代数学 D

Jean-Stefan Koskivirta

参考書

(1) 可換代数入門, M.F. Atiyah, I.G. MacDonald(著), 共立出版, 2006.
(2) Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, D.Eisenbud(著), Springer, 2008.
(3) Algebra, S. Lang(著), Springer, 2002.
(4) Rings and categories of modules, F.W. Anderson, K.R. Fuller (著), Springer, 1992.
(5) Algebre commutative, N. Bourkaki (著), Springer, 1998.

目次

1　加群

1.1　加群, 部分加群

A を可換環とし, $(M,+)$ をアーベル群とする. A の乗法単位元を 1 と表す. また, 写像 $f\colon A\times M\to M$ が与えられているとする. $a\in A$, $x\in M$ に対し, $f(a,x)$ を単に $a\cdot x$, または ax と表す.

定義 1.1. M が A 加群であるとは, 任意の $a,b\in A$, $x,y\in M$ に対して, 以下が成り立つことをいう.

- $a(bx)=(ab)x$,
- $(a+b)x=ax+bx$,
- $a(x+y)=ax+ay$,
- $1x=x$.

M が A 加群ならば, 写像 $f_a\colon M\to M$, $f_a(x)=ax$ は M の自己準同型写像である (つまり $f_a(x+y)=f_a(x)+f_a(y)$ である). M の自己準同型全体の集合を $\mathrm{End}(M)$ とおく. $f,g\in\mathrm{End}(M)$ ならば, $f+g$ と $f\circ g$ も M の自己準同型である. 演算 $+$ と $\circ$ に関して $\mathrm{End}(M)$ が環をなす (ただし, 一般には非可換環である). その乗法単位元は M の恒等写像 id_M である. 写像

$$A\longrightarrow\mathrm{End}(M),\ a\mapsto f_a$$

は環の準同型である. 実際, 加群の定義より以下が成り立つ

$$\begin{aligned}f_{a+b}&=f_a+f_b\\ f_{ab}&=f_a\circ f_b\\ f_1&=\mathrm{id}_M\,.\end{aligned}$$

逆に, 環の準同型 $\varphi\colon A\to\mathrm{End}(M)$ が与えられているとする. $a\in A$, $x\in M$ に対して, $am=\varphi(a)(m)$ とおくことで M が A 加群になる.

例 1.2.

- K が可換体のとき, K 加群とは K ベクトル空間に他ならない.
- M をアーベル群とする. $k\in\mathbb{Z}$, $x\in M$ に対して, kx を自然に定義される. つまり,

$$kx=\begin{cases}x+\cdots+x\quad(k\text{ 個}) & \text{if } k>0\\ (-x)+\cdots+(-x)\quad(-k\text{ 個}) & \text{if } k<0\\ 0 & \text{if } k=0.\end{cases}$$

  こうすることによって, M は自然に $\mathbb{Z}$ 加群とみなすことができる.
- K を可換体とし, V を K ベクトル空間とする. また, $f\colon V\to V$ を線形写像とする. 多項式 $P(X)\in K[X]$, ベクトル $v\in V$ に対して,

$$P(X)v=P(f)v$$

  とおくことによって V は $K[X]$ 加群になる. 逆に, V を $K[X]$ 加群とする. $\lambda\in K$, $x\in V$ について, λ を定数多項式とみなすことで λx が定義されている. 特に, V が K ベクトル空間である. また, $f(v)=Xv$ で定まる写像 $f\colon V\to V$ が K 線型写像である. このことから, 以下の二つのものが一対一で対応している.
  (i) $K[X]$ 加群.
  (ii) K ベクトル空間 V と自己準同型写像 $f\colon V\to V$ からなる組 (V,f).
- A を可換環とする. A 自分自身 A 加群として考えることができる. なぜならば, A 上の積 $A\times A\to A$, $(a,b)\mapsto ab$ が加群の定義の条件を満たすことが容易に確認できる.

- $f\colon A \to B$ を可換環の準同型とする．任意の $a \in A$, $b \in B$ について，$a \cdot b = f(a)b$ とおくことによって，B を A 加群としてみなすことができる．特に，$A \subset B$ のとき，B が自然に A 加群構造を持つ．

定義 1.3. M を A 加群とし，$N \subset M$ を部分群とする．任意の $a \in A$, $x \in N$ に対して，$ax \in N$ が成り立つとき，N が M の部分加群であるという．

注意 1.4.
- M の零元 0 からなる部分集合 $\{0\}$ と M 自分自身は明らかに M の部分加群である．
- A の部分加群とは A のイデアルに他ならない．
- $A = K$ が可換体ならば，部分加群とは線型部分空間に他ならない．

例 1.5. K を可換体とし，K ベクトル空間 V に自己準同型 $f\colon V \to V$ が与えられているとする．このとき，V を $K[X]$ 加群として考えることができる (上記参照)．$K[X]$ 加群 V の部分加群とは，f によって保たれている線型部分空間である．つまり，$f(W) \subset W$ を満たす線型部分空間 W のことである．

1.2 A 加群の準同型写像

定義 1.6. M, M' を A 加群とし，$f\colon M \to M'$ を群準同型写像とする．任意の $a \in A$, $x \in M$ に対して $f(ax) = af(x)$ が成り立つとき，f が A 加群の準同型写像 (または A 線形写像) であるという．

写像 $f\colon M \to M'$ が A 線形写像のとき，

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in M |\ f(x) = 0\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) |\ x \in M\}$$

はそれぞれ f の核，f の像といい，それぞれ M と N の部分 A 加群である．f が全単射であるときに，f が同型写像であるという．このとき，$f^{-1}\colon M' \to M$ も A 線形写像である．同型写像 $M \to M'$ が存在するときに $M \simeq M'$ と表す．

M を A 加群とし，$N \subset M$ をその部分加群とする．$a \in A$, $x \in M$ に対して

$$a(x + N) = ax + N$$

とおくことによって，M/N は A 加群になる．群の場合と同様に，A 加群の準同型定理が存在する．

定理 1.7. $f\colon M \to M'$ を A 加群の準同型とする．f は A 加群の同型写像

$$M/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$$

を誘導する．

証明

群論により，写像 $M/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$, $x + \mathrm{Ker}(f) \mapsto f(x)$ は群同型である．この写像は明らかに A 線形写像であるので，主張が従う．

準同型写像 $f\colon M \to M'$ に対して，

$$\mathrm{Coker}(f) = M'/\mathrm{Im}(f)$$

とおき，f の余核という．明らかに以下が成り立つ．

$$f \text{ が単射である} \iff \mathrm{Ker}(f) = 0$$
$$f \text{ が全射である} \iff \mathrm{Coker}(f) = 0$$
$$f \text{ が全単射である} \iff \mathrm{Ker}(f) = 0 \text{ かつ } \mathrm{Coker}(f) = 0.$$

M, M' を A 加群とする．A 線形写像 $M \to M'$ 全体の集合を $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ と表す．$f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, M')$, $a \in A$ に対して,

$$(af)(x) = af(x)$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

とおくことで, $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ に A 加群の構造を入れる．$M = M'$ のとき, $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ を $\mathrm{End}_A(M)$ とおく．注意： $\mathrm{End}(M)$ は群準同型 $M \to M$ 全体の集合を意味する．一方, $\mathrm{End}_A(M)$ は A 線型写像 $M \to M$ 全体の集合を意味する (ゆえに包含関係 $\mathrm{End}_A(M) \subset \mathrm{End}(A)$ が成り立つ)．$A = \mathbb{Z}$ のとき両者が一致するが, 一般には異なっている．

1.3 部分加群の和, イデアルと部分加群の積

M を A 加群とし, $(M_i)_{i \in I}$ を M の部分加群の族とする．

$$\sum_{i \in I} M_i = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \;\middle|\; x_i \in M_i,\ \text{有限個を除き } x_i = 0 \right\}$$

とおき, $(M_i)_{i \in I}$ の和という．明らかに, $\sum_{i \in I} M_i$ は M の部分加群であり, 全ての M_i を含む部分加群の中で最小のものである．また, $(M_i)_{i \in I}$ の共通部分 $\bigcap_{i \in I} M_i$ も明らかに M の部分加群をなす．x を M の元とする．x で生成される巡回加群とは

$$Ax = \{ax \mid a \in A\}$$

のことである．写像 $f\colon A \to Ax$, $a \mapsto ax$ は明らかに A 加群の準同型であり, 全射である．その核は

$$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$$

であり, x の零化イデアルという．準同型定理より, A 加群の同型写像

$$A/\mathrm{Ann}(x) \simeq Ax$$

が得られる．

例 1.8. V を K ベクトル空間とし, $f\colon V \to V$ を自己準同型とする．このとき, V を $K[X]$ ベクトル空間として考えることができる．$v \in V$ とし,

$$W = \mathrm{Span}(v, f(v), f^2(v), f^3(v), \dots)$$

とおく．明らかに, $f(W) \subset W$ であるので, W は V の部分 $K[X]$ 加群である．明らかに, $W = \{P(X)v \mid P \in K[X]\}$ が成り立つので, W は v で生成される部分加群である．

M の元の族 $(x_i)_{i \in I}$ で生成される部分加群とは

$$\sum_{i \in I} Ax_i$$

の部分加群である．つまり, $\sum_{i \in I} a_i x_i$ (但し, $a_i \in A$ で, 有限個を除き $a_i = 0$) と表せる元全体の集合である．

$\mathfrak{a} \subset A$ をイデアルとし, $N \subset M$ を部分加群とする．このとき,

$$\mathfrak{a}N = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \;\middle|\; n \geq 1, a_j \in \mathfrak{a}, x_j \in N \right\}$$

とおき, $\mathfrak{a}$ と N の積 $\mathfrak{a}N$ という．明らかに, $\mathfrak{a}N$ は部分加群であり, $\mathfrak{a}N \subset N$ である．とくに, A の 2 つのイデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が与えれているとき, $\mathfrak{ab}$ が定義されている．具体的に

$$\mathfrak{ab} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \;\middle|\; n \geq 1, a_j \in \mathfrak{a},\ b_j \in \mathfrak{b} \right\}$$

であり, A のイデアルである．

1.4　加群の直積, 加群の直和

$(M_i)_{i\in I}$ を A 加群の族とする．成分ごとに足し算を定義すると直積

$$\prod_{i\in I} M_i$$

は自然に A 加群になり, $(M_i)_{i\in I}$ の直積という．一方,

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; \text{有限個を除き } x_i = 0 \right\}$$

とおき, 族 $(M_i)_{i\in I}$ の直和という．$\bigoplus_{i\in I} M_i$ は $\prod_{i\in I} M_i$ の部分加群である．また, I が有限集合ならば, 直和と直積は一致する．

第 i 成分以外の成分が 0 であるような元全体のなす $\bigoplus_{i\in I} M_i$ の部分加群を M_i と同一視することで, M_i を $\bigoplus_{i\in I} M_i$ の部分加群として考える．N を A 加群とし, 各 $i\in I$ に対して $f_i\colon M_i \to N$ を A 線形写像とする．このとき, $f|_{M_i} = f_i$ となる A 線形写像

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \to N$$

が一意的に存在する．実際に, f を $f\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I} f_i(x_i)$ によって定義すれば良い (但し, 有限個を除き $x_i = 0$ であるので f が well-defined であることに注意する)．f の一意性は明らかである．言い換えれば, 写像

$$\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(M_i, N), \quad f \mapsto (f|_{M_i})_{i\in I}$$

は全単射である．

同様に, $j\in I$ に対し自然な射影 $\prod_{i\in I} M_i \to M_j$ を p_j とおく (族 $x = (x_i)_{i\in I}$ に対して $p_j(x) = x_j$ で定まる写像である)．任意の A 加群 N に対して, 以下の写像が全単射である．

$$\mathrm{Hom}_A\left(N, \prod_{i\in I} M_i\right) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_A(N, M_i), \quad f \mapsto (p_i \circ f)_{i\in I}.$$

つまり, A 線形写像の族 $f_i\colon N \to M_i$ $(i\in I)$ が与えられているとき, $p_i \circ f = f_i$ $(i\in I)$ を満たす A 線形写像 $N \to \prod_{i\in I} M_i$ が一意的に存在する．$x\in N$ に対し $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ と置けば良い．

1.5　自由加群

I を集合とする．全ての $i\in I$ に対して, $M_i = A$ としたときに, 族 $(M_i)_{i\in I}$ の直積と 直和をそれぞれ A^I と $A^{(I)}$ で表す．すなわち

$$A^I = \prod_{i\in I} A, \qquad A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A.$$

各 $j\in I$ に対し, $e_j \in A^{(I)}$ を $e_j = (\delta_{i,j})_{i\in I}$ によって定める．任意の元 $x\in A^{(I)}$ について,

$$x = \sum_{i\in I} a_i e_i \quad \text{有限個を除き}, \ a_i = 0$$

と一意的に表すことができる．$(e_i)_i$ を $A^{(I)}$ の標準基底という．e_i を単に $[i]$ と表す場合もある．この記号を利用する場合, $A^{(I)}$ の任意の元は

$$x = a_1[i_1] + a_2[i_2] + \cdots + a_n[i_n] \tag{1.1}$$

$(a_1, \ldots, a_n \in A,\ i_1, \ldots, i_n \in I)$ と表される．上記の和は形式和と呼ばれる．I はただの集合だから, I の二つの元 i, j の和 $i+j$ は定義されていないが, $A^{(I)}$ の元として $[i]+[j]$ が定義されている．そのため, $[i]+[j]$ は「形式和」と呼ばれる．

M を A 加群とし, $(x_i)_{i\in I}$ を M の元の族とする．このとき, $f(e_i) = x_i$ $(i \in I)$ を満たす A 加群の準同型 $f\colon A^{(I)} \to M$ がただ一つ存在する．言い換えれば, 写像

$$\mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, M) \to M^I, \quad f \mapsto (f(e_i))_{i\in I}$$

は全単射である．

定義 1.9. M を A 加群とする．M の元の族 $(u_i)_{i\in I}$ が M の基底であるとは, 任意の元 $x \in M$ が一意的に

$$x = \sum_{i\in I} a_i u_i \quad \text{有限個を除き}, \ a_i = 0$$

と表せることをいう．基底を持つ加群を自由加群という．

特に, $(u_i)_{i\in I}$ が基底ならば, 「A 線型独立」である．すなわち,

$$\sum_{i\in I} a_i u_i = 0 \implies \forall i \in I,\ a_i = 0.$$

$(u_i)_{i\in I}$ が M の基底ならば, 写像

$$A^{(I)} \longrightarrow M, \quad (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i u_i$$

は同型写像である．よって, $M \simeq A^{(I)}$ である．逆に, $M \simeq A^{(I)}$ ならば, M が自由 A 加群である．

例 1.10.

- A^n は自由 A 加群である．
- $A[X]$ は自由 A 加群であり, 族 $(1, X, X^2, X^3, \dots)$ はその基底をなす．
- $\mathbb{Q}$ は自由 $\mathbb{Z}$ 加群でない．なぜならば, $x = \frac{a}{b}$ と $y = \frac{c}{d}$ $(b.d \neq 0)$ が有理数ならば, $bx - dy = 0$ である．よって (x, y) は $\mathbb{Z}$ 線型独立でない．

注意 1.11. 任意の A 加群が適当な自由加群の商加群として表せる．なぜならば, M を A 加群とし, $\{x_i\}_{i\in I}$ をその生成系とする．以上より, $f(e_i) = x_i$ を満たす準同型 $f\colon A^{(I)} \to M$ が存在する．$\{x_i\}_{i\in I}$ が生成系だから, f は明らかに全射である．よって,

$$M \simeq A^{(I)}/\operatorname{Ker}(f)$$

となる．

1.6 加群の完全系列

$M_0, M_1 \dots, M_n$ を A 加群とし, $f_i\colon M_{i-1} \to M_i$ $(1 \le i \le n)$ を A 線形写像とする．

定義 1.12. 系列

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

が M_i $(1 \le i \le n-1)$ において完全であるとは,

$$\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$$

が成り立つことをいう．系列が各 M_i において完全であるとき, 完全系列であるという．

特に, 上記の系列が M_i において完全ならば, $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ より $f_{i+1} \circ f_i = 0$ が成り立つ．

例 1.13. 完全系列を用いて写像の単射性, 全射性, 全単射性を表すことができる．

- $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ が完全系列 $\iff$ f が単射．

- $M' \xrightarrow{f} M \to 0$ が完全系列 $\iff$ f が全射.
- $0 \to M' \xrightarrow{f} M \to 0$ が完全系列 $\iff$ f が全単射.

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

という形の完全系列を短完全列という．このとき, f は単射であり, g は全射である．さらに $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ が成り立つ．よって, $\mathrm{Coker}(f) = M/\mathrm{Im}(f) = M/\mathrm{Ker}(g) \simeq \mathrm{Im}(g) = M''$ となる.

任意の A 加群の準同型 $f\colon M' \to M$ が与えられているとき, 完全系列

$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to M' \xrightarrow{f} M \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$$

が得られる (ここで, $\mathrm{Ker}(f) \to M'$ は自然な包含写像であり, $M \to \mathrm{Coker}(f) = M/\mathrm{Im}(f)$ は自然な射影である).

$f\colon M' \to M$ を A 線型写像とする．加群 N に対して, 二つの写像 h^f, h_f を

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{h^f} \mathrm{Hom}_A(M', N), \quad u \mapsto u \circ f \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{h_f} \mathrm{Hom}_A(N, M), \quad v \mapsto f \circ v \tag{1.3}$$

によって定義する．明らかに, h^f, h_f は A 加群の準同型である.

命題 1.14.

(1) 以下の系列が与えられているとする.

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \tag{1.4}$$

系列 (1.4) が完全系列であるためには, 任意の A 加群 N に対して, 以下の系列が完全系列であることは必要十分である.

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{h^g} \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{h^f} \mathrm{Hom}_A(M', N) \tag{1.5}$$

(2) 以下の系列が与えられているとする.

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \tag{1.6}$$

系列 (1.4) が完全系列であるためには, 任意の A 加群 N に対して, 以下の系列が完全系列であることは必要十分である.

