\emptyset$ の場合は, このような族がただ１つ存在する（すなわち, 空写像 $\emptyset\to\{$ 開集合上の切断 $\}$ である)．したがって, 層の定義から, $\mathcal{F}(\emptyset)$ は**単集合**になる．

これより, アーベル群の層 $\mathcal{F}$ の場合は, $\mathcal{F}(\emptyset)=\{0\}$ となる．また, $\mathcal{F}$ は環の層であれば, $\mathcal{F}(\emptyset)=\{0\}$（零環）である．

2.4　茎と芽

位相空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ とし, 点 $x\in S$ とする．U は x の開近傍で, $s\in\mathcal{F}(U)$ は U 上の切断において, (U,s) のような 2 組のなす集合を考える．その集合上の同値関係 $\sim$ を定義する．このような $(U,s),(U',s')$ に対し,

$$(U,s)\sim(U',s')\iff x\text{ の開近傍 }V\subset U\cap U'\text{ が存在し, }s|_V=s'|_V$$

で同値関係 $\sim$ が定まる．x における茎 (stalk)$\mathcal{F}_x$ はこの同値関係に関する同値類全体の集合として定義される． すなわち,

$$\mathcal{F}_x=\left.\left\{(U,s)\;\middle|\;\begin{array}{l}U\ :\ x\text{ の開近傍}\\ s\in\mathcal{F}(U)\end{array}\right\}\middle/\sim\right.$$

U は x の開近傍で, $s\in\mathcal{F}(U)$ とき, (U,s) の同値類を $[(U,s)]$ で表す．もし, $\mathcal{F}$ はアーベル群の前層ならば, $\mathcal{F}_x$ もアーベル群になる．元 $a=[(U,s)]$ と $a'=[(U',s')]$ に対し, 開近傍 $V\subset U\cap U'$ において, a と a' の和は $[(V,s|_V+s'|_V)]$ と定義される．同様に, 環の前層 $\mathcal{F}$ の場合は, 茎 $\mathcal{F}_x$ は可換環になる．

U を x の開近傍とする．U 上の切断 $s\in\mathcal{F}(U)$ に対し, $s_x:=[(U,s)]\in\mathcal{F}_x$ と書き, x における芽とよぶ．これより, $s\mapsto s_x$ で写像

$$\mathcal{F}(U)\longrightarrow\mathcal{F}_x$$

が定まる.

U 上の切断 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ に対し, $s_x = t_x$ が成り立つための必要十分条件は, $s|_V = t|_V$ となる x の開近傍 V が存在することである.

例 77.

(i) X を位相空間とし, A をアーベル群とする. 散位相に対して, A を位相空間として見なす. X の開集合 U に対し,

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \to A \mid \text{連続関数}\}$$

とおく. また, $U \subset V$ となる開集合 U, V に対し, 制限写像 $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ を自然に関数の制限により定まる写像とする.

このように定義された $\mathcal{F}$ は, X 上の層であり, 定数層とよぶ. 点 $x \in X$ に対し, $[(U, f)] \mapsto f(x)$ で定まる写像

$$\mathcal{F}_x \to A$$

は群同型であることを確認する. 離散位相を入れた A において, $f : U \to A$ が連続であることは, f が局所定数関数であることと同値である. よって, x の開近傍 U, U' において, 切断 $f \in \mathcal{F}(U)$, $f' \in \mathcal{F}(U')$ に対し, 開近傍 $V \subset U \cap U'$ が存在し, $f|_V$ また $f'|_V$ が V 上の定数関数である. これより, $[(U, f)] = [(U', f')] \iff f(x) = f'(x)$ となる. したがって, 上記の写像 $\mathcal{F}_x \to A$ は群同型である.

(ii) 点 $x_0 \in X$ とする. 開集合 U に対し,

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} A & \text{if } x_0 \in U \\ 0 & \text{if } x_0 \notin U \end{cases}$$

とおく. $U \subset V$ となる開集合 U, V とする. $x_0 \in U$ の場合, $\mathcal{G}(U) = \mathcal{G}(V) = A$ となり, 制限写像 $\rho_U^V : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(U)$ を, A の恒等写像にする. $x_0 \notin U$ の場合は, $\mathcal{G}(U) = 0$ であり, ρ_U^V をゼロ写像にする. このように定まった $\mathcal{G}$ は X 上の層である, 摩天楼層とよぶ (skyscraper sheaf).

点 $x \in X$ に対し, x における茎 $\mathcal{F}_x$ を求めよう.

$$\mathcal{G}_x = \begin{cases} A & \text{if } x \in \overline{\{x_0\}} \\ 0 & \text{if } x \notin \overline{\{x_0\}} \end{cases}$$

であることを示す. $x \notin \overline{\{x_0\}}$ の場合は, $x_0 \notin U$ となる x の開近傍 U が存在する. よって, 開近傍 $V \subset U$ に対す, $\mathcal{G}(V) = 0$ となり, ゆえ $\mathcal{G}_x = 0$. $x \in \overline{\{x_0\}}$ の場合は, 全ての開近傍 U に対し, $\mathcal{G}(U) = A$ である. よって, $\mathcal{G}_x = A$ となる.

特に, x_0 が閉点ならば, x_0 以外の全ての点における茎はゼロである.

(iii) $\{x\}$ を単集合とする. $\{x\}$ 上の位相がただ一つ存在する. この場合, $\{x\}$ 上の層を考えよう. 例えば, A をアーベル群とする. $\mathcal{F}_A(\emptyset) = 0$ また $\mathcal{F}_A(\{x\}) = A$ と定めると, アーベル群の層 $\mathcal{F}_A$ が得られる. 逆に, $\{x\}$ 上の全てのアーベル群の層はこのように一意的に表されるので, 「$\{x\}$ 上のアーベル群の層」と「アーベル群」という概念を同一視できる.

2.5 $\mathrm{Spec}(R)$ 上の層 $\mathcal{O}$

R を可換環とする. $\mathrm{Spec}(R)$ の開集合 U に対し, 可換環 $\mathcal{O}(U)$ を定義する. $\mathcal{O}(U)$ の元 s は, 以下の条件を満たす写像

$$s : U \longrightarrow \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}}$$

として定義される.

(i) $\mathfrak{p} \in U$ に対し, $s(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}}$

(ii) $\mathfrak{p} \in U$ に対し, x のある近傍 $V \subset U$ において, 次が成り立つ. 元 $a, f \in R$ が存在し, 全ての $\mathfrak{p}' \in V$ に対し, $f \notin \mathfrak{p}'$ となり, さらに $R_{\mathfrak{p}'}$ の元として

$$s(\mathfrak{p}') = \frac{a}{f}$$

である.

また, 開集合 U, V とし, $U \subset V$ であるとする. 切断 $s \in \mathcal{O}(V)$ に対し, その U への制限は写像 $U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}}$ を定め, 上記の条件 (i) と (ii) を満たす. これより, 制限写像 $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ が定まる. 開集合 U に対し, $\mathcal{O}(U)$ が自然な可換環の構造をもつことを説明しよう. 切断 $s, s' \in \mathcal{O}(U)$ に対し, 和 $s + s'$ また積 $s \times s'$ は以下のように定義される. 任意の $\mathfrak{p} \in U$ に対し, $R_{\mathfrak{p}}$ において

$$(s + s')(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) + s'(\mathfrak{p})$$
$$(s \times s')(\mathfrak{p}) = s(\mathfrak{p}) \times s'(\mathfrak{p})$$

とおく. 写像 $s + s'$ また $s \times s'$ は条件 (i) と (ii) を満たす. これより, $\mathcal{O}(U)$ 上の可換環の構造が得られる. また, 制限写像が環準同型であることは明らか.

したがって, このようにして環の前層 $\mathcal{O}$ は定められる.

命題 78. $\mathrm{Spec}(R)$ 上の前層 $\mathcal{O}$ は層である.

証明. 定義から従う.

複数の可換環を同時に考える場合, 混同を避けるために $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}_R$ で表す. 開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ に対し, $\mathcal{O}_R(U)$ を $\Gamma(U, \mathcal{O}_R)$ あるいは $H^0(U, \mathcal{O}_R)$ とも書く.

定理 79.
(1) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し, $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}$ である.
(2) $f \in R$ に対し, $\mathcal{O}(D(f)) \simeq R_f$ である.

特に, $f = 1$ ならば, $D(f)$ である, よって $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(R)) \simeq R$. また, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し, $\mathfrak{p}$ における芽で定まる写像 $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(R)) \to \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ は, 同型 $\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(R)) \simeq R$ また $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}$ により, 写像 $R \to R_\mathfrak{p}$ に対応する. その写像は, 自然な準同型 $x \mapsto \frac{x}{1}$ である.

証明. (i) を証明する. まず, 準同型 $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}$ を説明する. $\mathfrak{p}$ の開近傍 U において, 切断 $s \in \mathcal{O}(U)$ に対し, $[(U, s)] \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ に $R_\mathfrak{p}$ の元 $s(\mathfrak{p})$ を対応させると, 写像

$$\mathcal{O}_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}$$

が定まる. $R_\mathfrak{p}$ の元 $\frac{a}{f}$ $(a, f \in R,\ f \notin \mathfrak{p})$ に対し, $U = D(f)$ とする. また, $\mathfrak{p}' \in U$ に対し, $s(\mathfrak{p}')$ を $R_{\mathfrak{p}'}$ で考えた $\frac{a}{f}$ と定義すると, 写像 $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p}' \in U} R_{\mathfrak{p}'}$ が定まる. s は $\mathcal{O}(U)$ の元であることは明らか. さらに, $R_\mathfrak{p}$ において, $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f}$ が成り立つ. よって, 上記の写像 $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}$ は全射像である. $\mathfrak{p}$ の開近傍 U において, $s(\mathfrak{p}) = 0$ となる切断 $s \in \mathcal{O}(U)$ とする. もっと小さい開近傍を選ぶことにより, $U = D(f)$ かつ $\forall \mathfrak{p}' \in U,\ s(\mathfrak{p}') = \frac{a}{f}$ となる $a, f \in R$ が存在すると仮定してよい. よって, $R_\mathfrak{p}$ において, $\frac{a}{f} = 0$ である. そのため, $sa = 0$ となる $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ が存在する. $V = U \cap D(s)$ とおく. 明らかに, V は $\mathfrak{p}$ の開近傍である. $\mathfrak{p}' \in V$ に対し, $s \notin \mathfrak{p}'$ であるので, $sa = 0$ より $R_{\mathfrak{p}'}$ の元とした $\frac{a}{f}$ はゼロとなる. よって, 全ての $\mathfrak{p}' \in V$ に対し, $s(\mathfrak{p}') = 0$ である. 特に, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ において $[(U, s)] = 0$ となる. これより, 写像 $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}$ は同型である.

