

代数学 C・代数学特論 III

レポート 2

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。
提出の際、写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい。

提出期限：2021 年 8 月 10 日（火）18 時まで。

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. G を位数 15 の群とする。素数 p について、 G の p シロー部分群の個数を $n_p(G)$ で表す。

- (1) $n_3(G) = n_5(G) = 1$ を示せ。
- (2) S_p ($p = 3, 5$) を G の p シロー部分群とする。 S_p が G の正規部分群であることを示せ。
- (3) S_3 の S_5 への共役作用を考える。この作用に対応する準同型写像 $\varphi : S_3 \rightarrow \text{Bij}(S_5)$ について、
 $\text{Im}(\varphi) = \{\text{id}_{S_5}\}$ が成り立つことを示せ (ここで、 id_{S_5} は S_5 の恒等写像である)。
- (4) G がアーベル群であることを示せ。
- (5) G が巡回群であることを示せ。

問 2. $n \geq 3$ を自然数とし, $\mu_n \subset \mathbb{C}$ を 1 の n 乗根の集合とする. また, $\zeta_n = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ とおく.

$$D_n = \{f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \mid f(\mu_n) \subset \mu_n\}$$

と定める.

(1) D_n が $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ.

(2) 写像 $r, s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ

$$r(z) = \zeta_n z, \quad s(z) = \bar{z}$$

と定める. D_n が $\{r, s\}$ で生成されることを証明せよ.

(3) D_n がアーベル群でないことを示せ.

(4) $D_n \cap \mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ が r で生成され, 位数 n の巡回群であることを示せ. また, $D_n \cap \mathrm{SL}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ が D_n の正規部分群であることを示せ.

(5) $|D_n| = 2n$ を示せ.

(6) 単射準同型写像 $D_n \rightarrow S_n$ が存在することを証明せよ. (ヒント: D_n は自然に集合 μ_n に作用する.)

(7) $D_3 \simeq S_3$ を示せ.

(8) D_n の中心を求めよ. (ヒント: $\mathrm{Cent}_{D_n}(r) = \langle r \rangle$ が成り立つことを示せ.)

(9) D_6 の全ての 2 シロー部分群を求めよ.