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{h_f} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{h_g} \mathrm{Hom}_A(N, M'') \tag{1.7}$$

証明

(1) を示す．系列 (1.4) が完全であることを仮定する．g が全射なので, 任意の $u\colon M'' \to N$ に対して $u \circ g = 0$ ならば $u = 0$ となる．よって, h^g は単射である．次に, $\mathrm{Im}(h^g) = \mathrm{Ker}(h^f)$ を確認する．$g \circ f = 0$ より, $h^f \circ h^g = 0$ であり, 故に $\mathrm{Im}(h^g) \subset \mathrm{Ker}(h^f)$ である．逆に, $u\colon M \to N$ が $u \circ f = 0$ を満たすとする．このとき, $u(\mathrm{Im}(f)) = 0$ より, 準同型 $u'\colon M/\mathrm{Im}(f) \to N$ を用いて, $u = u' \circ \pi$ と分解できる (但し, $\pi\colon M \to M/\mathrm{Im}(f)$ は自然な射影である)．一方, $M/\mathrm{Im}(f) = M/\mathrm{Ker}(g) \simeq \mathrm{Im}(g) = M''$ である．よって, $u = u'' \circ g$ となる準同型 $u''\colon M'' \to N$ が存在する．すなわち $u = h^g(u'')$ となり, $u \in \mathrm{Im}(h^g)$ である.

次に, 任意の A 加群 N に対して, 系列 (1.5) が完全であるとし, 系列 (1.4) が完全であることを示す．まず, g が全射であることを確認する．$N = \mathrm{Coker}(g) = M''/\mathrm{Im}(g)$ とし, $u\colon M'' \to N$ を自然な射影とする．明らかに $u \circ g = 0$ であり, $u \in \mathrm{Ker}(h^g)$ である．h^g が単射だから $u = 0$ となり, すなわち $N = 0$, $\mathrm{Im}(g) = M''$ である．次に, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$(あるいは同じことだが $g \circ f = 0$) を示す．$N = M''$ とし, $u = \mathrm{id}_{M''}$ とする．系列 (1.5) が完全だから, $h^f \circ h^g = 0$ である．よって, $0 = h^f \circ h^g(u) = g \circ f$ となる．最後に, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$ を示す．$N = \mathrm{Coker}(f)$ とおき, $u\colon M \to N$ を自然な射影とする．明らかに

$u \circ f = 0$ であり, $u \in \mathrm{Ker}(h^f)$ である. (1.5) の完全性より, $u = u' \circ g$ となる準同型 $u' \colon M'' \to N$ が存在する. とくに, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(f)$ となる.

(2) を示す. 系列 (1.6) が完全であることを仮定する. f が単射なので, 任意の $u \colon N \to M'$ に対して $f \circ u = 0$ ならば $u = 0$ となる. よって, h_f は単射である. 次に, $\mathrm{Im}(h_f) = \mathrm{Ker}(h_g)$ を確認する. $g \circ f = 0$ より, $h_g \circ h_f = 0$ であり, 故に $\mathrm{Im}(h_f) \subset \mathrm{Ker}(h_g)$ である. 逆に, $u \colon N \to M$ が $g \circ u = 0$ を満たすとする. このとき, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ である. f が単射だから, 同型写像 $M' \to \mathrm{Im}(f)$ を誘導する. よって, 準同型 $u' \colon N \to M'$ が存在し, $u = f \circ u'$ と分解できる. すなわち $u = h_f(u')$ となり, $u \in \mathrm{Im}(h_f)$ である.

次に, 任意の A 加群 N に対して, 系列 (1.7) が完全であるとし, 系列 (1.6) が完全であることを示す. まず, f が単射であることを確認する. $N = \mathrm{Ker}(f)$ とし, $u \colon N \to M'$ を自然な包含写像とする. 明らかに $f \circ u = 0$ であり, $u \in \mathrm{Ker}(h_f)$ である. h_f が単射より, $u = 0$ となり, すなわち $\mathrm{Ker}(f) = 0$ が成立する. 次に, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$(あるいは同じことだが $g \circ f = 0$) を示す. $N = M'$ とし, $u = \mathrm{id}_{M'}$ とする. 系列 (1.7) が完全だから, $h_g \circ h_f = 0$ である. よって, $0 = h_g \circ h_f(u) = g \circ f$ となる. 最後に, $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$ を示す. $N = \mathrm{Ker}(g)$ とおき, $u \colon N \to M$ を自然な包含写像とする. 明らかに $g \circ u = 0$ であり, $u \in \mathrm{Ker}(h_g)$ である. (1.7) の完全性より, $u = f \circ u'$ となる準同型 $u' \colon N \to M'$ が存在する. とくに, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(f)$ となる.

定理 1.15. 短完全列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ について, 以下の条件が互いに同値である.

(i) $f' \circ f = \mathrm{id}_{M'}$ を満たす準同型 $f' \colon M \to M'$ が存在する.

(ii) $g \circ g' = \mathrm{id}_{M''}$ を満たす準同型 $g' \colon M'' \to M$ が存在する.

(iii) $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus N$ となる部分加群 N が存在する.

証明

- (iii) $\Longrightarrow$ (i) を示す：$M = \mathrm{Ker}(g) \oplus N$ とする. この分解で定まる射影 $p \colon M \to \mathrm{Ker}(g)$ を考える. f は単射なので同型写像 $f_1 \colon M \to \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ を引き起こす. $f' = f_1^{-1} \circ p$ とおけば良い.
- (iii) $\Longrightarrow$ (ii) を示す：$g \colon M \to M''$ が全射であるので, g を N へ制限した写像 $g_1 \colon N \to M''$ は全単射である (なぜならば, $\mathrm{Ker}(g_1) = \mathrm{Ker}(g) \cap N = 0$ であり, さらに $M'' = g(M) = g(N + \mathrm{Ker}(g)) = g(N)$ である). $g' = g_1^{-1}$ とおけば良い.
- (i) $\Longrightarrow$ (iii) を示す：$N = \mathrm{Ker}(f')$ とおく. $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap N$ ならば, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ より $x = f(y)$ となる $y \in M'$ がとれる. よって, $0 = f'(x) = f'(f(y)) = y$ となり, $x = 0$ が成り立つ. ゆえに $N \cap \mathrm{Ker}(g) = 0$. また, $x \in M$ に対して, $x = f(f'(x)) + (x - f(f'(x)))$ と書ける. $z = x - f(f'(x))$ とおく. $f'(z) = f'(x) - f'(f(f'(x))) = f'(x) - f'(x) = 0$. また, $f(f'(x)) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ である. したがって $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus N$ が成り立つ.
- (ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す：$N = \mathrm{Im}(g')$ とおく. $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap N$ ならば, $x = g'(y)$ となる $y \in M''$ が存在する. よって, $0 = g(x) = g(g'(y)) = y$ となり, ゆえに $x = 0$. よって, $\mathrm{Ker}(g) \cap N = 0$ である. また, $x \in M$ に対して, $x = g'(g(x)) + (x - g'(g(x)))$ と書ける. $z = x - g'(g(x))$ とおく. $g(z) = g(x) - g(g'(g(x))) = g(x) - g(x) = 0$ となる. したがって, $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus N$ が成り立つ.

定義 1.16. 定理 1.15 の同値な条件が満たされるとき, 短完全列が分裂するという.

1.7 加群の圏, 関手

A を可換環とする. A 加群全体を集めたものを Mod_A とおき, A 加群の圏という. A, B を可換環とする. 共変関手 $F \colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ とは, 以下の条件を満たす対応 $M \mapsto F(M)$ および $f \mapsto F(f)$ のことである.

(a) 任意の A 加群 M について, $F(M)$ は B 加群である.
(b) 任意の A 加群の準同型 $f\colon M \to N$ について, $F(f)$ は B 加群の準同型 $F(M) \to F(N)$ である.
(c) 任意の準同型 $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ に対して, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ が成り立つ.
(d) 任意の A 加群 M に対して, $F(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{F(M)}$ である.

反変関手 $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ は同様に定義される. 反変関手の場合は, 上記の条件 (a) および (d) はそのまま, 条件 (b) および (c) はそれぞれ以下の条件 (b'), (c') に入れ換える.

(b') 任意の A 加群の準同型 $f\colon M \to N$ について, $F(f)$ は B 加群の準同型 $F(N) \to F(M)$ である.
(c') 任意の準同型 $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ に対して, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ が成り立つ.

例 1.17. N を A 加群とする. A 加群 M に対して $F(M) = \mathrm{Hom}_A(N, M)$ とおく. また, A 線型写像 $f\colon M' \to M$ に対し, 準同型 $F(f)$ を

$$F(f)\colon \mathrm{Hom}_A(N, M') \to \mathrm{Hom}_A(N, M), \quad v \mapsto f \circ v$$

によってに定義する. こうすると共変関手

$$F\colon \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$$

が得られる. この関手を $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ で表す場合がある. 同様に, A 加群 M に対して $G(M) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ とおく. また, A 線型写像 $f\colon M' \to M$ に対し, 準同型 $G(f)$ を

$$G(f)\colon \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M', N), \quad u \mapsto u \circ f$$

によって定義する. こうすると反変関手

$$G\colon \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_A$$

が得られる. この関手を $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ で表す場合がある.

1.8 完全関手

A, B を可換環とし, $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を共変関手とする. A 加群 M, N について写像

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(F(M), F(N)), \quad f \mapsto F(f)$$

を考える.

定義 1.18. $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を共変関手とする. 任意の $M, N \in \mathrm{Mod}_A$ に対して, 上記の写像 $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(F(M), F(N))$ が群の準同型であるときに, F が加法的関手であるという. つまり, 加法的な共変関手とは, 任意の A 線形写像 $f, g\colon M \to N$ に対し

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

を満たすものである.

加法的な反変関手は同様に定義される.

例 1.19. $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ は加法的な共変関手であり, $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ は加法的な反変関手である.

補題 1.20. $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を加法的な関手とする.
(1) $M = 0$ ならば, $F(M) = 0$ である.
(2) 任意の 2 つの A 加群 M, N に対して, $F(M \oplus N) = F(M) \oplus F(N)$ である.

証明

(1) を示す．零準同型 $0\colon M \to N$ を考える．$f \mapsto F(f)$ が群準同型より，$F(0)\colon F(M) \to F(N)$ も零準同型である．特に，$M = 0$ のとき $\mathrm{id}_M = 0$ であるので，$\mathrm{id}_{F(M)} = F(\mathrm{id}_M) = F(0) = 0$ である．故に $F(M) = 0$ となる．

(2) を示す．$\iota_M(x) = (x, 0)$, $\iota_N(y) = (0, y)$, $p_M(x, y) = x$, $p_N(x, y) = y$ で定まる写像 $M \xrightarrow{\iota_M} M \oplus N$, $M \xrightarrow{\iota_N} M \oplus N$, $M \oplus N \xrightarrow{p_M} M$, $M \oplus N \xrightarrow{p_N} N$ を考える．写像

$$\begin{aligned} &u := (F(p_M), F(p_N))\colon F(M \oplus N) \to F(M) \oplus F(N) \\ &v\colon F(M) \oplus F(N) \to F(M \oplus N), \quad (x, y) \mapsto F(\iota_M)(x) + F(\iota_N)(y) \end{aligned}$$

を考える．$(x, y) \in F(M) \oplus F(N)$ に対し以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} (u \circ v)(x, y) &= u(F(\iota_M)(x) + F(\iota_N)(y)) \\ &= u(F(\iota_M)(x)) + u(F(\iota_N)(y)) \\ &= (F(p_M)(F(\iota_M)(x)), F(p_N)(F(\iota_M)(x))) + (F(p_M)(F(\iota_N)(y)), F(p_N)(F(\iota_N)(y))) \\ &= (F(\mathrm{id}_M)(x), F(0)(x)) + (F(0)(y), F(\mathrm{id}_N)(y)) \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

である．同様に，任意の $z \in F(M \oplus N)$ に対し

$$\begin{aligned} (v \circ u)(z) &= v(F(p_M)(z), F(p_N)(z)) \\ &= F(\iota_M)(F(p_M)(z)) + F(\iota_N)(F(p_N)(z)) \\ &= F(\iota_M \circ p_M)(z) + F(\iota_N \circ p_N)(z) \\ &= F(\iota_M \circ p_M + \iota_N \circ p_N)(z) \\ &= F(\mathrm{id}_{M \oplus N})(z) \\ &= \mathrm{id}_{F(M \oplus N)}(z) = z. \end{aligned}$$

よって，$u \circ v = \mathrm{id}_{F(M) \oplus F(N)}$ かつ $v \circ u = \mathrm{id}_{F(M \oplus N)}$ である．したがって $F(M \oplus N)$ と $F(M) \oplus F(N)$ が自然に同型である．

定義 1.21. $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を加法的な共変関手とする．

- 任意の完全系列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ に対し，系列 $0 \to F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'')$ が完全系列であるときに，F が左完全であるという．
- 任意の完全系列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ に対し，系列 $F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \to 0$ が完全系列であるときに，F が右完全であるという．
- 任意の完全系列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ に対し，系列 $F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'')$ が完全系列であるときに，F が完全であるという．

定義 1.22. $G\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を加法的な反変関手とする．

- 任意の完全系列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ に対し，系列 $0 \to G(M'') \xrightarrow{G(g)} G(M) \xrightarrow{G(f)} G(M')$ が完全系列であるときに，G が左完全であるという．
- 任意の完全系列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ に対し，系列 $G(M'') \xrightarrow{G(g)} G(M) \xrightarrow{G(f)} G(M') \to 0$ が完全系列であるときに，G が右完全であるという．
- 任意の完全系列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ に対し，系列 $G(M'') \xrightarrow{G(g)} G(M) \xrightarrow{G(f)} G(M')$ が完全系列であるときに，G が完全であるという．

例 1.23. N を A 加群とする．

- $\mathrm{Hom}_A(N, -)$ は左完全な共変関手である．
- $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ は左完全な反変関手である．

命題 1.24. $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を加法的な共変関手とする．以下が同値である．

(i) F が完全関手である．

(ii) 任意の完全系列 $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ に対し，$F(M_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(M_2) \xrightarrow{F(f_2)} \dots \xrightarrow{F(f_{n-1})} F(M_n)$ が完全系列である．

(iii) 任意の短完全列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ に対し，系列 $0 \to F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \to 0$ が短完全列である．

反変関手の場合は同様のことが成り立つ．

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) および (i) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである．(iii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．完全系列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ について，以下の図式を考察する．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& \mathrm{Ker}(f) \arrow[dr] & & & & \mathrm{Im}(g) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & M' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & M \arrow[rr, "g"] \arrow[ur] & & M'' \arrow[dr] & & \\
& & & \mathrm{Im}(f) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \mathrm{Coker}(g) \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}
$$

よって，上の図式の短完全列に関手 F を適用すれば，仮定より短完全列になる．よって，$F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'')$ も完全系列であることが容易に分かる．

$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ を A 加群の短完全列とし，$F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ を加法的な共変関手とする．このとき，系列

$$0 \to F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \to 0 \tag{1.8}$$

が短完全列であるとは限らない．しかし，以下の命題が成り立つ．

命題 1.25. $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ が分裂するとする．このとき系列 1.8 は分裂する短完全列である．

証明

$f' \circ f = \mathrm{id}_{M'}$ を満たす準同型 $f'\colon M \to M'$ を考える．任意の $x \in M$ に対し，

$$x = f(f'(x)) + (x - f(f'(x)))$$

と表せる．$h(x) = x - f(f'(x))$ で定まる写像 $h\colon M \to M$ を考える．$x = f(y)$ のとき，$h(f(y)) = f(y) - f(f'(f(y))) = f(y) - f(y) = 0$ である．ゆえに，準同型の定理より，$h(x) = g'(g(x))$ となる準同型 $g'\colon M'' \to M$ が存在する．$y \in M''$ とし，$y = g(x)$ とする．このとき，$g(g'(y)) = g(h(x)) = g(x - f(f'(x))) = g(x) = y$ である．ゆえに $g \circ g' = \mathrm{id}_{M''}$ が成り立つ．また，任意の $x \in M$ に対して $x = f \circ f'(x) + g'(g(x))$ である．すなわち

$$\mathrm{id}_M = f \circ f' + g' \circ g$$

である．(1.8) が短完全列であることを示す．$F(f') \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(M')}$ かつ $F(g) \circ F(g') = \mathrm{id}_{F(M'')}$ が成り立つ．したがって，$F(f)$ は単射であり，$F(g)$ は全射である．F が加法的なので $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) =$

$F(0)=0$ である．ゆえに $\operatorname{Im}(F(f)) \subset \operatorname{Ker}(F(g))$ が成り立つ．また, F が加法的だから

$$\mathrm{id}_{F(M)} = F(f) \circ F(f') + F(g') \circ F(g)$$

である．この関係から, $\operatorname{Im}(F(f)) = \operatorname{Ker}(F(g))$ であることが直ちに確認できる．よって 1.8 が短完全列である．最後に, $F(f') \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(M')}$ が成り立つので, 系列 1.8 が分裂する．

1.9 蛇の補題

以下の図式のように A 加群 M', M, N, N' と準同型 u, u', f, f' が与えられているとする．

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[d, "f"] \\ N' \arrow[r, "u'"] & N \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

定義 1.26. 図式 (1.9) が可換図式であるとは, $u' \circ f' = f \circ u$ が成り立つことをいう．

同様に, 一般的な A 加群の準同型の図式が可換図式であるとは, 始点と終点が同じである図式の任意の二つのルート

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[r, "f_2"] & \cdots \arrow[r, "f_{n-2}"] & M_{n-1} \arrow[dr, "f_{n-1}"] & \\ M_1 = M'_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f'_1"'] & & & & M_n = M'_m \\ & M'_2 \arrow[r, "f'_2"'] & \cdots \arrow[r, "f'_{m-2}"'] & M'_{m-1} \arrow[ur, "f'_{m-1}"'] & \end{tikzcd}$$

について,

$$f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = f'_{m-1} \circ f'_{m-2} \circ \cdots \circ f'_2 \circ f'_1$$

が成り立つことをいう．

命題 1.27 (蛇の補題)**.** 可換図式

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' & \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

が与えられているとし, その 2 つの行が完全系列であるとする．このとき, 完全系列

$$\operatorname{Ker}(f') \xrightarrow{u_1} \operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{v_1} \operatorname{Ker}(f'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}(f') \xrightarrow{u'_1} \operatorname{Coker}(f) \xrightarrow{v'_1} \operatorname{Coker}(f'') \tag{1.11}$$

が存在する．さらに, u が単射ならば, u_1 も全射である．v が単射ならば v'_1 も全射である．

証明

まず, 系列 (1.11) に現れる写像を全て定義する．

- $f \circ u = u' \circ f'$ より, $x \in M'$ で $f'(x) = 0$ ならば, $f(u(x)) = u'(f'(x)) = 0$ である．よって, $u(\operatorname{Ker}(f')) \subset \operatorname{Ker}(f)$ が成り立つ．ゆえに, u は準同型 $u_1\colon \operatorname{Ker}(f') \to \operatorname{Ker}(f)$ を誘導する．同様な議論より, v は準同型 $v_1\colon \operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Ker}(f'')$ を誘導する．
- $f \circ u = u' \circ f'$ より, $u'(\operatorname{Im}(f')) \subset \operatorname{Im}(f)$ である．したがって, u' は準同型 $u'_1\colon \operatorname{Coker}(f') = N'/\operatorname{Im}(f') \to N/\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Coker}(f)$, $x + \operatorname{Im}(f') \mapsto u'(x) + \operatorname{Im}(f)$ を誘導する．同様に, v' は準同

型 $v_1'\colon \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(f'')$ を誘導する.