そして, (ii) を示す. まず, 準同型 $R_f \to \mathcal{O}(D(f))$ を定義する. $\frac{a}{f^n}$ を R_f の元とする. $\mathfrak{p} \in D(f)$ に対し, $R_\mathfrak{p}$ において, $s(\mathfrak{p}) = \frac{a}{f^n}$ とおくことにより, 写像 $s : D(f) \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} R_\mathfrak{p}$ が定まる. 定義から, s は $\mathcal{O}(D(f))$ の元である. このように, $\frac{a}{f^n} \in R_f$ に s を対応させることにより, 準同型 $R_f \to \mathcal{O}(D(f))$ が得られる. この写像は単射であることを示す. $\frac{a}{f^n} \in R_f$ とし, その元で定まる $s \in \mathcal{O}(D(f))$ がゼロであると仮定する. 特に, 任意の $\mathfrak{p} \in D(f)$ に対し, $R_\mathfrak{p}$ において $\frac{a}{f^n} = 0$ となる.

$$I = \{y \in R \mid ya = 0\}$$

とおく．I は R のイデアルである．また, $\mathfrak{p} \in D(f)$ に対し, $za = 0$ となる $z \in R \setminus \mathfrak{p}$ が存在するので, $I \not\subset \mathfrak{p}$ となる．よって, 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $I \subset \mathfrak{p} \Longrightarrow f \in \mathfrak{p}$ が成り立つ．補題 66 より, ある $m \geq 1$ で, $f^m \in I$ となる．よって, R_f において $\frac{a}{f^n} = 0$ である．したがって, 写像 $R_f \to \mathcal{O}(D(f))$ は単準同型である．最後に, 全射であることを示す. $s : D(f) \to \coprod_{\mathfrak{p} \in D(f)} R_{\mathfrak{p}}$ を $\mathcal{O}(D(f))$ の元とする．

補題 80. $\mathrm{Spec}(R)$ において, 部分空間移送に対して $D(f)$ は準コンパクトである．

位相空間 X は準コンパクトであるとは, $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ となる開集合 $(U_j)_{j \in J}$ に対し, 有限集合 $J' \subset J$ が存在し, $X = \bigcup_{j \in J'} U_j$ である．

証明 (補題 80 の証明)**.** R のイデアル $(I_j)_{j \in J}$ とし, $D(f) \subset \bigcup_{j \in J} D(I_j)$ とする．全ての $(I_j)_{j \in J}$ で生成されるイデアルを I とおく．よって, $D(f) \subset D(I)$ であり, $V(I) \subset V(f)$ である．命題 67 より, $N \geq 1$ が存在し, $f^N \in I$ となる．よって,

$$f^N = \sum_{r=1}^{m} a_{j_r}$$

となる $j_1, \ldots j_m$, また $a_{j_r} \in I_{j_r}\,(r = 1, \ldots, m)$が存在する．これより, $f^N \in I_{j_1} + \cdots + I_{j_m}$ であり, ゆえ同様に $D(f) \subset D(I_{j_1}) \cup \cdots \cup D(I_{j_m})$ となる．主張が従う．

注意 81. 上記の補題の証明から, 次が成り立つ．R の元 $f, g_1, \ldots, g_m$ に対し, $f^N = \sum_{i=1}^{m} x_i g_i$ となる $N \geq 1$, $x_i \in R$ が存在することは,

$$D(f) \subset D(g_1) \cup \cdots \cup D(g_m)$$

であるための必要十分条件である．

定理 79 の証明に戻ろう．$\mathcal{O}(D(f))$ の元 s が $R_f \to \mathcal{O}(D(f))$ の像に属することを示す．点 $\mathfrak{p} \in D(f)$ に対し, x の近傍 V また $a, g \in R$ が存在し, $\mathfrak{p}' \in V$ ならば $g \notin \mathfrak{p}'$ かつ $s(\mathfrak{p}') = \frac{a}{g}$（$R_{\mathfrak{p}'}$ において）．特に, $V \subset D(g)$ であるが, $V = D(g)$ と仮定してよいと説明する．補題 64 より, $\mathfrak{p} \subset D(g') \subset V$ となる $g' \in R$ が存在する．特に, $D(g') \subset D(g)$ であり, ゆえ $V(g) \subset V(g')$．命題 67 より, $g' \in \sqrt{(g)}$ である．よって, $g'^n = xg$（$x \in R$, $n \geq 1$）と書ける．任意の $\mathfrak{p}' \in D(g')$, $x \notin \mathfrak{p}'$ となり, また $R_{\mathfrak{p}'}$ において

$$s(\mathfrak{p}') = \frac{a}{g} = \frac{ax}{gx} = \frac{ax}{g'^n}$$

である．g' の代わりに, g'^n と書き直すことにより, $D(g')$ において切断 s は $\frac{a'}{g'}$ の形をもつ．したがって, 近傍 V が $D(g)$ であり, さらに $D(g)$ において $s(\mathfrak{p}') = \frac{a}{g} \in R_{\mathfrak{p}'}$ であると

仮定して良い. 全ての点 x に対し, このような近傍 $D(g_x)$ を選ぶ. 空被覆 $(D(g_x))$ に補題 80 を適用することにより, $g_1,\ldots,g_m \in R$ が存在し, $D(f)=D(g_1)\cup\cdots\cup D(g_m)$ が成り立つ.

$i,j\in\{1,\ldots,m\}$ に対し, 写像 $R_{g_ig_j}\to\mathcal{O}(D(g_ig_j))$ は単射であるので, $R_{g_ig_j}$ において, $\frac{a_i}{g_i}=\frac{a_j}{g_j}$ となる. よって,

$$(g_ig_j)^d(g_ja_i-g_ia_j)=0$$

となる $d\geq 1$ が存在する. また, 2 組 (i,j) 全体の個数は有限なので, (i,j) に依存していない $d\geq 1$ を選ぶこともできる. 2.5 から $g_i^dg_j^{d+1}a_i=g_i^{d+1}g_j^da_j$ となる. R_{g_i} において, $\frac{a_i}{g_i}=\frac{a_ig_i^d}{g_i^{d+1}}$ である. g_i を g_i^{d+1} に, また a_i を $a_ig_i^d$ に置き換えることにより, $g_ia_j=g_ja_i$ であることを仮定して良い. 注意 81 より, $f^N=\sum x_ig_i$ となる $x_i\in R$ が存在する. $a=\sum_{i=1}^m x_ia_i$ とする. $j\in\{1,\ldots m\}$ に対し,

$$g_ja=\sum_{i=1}^m x_ia_ig_j=\sum_{i=1}^m x_ig_ia_j=f^Na_j$$

となる. よって, 全ての $\mathfrak{p}\in D(g_j)$ に対し, $R_\mathfrak{p}$ において $s(\mathfrak{p})=\frac{a_j}{g_j}=\frac{a}{f}$ となる. これより, 切断 $s\in\mathcal{O}(D(f))$ は写像 $R_f\to\mathcal{O}(D(f))$ による $\frac{a}{f}$ の像と一致する.

2.6 前層と層の準同型

定義 82. X を位相空間とし, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ を X 上の (集合の) 前層とする. 前層の準同型 $\varphi\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ とは, 次の条件を満たす写像の族 $(\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\varphi_U}\mathcal{G}(U))_{U\ \text{開集合}}$ のことをいう.

$U\subset V$ となる開集合 U,V に対し,

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_U^V} & \mathcal{F}(U)\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_V} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_U}\\ \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\rho_U^V} & \mathcal{G}(U)\end{array}$$

は交換する.

同様に, アーベル群・環の前層 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ の場合は, アーベル群・環の前層としての準同型とは, それぞれ上記の条件を満たす群準同型・環準同型の族 $(\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\varphi_U}\mathcal{G}(U))_{U\ \text{開集合}}$ のことをいう. また, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ は層であるとする. このとき, 層の準同型 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ とは, 単に前層としての準同型 $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ のことをいう.

$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の準同型とし, 点 $x \in X$ とする. x における茎 $\mathcal{F}_x$ の一版の元を $[(U, s)]$ として表せる. ここで, U はある開近傍であり, $s \in \mathcal{F}(U)$ は U 上の切断である. また, $[(U, s)]$ は $\mathcal{F}_x$ における (U, s) の同値類を表す. $[(U, s)] \mapsto [(U, \varphi_U(s))]$ と定義することにより, 矛盾なく写像

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

が定まる.

定義 83. 前層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ は同型であるとは, 準同型 $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ が存在し, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ かつ $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$.

$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ は同型であることは, 全て開集合 U に対し, 写像 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が同型であるということと同値である.

補題 84. $\mathcal{F}$ を X 上の層とし, 開集合 $U \subset X$ 上の切断 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ とする. このとき,

$$s = t \Longleftrightarrow \forall x \in X,\ s_x = t_x.$$

証明. 「$\Longrightarrow$」は明らか. 全ての点 x に対し, $s_x = t_x$ であるとする. よって, x の開近傍 $U_x \subset U$ が存在し, $s|_{U_x} = t|_{U_x}$ である. 層の定義から, $s = t$ となる.

定理 85. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X 上の層とする. 準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し, 以下が成り立つ.

$$\varphi \text{ が同型} \iff \forall x \in X,\ \varphi_x \text{ が同型}.$$

証明. φ が同型であると仮定する. このとき, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ かつ $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$ となる準同型 $\psi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ が存在する. よって, 任意の $x \in X$ に対し, $\psi_x \circ \varphi_x = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_x}$ かつ $\varphi_x \circ \psi_x = \mathrm{id}_{\mathcal{G}_x}$ となり, ゆえ φ_x は同型である.

今, 全ての写像 $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ が同型であると仮定する. 開集合 U に対し, 写像 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が単射であることを証明する. $\varphi_U(s) = \varphi_U(t)$ となる切断 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ とする. よって, 任意の点 $x \in U$ に対し,

$$\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x = \varphi_U(t)_x = \varphi_x(t_x)$$

である. よって, φ_x は同型なので, $s_x = t_x$ となる. 補題 84 より, $s = t$ となる. φ_U が全射であることを確認する. $y \in \mathcal{G}(U)$ とする. φ_x は同型なので点 $x \in U$ に対し, $\varphi_x(z) = y_x$ となる $z \in \mathcal{F}_x$ が存在する. x のある開近傍 V また $s \in \mathcal{F}(V)$ において, $z = [(V, s)]$ と表すことができる. よって, $\varphi_x(z) = [(V, \varphi_V(s))] = y_x$ となる. したがって, x のある開近傍

$W \subset V$ が存在し, $\varphi_V(s)|_W = y|_W$ である. (V, s) を $(W, s|_W)$ に置き換えることにより, $\varphi_V(s) = y|_V$ であると仮定して良い.

全ての点 $x \in U$ に対し, このような開近傍 V また V 上の切断 s を選ぶことにより, U の開被覆 $(V_i)_{i \in I}$ また V_i 上の切断 $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ が定まり, $\varphi_{V_i}(s_i) = y|_{V_i}$. よって,

$$\varphi(s_i|_{V_i \cap V_j}) = y|_{V_i \cap V_j} = \varphi(s_j|_{V_i \cap V_j})$$

$\varphi_{V_i \cap V_j}$ は単射であることを証明したので, $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ となる. したがって, 層の定義から, 切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在し, $s|_{V_i} = s_i$ となる. 同様に, $\forall i \in I$, $\varphi_U(s)_{V_i} = y|_{Y_i}$ であり, また層の定義から $\varphi_U(s) = y$ となる. φ_U が同型であることは, これに従う.

