

# 数学特別講義 VII・代数学特論 V

## レポート 2

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。  
提出の際、写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい。

提出期限：2021 年 8 月 15 日（日）18 時まで。

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

**問 1.**  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$  とする。

- (1)  $\mathcal{O}_K$  を求めよ。
- (2)  $\mathcal{O}_K$  のイデアル  $I$  に対し、 $\mathcal{N}(I)$  が素数ならば、 $I$  は素イデアルであることを示せ。
- (3)  $N_{K/\mathbb{Q}}(x) = 2$  を満たす  $x \in \mathcal{O}_K$  が存在することを示せ。
- (4)  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{\text{id}, \sigma\}$  とする。問 1(3) の元  $x$  について、 $(x) = (\sigma(x))$  が成り立つことを示せ。  
(ただし、元  $y \in \mathcal{O}_K$  について、 $(y)$  は  $y$  で生成される単項イデアルである)。
- (5)  $2\mathcal{O}_K = (x)^2$  が成り立つことを示せ。
- (6)  $\mathfrak{p} = (x)$  とおくと、 $\mathfrak{p}$  は素イデアルであることを示せ。
- (7)  $\mathcal{N}(I) = 2$  を満たすイデアル  $I$  は  $I = \mathfrak{p}$  の場合に限ることを示せ。
- (8)  $\text{Cl}_K$  を  $K$  のイデアル類群とする。任意のイデアル類においては、 $\mathcal{N}(I) \leq 2$  を満たすイデアル  $I$  が存在することを示せ。
- (9)  $\mathcal{O}_K$  は単項イデアル整域であることを示せ。

**問 2.**

- (1)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$  のとき,  $u > 1$  を満たす  $\mathcal{O}_K$  の基本単数  $u$  を求めよ.  
(2)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$  のとき,  $u > 1$  を満たす  $\mathcal{O}_K$  の基本単数  $u$  を求めよ.  
(3)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$  とする.

$$\mathcal{O}_K^\times \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^d$$

となる自然数  $n, d$  を求めよ.

- (4)  $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$  とする.

$$\mathcal{O}_K^\times \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^d$$

となる自然数  $n, d$  を求めよ.