- 最後に, 準同型 $\delta\colon \mathrm{Ker}(f'') \to \mathrm{Coker}(f')$ を作る. $x \in \mathrm{Ker}(f'')$ とする. v が全射より, $x = v(y)$ を満たす $y \in M$ がとれる. $v'(f(y)) = f''(v(y)) = f''(x) = 0$ より, $f(y) \in \mathrm{Ker}(v') = \mathrm{Im}(u')$ である. よって, $f(y) = u'(z)$ となる $z \in N'$ が一意的に存在する. $\delta(x) = z + \mathrm{Im}(f')$ とおき, 写像 $\delta\colon \mathrm{Ker}(f'') \to \mathrm{Coker}(f')$ を定める. この写像が well-defined であることを示す (つまり, $\delta(x)$ が $y \in M$ の取り方に依らない). $v(y_1) = v(y_2) = x$ とし, $u'(z_1) = f(y_1)$ かつ $u'(z_2) = f(y_2)$ を満たす $z_1, z_2 \in N'$ を考える. $v(y_1 - y_2) = 0$ より, $y_1 - y_2 = u(w)$ $(w \in M')$ と書くことができる. よって, $u'(z_1 - z_2) = f(u(w)) = u'(f'(w))$ である. u' が単射だから, $z_1 - z_2 = f'(w)$ となり, ゆえに $z_1 + \mathrm{Im}(f') = z_2 + \mathrm{Im}(f')$ が成り立つ. よって, δ は well-defined である. δ が A 線型写像であることは容易に確認できる.

次に, 系列 (1.11) が完全系列であることを証明する.

- $\mathrm{Ker}(f')$ における完全性：u が単射であるので, 引き起こされた写像 $\mathrm{Ker}(f') \to \mathrm{Ker}(f)$ も単射である.
- $\mathrm{Ker}(f)$ における完全性：$v \circ u = 0$ より, $v_1 \circ u_1 = 0$ であり, すなわち $\mathrm{Im}(u_1) \subset \mathrm{Ker}(v_1)$ である. 逆に, $x \in \mathrm{Ker}(f)$ とし, $v(x) = 0$ とする. 図式 (1.10) の上の行が完全系列であるので, $x = u(y)$ となる $y \in M'$ が存在する. 一方, $u'(f'(y)) = f(u(y)) = f(x) = 0$ である. u' が単射だから, $f'(y) = 0$ となり, すなわち $y' \in \mathrm{Ker}(f')$ である. よって $\mathrm{Im}(u_1) = \mathrm{Ker}(v_1)$ が成り立つ.
- $\mathrm{Ker}(f'')$ における完全性：$a \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して, $u'(0) = 0 = f(a)$ より $\delta(v(a)) = 0$ が成り立つ. よって $\mathrm{Im}(v_1) \subset \mathrm{Ker}(\delta)$ である. 逆に, $x \in \mathrm{Ker}(f'')$ で, $\delta(x) = 0$ と仮定する. このとき, $x = v(y)$ $(y \in M)$ かつ $f(y) = u'(z)$ $(z \in \mathrm{Im}(f'))$ と書くことができる. よって, $z = f'(w)$ となる $w \in M'$ が存在する. $y' = y - u(w)$ とおくと, $v(y') = v(y) = x$ である. また, $f(y') = f(y) - f(u(w)) = f(y) - u'(f'(w)) = 0$ である. ゆえに, $y' \in \mathrm{Ker}(f')$ である. したがって, $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Im}(v_1)$ が成り立つ.
- $\mathrm{Coker}(f')$ における完全性：$x \in \mathrm{Ker}(f'')$ とし, $u_1'(\delta(x))$ を考える. $x = v(y)$ となる $y \in M$ をとり, $f(y) = u'(z)$ を満たす $z \in N'$ を考える. 準同型 δ の作り方より, $\delta(x) = z + \mathrm{Im}(f')$ である. よって, $u_1'(\delta(x)) = u'(z) + \mathrm{Im}(f)$ である. $u'(z) = f(y) \in \mathrm{Im}(f)$ より, $u_1'(\delta(x)) = 0$. ゆえに $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathrm{Ker}(u_1')$ が成り立つ. 逆に, $x \in N'$ とし, $u'(x) \in \mathrm{Im}(f)$ とする (すなわち $x + \mathrm{Im}(f') \in \mathrm{Ker}(u_1')$). このとき, $u'(x) = f(y)$ となる $y \in M$ が存在する. $z = v(y)$ とおくと, $f''(z) = f''(v(y)) = v'(f(y)) = v'(u'(x)) = 0$ となる. よって, $z \in \mathrm{Ker}(f'')$ である. また, $\delta(z) = x + \mathrm{Im}(f')$ が簡単に分かる. よって, $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(u_1')$.
- $\mathrm{Coker}(f)$ における完全性：$v' \circ u' = 0$ より, $v_1' \circ v_1' = 0$, すなわち $\mathrm{Im}(u_1') \subset \mathrm{Ker}(v_1')$ である. 逆に, $x \in N$ とし, $v'(x) \in \mathrm{Im}(f'')$ とする. このとき, $y \in M''$ を用いて $v'(x) = f''(y)$ と書ける. また, v が全射だから, $y = v(z)$ $(z \in M)$ と表せる. したがって, $v'(x - f(z)) = v'(x) - v'(f(z)) = f''(y) - f''(v(z)) = 0$. よって, $x - f(z) \in \mathrm{Ker}(v') = \mathrm{Im}(u')$ となり, $x - f(z) = u'(w)$ $(w \in N')$ と書ける. よって, $x + \mathrm{Im}(f) \in \mathrm{Im}(u_1')$ となる.
- $\mathrm{Coker}(f'')$ における完全性：v' が全射なので, v_1' も明らかに全射である.

系 1.28. 可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "u'"] & N \arrow[r, "v'"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

が与えられているとし, その２つの行が完全系列であるとする.

(1) f', f'' が全射ならば, f も全射である.

(2) f', f'' が単射ならば, f も単射である.

(3) f', f'' が全単射ならば, f も全単射である.

証明

(1) を示す. 蛇の補題より, 完全系列 $\mathrm{Coker}(f') \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(f'') \to 0$ が得られる. $\mathrm{Coker}(f') = \mathrm{Coker}(f'') = 0$ より, $\mathrm{Coker}(f) = 0$ である. ゆえに f は全射である. (2) の証明は同様である. (3) は (1) と (2) から分かる.

1.10 有限生成加群

定義 1.29. M を A 加群とする.

(a) $M = Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_n$ を満たす $x_1, \ldots, x_n$ が存在するときに, M が有限生成加群であるという. つまり, M が有限生成加群 $\iff$ 完全系列 $A^n \to M \to 0$ $(n \geq 1)$ が存在する.

(b) 完全系列 $A^k \to A^n \to M \to 0$ $(n, k \geq 1)$ が存在するとき, M が有限表示加群であるという.

注意 1.30. M が有限表示加群 $\iff$ 有限生成自由加群 L と全射準同型写像 $u\colon L \to M$ が存在し, $\mathrm{Ker}(u)$ が有限生成加群である.

命題 1.31. $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ を A 加群の短完全列とする.

(1) M' および M'' が有限生成加群ならば, M も有限生成加群である.

(2) M' および M'' が有限表示加群ならば, M も有限表示加群である.

証明

- (1) を示す：$M' = Ax'_1 + \cdots + Ax'_n$ かつ $M'' = Ax''_1 + \cdots + Ax''_m$ を仮定する. また, $x_i = f(x'_i)$ $(1 = 1, \ldots, n)$ とおき, $g(y_j) = x''_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ を満たす $y_j \in M$ をとる. M の元 z に対して, $g(x) = \sum_{j=1}^m a_j x''_j$ $(a_j \in A)$ と表せる. よって, $g(x - \sum_{j=1}^m a_j y_j) = 0$ となり, $x - \sum_{j=1}^m a_j y_j \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ である. ゆえに, $x - \sum_{j=1}^m a_j y_j = \sum_{i=1}^n b_i x_i$ $(b_i \in A)$ と書くことができる. 以上より, M が $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ によって生成される.
- (2) を示す：M', M'' が有限表示だから, 有限生成自由加群 L', L'' と全射準同型写像

$$u'\colon L' \to M'$$
$$u''\colon L'' \to M''$$

が存在し, $\mathrm{Ker}(u')$ と $\mathrm{Ker}(u'')$ が有限生成加群である. $(x_1, \ldots, x_s)$ を L'' の基底とし, $u''(x_i) = y_i$ とおく. また, g の全射性より $g(z_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす $z_i \in M$ が取れる. $v(x_i) = z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ で定まる準同型 $v\colon L'' \to M$ を考える. また, 写像 $u\colon L' \oplus L'' \to M$ を $u(x, y) = f(u'(x)) + v(y)$ で定める. 以下の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & L' \oplus L'' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & L'' \arrow[r] \arrow[d, "u''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

u' と u'' が全射だから, u も全射である. また, 完全系列

$$0 \to \mathrm{Ker}(u') \to \mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Ker}(u'') \to \mathrm{Coker}(u') = 0$$

が存在する. $\mathrm{Ker}(u')$ と $\mathrm{Ker}(u'')$ が有限生成加群だから, (1) より $\mathrm{Ker}(u)$ も有限生成である. したがって, M は有限表示加群である.

1.11 中山の補題

可換環 A が局所環であるとは, A がただ一つの極大イデアルを持つときにいう. 例えば, A が可換環で, $\mathfrak{p}$ が素イデアルならば, $\mathfrak{p}$ に関する局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ は局所環である (第 3 章参照).

定理 1.32 (中山の補題)**.** A を局所環とし, $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする. また, M を有限生成加群とする. $\mathfrak{m}M = M$ ならば, $M = 0$ が成り立つ.

証明

M の生成元の個数に関する帰納法によって証明する. M の生成系 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ をとる. 仮定より, $x_1 = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ $(a_i \in \mathfrak{m})$ と書くことができる. よって, $(1 - a_1)x_1 = \sum_{i=2}^n a_i x_i$ である. $1 - a_1 \in A - \mathfrak{m} = A^\times$ より, $x_1 \in Ax_2 + \cdots + Ax_n$ である. したがって, M が $x_2, \ldots, x_n$ によって生成される. 帰納法の仮定より $M = 0$ である.

注意 1.33. M が有限生成でないとき, 上記の定理が成り立つとは限らない. 例えば, 以下の可換環を考える.

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ b\text{ が奇数} \right\}.$$

A が局所環であり, その極大イデアルは $\mathfrak{m} = 2A$ である. $A \subset \mathbb{Q}$ より, $\mathbb{Q}$ を A 加群としてみなすことができる. 明らかに $\mathfrak{m}\mathbb{Q} = 2\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ である. そのため, 中山の補題は有限生成加群に限ることに注意する.

系 1.34. M を有限生成加群とし, $N \subset M$ を部分加群とする. $\mathfrak{m}M + N = M$ ならば, $M = N$ が成り立つ.

証明

$\mathfrak{m}M + N = M$ より $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$ となる. よって $M/N = 0$, すなわち $M = N$ である.

$\mathfrak{m}$ が極大イデアルだから, $k = A/\mathfrak{m}$ は可換体である. k を局所環 A の剰余体という. このとき, $a \in A$, $x \in M$ に対し,

$$(a + \mathfrak{m}) \cdot (x + \mathfrak{m}M) := ax + \mathfrak{m}M$$

とおくことで, $M/\mathfrak{m}M$ は k ベクトル空間になる.

命題 1.35. M を有限生成加群とし, $\overline{M} = M/\mathfrak{m}M$ とおく. また, $x \in M$ に対して $\overline{M}$ における x の像を $\overline{x}$ とおく. $x_1, \ldots, x_n \in M$ とする. このとき, $k\overline{x}_1 + \cdots + k\overline{x}_n = \overline{M}$ ならば $Ax_1 + \cdots + Ax_n\rangle = M$ である.

証明

$N = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ とおく. 明らかに, $M = N + \mathfrak{m}M$ である. よって, $M = N$ が成り立つ.

2 テンソル積

2.1 定義

定義 2.1. M, N, P を 3 つの A 加群とする．写像 $\psi\colon M \times N \to P$ が A 双線型写像であるとは, 任意の $x_0 \in M$ と $y_0 \in N$ に対して, 写像 $M \to P$, $x \mapsto \psi(x, y_0)$ 及び $N \to P$, $y \mapsto \psi(x_0, y)$ が A 線形写像であることをいう．

例えば, $A \times A \to A$, $(x, y) \mapsto xy$ は A 双線形写像である．

M, N を A 加群とする．以下は,「テンソル積」と呼ばれる特別な双線型写像

$$\psi\colon M \times N \to M \otimes N, \quad (x, y) \mapsto x \otimes y$$

を定義する．全ての双線型写像 $M \times N \to S$ の中で, テンソル積は「始対象」と呼ばれるものである．「始対象」とは, 任意の双線型写像 $\phi\colon M \times N \to S$ が与えられているとき, 以下の図式が交換するような準同型 $f\colon M \otimes N \to S$ が一意的に存在することを意味する．

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ M \otimes N \arrow[rr, "f", "\text{一意的に存在する!}"'] & & S \end{tikzcd}$$

以下の定理では, $M \otimes N$ の存在性及び (同型の除いた) 一意性が証明される．定理では M と N のテンソル積が暫定的に T と表されるが, 次の定義 2.3 で記号 $M \otimes_A N$ が導入される．

定理 2.2. 以下の条件を満たす A 加群 T と A 双線形写像 $\psi\colon M \times N \to T$ が存在する．

A 加群 S と A 双線形写像 $\phi\colon M \times N \to S$ が与えられているとき, $\phi = f \circ \psi$ となる A 線形写像 $f\colon T \to S$ が一意的に存在する． (条件 2.2)

また, (T, ψ) と (T', ψ') がそれぞれ (条件 2.2) を満たす組ならば, $\psi' = \gamma \circ \psi$ となる同型写像 $\gamma\colon T \to T'$ が一意的に存在する．

証明

まず, (T, ψ) の一意性を示す．(T, ψ) と (T', ψ') がそれぞれ (条件 2.2) を満たすとする．$S = T'$, $\phi = \psi'$ とすれば, $\psi' = \gamma \circ \psi$ となる A 線形写像 $\gamma\colon T \to T'$ が一意的に存在することが分かる．γ が同型写像であることを示せば良い．同様に, (T', ψ') も上記の条件を満たすので, $S = T$, $\phi = \psi$ とすれば, $\psi = \gamma' \circ \psi'$ となる A 線形写像 $\gamma'\colon T' \to T$ が存在する．また, $\psi = \gamma' \circ \psi' = (\gamma' \circ \gamma) \circ \psi$ となる．一方, $\mathrm{id}_T \circ \psi = \psi$ とも書けるので, (条件 2.2) での一意性より, $\gamma' \circ \gamma = \mathrm{id}_T$ が成り立つ．同様に, $\gamma \circ \gamma' = \mathrm{id}_{T'}$ が成り立つ．したがって, γ は同型写像である．

次に, (条件 2.2) を満たす (T, ψ) の存在性を証明する．$L = A^{(M \times N)}$ とおく．L の任意の元を A に属する係数を付けた $M \times N$ の元の形式和として表すことができる ((1.1) 参照)．すなわち, L の任意の元 ε について, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $x_1, \ldots, x_n \in M$, $y_1, \ldots, y_n \in N$ を用いて

$$\varepsilon = a_1[(x_1, y_1)] + \cdots + a_n[(x_n, y_n)] \tag{2.1}$$

と一意的に表すことができる．以下のような形の元全体で生成される L の部分加群を R とおく．

$$[(x + x', y)] - [(x, y)] - [(x', y)] \tag{2.2}$$
$$[(x, y + y')] - [(x, y)] - [(x, y')] \tag{2.3}$$
$$[(ax, y)] - a[(x, y)] \tag{2.4}$$
$$[(x, ay)] - a[(x, y)] \tag{2.5}$$

また, $T = L/R$ と定義し, $\psi(x, y) = [(x, y)] + R$ とおくことで写像 $\psi\colon M \times N \to T$ が定まる．ψ は A

双線形写像であることに注意する．例えば,

$$\psi(x+x',y)-\psi(x,y)-\psi(x',y)=[(x+x',y)]-[(x,y)]-[(x',y)]+R=0$$

が成り立つ．ψ が双線形写像の他の条件を満たすことは同様に確認できる．$[(x,y)]+R$ を単に $x\otimes y$ と表す．よって, T の任意の元は $\sum_{j=1}^n x_j\otimes y_j$ と表される．しかし, この表し方が一意的でないことに注意する．最後に, (T,ψ) が (条件 2.2) を満たすことを証明する．$\phi\colon M\times N\to S$ を A 双線形写像とし, $\phi=f\circ\psi$ となる A 線形写像 $f\colon T\to S$ が望まれる．$\psi(x,y)=x\otimes y$ より, $f(x\otimes y)=\phi(x,y)$ とおく必要があり, ゆえに f の一意性が分かる．また, 自由加群の性質より, $f'([(x,y)])=\phi(x,y)$ $((x,y)\in M\times N)$ を満たす A 線形写像

$$f'\colon L\to S$$

が存在する．$\varepsilon\in R$ ならば, $f'(\varepsilon)=0$ である．例えば,

$$f'([(x+x',y)]-[(x,y)]-[(x',y)])=\phi(x+x',y)-\phi(x,y)-\phi(x',y)=0$$

である．同様に, (2.3), (2.4), (2.5) の形の元も f' によって 0 に移る．よって, 準同型定理より f' が準同型 $f\colon T\to S$ を誘導する．明らかに $\phi=f\circ\psi$ が成り立つ．主張が従う．