定理 85 の「$\Longrightarrow$」の方向を証明するには, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ が層であるという仮定は適用しなかったので, 一般の前層の場合にも, 「$\Longrightarrow$」成り立つ. しかし, 前層の場合は「$\Longleftarrow$」が成り立つとは限らない.

例 86. 例えば, 位相同型 X 上の前層 $\mathcal{F}$ を次のように定義する. 開集合 U に対し, $\mathcal{F}(U) = A$ とし, 全ての制限写像を id_A とする. また, $\mathcal{G}$ を 例 77 で定義された A で定まる定数層とする. つまり, $\mathcal{G}(U) = \{U \to A \mid \text{連続関数}\}$ である. 開集合 U に対し, $a \in A$ に値 a を持つ定数関数 $U \to A$ を対応させると, 写像 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が定まる. さらに, $(\varphi_U)_{U \text{ 開集合}}$ は前層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を定める. 全ての点 $x \in X$ に対し, $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x = A$ であり, φ_x は恒等写像 $\mathrm{id}_A : A \to A$ となる. よって, 全ての φ_x は同型であるが, φ は同型でない. 層 $\mathcal{G}$ は前層 $\mathcal{F}$ の層化であるという.

2.7 層化

X を位相空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の前層とする. 上記の例と同様に, 全ての点 $x \in X$ に対し, $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x^+$ となる層 $\mathcal{F}^+$ が存在することを証明する. このような層は同型を除いて一意に定まり, $\mathcal{F}$ の層化とよぶ.

命題 87. 前層 $\mathcal{F}$ に対し, 次の条件を満たす層 $\mathcal{F}^+$ また前層の準同型 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ が存在する. $\mathcal{G}$ を層とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の準同型とする. このとき, $\varphi = h \circ \theta$ となる準同型 $h : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ が唯一存在する.

この性質は, 層化の普遍性と呼ぶ.

注意 88. このような 2 組 $(\mathcal{F}^+, \theta)$ は同型を除いて一意に定まることに注意する. $\theta' : \mathcal{F} \to$

$\mathcal{F}'$ は同じ性質を満たすとする．このとき, $\theta' = h \circ \theta$ となる $h : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}'$ が唯一存在する．同様に, $\theta = h' \circ \theta'$ となる $h'\mathcal{F}' \to \mathcal{F}^+$ がただ 1 つ存在する．特に, $\theta = h' \circ \theta' = (h' \circ h) \circ \theta$ となる．$(\mathcal{F}^+, \theta)$ の性質を準同型 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ に適用することにより, $\theta = k \circ \theta$ となる準同型 $k : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{F}^+$ は恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}^+}$ に限ることがわかる．よって, $h' \circ h = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^+}$ となる．同様に, $\mathcal{F}'$ が同じ性質を満たすと仮定したので, $h \circ h' = \mathrm{id}_{\mathcal{F}'}$ となり, ゆえ h は同型である．

証明 (命題 87 の証明)**.** 開集合 U に対し, $\mathcal{F}^+(U)$ を定義する．$\mathcal{F}^+(U)$ の元 s は, 以下の条件を満たす写像

$$s : U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

として定義される．

U の点 x に対し, 開近傍 $V \subset U$ また切断 $t \in \mathcal{F}(U)$ が存在し, $\forall y \in V$, $s(y) = t_y$（すなわち y における t の芽）である．

また, U, V は開集合で, $U \subset V$ ならば, 制限写像 $\mathcal{F}^+(V) \to \mathcal{F}^+(U)$ を自然に定義できる．このように, 前層 $\mathcal{F}^+$ が得られる．この前層は層であることを簡単に確認できる．そして, 開集合 U に対し, 切断 $t \in \mathcal{F}(U)$ に, $y \mapsto t_y$ で定まる写像 $U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x$ を対応させることにより, 写像 $\theta_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ が定まる．これは前層の準同型 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ である．

今, $\mathcal{G}$ を層とし, 準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とする． このとき, $\varphi = h \circ \theta$ となる準同型 $h : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ が唯一存在することを示す．$s \in \mathcal{F}^+(U)$ とする．定義から, U の開被覆 $(U_i)_{i \in I}$ が存在し, $s|_{U_i}$ が $\theta_{U_i} : \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}^+(U_i)$ の像に属し, 元 $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ で定まる．したがって,

$$h_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(t_i)$$

と定義する必要がある．また, $h_U(s)|_{U_i} = h_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(t_i)$ より, $h_U(s)$ が一意に定まる．よって, 準同型 h の一意性が従う．h の存在を証明するには, 族 $\varphi_{U_i}(t_i) \in \mathcal{G}(U_i)$ を張り合わせることができると確認すればよい．$i, j \in I$ とする．$x \in U_i \cap U_j$ に対し, $t_{i,x} = s(x) = t_{j,x}$ である．

注意 88 より, $\mathcal{F}^+$ が普遍性で一意に定まる．しかし, 命題 87 の主張からは, $\mathcal{F}^+$ の具体的な構成が得られない．一方, 命題 87 の証明で定義された $\mathcal{F}^+$ の具体的な構成から $\mathcal{F}^+$ についての追加情報を得ることができる．例えば, $\mathcal{F}^+$ の構成から, 次の性質が分かる．

(1) 開集合 U とし, U 上の切断 $s \in \mathcal{F}^+(U)$ とする．点 $x \in X$ に対し, x の開近傍 $V \subset U$ が存在し, $s|_V$ が写像 $\theta_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}^+(V)$ の像に属する．

(2) $x \in X$ とする．準同型 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ から準同型 $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^+_x$ が得られる．逆に, U が開近傍で, 切断 $s \in \mathcal{F}^+(U)$ とする．特に, s は写像 $U \to \bigsqcup_{x' \in U} \mathcal{F}_{x'}$ である．$[(U, s)] \mapsto s(x)$ で写像 $\gamma : \mathcal{F}^+_x \to \mathcal{F}_x$ が定まる．合成 $\gamma \circ \theta_x$ が $\mathcal{F}_x$ の恒等写像であること簡単に確認できる．よって, θ_x は単射である．一方, 上記の (1) より, $[(U, s)] \in \mathcal{F}^+_x$（$s \in \mathcal{F}^+(U)$）ならば, $s|_V = \theta_V(t_V)$ であるとなる x の開近傍 V また切断 $t \in \mathcal{F}(V)$ が存在する．よって, $s_x = \theta_x(t_x)$ となり, ゆえ θ_x は全射である．要するに, 以下の系を証明できた.

系 89. $\mathcal{F}$ を前層とし, $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ を $\mathcal{F}$ の層化とする． 全ての $x \in X$ に対し, $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^+_x$ は同型である.

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を前層とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の準同型とする．また, $\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, $\theta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ を命題 87 から得られたそれぞれの層化とする．層化 $\mathcal{G}^+$ の普遍性を $\theta \circ \varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}^+$ に適用することで, 以下の図式が可換図式となる $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ がただ 1 つ存在する.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\theta_{\mathcal{G}}"] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"] & \mathcal{G}^+
\end{tikzcd}
$$

例えば, 例 86 の準同型 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を考える (任意の開集合 U に対し, $\mathcal{F}(U) = A$ であり, $\mathcal{G}(U)$ は連続関数 $U \to A$ 全体の集合である)．この場合, $(\mathcal{G}, \varphi)$ は $\mathcal{F}$ の層化である.

2.8 準同型の核, 準同型の像

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X 上のアーベル群の前層とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を準同型とする (すなわち, 各開集合 U に対し, φ_U が群準同型である)．このとき, 各開集合 U に対し, $U \mapsto \mathrm{Ker}(\varphi_U)$ と定めることで, X 上の前層を定義できる．この前層を $\mathrm{Ker}(\varphi)$ とおく．さらに, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ が層であれば, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ も層であり, φ の核と呼ばれる．φ が単準同型であるとは, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ が成り立つことをいう.

部分前層, 部分層という概念は自然に定義する．前層 $\mathcal{F}$ が与えられていると, $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ の部分前層であるとは, 各開集合 U に対し, $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ が定まり, さらに $U \subset V$ となる開集合 U, V に対し, 制限写像 $\rho^V_U : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ が $\rho^V_U(\mathcal{G}(V)) \subset \mathcal{G}(U)$ を満たすことをいう．また, 層 $\mathcal{F}$ の部分層とは, 層である部分前層のことをいう．もちろん, アーベル群の

前層・層の場合は, $\mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{F}(U)$ の部分群であるという条件を課す. 例えば, アーベル群の層 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ の間の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が与えられていると, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ は $\mathcal{F}$ の部分層である.

補題 90. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の準同型とし, $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ とおく. 各点 $x \in X$ に対し, $\mathcal{H}_x = \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ である.

証明. 包含写像 $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ が写像 $\iota_x : \mathcal{H}_x \to \mathcal{F}_x$ を定める. その写像は明らかに単写像であり, また ι の像が $\mathrm{Ker}(\varphi_x)$ に含まれる. U を x の開近傍とし, $s \in \mathcal{F}(U)$ とする. $\mathcal{F}_x$ の元 $z = [(U, s)]$ が $\mathrm{Ker}(\varphi_x)$ に属するとする. このとき, $[(U, \varphi_U(s))] = 0$ となり, ゆえ $\varphi_U(s)|_V = 0$ となる x の開近傍 V が存在する. よって, $s|_V \in \mathcal{H}(V)$ であり, $z = [(V, s|_V)] \in \mathcal{H}_x$. これより, 主張が従う.

系 91. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ がアーベル群の層とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を準同型とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\varphi \text{ が単準同型} \iff \text{全ての } x \in X \text{ に対し}, \varphi_x \text{ が単準同型}.$$

証明. $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\varphi)$ とすると, 左辺は $\mathcal{H} = 0$ を意味する. 右辺は, $\mathrm{Ker}(\varphi_x) = 0$ であることと同値である. 補題 90 より, $\mathrm{Ker}(\varphi_x) = \mathcal{H}_x$ が成り立つ. よって, 一般の層 $\mathcal{H}$ に対し, $\mathcal{H} = 0 \iff \forall x \in X,\ \mathcal{H}_x = 0$ と確認すれば十分である. これは, 補題 84 より直ちに導かれる.

そして, 準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ の像を定義する. 核の定義と同様に, $U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$ と定義すると, X 上の前層が得られる. しかし, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ が層である場合, このように定義された前層が層であるとは限らない. そのため, 層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が与えられているとき, φ の像とは, 前層 $U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$ の層化のことをいい, $\mathrm{Im}(\varphi)$ と書く. もちろん, 準同型 φ の層は $\mathcal{G}$ の部分層と見なしたい. しかし, 定義から $\mathrm{Im}(\varphi)$ が $\mathcal{G}$ の部分層であることは明らかでないので, このことを説明しよう. $U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$ で定めた前層を $\mathcal{H}$ とおき, $\mathcal{G}$ の部分前層である. よって, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{H}^+$ である.

