# 代数学入門

## レポート 2（期末レポート）

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい.
提出の際, 写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい.

提出期限：2022 年 2 月 3 日（木）18 時まで.

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

**問 1.** $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ の全ての元の位数を求めよ.

**問 2.** $k$ を 2 でも 3 でも割り切れない自然数とする. このとき, 以下が成り立つことを示せ.

$$k^{216} \equiv 1 \pmod{648}.$$

**問 3.** $G$ をアーベル群とし, $a, b$ を $G$ の元とする. $n = \mathrm{ord}(a)$, $m = \mathrm{ord}(b)$ とおき, $n$ と $m$ が互いに素であるとする. このとき, $\mathrm{ord}(ab) = nm$ が成り立つことを示せ.

**問 4.** $G$ を群とし, $H$ を $G$ の部分群とする.

(1) $N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}$ と定義する. $N(H)$ が $G$ の部分群であることを示せ.
(2) $H \lhd N(H)$ を示せ.
(3) $C(H) := \{g \in G \mid \forall h \in H,\ gh = hg\}$ と定義する. $C(H)$ が $G$ の部分群であることを示せ.
(4) $C(H) \lhd N(H)$ を示せ.
(5) $[G : H] = 2$ のとき, $H$ が $G$ の正規部分群であることを示せ.

**問 5.** $p$ を素数とする. $f(k + p^2\mathbb{Z}) = k + p\mathbb{Z}$ $(k \in \mathbb{Z})$ とおくことで, 写像

$$f\colon \left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

を定義する.

(1) $f$ が well-defined であり, 群準同型写像であることを示せ.
(2) $\mathrm{Ker}(f)$ が位数 $p$ の巡回群であることを示せ.
(3) $\left(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\right)^\times$ が巡回群であることを示せ.

**問 6.** $n \geq 2$ を自然数とする.

(1) $d \geq 1$ を $n$ の約数とし, $r = \frac{n}{d}$ とおく. また, $x = r + n\mathbb{Z}$ とおく. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ における $x$ の位数を求めよ.

(2) $H_d = \langle x \rangle$ とおく. また, $\varphi_d(y) = dy$ $(y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ とおくことによって, 準同型写像

$$\varphi_d \colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

を定義する. $H_d = \mathrm{Ker}(\varphi_d)$ が成り立つことを示せ.

(3) $H$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の部分群で, 位数 $d$ のものとする. このとき, $H = H_d$ を示せ.

(4) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元 $y$ に対して,

$$\mathrm{ord}(y) = d \iff \langle y \rangle = H_d$$

が成り立つこと示せ.

(5) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ においては, 位数 $d$ の元がちょうど $\varphi(d)$ 存在することを証明せよ.

(6) 以下の等式が成り立つことを示せ

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

ただし, ここで $d$ は $n$ の正の約数である. また, $d = 1$ のとき, $\varphi(1) = 1$ と約束する.

**問 7.** $\mathcal{F}$ を写像 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 全体の集合とする. $f, g \in \mathcal{F}$ に対して

$$f \star g(n) := \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

とおき, 写像 $f \star g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ を定義する (ただし, ここで $d$ は $n$ の正の約数である).

(1) 演算 $\star$ が可換であることを示せ. (可換な演算とは, 全ての $f, g \in \mathcal{F}$ に対して, $f \star g = g \star f$ であることをいう).

(2) 演算 $\star$ が結合的であることを示せ.

(3) この演算に関して $\mathcal{F}$ がモノイドをなすことを示せ. 単位元を $\epsilon_0$ で表すことにする.

(4) $(\mathcal{F}, \star)$ の可逆元全体の集合を求めよ.

(5) 有限位数の元全体の集合を求めよ.

(6) 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbf{1}(n) = 1, \quad \mathrm{Id}(n) = n$$

とおくことで, それぞれ写像 $\mathbf{1} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ と $\mathrm{Id} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ を定義する. このとき,

$$\varphi \star \mathbf{1} = \mathrm{Id}$$

が成り立つことを示せ.

(7) $n \geq 2$ を自然数とし, $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ を $n$ の素因数分解とする (ただし, $a_1, \dots, a_k$ は自然数であり, $p_1, \dots, p_k$ は互いに異なる素数であるとする). このとき, メビウス関数 $\mu(n)$ を以下のように定義する.

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & (a_i \geq 2 \text{ をみたす } i \text{ が存在するとき}) \\ (-1)^k & (\text{全ての } i \text{ に対して } a_i = 1 \text{ であるとき}). \end{cases}$$

また, $n = 1$ のとき $\mu(1) = 1$ と約束する. $\mu \star \mathbf{1} = \epsilon_0$ を示せ.

(8) 自然数 $n$ に対して, 以下が成り立つことを示せ.

$$\sum_{d|n} d\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n).$$