定義 2.3. 上の定理の A 加群 T を M と N のテンソル積といい, $T=M\otimes_A N$ (あるいは $M\otimes N$) と表す．その任意の元は

$$\sum_{j=1}^n x_j\otimes y_j,\quad n\geq 1,\ x_i\in M,\ y_i\in N$$

と表される．

しかし, この表し方が一意的でないことに注意する．例えば双線型性より $ax\otimes y=x\otimes ay$ ($a\in A$, $x\in M$, $y\in N$) が成り立つ．A 加群 M,N,P について, 双線型写像 $M\times N\to P$ 全体の集合を $\mathrm{Bil}_A(M,N;P)$ と表す．$\psi_1,\psi_2\in\mathrm{Bil}_A(M,N;P)$ ならば, 写像 $\psi_1+\psi_2$ と $a\psi_1$ $(a\in A)$ も双線型である．よって, $\mathrm{Bil}_A(M,N;P)$ は自然に A 加群である．テンソル積の性質より, 任意の A 加群 M,N,P について, 以下の写像は全単射である．さらに, A 加群の構造を保つので, A 加群の同型写像である．

$$\mathrm{Hom}_A(M\otimes_A N,P)\longrightarrow\mathrm{Bil}_A(M,N;P),\quad u\mapsto((x,y)\mapsto u(x\otimes y))$$

注意 2.4. $M_0\subset M$, $N_0\subset N$ を部分加群とすると, テンソル積 $M_0\otimes N_0$ と $M\otimes N$ を考えることができる．$(x,y)\in M_0\times N_0$ に対して, $M_0\otimes N_0$ の元として考えた $x\otimes y$ と $M\otimes N$ の元として考えた $x\otimes y$ が一致するとは限らない．

$$\begin{tikzcd}
x\otimes y \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{一致するとは限らない!}"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & x\otimes y \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
M_0\otimes N_0 & & M\otimes N
\end{tikzcd}$$

例えば, $A=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}$, $N=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし, $M_0=2\mathbb{Z}$ とする．$M_0\otimes_{\mathbb{Z}}N$ の元として $2\otimes\overline{1}$ は 0 でないが, $M\otimes_{\mathbb{Z}}N$ の元としては

$$2\otimes\overline{1}=1\otimes\overline{2}=1\otimes\overline{0}=0.$$

補題 2.5. M,N を A 加群とし, $M\otimes N$ の元として $\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i=0$ が成り立つとする．このとき, 有限生成加群 $M_0\subset M$ と $N_0\subset N$ が存在し, $M_0\otimes N_0$ の元としても $\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i=0$ である．

証明

$\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ より, $\epsilon = \sum_{i=1}^n [(x_i, y_i)] \in R$ である. よって, 有限個の元 $u_1, \ldots, u_m \in M$, $v_1, \ldots, v_m \in N$ が存在し, ε が $[(u_i+u_j, v_k)]-[(u_i, v_k)]-[(u_j, v_k)]$, $[(u_k, v_i+v_j)]-[(u_k, v_i)]-[(u_k, v_j)]$, $[(au_i, v_j)]-a[(u_i, v_j)]$, $[(u_i, av_j)]-a[(u_i, v_j)]$ の A 上の一次結合として表せる. $u_1, \ldots, u_m$ と $x_1, \ldots x_n$ で生成される M の部分加群を M_0 とおき, $v_1, \ldots, v_m$ と $y_1, \ldots y_n$ で生成される N の部分加群を N_0 とおく. こうすると, M_0, N_0 が有限生成加群であり, $M_0 \otimes N_0$ の元としても $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ が成り立つ.

例 2.6. M を A 加群とする. このとき, 同型写像

$$A \otimes_A M \simeq M$$

が存在する. 実際, 写像 $A \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$ は明らかに双線型写像であるので, $\alpha(a \otimes x) = ax$ を満たす線型写像 $\alpha\colon A \otimes_A M \to M$ が存在する. また, 写像 $\beta\colon M \to A \otimes_A M$, $x \mapsto 1 \otimes x$ を考える. $x \in M$ に対し, $\alpha(\beta(x)) = \alpha(1 \otimes x) = x$ である. 任意の $a \in A, x \in M$ に対し, $\beta(\alpha(a \otimes x)) = \beta(ax) = 1 \otimes ax = a \otimes x$ である. ゆえに α と β は互いの逆写像であり, 主張が従う. 以上より, テンソル積 $A \otimes_A M$ を M と同一視できる.

2.2 テンソル積と直和, 交換法則, 結合法則

- $(M_i)_{i \in I}$ を A 加群の族とし, N を A 加群とする. $\varphi((x_i)_i \otimes y) = (x_i \otimes y)_i$ $(x_i \in M_i,\, y \in N)$ を満たす同型写像

$$\varphi\colon \left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes_A N \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A N)$$

  が一意に定まる. テンソル積が分配法則を満たすという.
- M, N を A 加群とする. $\varphi(x \otimes y) = y \otimes x$ $(x \in M,\, y \in N)$ を満たす同型写像

$$\varphi\colon M \otimes_A N \to N \otimes_A M$$

  が一意に定まる. テンソル積が交換法則を満たすという.
- M, N, P を A 加群とする. $\varphi((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ $(x \in M,\, y \in N,\, z \in P)$ を満たす同型写像

$$\varphi\colon (M \otimes_A N) \otimes_A P \to M \otimes_A (N \otimes_A P).$$

  が一意に定まる. テンソル積が結合法則を満たすという.

上記の同型写像の存在は容易に分かる. テンソル積の交換法則のみを示す. 写像 $\psi\colon M \times N \to N \otimes_A M$, $(x, y) \mapsto y \otimes x$ を考える. ψ は明らかに双線型写像であるので, $\varphi(x \otimes y) = y \otimes x$ を満たす準同型 $\varphi\colon M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ が一意的に存在する. 同様に, $\varphi'(y \otimes x) = x \otimes y$ を満たす準同型 $\varphi'\colon N \otimes_A M \to M \otimes_A N$ が一意的に存在する. 明らかに $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{N \otimes_A M}$ かつ $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{M \otimes_A N}$ であるので, φ は同型写像である.

- $M_1, \ldots, M_n, N$ をの A 加群とする. 写像

$$\varphi\colon M_1 \times \cdots \times M_n \to N$$

  が与えられているとする. φ が n 重線形写像であるとは, 任意の $y_i \in M_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して, 写像

$$x_i \mapsto \varphi(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

  が線型写像 $M_i \to N$ であることをいう.

定理 2.7. 以下の条件を満たす組 (P, ψ) が存在する.

(1) P は A 加群であり, $\psi\colon M_1 \times \cdots \times M_n \to P$ は n 重線形写像である.

(2) P' を A 加群とし, ψ' を n 重線形写像 $\psi'\colon M_1 \times \cdots \times M_n \to P'$ とする. このとき, $\psi' = u \circ \psi$ を満たす A 線形写像 $u\colon P \to P'$ が一意的に存在する.

また, (P_1, ψ_1), (P_2, ψ_2) が上記の条件を満たすならば, $\psi_2 = v \circ \psi_1$ となる同型写像 $v\colon P_1 \to P_2$ が一意的に存在する.

証明

同様である.

上記の定理の P を

$$M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$$

と表す. また, $(x_1, \ldots, x_n) \in M_1 \times \cdots \times M_n$ のとき, $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in P$ を $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ と表す. $M_1 = \cdots = M_n = M$ のとき, $M \otimes_A \cdots \otimes_A M$ を $M^{\otimes n}$ と表し, M の n 次テンソル冪という. n 重線型写像 $M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ 全体の集合を $\mathrm{Mult}_A^n(M_1, \ldots, M_n, N)$ とおく. $\mathrm{Bil}_A(M, N; P)$ と同様に, $\mathrm{Mult}_A^n(M_1, \ldots, M_n; P)$ は A 加群である. 上記の定理より以下の写像は全単射である.

$$\mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n, N) \to \mathrm{Mult}_A^n(M_1, \ldots, M_n, N), \quad u \mapsto u \circ \psi.$$

命題 2.8. $\theta(x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ を満たす同型写像

$$\theta\colon M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3) \longrightarrow M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3$$

は一意的に存在する.

証明

θ の一意性は明らかである. θ の存在を示す. 写像

$$\phi\colon M_1 \times (M_2 \otimes_A M_3) \to M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3, \quad (x, \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes z_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x \otimes y_i \otimes z_i$$

を考える. 明らかに ϕ は双線型写像であるので, 写像 θ の存在性が分かる. 同様に, 写像

$$M_1 \times M_2 \times M_3 \to M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$$

を考える. 明らかに, この写像は 3 重線型である. よって, $\nu(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$ を満たす準同型

$$\nu\colon M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3 \to M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)$$

が存在する. 明らかに $\nu \circ \theta = \mathrm{id}_{M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3)}$ かつ $\theta \circ \nu = \mathrm{id}_{M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3}$ が成り立つ.

また, $M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n$ の場合は同様のことが成り立つ.

2.3 外積

定義 2.9. M, N を A 加群とする. n 重線形写像 $\varphi\colon M^n \to N$ が交代写像であるとは, $x_i = x_j$ となる $1 \leq i < j \leq n$ が存在するとき, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ であることをいう.

注意 2.10. φ が交代ならば, 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つ.

例えば, 行列式 $A^n \times \cdots \times A^n \to A$

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix}.$$

は n 重線型交代写像である.

n 重線型交代写像 $\varphi\colon M^n \to N$ 全体の集合を $\mathrm{Alt}_A^n(M,N)$ と表す. 以下は特別な n 重線型交代写像 $\eta\colon M^n \to \bigwedge^n M$ を定義する. テンソル積と同様に, $(\bigwedge^n M, \eta)$ は全ての n 重線型交代写像 $\phi\colon M^n \to N$ の中で,「始対象」というものである. つまり, n 重線型交代写像 $\phi\colon M^n \to N$ が与えられているとき, 以下の図式が交換するような準同型 $f\colon \bigwedge^n M \to N$ が一意的に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
 & M^n \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\phi\ \text{交代}"] & \\
\bigwedge^n M \arrow[rr, "f"', "\text{一意的に存在する!}"] & & N
\end{tikzcd}
$$

M の n 次テンソル冪 $M^{\otimes n} := M \otimes \cdots \otimes M$ を考える. また, 以下のような元で生成される部分加群を D とおく.

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \quad \text{ただし } x_i = x_j \text{ となる } 1 \leq i < j \leq n \text{ が存在する.}$$

定義 2.11.

$$\bigwedge^n M := \frac{M^{\otimes n}}{D}$$

とおき, M の n 次外冪という.

M の元 $x_1, \ldots, x_n$ に対して, $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ の剰余類 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n + D$ を $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ とおき, $x_1, \ldots, x_n$ の外積という. 明らかに, 写像

$$M^n \to \bigwedge^n M, \quad \eta\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

は n 重線型交代写像である.

命題 2.12. n 重線型交代写像 $\phi\colon M^n \to N$ が与えられているとき, $\phi = f \circ \eta$ を満たすような準同型 $f\colon \bigwedge^n M \to N$ が一意的に存在する. また, この条件を満たす他の組 (E, η') が与えられているとき, $\eta' = \gamma \circ \eta$ を満たす同型写像 $\gamma\colon \bigwedge^n M \to E$ が一意的に存在する.

証明

一意性はテンソル積の場合と同様に証明できる. 以下は, $(\bigwedge^n M, \eta)$ が上記の条件を満たすことを示す. n 重線型交代写像 $\phi\colon M^n \to N$ が与えられているとする. 特に ϕ が n 重線型写像だから, $\phi(x_1, \ldots, x_n) = f'(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$ となる準同型

$$f'\colon M^{\otimes n} \to N$$

が存在する. ϕ が交代であることから, $f'(D) = 0$ が成り立つ. ゆえに, 準同型定理より f' は準同型

$$f\colon \bigwedge^n M = \frac{M^{\otimes n}}{D} \to N$$

を引き起こす. f' が一意的であるので, f も一意的である. 主張が従う.

上記の命題より, 写像 $f \mapsto f \circ \eta$ は全単射

$$\mathrm{Hom}_A\left(\bigwedge^n M, N\right) \simeq \mathrm{Alt}_A^n(M, N)$$

である. 明らかに, この写像が A 線型であるので, 同型写像である.

定理 2.13. K を可換体とし, V を有限次元のベクトル空間とする. $\dim(V) = d$ とおき, $e_1, \ldots, e_d$ を V の基底とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) 元 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$, $(1\le i_1<\cdots<i_n\le d)$ は K ベクトル空間 $\bigwedge^n V$ の基底をなす.
(2) $\dim_K(\bigwedge^n V)=\binom{d}{n}$ である. 特に $n>d$ のとき $\bigwedge^n V=0$ である. $n=d$ のとき $\dim_K(\bigwedge^n V)=1$.

証明

(2) は (1) から直ちに従うので, (1) を示せば十分である. $e_i\wedge e_j=-e_j\wedge e_i$ を用いることによって, $\bigwedge^n V$ が $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$, $(1\le i_1<\cdots<i_n\le d)$ のような元で生成されることが分かる. ゆえに, それらが線型独立であることを示せば良い. $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ $(i_1<\cdots<i_n)$ が従属であるとする. 添字を付け直せば, $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ が他のベクトルの一次結合で表せると仮定して良い. つまり $e_1\wedge\cdots\wedge e_n=\sum_{j=1}^N a_j v_j$ とする. ただし, ここで $a_j\in K$ であり, さらに v_j は $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$ の形の元である $(i_1<\cdots<i_n$ かつ $(i_1,\ldots,i_n)\ne(1,\ldots,n))$. よって, $e_{n+1},\ldots,e_d$ のいずれかが v_j の表現に現れる. したがって, $v_j\wedge e_{n+1}\wedge\cdots\wedge e_d=0$ となり, ゆえに

$$e_1\wedge\cdots\wedge e_d=0$$

となる. 特に, $\bigwedge^d(V)=0$ である. 行列式がゼロでない n 重線型交代写像 $\det\in\mathrm{Alt}_K^d(K^d,K)$ であることに矛盾する. 主張が従う.

2.4 テンソル積の関手

M_1,M_2,N_1,N_2 を A 加群とし $f_1\colon M_1\to N_1$, $f_2\colon M_2\to N_2$ を準同型とする. 以下の写像を考える.

$$M_1\times M_2\to N_1\otimes_A N_2,\quad (x_1,x_2)\mapsto f_1(x_1)\otimes f_2(x_2).$$

明らかに, 上記の写像が双線型写像である. 定理 2.2 より, $g(x_1\otimes x_2)=f_1(x_1)\otimes f_2(x_2)$ を満たす写像

$$g\colon M_1\otimes_A M_2\to N_1\otimes_A N_2$$

が一意的に存在する. $g=f_1\otimes f_2$ とおき, 準同型 f_1,f_2 のテンソル積という.

A 加群 N を固定する. N とのテンソル積で定まる関手を定義する. A 加群 M に対し, $F_N(M):=M\otimes_A N$ とおく. また, 準同型 $M'\to M$ に対して, 準同型

$$f\otimes\mathrm{id}_N\colon M'\otimes_A N\to M\otimes_A N,\quad \sum_i x_i\otimes y_i\mapsto\sum_i f(x_i)\otimes y_i$$

を $F_N(f)$ とおく. こうすることで, 共変関手

$$F_N\colon \mathrm{Mod}_A\to\mathrm{Mod}_A,\qquad M\mapsto M\otimes_A N,\qquad f\mapsto f\otimes\mathrm{id}_N$$

が定まる.

2.5 随伴関手

A,B を可換環とし, $F\colon\mathrm{Mod}_A\to\mathrm{Mod}_B$, $G\colon\mathrm{Mod}_B\to\mathrm{Mod}_A$ を加法的な共変関手とする. 全ての A 加群 M と B 加群 N に対し全単射

$$\gamma_{M,N}\colon\mathrm{Hom}_B(F(M),N)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Hom}_A(M,G(N))$$

が与えられているとする. さらに, $\gamma_{M,N}$ が次の条件を満たすとする. 任意の A 加群の準同型 $f\colon M\to M'$ と任意の B 加群の準同型 $g\colon N'\to N$ に対して, 以下の図式が交換するとする.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_B(F(M),N) \arrow[r, "\gamma_{M,N}"] & \mathrm{Hom}_A(M,G(N)) \\
\mathrm{Hom}_B(F(M'),N') \arrow[u, "{(F(f),g)}"] \arrow[r, "\gamma_{M',N'}"'] & \mathrm{Hom}_A(M',G(N')) \arrow[u, "{(f,G(g))}"']
\end{tikzcd}$$

ここで, $(F(f), g)\colon \mathrm{Hom}_B(F(M'), N') \to \mathrm{Hom}_B(F(M), N)$ は $u \mapsto g \circ u \circ F(f)$ によって定まる写像である. 同様に, $(f, G(g))\colon \mathrm{Hom}_A(M', G(N')) \to \mathrm{Hom}_A(M, G(N))$ は $v \mapsto G(g) \circ v \circ f$ によって定義される.

定義 2.14. 上記の条件を満たす全単射 $(\gamma_{M,N})_{M,N}$ が存在するときに, 組 (F, G) を随伴関手という. また, G が F の右随伴関手であるといい, F が G の左随伴関手であるという.

注意 2.15. 随伴関手の定義では, $\gamma_{M,N}$ が全単射であることを仮定しているが, $\gamma_{M,N}$ は自動的に群の準同型である. 実際, $N = F(M)$ とし, 写像 $u_M := \gamma_{M,F(M)}(\mathrm{id}_{F(M)}) \in \mathrm{Hom}_A(M, G(F(N))$ を考える. 任意の $g \in \mathrm{Hom}_B(F(M), N)$ に対し

$$\gamma_{M,N}(g) = G(g) \circ u_M \tag{2.6}$$

が成り立つ. 実際, 随伴関手の定義で $M = M'$, $N' = F(M)$, $f = \mathrm{id}_M$ とすると, 図式が交換することから任意の $v \in \mathrm{Hom}_B(F(M), F(M))$ に対し $G(g) \circ \gamma_{M,F(M)}(v) = \gamma_{M,N}(g \circ v)$ が成り立つことが分かる. $v = \mathrm{id}_{F(M)}$ とおくと, $\gamma_{M,N}(g) = G(g) \circ u_M$ となり, 上記の公式 (2.6) が分かる.

また, G が加法的であるので, $g \mapsto G(g)$ が群準同型である. よって, 写像 $g \mapsto \gamma_{M,N}(g) = G(g) \circ u_M$ も群準同型である.