補題 92. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をアーベル群の前層とし, $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の準同型とする. $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, $\mathcal{G} \to \mathcal{G}^+$ を $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の層化とする. また, 図式 2.7 で定める写像を $\phi^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$ とおく. このとき, $\mathrm{Ker}(\phi^+) \simeq \mathrm{Ker}(\phi)^+$ である.

証明. 包含写像 $\mathrm{Ker}(\phi) \to \mathcal{F}$ を ι とおく. 準同型 $\mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\iota} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ が層の準同型 $\mathrm{Ker}(\phi)^+ \xrightarrow{\iota^+} \mathcal{F}^+ \xrightarrow{\phi^+} \mathcal{G}^+$ を定める. よって, ι^+ が準同型 $\mathrm{Ker}(\phi)^+ \to \mathrm{Ker}(\phi^+)$ を定める. 各 $x \in X$ に対し, $(\mathrm{Ker}(\phi)^+)_x = \mathrm{Ker}(\phi)_x = \mathrm{Ker}(\phi_x)$ となる. 同様に

$\mathrm{Ker}(\phi^+)_x = \mathrm{Ker}(\phi_x^+) = \mathrm{Ker}(\phi_x)$. $\mathrm{Ker}(\phi^+)$ と $\mathrm{Ker}(\phi)^+$ が倉なので, 定理 85 より ι^+ が同型である.

特に, ϕ が単準同型ならば, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ となり, ゆえ $\mathrm{Ker}(\phi^+) \simeq \mathrm{Ker}(\phi)^+ = 0$. よって, ϕ^+ が単準同型である. $\mathrm{Im}(\varphi)$ の話に戻ろう. $\mathrm{Im}(\varphi)$ が $U \mapsto \mathrm{Im}(\varphi_U)$ で定める前層の層化として定義された. 包含写像 $\mathcal{H} \to \mathcal{G}$ を ι とおくと, 明らかに ι が単準同型である. よって, $\iota^+ : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{G}^+ = \mathcal{G}$ が単準同型である. したがって, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{H}^+$ を $\mathcal{G}$ の部分層とみなすことができる.

そして, $\mathrm{Im}(\varphi)$ の茎を考えよう. $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{H}^+$ より, 各 $x \in X$ に対し, $\mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathcal{H}_x$ が成り立つ. 明らかに, $\mathcal{H}_x = \mathrm{Im}(\varphi_x)$ であるので,

$$\mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathrm{Im}(\varphi_x)$$

である.

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ を層とし, 準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とする. φ が全準同型であるとは, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$ であることをいう. 一般の層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $\mathcal{F} \to \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathcal{G}$ と分解できる. 1 つ目の準同型 $\mathcal{F} \to \mathrm{Im}(\mathcal{F})$ は全準同型であり, 2 つ目の準同型 $\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathcal{G}$ は単準同型である.

補題 93. $\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ をアーベル群の層とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を準同型とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\varphi \text{ が全準同型} \iff \text{全ての } x \in X \text{ に対し, } \varphi_x \text{ が全準同型.}$$

証明. 包含写像 $\mathrm{Im}(\varphi) \to \mathcal{G}$ を ι とおく. 定理 85 より, ι が同型であることは, 各 $x \in X$ に対し, $\iota_x : \mathrm{Im}(\varphi)_x \to \mathcal{G}_x$ が同型であることと同値である. $\mathrm{Im}(\varphi)_x = \mathrm{Im}(\varphi_x)$ より, それは φ_x が全準同型であることを意味する.

上の全ての補題を組み合わせて, 次の定理を立てることができる. 完全系列の定義を思い出そう. $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を X 上のアーベル群の層の列とし, 準同型 $\varphi_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1}$ が与えられているとする. このとき,

$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \to \dots$$

が完全系列であるとは, 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = \mathrm{Im}(\varphi_{i-1})$ が成り立つことをいう. 例えば, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を X 上の層とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ を準同型とする. 次の準同型の連鎖を考える.

$$0 \to \mathcal{H} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \to 0$$

この系列が完全系列であることは, 次の 3 つの条件が成り立つことと同値である.

(i) g が単準同型である.
(ii) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\psi)$ である.
(iii) φ が全準同型である.
このような完全系列は短完全列と呼ばれる.

定理 94.
$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1} \to \dots$$
をアーベル群の層の系列とする. この系列は完全系列であることは, 各 $x \in X$ に対し,
$$\cdots \to \mathcal{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\varphi_{i-1,x}} \mathcal{F}_{i,x} \xrightarrow{\varphi_{i,x}} \mathcal{F}_{i+1,x} \to \dots$$
がアーベル群の完全系列であることと同値である.

証明. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を層とし, 準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とする. このとき,
$$\begin{aligned}\varphi = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathrm{Im}(\varphi)_x = 0 \\ \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \mathrm{Im}(\varphi_x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \varphi_x = 0.\end{aligned}$$
これを準同型 $\varphi_i \circ \varphi_{i-1}$ に適用することで,
$$\mathrm{Im}(\varphi_{i-1}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}(\varphi_{i-1,x}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{i,x})$$
であることが分かる. このとき, 得られる包含写像 $\iota : \mathrm{Im}(\varphi_{i-1}) \to \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ を考える. ι が同型であることは, 各 $x \in X$ に対し, ι_x が同型であることと同値である. よって, $\mathcal{F}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} \mathcal{F}_i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}_{i+1}$ が完全系列であることは, 各 $x \in X$ に対し, $\mathcal{F}_{i-1,x} \xrightarrow{\varphi_{i-1,x}} \mathcal{F}_{i,x} \xrightarrow{\varphi_{i,x}} \mathcal{F}_{i+1,x}$ が完全系列であることと同値である.

2.9 層の逆像, 順像

定義 95. X, Y を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. また, X 上の層 $\mathcal{F}$ とし, Y 上の層 $\mathcal{G}$ とする.
(a) まず, X 上の前層 $\mathcal{H}$ を定義する. U を X の開集合とする.
$$\mathcal{H}_{\mathcal{G},f}(U) = \left\{ (V, s) \ \middle|\ \begin{array}{l} f(U) \subset V \text{ となる } Y \text{ の開集合 } V \\ s \in \mathcal{G}(V) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$
とおく. ここで, 同値関係 $\sim$ は
$$(V, s) \sim (V', s') \iff f(U) \subset W \text{ となる } Y \text{ の開集合 } W \text{ が存在し, } s|_W = s'_W \text{ である.}$$

と定義される．制限写像を自然に定まる写像とすると，これより X 上の前層 $\mathcal{H}_{\mathcal{G},f}$ が定まる．準同型の逆像 (inverse image) とは，$\mathcal{H}_{\mathcal{G},f}$ の層化 $\mathcal{H}_{\mathcal{G},f}^{+}$ のことをいう．逆像を $f^{-1}\mathcal{G}$ で表す．

(b) f による $\mathcal{F}$ の順像 (direct image) は，全ての Y の開集合 V に対し，$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ と定義される．これは Y 上の層であることを簡単に確かめることができる．$\mathcal{F}$ の順像は $f_*\mathcal{F}$ で表す．

例 96. (a) の前層 $\mathcal{H}_{\mathcal{G},f}$ の定義は，層の茎の定義にとても似ている．例えば，X を位相空間とし，$x \in X$ を点とする．包含写像 $\{x\} \to X$ を ι とおく．また，$\mathcal{F}$ を X 上のアーベル群の層とする．このとき，上の定義の (a) より，$\{x\}$ 上の層 $\iota^{-1}\mathcal{F}$ が得られる．例 77 より，$\{x\}$ 上のアーベル群の層は単にアーベル群と同一視ことができる．こうすると，$\iota^{-1}\mathcal{F}$ はアーベル群 $\mathcal{F}_x$ に対応する．

よって，「層の茎」という概念は，「層の逆像」の特殊な場合である．

位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F},\mathcal{F}'$ に対し，準同型 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 全体のなす集合を $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ と書く．$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ が X 上の層であることを思い出すため，Hom_X という記号を使う．

注意 97. X 上のアーベル群の層全体は、圏をなす。この圏を $\mathrm{Ab}(X)$ とおこう．f_* は X 上の層に Y 上の層を対応させ，f^{-1} は Y 上の層に X 上の層を対応させる．また，$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ を X 上の層とし，$\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ を準同型とすると，準同型 $f_*\varphi : f_*\mathcal{F}_1 \to f_*\mathcal{F}_2$ が定まる (Y の開集合 U に対し，$(f^*\varphi)_U : f_*\mathcal{F}_1(U) \to f_*\mathcal{F}_2(U)$ を $\varphi_{f^{-1}(U)}$ と定義できる)．同様に，$\psi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ が Y 上の層の準同型ならば，自然に準同型 $f^{-1}\psi : f^{-1}\mathcal{G}_1 \to f^{-1}\mathcal{G}_2$ を定義できる．言い換えれば，f_* と f^{-1} は関手であるという。以下のように表せる．

$$\mathrm{Ab}(X) \underset{f^{-1}}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ab}(Y)$$

定理 98. X, Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする．また，$\mathcal{F}$ を X 上の層とし，$\mathcal{G}$ を Y 上の層とする．このとき，自然な同型

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

が存在する．

この定理を証明する前に，まず自然な層の準同型 $\alpha : f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ が存在することを説明する．定義から，層 $f^{-1}f_*\mathcal{F}$ は前層 $\mathcal{H}_{f_*\mathcal{F},f}$ の層化である．層化の普遍性より，自然な層の準同型 $\mathcal{H}_{f_*\mathcal{F},f} \to \mathcal{F}$ を構成して良い．X の開集合 U に対し，$\mathcal{H}_{f_*\mathcal{F},f}(U)$ は

同値類 $[(V,s)]$ 全体である．ここで, V は $f(U)\subset V$ となる Y の開集合であり, また $s\in(f_*\mathcal{F})(V)=\mathcal{F}(f^{-1}(V))$ である．よって, $[(V,s)\mapsto s|_U$ と定義すると, 矛盾なく写像 $\mathcal{H}_{f_*\mathcal{F},f}(U)\to\mathcal{F}(U)$ ($s|_U$ が $[(V,s)]$ の大表元に依らない)．このように, 前層の準同型 $\mathcal{H}_{f_*\mathcal{F},f}\to\mathcal{F}$ を定めることができる．よって, 準同型 $\alpha: f^{-1}f_*\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ が得られる．

そして, 同様に自然な準同型 $\beta:\mathcal{G}\to f_*(f^{-1}\mathcal{G})$ が存在することを示す．$f^{-1}\mathcal{G}$ は前層 $\mathcal{H}_{f,\mathcal{G}}$ の層化である．Y の全ての開集合 V に対し, 写像 $\mathcal{G}(V)\to\mathcal{H}_{f,\mathcal{G}}(f^{-1}(V))$ を定義する．定義から $\mathcal{H}_{f,\mathcal{G}}(f^{-1}(V))$ は, 同値類 $[(W,s)]$ (W は $f(f^{-1}(V))\subset W$ を満たす Y の開集合, $s\in\mathcal{G}(W)$) 全体の集合である．特に, $s\in\mathcal{G}(V)$ のとき, 2 組 (V,s) がこの条件を満たし, 同値類 $[(V,s)]$ を考えることができる．このように, $s\mapsto[(V,s)]$ と定めると, 写像 $\mathcal{G}(V)\to\mathcal{H}_{f,\mathcal{G}}(f^{-1}(V))$ を定義することができる．自然な写像 $\mathcal{H}_{f,\mathcal{G}}(f^{-1}(V))\to f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V))$ を合成すると, 写像 $\mathcal{G}(V)\to f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(V))=f_*(f^{-1}\mathcal{G})(V)$ が得られる．これより層の準同型 $\beta:\mathcal{G}\to f_*(f^{-1}\mathcal{G})$ を構成できた．

