

# 数学特別講義 VII・代数学特論 V

## レポート 1

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。

提出の際、写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい。

提出期限：2021 年 6 月 7 日（月）18 時まで。

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

**問 1.**  $A$  をデデキント環とする。

- (1)  $I$  を  $A$  の非自明なイデアルとし、 $I = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$  を  $I$  の素イデアル分解とする。素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対して、次が成り立つことを示せ。

$$I \subset \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \text{ となる } \mathfrak{p}_i \text{ がある } (1 \leq i \leq n).$$

- (2)  $A$  が一意分解整域であるとする。  $a$  を 0 でない  $A$  の元として、単項イデアル  $(a)$  の素イデアル分解  $(a) = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$  を考える。このとき、素イデアル  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  が単項イデアルであることを証明せよ。

- (3) 次が成り立つことを示せ。

$$A \text{ が一意分解整域である} \iff A \text{ が単項イデアル整域である.}$$

**問 2.**  $d \in \mathbb{Z}$  ( $d \neq 0, 1$ ) を平方因子を持たない整数とし、 $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  とする。

- (1)  $x = a + b\sqrt{d}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$ ) に対して、 $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$  を求めよ。  
(2)  $x \in \mathcal{O}_K$  に対して、 $x \in \mathcal{O}_K^\times \iff N_{K/\mathbb{Q}}(x) \in \{-1, 1\}$  が成り立つことを示せ。  
(3)  $d < 0$  のとき、 $\mathcal{O}_K^\times$  が有限であることを示せ。  
(4)  $d = 2$  のとき、 $\mathcal{O}_K^\times$  が無限であることを示せ。  
(5)  $d = 2$  のとき、 $\mathcal{O}_K$  がユークリッド環であることを示せ。  
(ヒント:  $a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$  がユークリッド関数であることを証明せよ).