A 加群 P を固定し, $F_P(M) = M \otimes_A P$ で定まる関手 $F_P\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ を考える (§2.4 参照). 以下は, A 加群 M, N に対し, 全単射

$$\gamma_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A P, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(P, N))$$

を定義する. まず, テンソル積の定義より準同型 $M \otimes_A P \to N$ と双線型写像 $M \times P \to N$ が一対一で対応している. 次に, 双線型写像 $\psi\colon M \times P \to N$ とは準同型 $M \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$ に他ならない (実際, $\psi\colon M \times P \to N$ が双線型写像ならば $x \in M$ に対して $y \mapsto \psi(x, y)$ は A 線型写像 $P \to N$ である. よって, 準同型 $M \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$ が得られる. 逆に, $u\colon M \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$ が準同型ならば, $(x, y) \mapsto (u(x))(y)$ は双線型写像 $M \times P \to N$ である). ゆえに, 上記のような全単射 $\gamma_{M,N}$ が存在する. 具体的に書くと, $u \in \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A P, N)$ ならば, $\gamma_{M,N}(u)$ は $x \mapsto (y \mapsto u(x \otimes y))$ で定まる写像 $M \to \mathrm{Hom}_A(P, N)$ である.

$G_P(N) = \mathrm{Hom}_A(P, N)$ で定まる共変関手 $G_P\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ を考える. 以上より, 全単射

$$\gamma_{M,N}\colon \mathrm{Hom}_A(F_P(M), N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, G_P(N))$$

が存在する.

定理 2.16. $F_P\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ と $G_P\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ は随伴関手である.

証明

全単射 $(\gamma_{M,N})_{M,N}$ が随伴関手の条件を満たすことは容易に確認できる.

補題 2.17. $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$ 及び $G\colon \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ を加法的な共変関手とし, (F, G) が随伴関手であるとする. このとき, F が右完全であり, G が左完全である.

証明

F が右完全であることを示す. $M' \to M \to M'' \to 0$ を完全系列とし, 系列 $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ が完全であることを示す. 命題 1.14 より, 次を示せば良い：任意の A 加群 N に対し, 系列

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(F(M''), N) \to \mathrm{Hom}_A(F(M), N) \to \mathrm{Hom}_A(F(M'), N)$$

が完全系列である．随伴関手の全単射 $(\gamma_{M,N})_{M,N}$ が以下の図式を与える．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(F(M''),N) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{M'',N}"] & \mathrm{Hom}_A(F(M),N) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{M,N}"] & \mathrm{Hom}_A(F(M'),N) \arrow[d, "\gamma_{M',N}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M'',G(N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,G(N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M',G(N))
\end{tikzcd}$$

上記の図式が交換するのは, 随伴関手の定義の同型写像 $\gamma_{M,N}$ が満たしている条件から分かる．また, 図式が交換するので, 上の行が完全であることと, 下の行が完全であることとは同値である (ここで, $\gamma_{\bullet,\bullet}$ 全て群同型であることを注意する)．関手 $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, G(N))$ は左完全な共変関手であるので, 下の行は完全である．よって, 主張が従う．以上より, F は右完全関手である．G が左完全であることは同様に示せる．

定理 2.18. テンソル積は右完全な共変関手である．つまり, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ が A 加群の完全系列ならば系列

$$M' \otimes_A P \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_P} M \otimes_A P \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_P} M'' \otimes_A P \to 0$$

は完全系列である．

証明

テンソル積が左随伴関手であることから分かる．

2.6 係数拡大と係数制限

$f\colon A \to B$ を可換環の準同型とする．このとき, B を A 加群としてみなすことができる．A 加群 M が与えられているとする．$B \otimes_A M$ の元 $\sum_{i=1}^n b_i \otimes m_i$ と B の元 b に対して,

$$b \cdot \sum_{i=1}^n b_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^n bb_i \otimes m_i$$

とおくことで, $B \otimes_A M$ は B 加群になる．B 加群 $B \otimes_A M$ を「M の B への係数拡大」という．

逆に, N を B 加群とする．$a \in A$, $m \in M$ に対して, $a \cdot m = f(a)m$ とおくことで, N を A 加群としてみなすことができる．この加群を N の係数制限といい, ${}_AN$ で表す．以上より, 以下の 2 つの関手が得られる．

$$F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B, \quad M \mapsto B \otimes_A M$$
$$G\colon \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A, \quad N \mapsto {}_AN$$

命題 2.19. (F, G) は随伴関手である．つまり, 任意の A 加群 M 及び B 加群 N に対して, 全単射

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN)$$

が存在する．さらに, 上の全単射が随伴関手の条件を満たす．

証明

$f\colon B \otimes_A M \to N$ を B 加群の準同型とする．このとき, 写像 $M \to N$, $x \mapsto f(1 \otimes x)$ は明らかに A 線形写像であるので, A 加群の準同型 $\phi(f)\colon M \to {}_AN$ が得られる．逆に, $g\colon M \to {}_AN$ を A 加群の準同型とする．$B \otimes_A M$ の元 $\sum_{i=1}^n b_i \otimes m_i$ に対して,

$$\psi(g)\colon \sum_{i=1}^n b_i \otimes m_i \mapsto \sum_{i=1}^n b_i g(m_i)$$

とおくことで, 写像 $\psi(g)\colon B \otimes_A M \to N$ が定まる．$\psi(g)$ は明らかに well-defined であり, B 加群の

準同型である．また，$\phi(\psi(g))\colon m \mapsto \psi(1 \otimes m) = g(m)$ より，$\phi(\psi(g)) = g$．同様に，$\psi(\phi(f))\colon b \otimes m \mapsto b\phi(f)(m) = bf(1 \otimes m) = f(b \otimes m)$ より，$\psi(\phi(f)) = f$ である．以上より，ψ，ϕ は全単射 $\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN)$ である．最後に，随伴関手の条件は容易に確認できる．

上記の命題より，関手 $G\colon \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$, $N \mapsto {}_AN$ は F の右随伴関手である．以下は，関手 G が (他の関手の) 左随伴関手としても表されることを説明する．

B を A 加群とみなし，A 線形写像 $B \to M$ 全体の集合 $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ を考える．また，$f \in \mathrm{Hom}_A(B, M)$ と $b \in B$ に対して，$(b \cdot f)(x) = f(bx)$ とおくことで，写像 $b \cdot f\colon B \to M$ を定める．こうすると，$\mathrm{Hom}_A(B, M)$ は自然に B 加群になる．よって，共変関手

$$H\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B, \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M)$$

が得られる．

命題 2.20. (G, H) は随伴関手である．つまり，任意の A 加群 M と B 加群 N に対して，全単射

$$\mathrm{Hom}_A({}_AN, M) \simeq \mathrm{Hom}_B(N, \mathrm{Hom}_A(B, M))$$

が存在する．さらに，上の全単射が随伴関手の条件を満たす．

証明

B 加群の準同型 $f\colon N \to \mathrm{Hom}_A(B, M)$ を考える．$x \in N$ に対して，$f'(x) = \varphi(x)[1]$ とおくことによって，写像 $f'\colon N \to M$ を定める．明らかに，f は A 線型写像である．逆に，A 加群の準同型 $f'\colon {}_AN \to M$ が与えられているとする．$x \in N$ に対して，$f(x) = (b \mapsto f'(bx))$ とおき，写像 $f\colon N \to \mathrm{Hom}_A(B, M)$ を定める．$f \mapsto f'$ 及び $f' \mapsto f$ が互いの逆写像であることは容易に確認できる．また，随伴関手の条件も簡単に示せる．

I を A のイデアルとし，可換環の準同型 $A \to A/I$ を考える．次の命題では，A 加群 M の A/I への係数拡大 $(A/I) \otimes_A M$ を求める．

命題 2.21. M を A 加群とする．A/I 加群の同型写像 $(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM$ が存在する．

証明

$0 \to I \to A \to A/I \to 0$ は短完全列であるので，$I \otimes_A M \to M \to (A/I) \otimes_A M \to 0$ も短完全列である．写像 $I \otimes_A M \to M$ は $\sum_{j=1}^n a_j \otimes m_j \mapsto \sum_{j=1}^n a_j m_j$ によって定義されるので，その像は IM である．主張が従う．

例 2.22. M をアーベル群とする．このとき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq M/nM$ が成り立つ．例えば，$M = \mathbb{Q}$ のとき，$M = nM$ $(n > 0)$ より $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}/n\mathbb{Q} = \mathbb{Q}/\mathbb{Q} = 0$ である．

テンソル積の応用として，自由加群に関する以下の命題を証明する．

命題 2.23. A を可換環とする．A 加群として $A^n \simeq A^m$ ならば，$n = m$ である．

証明

A 加群の同型写像 $f\colon A^n \to A^m$ が存在するとする．$\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする．f は $A/\mathfrak{m}$ ベクトル空間の同型写像

$$A^n \otimes_A A/\mathfrak{m} \to A^m \otimes_A A/\mathfrak{m}$$

を引き起こす．テンソル積の分配法則より $A^n \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq (A/\mathfrak{m})^n$ である．よって $A/\mathfrak{m}$ ベクトル空間の同型 $(A/\mathfrak{m})^n \simeq (A/\mathfrak{m})^m$ が得られる．よって，$m = n$ が成り立つ．

上の命題より, $\{x_1,\dots,x_n\}$ と $\{y_1,\dots,y_m\}$ が M の基底であれば, $n=m$ が成り立つ.

定義 2.24. M を有限生成 A 自由加群とする. M の基底の元の個数を M の階数といい, $\mathrm{rank}(M)$ と表す.

M,N を自由加群とし, $(e_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$ をそれぞれ M,N の基底とする. このとき, $(e_i\otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ は $M\otimes_A N$ の基底である. 特に, $M\otimes_A N$ も自由加群である. また, M,N が有限生成自由加群ならば,

$$\mathrm{rank}(M\oplus N)=\mathrm{rank}(M)+\mathrm{rank}(N)$$
$$\mathrm{rank}(M\otimes_A N)=\mathrm{rank}(M)\times\mathrm{rank}(N)$$

である.

注意 2.25. A が非可換環の場合は, 命題 2.23 が成り立つとは限らない. 例えば, K を可換体, V を無限次元 K ベクトル空間とし, $A=\mathrm{End}_K(V)$ とおく. このとき, K ベクトル空間 V と $V\oplus V$ の基底の濃度が等しいから, K ベクトル空間の同型写像 $V\to V\oplus V$ が存在する. ゆえに,

$$A=\mathrm{Hom}_K(V,V)\simeq\mathrm{Hom}_K(V\oplus V,V)\simeq\mathrm{End}_K(V)^2=A^2$$

である. 上記の写像は A 加群の同型写像である. ゆえに, $A\simeq A^2$ である.

命題 2.26. A を可換環とし, M を階数 d の自由加群とする. このとき, $\bigwedge^n M$ は階数 $\binom{d}{n}$ の自由加群である.

証明

定理 2.13 の証明と同様である.

M,N を A 加群とし, $0\le k\le n$ を満たす整数 k,n を考える. $(x_1\wedge\cdots\wedge x_k, y_1\wedge\cdots\wedge y_r)\mapsto x_1\wedge\cdots\wedge x_k\wedge y_1\wedge\cdots\wedge y_r$ で定まる写像

$$\bigwedge^k M\times\bigwedge^{n-k}N\to\bigwedge^n(M\oplus N)$$

は well-defined であり, 明らかに双線型写像である. ゆえに, 線型写像

$$\varphi\colon \bigwedge^k M\otimes\bigwedge^{n-k}N\to\bigwedge^n(M\oplus N) \tag{2.7}$$

が得られる. $k=0$ のとき, $\bigwedge^0 M=A$ と約束する.

命題 2.27 (ケネットの公式)**.** 上記の準同型 φ は単射であり, 以下の分解を引き起こす.

$$\bigwedge^n(M\oplus N)\simeq\bigoplus_{k=0}^n\left(\bigwedge^k M\otimes\bigwedge^{n-k}N\right). \tag{2.8}$$

証明

$(x_1,\dots,x_n)\in(M\oplus N)^n$ とする. $x_i=u_i^{(1)}+u_i^{(2)}$ $(u_i^{(1)}\in M,\ u_i^{(2)}\in N)$ と一意的に表すことができる. $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ を $\alpha_i\in\{1,2\}$ を満たす列とする. α について

$$N(\alpha):=|\{i=1,\dots,n \ \mid\ \alpha=1\}|$$

とおく. $0\le N(\alpha)\le n$ が成り立つ. $N(\alpha)=k$ のとき, $\alpha_{\sigma(1)}=\cdots=\alpha_{\sigma(k)}=1$ を満たす置換 σ をとる. σ の取り方が一意的でないことに注意する. σ を σ_α とおくことにする.

$$\theta'(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=0}^n\sum_{N(\alpha)=k}\mathrm{sgn}(\sigma_\alpha)\left(u^{(1)}_{\sigma_\alpha(1)}\wedge\cdots\wedge u^{(1)}_{\sigma_\alpha(k)}\right)\otimes\left(u^{(2)}_{\sigma_\alpha(k+1)}\wedge\cdots\wedge u^{(2)}_{\sigma_\alpha(n)}\right)$$

とおくことで, 写像

$$\theta'(M \oplus N)^n \to \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\bigwedge^{k} M \otimes \bigwedge^{n-k} N \right)$$

を定める. 外冪の定義より上記の公式は σ_α の取り方に依らないので, θ' は well-defined である. 明らかに θ' は n 重線型写像であるので, 準同型

$$\theta\colon (M \oplus N)^{\otimes n} \to \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\bigwedge^{k} M \otimes \bigwedge^{n-k} N \right)$$

を引き起こす. $P = (M \oplus N)^{\otimes n}$ とおく. 以下のような形の P の元を考える.

$$y_1 \otimes \cdots \otimes y_n, \quad y_1, \ldots, y_n \in M \oplus N \text{ で}, y_i = y_j \text{ となる } 1 \leq i < j \leq n \text{ が存在する}.$$

上記のような元で生成される P の部分加群を D とおく. 外冪の定義より, $\bigwedge^n (M \oplus N) = P/D$ である. $\theta(D) = 0$ を示す. $a \in M$, $b \in N$ とし, 以下のような元を考えれば十分である (他の成分が一致するものについては同様の議論ができる).

$$y = (a + b) \otimes (a + b) \otimes u_3 \otimes \cdots \otimes u_n.$$

ただし, u_i の中で, ちょうど k 個が M の元であり, ちょうど $n - k$ 個が N の元であることを仮定する. また, $u_3, \ldots, u_{k+2} \in M$ かた $u_{k+3}, \ldots, u_n \in N$ を仮定して良い. $u = u_3 \otimes \cdots \otimes u_n$ とおく. 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\theta(y) &= \theta(a \otimes a \otimes u) + \theta(a \otimes b \otimes u) + \theta(b \otimes a \otimes u) + \theta(b \otimes b \otimes u) \\
&= \theta(a \otimes b \otimes u) + \theta(b \otimes a \otimes u) \\
&= (-1)^k (a \wedge u_3 \wedge \cdots \wedge u_{k+2}) \otimes (b \wedge u_{k+3} \wedge \cdots \wedge u_n) + \\
&\quad (-1)^{k+1} (a \wedge u_3 \wedge \cdots \wedge u_{k+2}) \otimes (b \wedge u_{k+3} \wedge \cdots \wedge u_n) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって, θ は以下のような準同型を誘導する.

$$\widetilde{\theta}\colon \bigwedge^{n} (M \oplus N) \to \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\bigwedge^{k} M \otimes \bigwedge^{n-k} N \right).$$

$\widetilde{\theta}$ と φ の合成写像を計算する. $u_1, \ldots, u_k \in M$, $v_1, \ldots, v_{n-k} \in N$ とする.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}(\varphi((u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-k}))) &= \widetilde{\theta}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-k}) \\
&= (u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) \otimes (v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-k}).
\end{aligned}$$

ゆえに $\widetilde{\theta} \circ \varphi = \mathrm{id}$ が成り立つ. 逆に, $\varphi \circ \widetilde{\theta} = \mathrm{id}$ を示す. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とし, $u_1, \ldots, u_n \in M \cup N$ とする. また, $u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(k)} \in M$ とし, $u_{\sigma(k+1)}, \ldots, u_{\sigma(n)} \in N$ と仮定する.

$$\begin{aligned}
\varphi(\widetilde{\theta}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)) &= \varphi(\mathrm{sgn}(\sigma)(u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(k)}) \otimes (u_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(n)})) \\
&= \mathrm{sgn}(\sigma) u_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\sigma(n)} \\
&= u_1 \wedge \cdots \wedge u_n
\end{aligned}$$

である. よって $\varphi \circ \widetilde{\theta} = \mathrm{id}$ が成り立つ. 主張が従う.

例 2.28. $n = 2$ のとき, ケネットの公式は以下の通りである.

$$\bigwedge^{2} (M \oplus N) = \left(\bigwedge^{2} N \right) \oplus (M \otimes_A N) \oplus \left(\bigwedge^{2} M \right). \tag{2.9}$$

命題 2.29. $A \to B$ を可換環の準同型とし, M を A 加群とする. このとき, B 加群の自然な同型写像

$$B \otimes_A \bigwedge^n M \simeq \bigwedge^n (B \otimes_A M)$$

が存在する.