証明 (定理 98 の証明)**.** $\varphi: f^{-1}\mathcal{G}\to\mathcal{F}$ を層の準同型とする．このとき, 注意 97 より準同型 $f_*\varphi: f_*(f^{-1}\mathcal{G})\to f_*\mathcal{F}$ が得られる．よって, $f_*\varphi$ と $\beta:\mathcal{G}\to f_*(f^{-1}\mathcal{G})$ の合成は準同型 $f_*\varphi\circ\beta:\mathcal{G}\to f_*\mathcal{F}$ である．$\varphi\mapsto f_*\varphi\circ\beta$ で定まる写像を考える．このように, 写像 $\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})\to\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})$ を定義できる．

逆に, $\psi:\mathcal{G}\to f_*\mathcal{F}$ を準同型とする．注意 97 より, $f^{-1}\psi$ は準同型 $f^{-1}\mathcal{G}\to f^{-1}f_*\mathcal{F}$ である．よって, $\alpha\circ f^{-1}\psi$ は準同型 $f^{-1}\mathcal{G}\to\mathcal{F}$ である．$\psi\mapsto\alpha\circ f^{-1}\psi$ と定めることにより, 写像 $\mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})\to\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})$ が得られる．

このように定義された写像は互いに逆写像であることを確認できる．つまり, 以下の公式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\alpha\circ(f^{-1}f_*\varphi)\circ f^{-1}\beta&=\varphi\\ f_*\alpha\circ(f_*f^{-1}\psi)\circ\beta&=\psi\end{aligned}$$

補題 99. X, Y, Z を位相空間とし, $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ を連続写像とする．また, $\mathcal{G}$ を Z 上の層とする．このとき, 次が成り立つ．

$$(g\circ f)^{-1}\mathcal{G}=f^{-1}(g^{-1}\mathcal{G}).$$

証明. $\mathcal{F}$ を X 上の層とする. 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_X((g\circ f)^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F}) &= \mathrm{Hom}_Z(\mathcal{G},(g\circ f)_*\mathcal{F})\\ &= \mathrm{Hom}_Z(\mathcal{G},g_*(f_*\mathcal{F}))\\ &= \mathrm{Hom}_Y(g^{-1}\mathcal{G},f_*\mathcal{F})\\ &= \mathrm{Hom}_X(f^{-1}(g^{-1}\mathcal{G}),\mathcal{F}).\end{aligned}$$

よって, 関手 $\mathrm{Hom}_X((g\circ f)^{-1}\mathcal{G},-)$ と $\mathrm{Hom}_X(f^{-1}(g^{-1}\mathcal{G}),-)$ は自然に同型である. 米田の補題から主張が従う.

上の例 96 を使うことで, 層の逆像の茎を求めることができる.

命題 100. $f:X\to Y$ を連続写像とし, $\mathcal{G}$ を Y 上の層とする. $x\in X$ に対して,

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x=\mathcal{G}_{f(x)}$$

が成り立つ.

証明. 包含写像 $\{x\}\to X$ と ι とおく. 補題 99 より, $(f\circ\iota)^{-1}\mathcal{G}=\iota^{-1}(f^{-1}\mathcal{G})$ である. よって, 例 96 を使うことにより, $(f^{-1}\mathcal{G})_x=\mathcal{G}_{f(x)}$ が成り立つ.

2.10 局所環付き空間

定義 101. R,S を局所環とし, それぞれの唯一の極大イデアルを $\mathfrak{m}_R$, $\mathfrak{m}_S$ で表す. 環準同型 $f:R\to S$ は局所準同型であるとは, $f^{-1}(\mathfrak{m}_R)=\mathfrak{m}_S$ が成り立つときにいう.

定義 102.

(a) X を位相空間とし, $\mathcal{O}_X$ を X 上の環の層とする. このとき, $(X,\mathcal{O}_X)$ は環付き空間であるという.

(b) $(X,\mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間であるとは, 全ての点 $x\in X$ に対し, x における茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環であることをいう.

(c) $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を環付き空間とする. また, f を連続写像 $X\to Y$ とし, $f^\#$ を環の層の準同型 $\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$ とする. このような 2 組 $(f,f^\#)$ は, $(X,\mathcal{O}_X)$ から $(Y,\mathcal{O}_Y)$ への環付き空間の射であるという.

(d) $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を局所環付き空間とし, 環付き空間の射 $(f,f^\#)$ とする. 全ての $x\in X$ に対し, 自然な写像 $\mathcal{O}_{Y,f(x)}\to(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$ の合成が局所準同型であるとき, $(f,f^\#)$ を局所環付き空間の射と呼ぶ.

上記の定義の (d) の合成写像について説明しよう．１つ目の写像 $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ は, $f^\#$ で定まる準同型である．２つ目の写像 $(f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ を具体的に定義する．一般に, $f : X \to Y$ を連続写像とし, $\mathcal{F}$ を X 上の前層とする．また, $x \in X$ とする．このとき, 自然な写像

$$(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$$

が存在することを示す．$(f_*\mathcal{F})_{f(x)}$ の一般の元は, $[(U,s)]$ のように表すことができる（ここで U は $f(x)$ の開近傍であり, $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ である）．よって, $[(U,s)] \mapsto [(f^{-1}(U),s)]$ と対応させることにより, 写像 $(f_*\mathcal{F})_{f(x)} \to \mathcal{F}_x$ を定義できる．

例 103. R を可換環とする．$(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ は局所環付き空間である．$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し, $\mathcal{O}_{R,\mathfrak{p}} \simeq R_\mathfrak{p}$ であるので, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ は局所環である．

次に, 可換環 R, S に対して, 局所環付き空間の射 $(\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_S) \to (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ を考える．

定理 104. R, S を可換環とする．

(1) $\varphi : S \to R$ を可換環の準同型とする．このとき, φ は自然に局所環付き空間の射 $(f, f^\#) : (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R) \to (\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_S)$ を定める．

(2) 逆に, 任意の局所環付き空間の射 $(f, f^\#) : (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R) \to (\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_S)$ は可換環の準同型 $\varphi : S \to R$ に対応する．

証明. (1) を示す．$\varphi : S \to R$ を可換環の準同型とする．まず, 位相空間の連続写像 $f : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(S)$ を定義する．$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し, $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ とする．$x + \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \mapsto \varphi(x) + \mathfrak{p}$ で定まる写像 $S/\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \to R/\mathfrak{p}$ が単準同型なので, $S/\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ は整域であり, ゆえ $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}(S)$．$f$ が連続であることを示す．f による閉集合の逆像が閉集合であることを示せば良い．S のイデアル I に対し,

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(I)) &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \varphi(I) \subset \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid (\varphi(I)) \subset \mathfrak{p}\} \\ &= V((\varphi(I))). \end{aligned}$$

ここで, $(\varphi(I))$ という記号は集合 $\varphi(I)$ で生成されるイデアルを表す．よって, f が連続である．そして, 環の層の準同型 $\mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_R$ を定義する．つまり, 各開集合 $V \subset \mathrm{Spec}(S)$ に対し, 環の準同型 $\mathcal{O}_S(V) \to \mathcal{O}_R(f^{-1}(V))$ を定義する．$\mathcal{O}_S(V)$ の一般の元は写像 $s : V \to \bigsqcup_{\mathfrak{q} \in V} S_\mathfrak{q}$ であり, §2.5 の条件 (i) と (ii) を満たす．$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルと

し, $\mathfrak{p} \in f^{-1}(V)$ とし, $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ とおく．また, $\frac{x}{y} \mapsto \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$ で定まる環の準同型 $S_\mathfrak{q} \to R_\mathfrak{p}$ を $\varphi_\mathfrak{p}$ とおく．このとき, $\mathfrak{p}$ に $\varphi_\mathfrak{p}(s(\mathfrak{q})) \in R_\mathfrak{p}$ を対応させると, 写像 $f^\#(s) : f^{-1}(V) \to \coprod_{\mathfrak{p} \in V} R_\mathfrak{p}$ が得られ, さらにそれは $\mathcal{O}_R(f^{-1}(V))$ の元である．よって, 環の層の準同型 $f^\# : \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_R$ を定義できた.

(2) 今, $(f, f^\#) : (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R) \to (\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_S)$ を局所環付きの空間の射とする．可換環の準同型 $\varphi : S \to R$ が存在し, $(f, f^\#)$ が (1) の構成により得られることを示す．特に, 層の準同型 $f^\# : \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_R$ から環の準同型 $\Gamma(\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_S) \to \Gamma(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ が得られる．定理 79 より, $\Gamma(\mathrm{Spec}(S), \mathcal{O}_S) \simeq S$, $\Gamma(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R) \simeq R$ が成り立つ．よって, $(f, f^\#)$ は準同型 $\varphi : S \to R$ を定める．(1) の構成を準同型 φ に適用すると, 局所環付き空間の射 $(f, f^\#)$ に戻ることを示す．全ての素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ について, 茎の間の準同型 $\mathcal{O}_{S,f(\mathfrak{p})} \to \mathcal{O}_{R,\mathfrak{p}}$ が得られる．また, 定理 79 より $\mathcal{O}_{S,f(\mathfrak{p})} \simeq S_{f(\mathfrak{p})}$, $\mathcal{O}_{R,\mathfrak{p}} \simeq R_\mathfrak{p}$ と同一視できる．また, 以下の図式は可換図式である.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
S_{f(\mathfrak{p})} \arrow[r, "f_\mathfrak{p}^\#"] & R_\mathfrak{p}
\end{tikzcd}
$$

$f_\mathfrak{p}^\#$ は局所環の準同型であるので, $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ であり, 主張が従う.

3 スキーム

3.1 定義

R を可換環とする．局所環付き空間 $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ はアフィンスキームと呼ぶ．一般に, 局所環付き空間 X がアフィンスキームであるとは, $(X, \mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間として $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$（$R$ は可換環）と同型であることをいう.

X を位相空間とし, $U \subset X$ を開集合とする．また, 包含写像 $U \to X$ を ι とおく．$\mathcal{F}$ が X 上の層ならば, U 上の層 $\iota^*\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}|_U$ で表す．同様に, $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間で, $U \subset X$ を開集合ならば, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ は局所環付き空間である.

定義 105. $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする．$(X, \mathcal{O}_X)$ はスキームであるとは, 次の条件が成り立つことをいう．全ての $x \in X$ に対し, x の会近傍 U が存在し, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ はアフィンスキームである.

言い換えれば, 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ はスキームであることは, 開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ が存在し, 全ての $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ $(i \in I)$ がアフィンスキームであることと同値である.

補題 106. $(X, \mathcal{O}_X)$ をスキームとし, $U \subset X$ を開集合とする. $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ はスキームである.

証明. $x \in U$ を点とする. 定義から, X の会近傍 V が存在し, $(V, \mathcal{O}_X|_V)$ はアフィンスキームである. つまり, $(V, \mathcal{O}_X|_V) \simeq (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ である. よって, 開集合 $U \cap V$ は $\mathrm{Spec}(R)$ の開集合として満たすことができる. また, 点 x は素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対応する. 補題 64 より $D(h)$ $(h \notin \mathfrak{p})$ のような開集合全体は基本近傍系をなすので, $\mathfrak{p} \in D(h) \subset U \cap V$ となる h を選ぶことができる. $(D(h), \mathcal{O}_X|_{D(h)})$ はスキームであることを示せば十分である. 自然な環準同型 $R \to R_h$ を考える. 定理 104 より局所環付き空間の射 $(f, f^{\#}) : \mathrm{Spec}(R_h) \to \mathrm{Spec}(R)$ が得られる. その像は明らかに $D(h)$ であるので, その射を射 $(\mathrm{Spec}(R_h), \mathcal{O}_{R_h}) \to (D(h), \mathcal{O}_R|_{D(h)})$ として見なすことができる. さらに定理 79 より位相同型 $\mathrm{Spec}(R_h) \to D(h)$ を与える. 最後に, $f^{\#} : \mathcal{O}_R|_{D(h)} \to f_* \mathcal{O}_{R_h}$ は同型であることを示す. 素イデアル $\mathfrak{p} \in D(f)$ に対し, $\mathfrak{p}$ による局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ は, 可換環 R_h の素イデアル $\mathfrak{p}R_h$ による局所化と同型である. よって, 任意の点 $x \in D(h)$ に対し, 茎の間の写像 $f^{\#}_x$ は同型である. 定理 85 より $f^{\#}$ は同型である. これより, $(D(h), \mathcal{O}_R|_{D(h)})$ はアフィンスキームである.

例 107. $R = \mathbb{C}[X, Y]$ とし, I をイデアル (X, Y) とする. $X = \mathrm{Spec}(R)$ の開集合 $U = D(I)$ を考える. 上の補題より, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ はスキームである. しかし, アフィンスキームでない. それはなぜかを説明しよう. もし U がアフィンスキームならば, $U \simeq \mathrm{Spec}(B)$ となる可換環 B が存在する. 定理 79 より, $B = \mathcal{O}_B(\mathrm{Spec}(B)) = \mathcal{O}_R(U)$. さらに, 包含写像 $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ が明らかにスキームの射なので, その射にはある準同型 $R \to B$ が対応する. R のゼロイデアル 0 を考える. 0 は $\mathrm{Spec}(R)$ の稠密な点であり, その点における $\mathcal{O}_R$ の茎は R の商体 $\mathrm{Frac}(R) = \mathbb{C}(X, Y)$ である. よって, 以下の写像を考えることができる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}(R)) \arrow[r, "\rho_U^{\mathrm{Spec}(R)}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{O}_R(U) \arrow[r, "(-)_0"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{O}_{R,0} \arrow[d, "\simeq"] \\
R \arrow[r] & B \arrow[r] & \mathrm{Frac}(R)
\end{tikzcd}$$

特に, $\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}(R)) \to \mathcal{O}_{R,0}$, $s \mapsto s_0$（ここで, s_0 は点 0 における芽である）で定まる写像

は単射であり, ゆえ $R \to B$ も単射である. 実は, $R = B$ が成り立つことを証明する. 開集合 $U_1 = D(X)$ と $U_2 = D(Y)$ を考える. U_1 と U_2 の和集合は $U_1 \cup U_2 = D(X, Y) = U$ となる. 上記と同様に, 包含写像 $U_1 \subset U$ と $U_2 \subset U$ が以下の図式を与える:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{R,0} & \\
 & \mathcal{O}_R(U_1 \cap U_2) \arrow[u, "(-)_0"] & \\
\mathcal{O}_R(U_1) \arrow[ur, "\rho^{U_1}_{U_1 \cap U_2}"] & & \mathcal{O}_R(U_2) \arrow[ul, "\rho^{U_2}_{U_1 \cap U_2}"'] \\
 & \mathcal{O}_R(U) \arrow[ul, "\rho^{U}_{U_1}"] \arrow[ur, "\rho^{U}_{U_2}"'] & \\
 & \mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}(R)) \arrow[u, "\rho^{\mathrm{Spec}(R)_U}"] &
\end{tikzcd}$$

特に, 上の図式の全ての写像は単射であり, 自然な包含写像 $R \to \mathrm{Frac}(R)$ の分解である. 定理 79 より, $\mathcal{O}_R(U_1) = R_X$, $\mathcal{O}_R(U_2) = R_Y$ となる. さらに, 層の定義により, $s \mapsto (s|_{U_1}, s|_{U_2})$ で定まる写像

$$\mathcal{O}_R(U) \to \{(s_1, s_2) \mid s_1 \in \mathcal{O}_R(U_1),\ s_2 \in \mathcal{O}_R(U_2), s_1|_{U_1 \cap U_2} = s_2|_{U_1 \cap U_2} \text{ である } \}$$

は同型である. 言い換えれば, $\mathcal{O}_{R,0} = \mathrm{Frac}(R)$ の部分集合として, $\mathcal{O}_R(U) = R_X \cap R_Y$ となる. $R_X \cap R_Y = R$ が簡単に確かめられる. よって, $R = B$ であり, 特に制限写像 $\mathcal{O}_R(\mathrm{Spec}(R)) \to \mathcal{O}_R(U)$ は同型である. しかし, 準同型 $R \to B$ に対応する射 $U \to \mathrm{Spec}(R)$ はスキームの同型でないので, それは定理 79 に矛盾する. よって, U はアフィンスキームでない.

注意 108. X をスキームとし, $U \subset X$ を空でない開集合とする. このとき, $\mathcal{O}_X(U)$ は零環でない (つまり, $\mathcal{O}_X(U) \neq 0$ である) ことを説明する. もし $\mathcal{O}_X(U) = 0$ ならば, U 上の切断として $1 = 0$ が成り立ち, ゆえ任意の開集合 $W \subset U$ に対して, $\mathcal{O}_X(W)$ の元としても $1 = 0$ である. しかし, $W \simeq \mathrm{Spec}(B)$ をアフィンスキームとすれば, $\mathcal{O}_X(W) = B$ より $B = 0$ であり, $W = \emptyset$ となる. スキーム U はアフィンスキームの和集合であるので, $U = \emptyset$ となり, それは仮定に矛盾する.

3.2 スキームの性質

今後「$(X, \mathcal{O}_X)$ をスキームとする」等の代わりに、単に「X をスキームとする」と書こう. また, スキーム X, Y の間の射を $(f, f^{\#})$ の代わりに, 単に $f : X \to Y$ で表す.

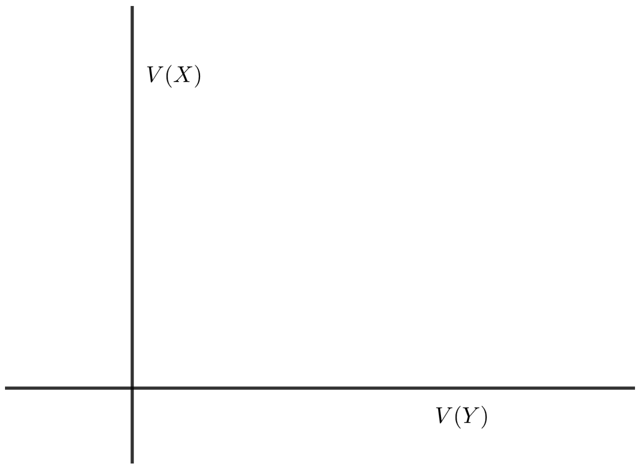
定義 109. スキーム X が連結 (connected) であるとは, 位相空間 X が連結であることをいう.

Z を空でない位相空間とする. Z が既約 (irreducible) であるとは, Z が以下の条件を満たすときにいう.

Z_1, Z_2 を Z の閉集合とする. もし $Z = Z_1 \cup Z_2$ ならば, $Z_1 = Z$ または $Z_2 = Z$.

差集合を考えれば, 「空でない開集合 U_1, U_2 に対し, $U_1 \cap U_2$ は空でない」という条件は上の条件と同値である. 特に, 既約な位相空間の任意の開集合 $U \subset X$ も既約である.

例 110. $R = \mathbb{C}[X, Y]$, $S = R/(XY)$ とおく. 自然な射影 $R \to S$ はスキームの射 $f : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ を与える. S の素イデアル全体は XY を含む R の素イデアル全体と一対一対応する. そのため, f の像は $V(XY)$ である. 実は, f が位相同型 $\mathrm{Spec}(S) \to V(XY)$ であることを証明できる. $V(XY) = V(X) \cup V(Y)$ であるので, $V(XY)$ は既約でない.



定義 111. スキーム X が既約であるとは, 位相空間 X が既約であるときにいう.

例えば, 上の例の $\mathrm{Spec}(S)$ は既約でない.

R を可換環とし, $x \in R$ とする. $x^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在すれば, x を冪零元

(nilpotent) と呼ぶ．冪零元全体は R のイデアルをなし，$\sqrt{0}$ あるいは $\mathrm{Rad}(R)$ と書く．R が被約 (reduced) であるとは，R がゼロでない冪零元をもたないときにいう (つまり，$\sqrt{0} = 0$ であるとき)．

定義 112. X をスキームとする．X が被約 (reduced) であるとは，各開集合 U に対し，可換環 $\mathcal{O}_X(U)$ が被約であることをいう．

定義 113. X をスキームとする．X が整 (integral) であるとは，空でない各開集合 U に対し，可換環 $\mathcal{O}_X(U)$ が整域であることをいう．

例 114.

$$\mathrm{Spec}(A) \text{ が整である} \Longleftrightarrow A \text{ が整域である．}$$

命題 115. X をスキームとする．

$$X \text{ が整である } \Longleftrightarrow X \text{ が既約であり，かつ } X \text{ が被約である．}$$

証明. 「$\Longrightarrow$」:X が整であるとする．整域が被約であるので，X が被約である．X が既約であることを示す．X が既約でないと仮定しよう．このとき，互いに素であり，空でない開集合 U_1, U_2 が存在する．層の定義から，$s \mapsto (s|_{U_1}, s|_{U_2})$, $\mathcal{O}_X(U) \simeq \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$ で定まる写像は同型である．U_1, U_2 は空でないので，可換環 $\mathcal{O}_X(U_1)$ と $\mathcal{O}_X(U_2)$ はゼロでない (注意 108)．しかし，可換環 $\mathcal{O}_X(U) \simeq \mathcal{O}_X(U_1)$ において $(1,0) \times (0,1) = (0,0)$ であるので，整域の性質に矛盾する．

「$\Longleftarrow$」:X が既約であり，被約であるとする．U を開集合とし，$fg = 0$ となる $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ を考える．以下の集合を考える．

$$Z_f = \{x \in X \mid f_x \in \mathfrak{m}_x\}$$
$$Z_g = \{x \in X \mid g_x \in \mathfrak{m}_x\}$$