証明

まず, A 加群 $M_1, \ldots, M_n$ と B 加群 N に対し, 自然な同型写像

$$\mathrm{Mult}_A^n(M_1, \ldots, M_n; {}_A N) \simeq \mathrm{Mult}_B^n(B \otimes_A M_1, \ldots, B \otimes_A M_n; N). \tag{2.10}$$

が存在することを確認する. テンソル積の性質より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mult}_A^n(M_1, \ldots, M_n; {}_A N) &\simeq \mathrm{Hom}_A(M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n, {}_A N)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A (M_1 \otimes_A \cdots \otimes_A M_n), N)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_B((B \otimes_A M_1) \otimes_B \cdots \otimes_B (B \otimes_A M_n), N)\\ &\simeq \mathrm{Mult}_B^n(B \otimes_A M_1, \ldots, B \otimes_A M_n; N)\end{aligned}$$

である. ここで, 上記の 2 行目は命題 2.19 から従う. また, 3 行目の同型写像は次の議論から分かる. M_1, M_2 を A 加群とする. このとき, B 加群の同型写像

$$B \otimes_A (M_1 \otimes_A M_2) \simeq (B \otimes_A M_1) \otimes_B (B \otimes_A M_2)$$

が存在する. 実際, $\gamma(b \otimes (x_1 \otimes x_2)) = (b \otimes x_1) \otimes (1 \otimes x_2)$ を満たす B 線型写像 $B \otimes_A (M_1 \otimes_A M_2) \to (B \otimes_A M_1) \otimes_B (B \otimes_A M_2)$ は明らかに存在する. また, 写像

$$(B \otimes_A M_1) \times (B \otimes_A M_2) \to B \otimes_A (M_1 \otimes_A M_2), \quad ((b_1 \otimes x_1), (b_2 \otimes x_2)) \mapsto (b_1 b_2) \otimes (x_1 \otimes x_2)$$

は well-defined であり, B 双線型である. よって, $\gamma'((b_1 \otimes x_1) \otimes (b_2 \otimes x_2)) = (b_1 b_2) \otimes (x_1 \otimes x_2)$ を満たす B 加群の準同型

$$(B \otimes_A M_1) \otimes_B (B \otimes_A M_2) \to B \otimes_A (M_1 \otimes_A M_2)$$

が存在する. 明らかに $\gamma' \circ \gamma = \mathrm{id}$ である. 同様に,

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma'((b_1 \otimes x_1) \otimes (b_2 \otimes x_2))) &= \gamma((b_1 b_2) \otimes (x_1 \otimes x_2))\\ &= (b_1 b_2 \otimes x_1) \otimes (1 \otimes x_2)\\ &= (b_1 \otimes x_1) \otimes (b_2 \otimes x_2)\end{aligned}$$

である. よって, $\gamma \circ \gamma' = \mathrm{id}$ である. 以上より, 一対一対応 (2.10) が得られる. $\phi \in \mathrm{Mult}_A^n(M_1, \ldots, M_n; {}_A N)$ のとき, 上記の対応によって対応しているものを $\phi_B \in \mathrm{Mult}_B^n(B \otimes_A M_1, \ldots, B \otimes_A M_n; N)$ とおく. 具体的に, ϕ_B は以下のように定義されている.

$$\phi_B \colon (B \otimes_A M_1) \times \cdots \times (B \otimes_A M_n) \to N, \quad (b_1 \otimes x_1, \ldots, b_n \otimes x_n) \mapsto (b_1 \ldots b_n)\phi(x_1, \ldots, x_n).$$

次に, M を A 加群とし, $M_1 = \cdots = M_n = M$ とする. $\phi \in \mathrm{Mult}_A^n(M, \ldots, M; {}_A N)$ に対し, 以下が成り立つことを確認する.

$$\phi \text{ が交代である} \iff \phi_B \text{ が交代である.}$$

実際, ϕ_B が交代ならば,

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \phi_B(1 \otimes x_1, \ldots, 1 \otimes x_n)$$

が成り立つことから, ϕ が n 重線型交代写像であることが分かる. 逆に, ϕ が交代であることを仮定する. $y \in B \otimes_A M$ とし, $y = \sum_{i=1}^m b_i \otimes u_i$ とおく ($b_i \in B$, $u_i \in M$). また, $x_3, \ldots, x_n \in M$ とし, $y_i = x_i \otimes 1$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
\phi_B(y, y, y_3, \ldots, y_n) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_i b_j \phi(u_i, u_j, y_3, \ldots, y_n) \\
&= \sum_{i<j} b_i b_j \phi(u_i, u_j, y_3, \ldots, y_n) + b_i b_j \phi(u_j, u_i, y_3, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i, u_i, y_3, \ldots, y_n) \\
&= \sum_{i<j} b_i b_j \left(\phi(u_i, u_j, y_3, \ldots, y_n) - \phi(u_i, u_j, y_3, \ldots, y_n)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって，第 1 成分と第 2 成分が一致するような $B \otimes_A M$ の n 組 $(z_1, \ldots, z_n)$ について $\phi_B(z_1, \ldots, z_n) = 0$ である．他の 2 つの成分が一致するものについても同じことが成り立つことは，同様の議論で分かる．ゆえに，ϕ_B が n 重線型交代写像である．このことから，上記の一対一対応 (2.10) が一対一対応

$$\mathrm{Alt}^n_A(M; {}_AN) \simeq \mathrm{Alt}^n_B(B \otimes_A M; N). \tag{2.11}$$

を誘導する．

次に，命題の主張を示す．以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B\left(\bigwedge^n (B \otimes_A M), N\right) &\simeq \mathrm{Alt}^n_B(B \otimes_A M, N) \\
&\simeq \mathrm{Alt}^n_A(M, {}_AN) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_A(\bigwedge^n M, {}_AN) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A \bigwedge^n M, N).
\end{aligned}$$

外冪の一意性より，$\bigwedge^n (B \otimes_A M) \simeq B \otimes_A \bigwedge^n M$ が成り立つ．

2.7　ねじれ

A を可換環とし，$a \in A$ とする．$ab = 0$ となる $b \neq 0$ が存在するときに，a を零因子という．零因子でない元は正規元と呼ぶ．すなわち

$$a \text{ が正規元である} \iff \text{写像 } A \to A,\ x \mapsto ax \text{ が単射である}$$

a, b がそれぞれ正規であれば，ab も正規である．「写像 $A \to A$, $x \mapsto ax$ が全単射 $\iff$ a が単元である」ことを注意する．特に単元は正規元である．

例 2.30. A が整域ならば，0 以外の元全てが正規である．$A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ においては，$\overline{k}$ が正規である $\iff$ $\gcd(k, n) = 1 \iff \overline{k}$ が単元である．

定義 2.31. M を A 加群とし，$x \in M$ とする．$ax = 0$ となる正規元 $a \in A$ が存在するときに，x をねじれ元という．ねじれ元全体の集合を M_{tor} で表す．

補題 2.32. M_{tor} は M の部分加群である．

証明

x, y をねじれ元とする．このとき $ax = by = 0$ を満たす正規元 $a, b \in A$ が取れる．$u, v \in A$ ならば $ab(ux + vy) = 0$ となる．ab も正規元であるので $ux + vy$ はねじれ元である．

定義 2.33. $M_{\mathrm{tor}} = 0$ のとき, M がねじれのない加群である (あるいはねじれを持たない) という.

例 2.34. A を A 加群とみなす. このとき, $A_{\mathrm{tor}} = 0$ が成り立つ. なぜならば, $x \in A$ を A 加群 A のねじれ元とする. このとき, 正規元 $a \in A$ が存在し, $ax = 0$ である. $y \mapsto ay$ が単射だから, $x = 0$ となる. よって $A_{\mathrm{tor}} = 0$ となり, A はねじれを持たない.

また, 加群の族 $(M_i)_{i \in I}$ に対して,

$$(\oplus_{i \in I} M_i)_{\mathrm{tor}} = \oplus_{i \in I} M_{i,\mathrm{tor}}$$

であるので, ねじれのない加群の直和はねじれを持たない. 同様に, ねじれのない加群の直積はねじれを持たない (実際, $(\prod_i M_i)_{\mathrm{tor}} \subset \prod_i M_{i,\mathrm{tor}}$ が成り立つことから分かる).

補題 2.35. 自由加群はねじれを持たない.

証明

任意の自由加群は A と同型である加群の直和として表す. よって, 上記の議論より, 自由加群はねじれを持たない.

例 2.36. $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とおく. M を $\mathbb{Z}$ 加群として考えることができ, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群としても考えることができる. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 加群としては M が自由加群であるので, $M_{\mathrm{tor}} = 0$ である. しかし, M を $\mathbb{Z}$ 加群として考えたとき, 任意の $x \in M$ に対して $mx = 0$ であり, かつ m は $\mathbb{Z}$ の正規元である. よって, このとき $M_{\mathrm{tor}} = M$ である.

命題 2.37. M を A 加群とする. M/M_{tor} はねじれのない加群である.

証明

$x \in M$ とし, $\overline{x} = x + M_{\mathrm{tor}}$ が M/M_{tor} のねじれ元であるとする. 正規元 $a \in A$ が存在し, $\overline{0} = a\overline{x} = ax + M_{\mathrm{tor}}$ である. よって, $ax \in M_{\mathrm{tor}}$ である. ゆえに, 正規元 b が存在し, $bax = 0$ が成り立つ. ab は正規元であるので, $x \in M_{\mathrm{tor}}$ であり, すなわち $\overline{x} = \overline{0}$ が成り立つ.

2.8 平坦加群

M を A 加群とする. 共変関手 $F_M \colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$, $N \mapsto M \otimes_A N$ を考える. 定理 2.18 より, F_M は右完全性関手である.

定義 2.38. F_M が完全関手であるときに, M が平坦加群であるという.

定理 2.39. 以下の条件が互いに同値である.

(i) M が平坦加群である.

(ii) 任意の完全系列 $0 \to N' \to N$ に対して, $0 \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ も完全系列である.

(iii) 任意の有限生成加群 N', N および任意の単射 $f \colon N' \to N$ に対して, $\mathrm{id}_N \otimes f \colon M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ は単射である.

(iv) 任意の有限生成イデアル $I \subset A$ に対して, 写像

$$I \otimes_A M \to M, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

が単射である.

証明

- (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) は明らかである．
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ を短完全列とする．よって，$M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0$ が完全系列である．(ii) より $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ は単射であるので，主張が分かる．
- (iii) $\Longrightarrow$ (ii) を示す．$0 \to N' \xrightarrow{f} N$ を完全系列とし，ε を $f \otimes 1 \colon N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ の核の元とする．$\varepsilon = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, $x_i \in N'$, $y_i \in M$ と書くと，$N \otimes_A M$ においては $\sum_{i=1}^n f(x_i) \otimes y_i = 0$ が成り立つ．命題より $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ を含む有限生成部分加群 $N_1 \subset N$ が存在し，$N_1 \otimes_A M$ においても $\sum_{i=1}^n f(x_i) \otimes y_i = 0$ である．N_1' を $x_1, \ldots, x_n$ で生成される加群とする．よって，$N_1' \otimes_A M$ の元として考えた ε は $N_1' \otimes_A M \to N_1 \otimes_A M$ の核に属する．(iii) の仮定より，この写像は単射である．よって，$N_1' \otimes_A M$ の元として $\varepsilon = 0$ となり，ゆえに $N' \otimes_A M$ の元としても 0 である．したがって $f \otimes 1$ は単射である．
- (iv) $\Longrightarrow$ (iii) を示す．まず，条件 (iii)' を以下の通り定義する．

(iii)' 任意の有限生成自由加群 N および任意の部分加群 $N' \subset N$ に対して，写像 $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ は単射である．

- (iii)' $\Longrightarrow$ (iii) を示す．N を有限生成加群とし，N' を部分加群とする．N が有限生成であるので，$N \simeq A^n/L$ となる部分加群 $L \subset A^n$ が存在する．よって $N = A^n/L$ として良い．また，$L \subset L' \subset A^n$ を満たす部分加群 L' を用いて $N' = L'/L$ と書ける．以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_L"] & L' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & A^n \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

上記の可換図式の行が短完全列である．テンソル積の右完全性より，以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A L \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \otimes_A L' \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
M \otimes_A L \arrow[r] & M^n \arrow[r] & M \otimes_A N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(iii)' の仮定より，上記の図式で写像 $M \otimes_A L \to M^n$ と $M \otimes_A L' \to M^n$ が単射である．よって，蛇の補題より写像 $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ も単射となる．よって，(iii) が成り立つ．(ii) $\Longrightarrow$ (iii)' は明らかである．逆に，(iii)' $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) を示したので，条件 (i), (ii), (iii), (iii)' の四つが互いに同値である．次に，以下の条件を考える．

(iv)' 任意のイデアル $I \subset A$ に対して，写像 $I \otimes_A M \to M$ が単射である．

- (iv)' $\Longrightarrow$ (iii)' を示す．N を有限生成自由加群とし，n をその階数とする．n に関する機能法により証明する．$n = 1$ のとき明らかである．$n > 1$ とし，$N' \subset N$ を部分加群とする．N の基底をとることで $N = A^n$ として良い．N_0 を $(x, 0, \ldots, 0)$ という形の元からなる部分加群とする．また，$N_0' = N' \cap N_0$ とおく．このとき，自然な射影 $N' \to A^{n-1}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n)$ が準同型定理より単射

$$N'/N_0' \to A^{n-1}$$

を引き起こす．また射影 $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1$ が単射 $N_0' \to A$ を誘導する．以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_0' \arrow[r] \arrow[d] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N'/N_0' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A^n \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

上記の図式の行が短完全列なので, 以下の可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_A N_0' \arrow[r] \arrow[d, "u"] & M \otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d, "v"] & M \otimes_A (N'/N_0') \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \otimes_A A \arrow[r] & M \otimes_A A^n \arrow[r] & M \otimes_A A^{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

下の行が短完全列であるのは, 短完全列 $0 \to A \to A^n \to A^{n-1} \to 0$ が分裂することから分かる. よって, 蛇の補題より完全列

$$\mathrm{Ker}(u) \to \mathrm{Ker}(v) \to \mathrm{Ker}(w)$$

が得られる. 帰納法の仮定より, $\mathrm{Ker}(u) = 0$ かつ $\mathrm{Ker}(w) = 0$ である. ゆえに $\mathrm{Ker}(v) = 0$ となり, v が単射である. 以上より, (iv)' $\Longrightarrow$ (iii)' が成り立つ. 逆に (ii) $\Longrightarrow$ (iv)' は明らかであるので, 条件 (i), (ii), (iii), (iii)', (iv)' の五つが互いに同値である. 最後に, (iv) $\Longrightarrow$ (iv)' を示せば良い. これは, 上記の 「(iii) $\Longrightarrow$ (ii)」 の証明と同様の議論から分かる.

命題 2.40.
(1) $(M_i)_{i\in I}$ を平坦加群とする. このとき, $\bigoplus_{i\in I} M_i$ は平坦加群である.
(2) M_1, M_2 を平坦加群とする. このとき, $M_1 \otimes_A M_2$ も平坦加群である.

証明

- (1) を示す. $N' \xrightarrow{f} N$ を単射準同型とする. M_i が平坦だから, $M_i \otimes_A N' \to M_i \otimes_A N$ も単射である. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ とおく. テンソル積と直和の分配法則より, 写像 $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ は以下のように分解される.

$$M \otimes_A N' \simeq \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N') \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes f} \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_A N) \simeq M \otimes_A N$$

よって, $\mathrm{id}_M \otimes f$ が単射であり, M が平坦である.

- (2) を示す. $M_1 \otimes_A N' \to M_1 \otimes_A N$ と $M_2 \otimes_A N' \to M_2 \otimes_A N$ が単射であるので,

$$M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A N') \to M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A N)$$

も単射である. テンソル積の結合法則から主張が分かる.

系 2.41. 自由加群は平坦である.

証明

任意の A 加群 N に対し $A \otimes_A N = N$ であるので明らかに A が平坦 A 加群である. 自由加群を $\bigoplus_{i\in I} A$ と表すことができるので, 主張は命題 2.40 から従う.

命題 2.42. M を平坦加群とする. このとき, M はねじれを持たない.

証明

$a \in A$ を正規元とする. A 線型写像 $f\colon A \to A$, $b \mapsto ab$ を考える. 仮定より, f は単射である. M が平坦であるので, $f \otimes \mathrm{id}_A\colon M \otimes_A A \to M \otimes_A A$ も単射である. この写像は写像 $M \to M$, $x \mapsto ax$ と同一視できるので, 主張が従う.

命題 2.43. M を平坦 A 加群とし, $f\colon A \to B$ を可換環の準同型とする. このとき, 係数拡大加群 $B \otimes_A M$ は平坦 B 加群である.

証明

$N' \xrightarrow{f} N$ を B 加群の単射準同型とする．明らかに, 係数制限によって得られる写像 ${}_AN' \to {}_AN$ が単射であるので, $M \otimes_A ({}_AN') \to M \otimes_A ({}_AN)$ は単射である．写像

$$(B \otimes_A M) \otimes_B N \simeq M \otimes_A ({}_AN), \quad (b \otimes x) \otimes y \mapsto x \otimes (by)$$

は同型写像である (その逆写像は $x \otimes y \mapsto (1 \otimes x) \otimes y$ で定まる写像である)．よって, 以下の可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes_A M) \otimes_B N' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & (B \otimes_A M) \otimes_B N \arrow[d, "\simeq"] \\
M \otimes_A ({}_AN') \arrow[r] & M \otimes_A ({}_AN)
\end{tikzcd}$$

下段の写像が単射であるので, 上段の写像も単射である．以上より $B \otimes_A M$ は平坦 B 加群である．

定義 2.44. B を A 代数とする．B が平坦 A 加群であるとき, B を平坦 A 代数という．

例 2.45. $A[X]$ は平坦 A 代数である．なぜならば, A 加群としては $A[X] \simeq A^{(\mathbb{N})}$ であるので, $A[X]$ は自由 A 加群である．

命題 2.46. B を平坦 A 代数とし, N を平坦 B 加群とする．このとき, ${}_AN$ は平坦 A 加群である．

証明

M を A 加群とし, $M' \subset M$ を部分 A 加群とする．写像 $M' \otimes_A ({}_AN) \to M \otimes_A ({}_AN)$ が単射であることを示せば良い．B が平坦 A 代数だから, $B \otimes_A M' \to B \otimes_A M$ が単射である．また, N が平坦 B 加群だから $(B \otimes_A M') \otimes_B N \to (B \otimes_A M) \otimes_B N$ も単射である．また, 命題 2.43 の証明と同様に, 同型写像 $(B \otimes_A M) \otimes_B N \simeq M \otimes_A ({}_AN)$ が存在する．よって, 以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes_A M') \otimes_B N \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & (B \otimes_A M) \otimes_B N \arrow[d, "\simeq"] \\
M' \otimes_A ({}_AN) \arrow[r] & M \otimes_A ({}_AN)
\end{tikzcd}$$

上段の写像が単射であるので, 下段の写像も単射である．以上より ${}_AN$ は平坦 A 加群である．

命題 2.47. M, N を A 加群とし, B を A 代数とする．$\alpha(1 \otimes f) = \alpha(\mathrm{id}_B \otimes f)$ を満たす B 加群の準同型

$$\alpha\colon B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

が一意的に存在する．また, B が平坦 A 代数であり, かつ M が有限表示加群ならば, α は同型写像である．

証明

α の一意性は明らかである．また, $\alpha'(f) = (\mathrm{id}_B \otimes f)$ で定まる写像

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

を考える．明らかに, α' は A 線型である．したがって, 命題 2.19 より α が存在する．
α が同型写像であることを示す．まず, M が有限生成自由加群の場合を考える．このとき, $M \simeq A^n$ より, $\mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq N^n$ かつ

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \simeq \mathrm{Hom}_B(B^n, B \otimes_A N) \simeq (B \otimes_A N)^n.$$

よって, 主張がテンソル積の分配法則がら従う．

次に, M が一般の有限表示加群である場合を考える. このとき, 有限生成自由加群 F', F を用いて, 完全系列 $F' \to F \to M \to 0$ がとれる. よって, 関手 $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, N)$ が左完全であることと, B が平坦 A 代数であることから, 完全系列

$$0 \to B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, N) \to B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F, N) \to B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F', N)$$

が得られる. したがって, 以下の可換図式が得られ, その行は完全系列である.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_M"] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_F"] & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F',N) \arrow[d, "\alpha_{F'}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A F, B \otimes_A N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A F', B \otimes_A N)
\end{tikzcd}$$

F, F' が有限生成自由加群だから, $\alpha_{F'}$, α_F が同型写像である. このとき, α_M も同型写像になることは容易に確認できる.