とおく．ここで，$\mathfrak{m}_x$ は局所環 $\mathcal{O}_{R,x}$ の極大イデアルを表す．Z_f が閉集合であることを確認する．まず，アフィンスキームの場合を考える．B を可換環とし，$f \in B$ とする．$\mathfrak{p}$ を素イデアルとし，自然な準同型 $A \to A_{\mathfrak{p}}$ を ι とおく．$\iota^{-1}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$ であるので，$Z_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B) \mid f \in \mathfrak{p}\} = V(f)$ が成り立つ．特に，Z_f は閉集合である．

上の場合に戻ろう．x を Z_f に属しない元とし，$W = \mathrm{Spec}(A) \subset U$ を x のアフィン開近傍とする．$f|_W$ は A の元として見なすことができる．その元をまた f で表す．上で考えたアフィンスキームの場合の結果から，$Z_f \cap W = V(f)$ である．よって，$\mathfrak{p} \in D(f)$ であり，さらに $Z_f \cap D(f) = \emptyset$ である．ゆえ，Z_f は U の閉集合である．

$fg = 0$ より, $U = Z_{fg} = Z_f \cup Z_g$ である. X は既約であるので, 開集合 U も既約である. よって $Z_f = U$ または $Z_g = U$. 前者が成り立つと仮定してよい. つまり, 全ての U の点 x に対し, $f \in \mathfrak{m}_x$ である. $W = \mathrm{Spec}(B)$ を U のアフィン開集合とする. $f|_W$ を B の元として考える. $V(f|_W) = \mathrm{Spec}(B)$ より, $f|_W \in \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ 素イデアル}} \mathfrak{p} = \sqrt{0}$ である. X は被約なので, $f|_W = 0$ となる. U がアフィン開集合の和集合として表せるので, $f = 0$ となる.

定義 116. X をスキームとする. X が局所ネーターであるとは, X がアフィン開集合 $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ による被覆を持ち, さらに A_i がネーター環であることをいう. なお, X がネータースキームであるとは, このような有限被覆を持つときにいう.

定理 117. 以下の条件は互いに同値である
(1) X が局所ネーターである.
(2) 各アフィン開集合 $\mathrm{Spec}(A) \subset X$ に対し, A がネーター環である.

特に, アフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(R)$ の場合に, 「X が局所ネーターである」, 「X がネーターである」, 「R がネーター環である」との 3 つの条件は互いに同値である.
X をネータースキームとし,

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_n \supset Z_{n+1} \supset \ldots$$

を X の閉集合の減少列とする. このとき, ある $N \geq 1$ が存在し, $Z_N = Z_{N+1} = \ldots$ が成り立つ. 一般に, 上の性質を満たす位相空間はネーター位相空間であるという.

命題 118. ネータースキームはネーたー位相空間である.

証明. X のアフィンスキーム $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $i = 1, \ldots, d$ による被覆を固定する. U_i の閉集合の減少列 $(Z_n \cap U_i)_{n \geq 1}$ を考える. $Z_n \cap U_i = V(I_n)$ となる A_i のイデアル I_n を選ぶ. よって, イデアルの増大列

$$\sqrt{I_1} \subset \sqrt{I_2} \subset \sqrt{I_3} \subset \ldots$$

が与えられる. A_i がネーター環なので, 自然数 N_i より, $\sqrt{I_n} = \sqrt{I_{n+1}} = \ldots$ となる. ゆえ, $n \geq N_i$ に対し, $Z_n \cap U_i = Z_{n+1} \cap U_i$ である. $N = \max\{N_1, \ldots, N_d\}$ とおくと, 任意の $n \geq N$ に対し, $Z_n = Z_{n+1}$ となる. X がネーター位相空間であることを確認できた.

補題 119. X をネーター位相空間とし, $Y \subset X$ を閉集合とする.
(a) このとき, $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ となる既約閉集合 $Y_1, \ldots Y_r$ が存在する.

(b) さらに, $i \neq j \Rightarrow Y_i \not\subset Y_j$ との条件を満たす上の (Y_i) が一意的に存在する.

上の補題の (b) より与えられる (Y_i) を Y の既約成分とよぶ.

証明. 有限個の既約閉集合の和集合として表すことができない閉集合全体を $\mathscr{Z}$ とおき, $\mathscr{Z}$ が空でないと仮定する. X がネーターなので, 包含関係に関して $\mathscr{Z}$ が 極小元 Z をもつ. Z が既約でないので, 閉集合 $Z_1 \subsetneq Z$, $Z_2 \subsetneq Z$ が存在し, $Z = Z_1 \cup Z_2$ である. Z が極小元であるので, Z_1, Z_2 が $\mathscr{Z}$ に属しない. よって, いずれも有限個の既約閉集合の和集合であり, ゆえ Z もこのように表すことができる. それは仮定に矛盾するので, $\mathscr{Z} = \emptyset$ となる. 以上, (a) を示すことができた.

もし $Y_i \subset Y_j$ となる $i \neq j$ が存在すれば, 閉集合 Y_i を捨てる. このようにすれば, 条件

$$i \neq j \Rightarrow Y_i \not\subset Y_j$$

が成り立つようにすることができる. 今, 上の性質をもつ $Y_1, \ldots Y_r$ が一意であることを示す. $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$, $Y = Y'_1 \cup \cdots \cup Y'_s$ をその性質をもつ Y の 2 つの表現とする. よって, $Y'_1 = \bigcup_{i=1}^r (Y_i \cap Y'_1)$ である. Y'_1 が既約であるので, $Y_i \cap Y'_1 = Y'_1$ となる i が存在する. したがって, $Y'_1 \subset Y_i$ となる. 同じ議論から, $Y_i \subset Y'_j$ となる Y'_j が存在する. よって, $Y'_1 \subset Y'_j$ である. 上の性質が成立することを仮定したので, $j = 1$ となり, ゆえ $Y'_1 = Y_i$ である. このように続くことで, 閉集合の族 $(Y_i)_i$ と $(Y'_j)_j$ が一致する.

例えば, ネータースキーム $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y])$ において, 閉集合 $V(XY)$ の既約成分は $V(X)$ と $V(Y)$ である.

定義 120. $f : X \to Y$ をスキームの射とする.

(a) f は局所有限型であるとは, アフィン開集合 $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ による Y の被覆が存在し, 全ての i に対して, $f^{-1}(U_i)$ が被覆 $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{i,j}$ $(V_{i,j} = \mathrm{Spec}(B_{i,j}))$ をもち, さらに $B_{i,j}$ が有限生成 A_i-代数であることをいう.

(b) さらに有限被覆 $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{i,j}$ がとれるときに, f が有限型であるという.

k を可換体をする. また, X をスキームとし, $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ をスキームの射とする. このとき, X が k-スキームであるという. 例えば, A が k-代数ならば, $\mathrm{Spec}(A)$ は自然に k-スキームになる (準同型 $k \to A$ がスキームの射 $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$ を与えるからだ). k-スキーム X が有限型 k-スキームであるとは, スキームの射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ が有限型であることをいう. このとき, X が有限被覆 $X = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{Spec}(A_i)$ (A_i は有限生成 k-代数である) をもつ. よって, A_i がネーター環なので, X がネータースキームである.

定義 121.

(a) X をスキームとし, $U \subset X$ を開集合とする. このとき, スキーム $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ を X の開部分スキームであるという.

(b) $f : Y \to X$ をスキームの射とする. f が開埋め込みであるとは, X の開部分スキーム U があり, f がスキームの同型 $Y \to U$ と包含写像 $U \subset X$ の合成であることをいう.

定義 122. $f : Y \to X$ をスキームの射とする. f が閉埋め込みであるとは, 以下の 2 つの条件が成り立つことをいう.

(1) $f : Y \to X$ の像は X の閉集合 $Z \subset X$ であり, さらに f は位相同型 $Y \to Z$ である.

(2) 層の準同型 $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ が全準同型である.

このとき, (Y, f) (あるいは Y) が X の閉部分スキームであるという.

命題 123. R を可換環とし, $I \subset R$ をイデアルとする. 自然な準同型 $\varphi : R \to R/I$ で定まるスキームの射 $f : \mathrm{Spec}(R/I) \to \mathrm{Spec}(R)$ は閉埋め込みである.

証明. $Y = \mathrm{Spec}(R/I)$, $X = \mathrm{Spec}(R)$ とおく. f が位相同型 $Y \to V(I)$ であることを簡単に確認できる. 層の準同型 $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ が全準同型であることを示す. $\mathfrak{p} \notin V(I)$ ならば, $(f_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} = 0$ である. また, $\mathfrak{p} \in V(I)$ とし, $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/I$ とおく (よって, $\overline{\mathfrak{p}} \in Y$, $f(\overline{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}$ である). このとき, $(f_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}} = (R/I)_{\overline{\mathfrak{p}}}$ であり, $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$. よって, 全ての点 $\mathfrak{p}$ に対し, $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to (f_*\mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{p}}$ が全射である. ゆえ $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ が全準同型である.

定義 124.

(a) X を位相空間とする. X の次元 (dimension) は, 既約閉集合の列 $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ の長さ n の上限として定義され, $\dim(X)$ で表す.

(b) $Z \subset X$ を既約閉集合とする. Z の X における余次元 (codimension) は, 既約閉集合の列 $Z = Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$ の長さ n の上限として定義され, $\mathrm{codim}(Z, X)$ で表す. 一般の閉集合 $Y \subset X$ の場合,

$$\mathrm{codim}(Y, X) := \inf_{Z \subset Y \text{ 既約}} \mathrm{codim}(Z, X)$$

と定義する.

例 125.

(1) $\dim(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = 1$ である.

(2) k を可換環とする. $\dim(\mathrm{Spec}(k)) = 0$ である.

定理 126. k を可換体とし, A を整域である有限生成 k-代数とする. A の商体を K で表す. $\mathrm{Spec}(A)$ の次元が有限であり, 体の拡大 K/k の超越次数である.

$\mathbb{A}_k^n := \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$ とおく. k の拡大 $k(X_1, \ldots, X_n)$ の超越次数は n であるので, $\dim(\mathbb{A}_k^n) = n$ となる.

3.3 $\mathcal{O}_X$-加群

$(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上のアーベル群の層とする. また, 全ての開集合 $U \subset X$ に対し, アーベル群 $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$-加群の構造を持つとする. つまり, 写像 $\gamma_U : \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ が定まり, この写像に対して $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$-加群の定義を満たすとする. さらに, 制限写像がその構造を保つと仮定する. すなわち $V \subset U$ となる開集合 U, V に対し, 以下の図式が可換図式である:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\gamma_U} & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow \rho_V^U & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\gamma_V} & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

つまり, $\gamma = (\gamma_U)_U$ は層の準同型 $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ である.

定義 127. 上の条件を満たす層 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-加群と呼ぶ.

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とする. アーベル群の層の準同型 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群の準同型であるとは, 任意の開集合 U に対し, $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$-加群の準同型であることをいう. $\mathcal{O}_X$-加群全体のなす圏を $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ とおく. また, $\mathcal{O}_X$-加群の準同型 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 全体を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ で表す.

例 128. 環付き空間 $(\mathbb{C}, \mathcal{C}^0)$ を考える（ここで, $\mathcal{C}^0$ は複素数値連続関数の層である). 部分集合 $Z \subset \mathbb{C}$ とし, 次の層を定義する. 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対し,

$$\mathcal{F}_Z(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid \text{連続}\ , f|_Z = 0\}$$

とおく. $\mathcal{F}_Z$ は明らかに層 $\mathcal{C}^0$ の部分層である. また, $f \in \mathcal{C}^0(U)$, $g \in \mathcal{F}_Z(U)$ ならば, $fg \in \mathcal{F}_Z(U)$ である. よって, $\mathcal{F}_Z(U)$ は $\mathcal{C}^0$-加群となる. 実は, $\mathcal{F}_Z(U)$ は可換環 $\mathcal{C}^0(U)$ のイデアルである.

$(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を環付き空間とし, $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を環付き空間の射とする. このとき, 圏 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ と $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$ の間に以下の関手 f_*(順像) と f^*(逆蔵) が

ある.

$$\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X} \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y}.$$

まず, 順像を定義する. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とし, 層としての順像 $f_*\mathcal{F}$ を考える. $f_*\mathcal{F}$ は自然な $f_*\mathcal{O}_X$-加群の構造を持つ. また, 写像 $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ により, $f_*\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_Y$-加群として見なすことができる. これにより, 関手 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X} \to \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_Y}$ を定義できた.

今, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_Y$-加群とする. 逆像 $f^{-1}\mathcal{G}$ は X 上のアーベル群の層であるが, その層は $\mathcal{O}_X$-加群でないことに注意する. しかし, $f^{-1}\mathcal{G}$ は明らかに $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-加群である. また, 定理 98 より準同型 $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ は準同型 $f_\# : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ を与える. よって, $\mathcal{O}_X$ は $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-加群となる. 逆像 $f^*\mathcal{G}$ は以下のように定義される.

$$f^*\mathcal{G} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{G}.$$

上記のテンソル積の定義を説明しよう. X の各開集合 U に対し, $\mathcal{H}(U) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} f^{-1}\mathcal{F}(U)$ とおくと, X 上の前層 $\mathcal{H}$ が得られる. しかし, $\mathcal{H}$ は一般に層でない. 上記のテンソル積は, 前層 $\mathcal{H}$ の層化として定義される. $\mathcal{H}(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$-加群えあるので, 写像 $\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(U)$ があり, その写像の族が前層の準同型 $\mathcal{O}_X \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を与える. 層化の普遍性によって, 層の準同型 $\mathcal{O}_X \times f^*\mathcal{G} \to f^*\mathcal{G}$ が得られて, $f^*\mathcal{G}$ が $\mathcal{O}_Y$-加群になる.

注意 129. 定理 98 と同様な随伴公式が成り立つ. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ をそれぞれ $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$-加群とする. このとき, 自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

が存在する.

R を可換環とし, M を R 上の加群とする. このとき, $\mathrm{Spec}(R)$ 上の $\mathcal{O}_R$-加群 $\widetilde{M}$ を構成できる. $\widetilde{M}$ の構成が構造層 $\mathcal{O}_R$ の定義に似ている. 実は, R-加群 R にその構成を適用すれば, 層 $\mathcal{O}_R$ が得られる. まず, 加群の局所化の定義を思い出そう. $S \subset R$ を乗法的閉集合とし, M を R-加群とする. このとき,

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists t \in S,\ t(s'm - sm') = 0$$

で定まる $M \times S$ 上の同値関係を考える. $S^{-1}M$ が同値類 $[(m, s)]$ $((m, s) \in M \times S)$ 全体の集合として定義される. また, 同値類 $[(m, s)]$ は $\frac{m}{1}$ で表す. $S^{-1}M$ の和が自然に定義

されており, さらに $S^{-1}M$ は自然な $S^{-1}R$-加群の構造を持つ. すなわち, $a \in R$, $s, t \in S$, $m \in M$ に対して,

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} := \frac{am}{st}$$

とおく. 乗法閉集合 $S = R \setminus \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ は素イデアルである) の場合に, $S^{-1}M$ を $M_{\mathfrak{p}}$ と書き, $\mathfrak{p}$ における M の局所化と呼ぶ. なお, $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ ($f \in R$) の場合に $S^{-1}M = M_f$ と記す.

$\mathrm{Spec}(R)$ 上の $\mathcal{O}_R$-加群 $\widetilde{M}$ を定義する. $\mathrm{Spec}(R)$ の開集合 U に対し, $\widetilde{M}(U)$ を以下のように定義する.

$$\widetilde{M}(U) = \left\{ s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \mathfrak{p} \in U,\ s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}} \\ \text{局所的に } \exists m \in M,\ s(\mathfrak{p}) = \frac{m}{1} \end{array} \right\}$$

「局所的」との条件を具体的に説明する. 全ての $\mathfrak{p}_0 \in U$ に対し, $\mathfrak{p}_0$ の開近傍 $V \subset U$, また $m \in M$ が存在し, 任意の $\mathfrak{p} \in V$ に対し, $s(\mathfrak{p}) = \frac{m}{1}$ である ($M_{\mathfrak{p}}$ の元として). もちろん, M の元 m が点 $\mathfrak{p}_0$ また近傍 V に依存することに注意する. $\widetilde{M}$ の制限写像は自然に定義される. これにより, 前層 $\widetilde{M}$ が与えられる. その前層は層であることを簡単に確認できる. また, 各開集合 U に対し, 自然な写像

$$\gamma_U : \mathcal{O}_R(U) \times \widetilde{M}(U) \to \widetilde{M}(U)$$

が存在することを説明する. $s \in \mathcal{O}_R(U)$, $t \in \widetilde{M}(U)$ とする. つまり, s, t はそれぞれ写像 $U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}}$, 写像 $U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$ である. このとき, $\mathfrak{p} \mapsto s(\mathfrak{p})t(\mathfrak{p})$ で定まる写像 $\gamma_U(s, t) : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$ が $\widetilde{M}(U)$ の元である. このように定義された写の族 $(\gamma_U)_U$ が $\widetilde{M}$ 上の $\mathcal{O}_R$-加群の構造を与える.

定理 79 の結果は以下のように層 $\widetilde{M}$ へ一般化できる.

定理 130.
(1) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し, $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}}$ である.
(2) $f \in R$ に対し, $\widetilde{M}(D(f)) \simeq M_f$ である.

証明. 定理 79 と同様に証明できる.

特に, $\widetilde{M}$ の大域切断は $\Gamma(\mathrm{Spec}(R), \widetilde{M}) = M$ となる.

命題 131. R, S を可換環とし, $\varphi : S \to R$ を準同型とする. φ に対応するアフィンスキームの射を $f : \mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(S)$ とおく.

(1) R-加群 N に対し, $f_*(\widetilde{N}) = \widetilde{{}_SN}$ である (ここで, ${}_SN$ は N を S-加群と見なしたものである).
(2) S-加群 M に対し, $f^*(\widetilde{M}) = \widetilde{R \otimes_S M}$ である.

定義 132. X をスキームとし, $\mathcal{F}$ を X 上の $\mathcal{O}_X$-加群とする. $\mathcal{F}$ が準連接であるとは, 全ての点 $x \in X$ に対し, x のアフィン開近傍 $U = \mathrm{Spec}(R)$ また R-加群 M が存在し, U 上の層 $\mathcal{F}|_U$ が $\widetilde{M}$ と同型であることを言う.

もちろん, 上の定義の R-加群 M が点 x に依存する. 言い換えれば, 準連接 $\mathcal{O}_X$-加群は, 局所的に $\widetilde{M}$ の形の層である. また, $\mathcal{F}$ が準連接であることは, 次の条件と同値である. X がアフィン被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ $(U_i = \mathrm{Spec}(R_i))$ を持ち, 全ての $i \in I$ に対し, $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$ となる R_i-加群 M_i が存在する.

連接 $\mathcal{O}_X$-加群という概念もある. ただし, ネータースキーム上の連接加群のみを考えることにする.

定義 133. X をネータースキームとし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とする. もし, 定義 132 において, M として有限生成 R-加群が取れると, $\mathcal{F}$ が連接であるという. つまり, 全ての $x \in X$ に対し, アフィン開近傍 $U = \mathrm{Spec}(R)$ また有限生成 R-加群 M が存在し, $\mathcal{F}|U \simeq \widetilde{M}$ である.

定理 134. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とし, $U = \mathrm{Spec}(R)$ を任意の X のアフィン開集合とする. このとき, $M = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ とおくと, $\mathcal{F}|_U \simeq \widetilde{M}$ である.

よって, $\mathrm{Spec}(R)$ 上の準連接層は, 定義から局所的に $\widetilde{M}$ の形の層であるが, 上の定理より, 大域的にもそのような形を持つ.

系 135. $X = \mathrm{Spec}(R)$ とする. $M \mapsto \widetilde{M}$ で定まる関手は Mod_R と準連接 $\mathcal{O}_R$-加群のなす圏の間の圏同値である.

注意 136.

(a) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-加群とし, $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-加群の準同型とする. このとき, $\ker(\varphi)$ と $\mathrm{Im}(\varphi)$ が自然な $\mathcal{O}_X$-加群の構造をもつ.
(b) X を一般の位相空間とする. $\mathcal{G}$ を X 上のアーベル群の層とし, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ を部分層とする. このとき, 商層 $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ が次のように定義される. まず, $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ で定まるものは, X 上の前層である. 商層 $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ はその前層の層化として定義される.
(c) 今, X をスキーム, $\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-加群, また $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-部分加群とする. このとき,

$\mathcal{G}/\mathcal{F}$ は自然な $\mathcal{O}_X$-加群をもつ.

(d) $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が $\mathcal{O}_X$-加群の準同型であると, φ の余核は $\mathcal{G}/\operatorname{Im}(\varphi)$ として定義されており, $\operatorname{coker}(\varphi)$ で表される.

命題 137.

(1) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が準連接 $\mathcal{O}_X$-加群ならば, $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$, $\operatorname{coker}(\varphi)$ いずれも準連結である.

(2) X がネータースキームであると仮定する. このとき, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が連接 $\mathcal{O}_X$-加群ならば, $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$, $\operatorname{coker}(\varphi)$ いずれも連結である.

証明. 系 135 から従う.

命題 138. $f : X \to Y$ をスキームの射とする.

(1) $\mathcal{G}$ が X 上の準連接 $\mathcal{O}_Y$-加群であれば, $f^*\mathcal{G}$ は準連接 $\mathcal{O}_X$-加群である.

(2) X, Y をネータースキームとする. $\mathcal{G}$ が X 上の連接 $\mathcal{O}_Y$-加群であれば, $f^*\mathcal{G}$ は連接 $\mathcal{O}_X$-加群である.

(3) X がネータースキームであるとする. $\mathcal{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_X$-加群ならば, $f_*\mathcal{F}$ は連接である.