2.9 鎖複体

定義 2.48. チェイン複体 (または鎖複体) とは $d_i \circ d_{i+1} = 0$ $(i \in \mathbb{Z})$ を満たすもので, 以下のように並べた加群の準同型の列 $(C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ のことをいう.

$$\dots \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots$$

チェイン複体 $(C_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を単に $C_\bullet$ で表す. $d_i \circ d_{i+1} = 0$ を満たす有限個の準同型写像 $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} C_0$ が与えられているとき, 他の $i \in \mathbb{Z}$ について $C_i = 0$ とおき, $d_i \colon C_i \to C_{i+1}$ を零準同型と定めると, チェイン複体 $(C_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ が定まる. 特に, 1 つの準同型 $f \colon M \to N$ が与えられているとする. このとき, チェイン複体

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

を考える. つまり, $C_1 = M$, $C_0 = N$ とおき, 他の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $C_i = 0$ とおく. また $d_1 = f$ とし, 他の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $d_i = 0$ とおく. この複体を $C(f)_\bullet$ と表す.

チェイン複体 $C_\bullet = (C_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ について, $d_i \circ d_{i+1} = 0$ より, $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \subset \mathrm{Ker}(d_i)$ である.

$$H_i(C_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_i) / \mathrm{Im}(d_{i+1})$$

とおき, チェイン複体 $C_\bullet = (C_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ の i 次ホモロジー加群とは,

補題 2.49. $C_\bullet$ が完全系列である $\iff$ 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し $H_i(C_\bullet) = 0$ である.

証明

$C_\bullet$ が完全である $\iff$ 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathrm{Ker}(d_i) = \mathrm{Im}(d_{i+1})$ $\iff$ 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し, $H^i(C_\bullet) = 0$ である.

例 2.50. $f \colon M \to N$ を準同型写像とし, 複体 $C(f)_\bullet$ を考える.

$$H_i(C(f)_\bullet) = \begin{cases} \mathrm{Coker}(f) & \text{if } i = 0 \\ \ker(f) & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{if } i \neq 0, 1. \end{cases}$$

2 つのチェイン複体 $C_\bullet = (C_i, d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $C'_\bullet = (C'_i, d'_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ が与えられているときに, 複体の準同型 $\varphi\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ とは, 以下の図式が交換するような準同型 $\varphi_\bullet = (\varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ の族のことである.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \xrightarrow{d_{i+2}} & C_{i+1} & \xrightarrow{d_{i+1}} & C_i & \xrightarrow{d_i} & C_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{i-1}} & & \\
\dots & \xrightarrow{d'_{i+2}} & C'_{i+1} & \xrightarrow{d'_{i+1}} & C'_i & \xrightarrow{d'_i} & C'_{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & \dots
\end{array}$$

チェイン複体の準同型 $\varphi\colon C_\bullet \to C'_\bullet$ はホモロジー加群の準同型

$$H_i(\varphi)\colon H_i(C_\bullet) \to H_i(C'_\bullet) \tag{2.12}$$

を誘導する. なぜならば, $\varphi_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ \varphi_i$ より φ_i が準同型 $\mathrm{Ker}(d_i) \to \mathrm{Ker}(d'_i)$, $x \mapsto \varphi_i(x)$ を与える. 同様に, $\varphi_i \circ d_{i+1} = d'_{i+1} \circ \varphi_{i+1}$ より, 準同型 $\mathrm{Im}(d_{i+1}) \to \mathrm{Im}(d'_{i+1})$, $x \mapsto \varphi_i(x)$ が誘導される. ゆえに, 上記のような準同型 2.12 が誘導される.

$C'_\bullet$, $C_\bullet$, $C''_\bullet$ をチェイン複体とし, $f\colon C'_\bullet \to C_\bullet$, $g\colon C_\bullet \to C''_\bullet$ をチェイン複体の準同型とする. このとき, チェイン複体の系列

$$0 \to C'_\bullet \xrightarrow{f} C_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet \to 0$$

が短完全列であるとは, 全ての $i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$0 \to C'_i \xrightarrow{f_i} C_i \xrightarrow{g_i} C''_i \to 0$$

が短完全列であることをいう.

定理 2.51. チェイン複体の短完全列 $0 \to C'_\bullet \xrightarrow{f} C_\bullet \xrightarrow{g} C''_\bullet \to 0$ が与えられているとする. このとき, ホモロジー加群の完全系列

$$\dots \to H_{i+1}(C'_\bullet) \xrightarrow{H_{i+1}(f)} H_{i+1}(C_\bullet) \xrightarrow{H_{i+1}(g)} H_{i+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_{i+1}} H_i(C'_\bullet) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(C_\bullet) \xrightarrow{H_i(g)} H_i(C''_\bullet) \to \dots$$

が存在する.

証明

以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_{i+2}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{i+2}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{i+2}} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+i}} & C_{i+1} & \xrightarrow{g_{i+i}} & C''_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{i+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_i & \xrightarrow{f_i} & C_i & \xrightarrow{g_i} & C''_i & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_i} & & \downarrow{\scriptstyle d_i} & & \downarrow{\scriptstyle d''_i} & & \\
0 & \longrightarrow & C'_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-i}} & C_{i-1} & \xrightarrow{g_{i-i}} & C''_{i-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{i-1}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{i-1}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

蛇の補題を使うことによって, 完全系列

$$\mathrm{Coker}(d'_{i+1}) \to \mathrm{Coker}(d_{i+1}) \to \mathrm{Coker}(d''_{i+1}) \to 0$$

および
$$0 \to \ker(d'_{i-1}) \to \ker(d_{i-1}) \to \ker(d''_{i-1}) \to 0$$
が得られる．次に，以下の可換図式を考える．準同型定理より，d_i は自然に準同型 $\bar{d}_i \colon \operatorname{Coker}(d_{i+1}) \to \ker(d_{i-1})$．同様に，準同型 $\bar{d}'_i$ および $\bar{d}''_i$ が存在し，以下の図式が交換する．

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coker}(d'_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}'_i"] & \operatorname{Coker}(d_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_i"] & \operatorname{Coker}(d''_{i+1}) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}''_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(d'_{i-1}) \arrow[r] & \ker(d_{i-1}) \arrow[r] & \ker(d''_{i-1}) &
\end{tikzcd}$$

また，
$$\ker(\bar{d}_i) = \frac{\operatorname{Ker}(d_i)}{\operatorname{Im}(d_{i+1})} = H_i(C_\bullet)$$
である．同様に，$\ker(\bar{d}'_i) = H_i(C'_\bullet)$, $\ker(\bar{d}''_i) = H_i(C''_\bullet)$ が成り立つ．また，
$$\operatorname{Coker}(\bar{d}_i) = \frac{\operatorname{Ker}(d_{i-1})}{\operatorname{Im}(d_i)} = H_{i-1}(C_\bullet)$$
である．同様に $\operatorname{Coker}(\bar{d}'_i) = H_{i-1}(C'_\bullet)$, $\operatorname{Coker}(\bar{d}''_i) = H_{i-1}(C''_\bullet)$ である．蛇の補題より，以下の完全系列が得られる．
$$H_{i+1}(C'_\bullet) \to H_{i+1}(C_\bullet) \to H_{i+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_i(C'_\bullet) \to H_i(C_\bullet) \to H_i(C''_\bullet).$$

注意 2.52. 上記の定理のホモロジー加群の完全列は蛇の補題の一般化である．実際，蛇の補題の設定通り，以下のような可換図式を考え，その行が短完全列であるとする．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f'"] & M_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "f"] & M''_1 \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'_0 \arrow[r, "u_0"] & M_0 \arrow[r, "v_0"] & M''_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.13}$$

$C'_\bullet = C(f')_\bullet$, $C_\bullet = C(f)_\bullet$, $C''_\bullet = C(f'')_\bullet$ とおく．零加群で延長することによって，上記の可換図式をチェイン複体
$$0 \to C'_\bullet \xrightarrow{u} C_\bullet \xrightarrow{v} C''_\bullet \to 0$$
の短完全列とみなすことができる．よって，ホモロジー加群の完全系列
$$\cdots \to H_2(C''_\bullet) \to H_1(C'_\bullet) \to H_1(C_\bullet) \to H_1(C''_\bullet) \to H_0(C'_\bullet) \to H_0(C_\bullet) \to H_0(C''_\bullet) \to H_{-1}(C'_\bullet) \to \dots$$
例 2.50 を使えば，この完全系列は以下のようになる．
$$0 \to \ker(f') \to \ker(f) \to \ker(f'') \to \operatorname{Coker}(f') \to \operatorname{Coker}(f) \to \operatorname{Coker}(f'') \to 0$$
よって，蛇の補題はホモロジー加群の計算から分かる．

命題 2.53. A 加群の短完全列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ を考える．M'' が平坦 A 加群であるとする．このとき，任意の A 加群 N に対し，系列
$$0 \to N \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes f} N \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes g} N \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$
は短完全列である．

証明

N の分解とは, 以下のような完全列のことをいう.

$$\dots \xrightarrow{u_3} L_2 \xrightarrow{u_2} L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \xrightarrow{u_0} N \longrightarrow 0$$

つまり, $u_0\colon L_0 \to N$ が全射であり, 他の写像について $\mathrm{Im}(u_{i+1}) = \mathrm{Ker}(u_i)$ $(i \geq 1)$ が成り立つ. 全ての $(L_i)_{i\geq 0}$ が自由加群であるとき, 自由分解という. 以下の補題 2.54 より, 自由分解が存在する. A 加群 P に対し, 以下のチェイン複体を $C_\bullet^P$ とおく.

$$\dots \xrightarrow{u_3\otimes_A \mathrm{id}_P} L_2 \otimes_A P \xrightarrow{u_2\otimes \mathrm{id}_P} L_1 \otimes_A P \xrightarrow{u_1\otimes \mathrm{id}_P} L_0 \otimes_A P \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

つまり, N の自由分解に $-\otimes_P$ を適用し, 加群 $N \otimes_A P$ と写像 $u_0 \otimes \mathrm{id}_P$ を取り除いて得た複体である. 任意の A 加群 P に対し, 系列

$$L_1 \otimes_A P \xrightarrow{u_1\otimes \mathrm{id}_P} L_0 \otimes_A P \xrightarrow{u_0\otimes \mathrm{id}_P} N \otimes_A P \to 0$$

が完全系列であるので,

$$H_0(C_\bullet^P) \simeq \frac{L_0 \otimes_A P}{\mathrm{Im}(u_1 \otimes \mathrm{id}_P)} = \frac{L_0 \otimes_A P}{\mathrm{Ker}(u_o \otimes \mathrm{id}_P)} \simeq N \otimes_A P$$

が成り立つ. また, P が平坦加群ならば, $L_0 \otimes_A P$ 以外のところにおいて複体 $C_\bullet^P$ が完全だから,

$$H_i(C_\bullet^P) = 0, \qquad i \neq 0.$$

以下の可換図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L_2 \otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d] & L_1 \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & L_1 \otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_0 \otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d] & L_0 \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d] & L_0 \otimes_A M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

チェイン複体の短完全列

$$0 \to C_\bullet^{M'} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} C_\bullet^{M} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} C_\bullet^{M''} \to 0$$

が得られる. ゆえに, 完全系列

$$\cdots \to H_1(C_\bullet^{M''}) \to H_0(C_\bullet^{M'}) \to H_0(C_\bullet^{M}) \to H_0(C_\bullet^{M''}) \to H_{-1}(C_\bullet^{M'}) \to \dots$$

が存在する. 明らかに, $H_{-1}(C_\bullet^{M'}) = 0$ である. また, M'' が平坦加群だから, $H_1(C_\bullet^{M''}) = 0$ である. 上記の計算より $H_0(C_\bullet^P) \simeq N \otimes_A P$ である. ゆえに, 短完全列

$$0 \to N \otimes_A M' \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes f} N \otimes_A M \xrightarrow{\mathrm{id}_N \otimes g} N \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

が得られる. 主張が従う.

補題 2.54. 任意の A 加群 N に対して, 自由分解が存在する.

証明

$\{x_i\}_{i\in I_0}$ を N の生成系とする. $f_0(e_i)=x_i$ で定まる準同型 $f_0\colon A^{(I_0)}\to N$ を考える. $\mathrm{Ker}(f_0)$ の生成系 $\{x_i^{(0)}\}_{i\in I_1}$ をとり, $f_1(e_i)=x_i^{(0)}$ で定まる準同型 $f_1\colon A^{(I_1)}\to \mathrm{Ker}(f)$ を考える. このとき, 系列 $A^{(I_1)}\to A^{(I_0)}\to M\to 0$ が完全系列である. こうして続けていくと, 完全系列

$$\cdots\to A^{(I_2)}\xrightarrow{f_2}A^{(I_1)}\xrightarrow{f_1}A^{(I_0)}\xrightarrow{f_0}N\to 0$$

が得られる.

3 局所化

3.1 可換環の局所化

A を可換環とする.

定義 3.1. $S \subset A$ を部分集合とする. 以下が成り立つとき, S を積閉集合という.

- $1 \in S$,
- $x, y \in S$ ならば $xy \in S$.

命題 3.2. $\mathfrak{p}$ が A の素イデアルならば, $S = A - \mathfrak{p}$ は積閉集合である.

証明

明らかに $1 \in S$ である. $\mathfrak{p}$ が素イデアルより, $x, y \notin \mathfrak{p}$ ならば $xy \notin \mathfrak{p}$ となる. 主張が従う.

例 3.3. $f \in A$ とする. このとき, f のベキ全体の集合 $S_f := \{f, f^2, f^3, \dots\}$ は積閉集合である.

S を積閉集合とする. $(a, s), (a', s') \in A \times S$ に対して

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists t \in S,\ t(sa' - s'a) = 0$$

と定義し, $A \times S$ 上の二項関係を入れる.

補題 3.4. 上記の二項関係は $A \times S$ 上の同値関係である.

証明

反射律は明らかに成り立つ. $(a, s) \sim (a', s')$ とし, $t(sa' - s'a) = 0$ を満たす $t \in S$ をとる. 明らかに $t(s'a - sa') = 0$ より, $\sim$ は対称的である. 最後に, 推移的であることを確認する. $(a, s) \sim (a', s')$ かつ $(a', s') \sim (a'', s'')$ とする. このとき, $t(sa' - s'a) = 0$ かつ $t'(s'a'' - s''a') = 0$ を満たす $t, t' \in S$ が存在する. よって, $tst's'a'' = tst's''a' = ts't's''a$ となり, すなわち

$$tt's'(sa'' - s''a) = 0$$

が成り立つ. したがって, $(a, s) \sim (a'', s'')$ である.

同値関係 $\sim$ による同値類全体の集合を $S^{-1}A$ と表す. つまり

$$S^{-1}A = (A \times S)/\sim$$

とおく. $(a, s) \in A \times S$ の同値類を $\frac{a}{s}$ という分数で表す. 「分数を約分できる」ことに注意する. つまり, $s, t \in S$, $a \in A$ に対して

$$\frac{ta}{ts} = \frac{a}{s}$$

である.

例 3.5. A を整域とし, $S = A - \{0\}$ とする. A が整域であるので, $x, y \neq 0$ のとき $xy \neq 0$ である. よって, S は積閉集合である. $S^{-1}A$ は A の商体である.

次に, $S^{-1}A$ 上の演算 (和と積) を定義する. $A \times S$ の元 (a, s), (a', s') に対し

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{s'a + sa'}{ss'}, \quad \frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}$$

とおき, 演算 $+$（和）と $\times$（積）を定める.

補題 3.6. 上記の演算は well-defined である（つまり, 結果が同値類の代表元の取り方に依らない).

証明

$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2}$ かつ $\frac{a_1'}{s_1'} = \frac{a_2'}{s_2'}$ であることを仮定する．このとき, $\frac{s_1'a_1+s_1a_1'}{s_1s_1'} = \frac{s_2'a_2+s_2a_2'}{s_2s_2'}$ かつ $\frac{a_1a_1'}{s_1s_1'} = \frac{a_2a_2'}{s_2s_2'}$ が成り立つことを示せば良い．仮定より, $t(s_1a_2 - s_2a_1) = 0$ かつ $t'(s_1'a_2' - s_2'a_1') = 0$ を満たす $t, t' \in S$ が存在する．このとき,

$$
\begin{aligned}
&tt'(s_1s_1'(s_2'a_2 + s_2a_2') - s_2s_2'(s_1'a_1 + s_1a_1')) = s_1't's_2't(s_1a_2 - s_2a_1) + s_1ts_2t'(s_1'a_2' - s_2'a_1') = 0\\
&tt'(s_1s_1'a_2a_2' - s_2s_2'a_1a_1') = t's_1'a_2't(s_1a_2 - s_2a_1) + ts_2a_1t'(s_1'a_2' - s_2'a_1') = 0
\end{aligned}
$$

主張が従う.

定理 3.7. $(S^{-1}A, +, \times)$ は可換環である．積の単位元は $\frac{1}{1}$ であり, 和の単位元は $\frac{0}{1}$ である．写像

$$\iota\colon A \to S^{-1}A, \quad x \mapsto \frac{x}{1}$$

は環の準同型写像である.

証明

- 明らかに $\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{a'}{s'} + \frac{a}{s}$ かつ $\frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{a'}{s'} \times \frac{a}{s}$ が成り立つ.
- 和の結合法則を示す．$\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}, \frac{a_3}{s_3}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) + \frac{a_3}{s_3} &= \frac{s_1a_2 + s_2a_1}{s_1s_2} + \frac{a_3}{s_3}\\
&= \frac{s_1s_2a_3 + s_3s_1a_2 + s_3s_2a_1}{s_1s_2s_3}
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1}{s_1} + \left(\frac{a_2}{s_2} + \frac{a_3}{s_3}\right) &= \frac{a_1}{s_1} + \frac{s_2a_3 + s_3a_2}{s_2s_3}\\
&= \frac{s_1s_2a_3 + s_3s_1a_2 + s_3s_2a_1}{s_1s_2s_3}
\end{aligned}
$$

であり, 結合法則が示せた.
- 明らかに $\frac{a}{s} + \frac{0}{1} = \frac{a}{s}$ であるので, $\frac{0}{1}$ は加法の単位元である．また, $\frac{a}{s} + \frac{-a}{s} = \frac{-as+as}{s^2} = \frac{0}{s^2} = \frac{0}{1}$ より, S^{-1} の任意の元は和に関する逆元を持ち, $(S^{-1}, +)$ はアーベル群である.
- 積の結合法則を確かめる．$\frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2}, \frac{a_3}{s_3}$ に対して,

$$\left(\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_2}{s_2}\right) \times \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1a_2}{s_1s_2} \times \frac{a_3}{s_3} = \frac{a_1a_2a_3}{s_1s_2s_3} = \frac{a_1}{s_1} \times \left(\frac{a_2}{s_2} \times \frac{a_3}{s_3}\right)$$

- 明らかに, $\frac{1}{1}$ は積に関する単位元である.
- 分配法則を示す.

$$\left(\frac{a_1}{s_1} + \frac{a_2}{s_2}\right) \times \frac{a_3}{s_3} = \frac{s_1a_2 + s_2a_1}{s_1s_2} \times \frac{a_3}{s_3} = \frac{s_1a_2a_3 + s_2a_1a_3}{s_1s_2s_3}$$

一方,

$$\left(\frac{a_1}{s_1} \times \frac{a_3}{s_3}\right) + \left(\frac{a_2}{s_2} \times \frac{a_3}{s_3}\right) = \frac{a_1a_3}{s_1s_3} + \frac{a_2a_3}{s_2s_3} = \frac{s_2s_3a_1a_3 + s_1s_3a_2a_3}{s_1s_2s_3^2} = \frac{s_2a_1a_3 + s_1a_2a_3}{s_1s_2s_3}$$

であるので, 分配法則が成り立つ．以上より $(S^{-1}, +, \times)$ は可換環である．また,

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = \frac{x+y}{1}, \quad \frac{x}{1} \times \frac{y}{1} = \frac{xy}{1}$$

が成り立つので, $\iota\colon A \to S^{-1}A$, $x \mapsto \frac{x}{1}$ は環の準同型である.

補題 3.8. $S^{-1}A$ が零環である $\iff 0 \in S$ である．

証明

$S^{-1}A$ が零環である $\iff \frac{1}{1} = \frac{0}{1} \iff \exists s \in S, s(1 \times 1 - 0 \times 1) = 0 \iff 0 \in S.$

定義 3.9.
(a) $\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする．積閉集合 $A - \mathfrak{p}$ に関する局所化は $A_{\mathfrak{p}}$ とおき, $\mathfrak{p}$ における A の局所化という．
(b) $f \in A$ とする．積閉集合 $S_f = \{f, f^2, f^3, \dots\}$ に関する局所化を A_f とおく．

環準同型 $\iota\colon A \to S^{-1}A$ は次の性質を満たす．任意の $s \in S$ に対して, $\iota(s) = \frac{s}{1}$ は $S^{-1}A$ の単元である．実際に, $\frac{s}{1}\frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1}$ である．

命題 3.10. $f\colon A \to B$ が環の準同型で, 任意の $s \in S$ に対し $f(s)$ が B の単元であるとする．このとき, $f = g \circ \iota$ を満たす環の準同型 $g\colon S^{-1}A \to B$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\iota"'] & & B \\ & S^{-1}A \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

証明

まず, $f = g \circ \iota$ を満たす g の一意性を示す．$\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ に対して, $\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} = \iota(a)\iota(s)^{-1}$ が成り立つ．ゆえに, $g(\frac{a}{s}) = g(\iota(a)\iota(s)^{-1}) = f(a)f(s)^{-1}$ とおく必要がある．よって, g の一意性が分かる．
次に, g の存在性を示す．$\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ に対して, $g(\frac{a}{s}) = f(a)f(s)^{-1}$ とおくと, 写像 $g\colon S^{-1}A \to B$ が矛盾なく定まることを確認する．$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ ならば, $t(sa' - s'a) = 0$ を満たす $t \in S$ が存在する．よって, $f(t)(f(s)f(a') - f(s')f(a)) = 0$ となる．$f(t)$ が単元より, $f(s)f(a') = f(s')f(a)$ となり, 故に $f(a)f(s)^{-1} = f(a')f(s')^{-1}$ である．g が環の準同型であることは容易に確認できる．また, $g(\frac{a}{1}) = f(a)$ より, $f = g \circ \iota$ が成り立つ．

注意 3.11. 可換環 $S^{-1}A$ は次のように定義することもできる．各 S の元 s について, 不定元 X_s を取る．多変数多項式環 $A[(X_s)_{s \in S}]$ を考える．$sX_s - 1$ (ただし $s \in S$) という形の多項式全体で生成されるイデアルを I とおき,

$$B = \frac{A[(X_s)_{s \in S}]}{I}$$

と定める．自然な環の準同型 $f : A \to B$ は命題 3.10 の条件を満たす．実際に, $s \in S$ に対して $x_s = X_s + I$ とおくと, $x_s f(s) = 1$ が成り立つので, $f(s)$ は B において可逆元である．よって, $f = g \circ \iota$ を満たす環の準同型 $g\colon S^{-1}A \to B$ が一意的に存在する．g が環同型であることが簡単に確かめられる．

3.2 局所化のイデアル

A を可換環とし, $S \subset A$ を積閉集合とする．A の局所化 $S^{-1}A$ と自然な準同型 $\iota\colon A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ を考える．以下は, $S^{-1}A$ のイデアルを調べる．A のイデアル I に対して,

$$S^{-1}I = \left\{ \frac{x}{s} \;\middle|\; x \in I,\ s \in S \right\}$$

とおく．明らかに, $S^{-1}I$ は $S^{-1}A$ のイデアルである．逆に, J が $S^{-1}A$ のイデアルならば, $\iota^{-1}(J)$ は A のイデアルである．したがって, 以下の 2 つの写像が得られる．

$$\begin{aligned} \{A \text{ のイデアル}\} &\longleftrightarrow \{S^{-1}A \text{ のイデアル}\} \\ I &\longmapsto S^{-1}I \\ \iota^{-1}(J) &\longleftarrow\!\shortmid J \end{aligned}$$

写像 $I \mapsto S^{-1}I$ を α, 写像 $J \mapsto \iota^{-1}(J)$ を β とおく.

命題 3.12.
(1) $\alpha \circ \beta$ は恒等写像である. つまり, 任意の $S^{-1}A$ のイデアル J に対して,

$$\alpha(\beta(J)) = S^{-1}(\iota^{-1}(J)) = J$$

である.
(2) とくに, α は全射であり, β は単射である.

証明

$I = \iota^{-1}(J)$ とおく. $S^{-1}I \subset J$ を示す. $x \in I$ ならば, $\frac{x}{1} \in J$ である. よって, $s \in S$ に対し, $\frac{x}{s} = \frac{1}{s}\frac{x}{1} \in J$ となる. 逆に, $J \subset S^{-1}I$ を示す. $\frac{x}{s} \in J$ とする (但し, $x \in A$, $s \in S$ である). このとき, $\frac{x}{1} = \frac{s}{1}\frac{x}{s}$ より, $\frac{x}{1} = \iota(x) \in J$. ゆえに, $x \in I$ が成り立ち, $\frac{x}{s} \in S^{-1}I$ である.

注意 3.13. $\beta \circ \alpha$ が恒等写像とは限らないことに注意する. つまり, A のイデアル I に対して $\iota^{-1}(S^{-1}I)$ とは限らない. 例えば, $A = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, $I = 2\mathbb{Z}$ とする. このとき, $S^{-1}A = \mathbb{Q}$, $S^{-1}I = \mathbb{Q}$ であるので, $\iota^{-1}(S^I) = \iota^{-1}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z} \neq I$ である.

補題 3.14. A の任意のイデアル I に対して, $S^{-1}I = S^{-1}A \iff tx \in S$ を満たす $x \in I$, $t \in S$ が存在する. とくに, $I \cap S \neq \emptyset$ のとき, $S^{-1}I = S^{-1}A$ である.

証明

$S^{-1}I = S^{-1}A$ であることと, $\frac{1}{1} \in S^{-1}I$ であることと同値である. 一方, $\frac{1}{1} = \frac{x}{s}$ ($x \in I$, $s \in S$) ならば $t \in S$ が存在し $t(x - s) = 0$ である. よって $tx = ts \in S$ である. 逆に, $tx \in S$ ($t \in S$) ならば, $s = tx$ とおくと $\frac{1}{1} = \frac{s}{s} = \frac{tx}{s} \in S^{-1}I$ である.

定義 3.15. A のイデアル I に対して,

$$S(I) = \beta(\alpha(I)) = \iota^{-1}(S^{-1}I)$$

とおき, I の S に関する飽和イデアルという.

以下が成り立つことは容易に証明できる.

$$S(I) = \{x \in A \mid \exists s \in S,\ sx \in I\}.$$

A のイデアル I' が飽和イデアルであるとは, $I = S(I')$ となるイデアル I' が存在することである. 任意のイデアル I に対して

$$S(S(I)) = S(I)$$

であるので, I が飽和イデアル $\iff S(I) = I$ である. $J \subset S^{-1}A$ をイデアルとする. このとき, $\beta(J) = \iota^{-1}(J)$ は飽和イデアルである. なぜならば, $\alpha \circ \beta$ が恒等写像より $S(\beta(J)) = \beta(\alpha(\beta(J))) = \beta(J)$ である. よって, 以下の写像は全単射である.

$$\{S \text{ に関する飽和イデアル}\} \longleftrightarrow \{S^{-1}A \text{ のイデアル}\} \tag{3.1}$$
$$I \longmapsto S^{-1}I \tag{3.2}$$
$$\iota^{-1}(J) \longleftarrow\!\shortmid\ J \tag{3.3}$$

可換環 A のイデアル I の根基とは,

$$\sqrt{I} := \{x \in A \mid \exists n \geq 1,\ x^n \in I\}$$

のことである．$\sqrt{I}$ がイデアルであり，$I \subset \sqrt{I}$ が成り立つ．例えば，$A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$ とする．また，$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ を n の素因数分解とする．このとき $\sqrt{I} = (p_1 \dots p_m)\mathbb{Z}$ が成り立つ．

補題 3.16. I が A のイデアルならば，$\sqrt{S^{-1}I} = S^{-1}\sqrt{I}$ である．

証明

明らかに $S^{-1}\sqrt{I} \subset \sqrt{S^{-1}I}$ である．逆に，$\frac{x}{s} \in \sqrt{S^{-1}I}$ とする ($x \in A$, $s \in S$)．$\frac{x^n}{s^n} = \frac{y}{t}$ ($n \geq 1$, $x \in A$, $y \in I$, $s, t \in S$) とできる．よって，$u(tx^n - s^n y) = 0$ を満たす $u \in S$ が存在する．特に $utx^n \in I$ となる．よって，$(tux)^n \in I$ となり，ゆえに $tux \in I$ となる．したがって，$\frac{x}{s} = \frac{tux}{tus} \in S^{-1}\sqrt{I}$ が成り立つ．

次に，$S^{-1}A$ の素イデアルを考える．$\mathfrak{P}$ を $S^{-1}A$ の素イデアルとする．可換環の準同型による素イデアルの逆像は素イデアルであるので，$\mathfrak{p} := \beta(\mathfrak{P}) = \iota^{-1}(\mathfrak{P})$ は A の素イデアルである．命題 3.12 より $S^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \neq S^{-1}A$ である．補題 3.14 より，$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ が成り立つ．

逆に，$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ を満たす A の素イデアル $\mathfrak{p}$ を考える．$S^{-1}\mathfrak{p}$ は $S^{-1}A$ の素イデアルであることを示す．$x, y \in A$, $s, t \in S$ とし，$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ とする．このとき，$\frac{xy}{st} = \frac{z}{u}$, $z \in \mathfrak{p}$, $u \in S$ と書ける．よって，$w \in S$ を用いて $w(uxy - stz) = 0$ である．このことから $wuxy \in \mathfrak{p}$ となる．$wu \in S \subset A - \mathfrak{p}$ より，$xy \in \mathfrak{p}$ となる．よって，$x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ である．したがって，$\frac{x}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ または $\frac{y}{t} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ となり，$S^{-1}\mathfrak{p}$ は素イデアルである．以上より，写像 α と β を制限することで，以下の写像が得られる．

$$
\begin{aligned}
\{S \cap \mathfrak{p} = \emptyset \text{ を満たす } A \text{ の素イデアル } \mathfrak{p}\} &\longleftrightarrow \left\{S^{-1}A \text{ の素イデアル}\right\} \\
\mathfrak{p} &\longmapsto S^{-1}\mathfrak{p} \qquad (3.4) \\
\iota^{-1}(\mathfrak{P}) &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{P} \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

定理 3.17. 上記の写像 (3.4) と (3.5) は全単射であり，互いの逆写像である．

証明

$\alpha \circ \beta$ が恒等写像であることは命題 3.12 から従う．よって，$S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ を満たす A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し $\beta(\alpha(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ であることを示せば十分である．$\mathfrak{P} = S^{-1}\mathfrak{p}$ とおく．明らかに，$\mathfrak{p} \subset \iota^{-1}(\mathfrak{P})$ である．逆に，$\frac{x}{1} \in \mathfrak{P}$ ($x \in A$) ならば，$\frac{x}{1} = \frac{y}{s}$ ($y \in \mathfrak{p}$, $s \in S$) と書ける．よって，$t(sx - y) = 0$ となる $t \in S$ が存在する．とくに $tsx \in \mathfrak{p}$ である．$ts \notin \mathfrak{p}$ より，$x \in \mathfrak{p}$ である．ゆえに $\mathfrak{p} = S^{-1}\mathfrak{P}$ が成り立つ．

系 3.18. $\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする．$A_\mathfrak{p}$ の素イデアルと $\mathfrak{p}$ に含まれる A の素イデアルとは一対一に対応している．とくに，$A_\mathfrak{p}$ は局所環である (つまり，ただ一つの極大イデアルを持つ環である)．

証明

$S = A - \mathfrak{p}$ とする．$S \cap \mathfrak{q} = \emptyset \iff \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ が成り立つので，主張がわかる．また，任意の $A_\mathfrak{p}$ の素イデアルが $S^{-1}\mathfrak{p}$ に含まれるので，$S^{-1}\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ の唯一の極大イデアルである．

$A_\mathfrak{p}$ の唯一の極大イデアルを $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ と表す．すなわち，$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \{\frac{x}{s} \mid x \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\}$ である．

$\mathfrak{p}_i$ ($i = 1, \dots, n$) を素イデアルとし，

$$S = \bigcap_{i=1}^{n} A - \mathfrak{p}_i = A - \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

とおく．積閉集合の共通部分は明らかに積閉集合だから，S は積閉集合である．J を $S^{-1}A$ の素イデアルとし，$J \neq S^{-1}A$ とする．$J = S^{-1}I$ となる A のイデアル I が存在する．$J \neq S^{-1}A$ より，$I \cap S = \emptyset$ である．よって，

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \tag{3.6}$$

である.

命題 3.19 (素イデアル回避)**.** $I, J_1, \ldots, J_n$ をイデアルとし, $J_1, \ldots, J_n$ の中で高々 2 つのものが素イデアルでないことを仮定する. このとき, $I \subset \bigcup_{i=1}^n J_i$ ならば, $I \subset J_i$ を満たす J_i が存在する.

証明

$n = 1$ の場合は明らかである. $n > 1$ とし, 帰納法により証明する. 帰納法の仮定より, 任意の $j = 1, \ldots, n$ に対し $I \not\subset \bigcup_{i \neq j} J_i$ として良い. したがって, $x_j \in I$ かつ $x_j \notin \bigcup_{i \neq j} J_i$ を満たす x_j が存在する.
$n = 2$ の場合を考える. このとき, $x_1 + x_2 \in I$ であるが $x_1 + x_2 \notin J_1 \cup J_2$ であり, $I \subset J_1 \cup J_2$ に矛盾する. 次に, $n > 2$ とする. J_1 が素イデアルであることを仮定して良い. このとき, $x = x_1 + x_2 x_3 \ldots x_n$ と定める. J_1 が素イデアルだから, $x_2 x_3 \ldots x_n \notin J_1$ である. よって, $x \notin J_1$ である. また, $x_1 \notin \bigcup_{i \neq 1} J_i$ より, $x \notin J_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ である. したがった, $x \in I$, $x \notin \bigcup_{i=1}^n J_i$ となり, $I \subset \bigcup_{i=1}^n J_i$ に矛盾する.

注意 3.20. k を無限体とし, A を k 代数とする. このとき, 任意の A のイデアル $I, J_1, \ldots, J_n$ に対して

$$I \subset \bigcup_{i=1}^n J_i \Longrightarrow \exists i,\ I \subset J_i$$

が成り立つ. なぜならば, k ベクトル空間 I を $I = \bigcup_{i=1}^n (I \cap J_i)$ と書くことができる. k が無限体だから, 任意の k ベクトル空間が真線型部分空間の有限個の輪集合として表すことができない. よって, $I \cap J_i = I$ となる i が存在する. ゆえに $I \subset J_i$ となる.

定義 3.21. A が半局所環であるとは, A が有限個の極大イデアルしか持たないことをいう.

系 3.22. $S = \bigcap_{i=1}^n A - \mathfrak{p}_i$ とする. $S^{-1}A$ とは異なる $S^{-1}A$ の任意のイデアル J に対して $J \subset S^{-1}\mathfrak{p}_i$ となる $\mathfrak{p}_i$ が存在する. 特に $S^{-1}A$ は半局所環である.

証明

J を $S^{-1}A$ のイデアルとし, $J \neq S^{-1}A$ とする. また $J = S^{-1}I$ となる A のイデアル I をとり. (3.6) が成り立つので, 上記の系より $I \subset \mathfrak{p}_i$ を満たす i が存在する. よって, $J = S^{-1}I \subset S^{-1}\mathfrak{p}_i$ である. 主張が従う.

3.3 加群の局所化

S を A の積閉集合とする. A 加群 M の局所化 $S^{-1}M$ は環局所化の場合と同様に定義される. まず, 集合 $M \times S$ の元 (m, s) と (m', s') に対して

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \exists t \in S, t(sm' - s'm) = 0$$

と定義することで, $M \times S$ に二項関係を入れる. 補題 3.4 の証明と同様の議論で, この二項関係が同値関係であることが確認できる. 同値類全体の集合を $S^{-1}M$ と表す. うなわち,

$$S^{-1}M = (M \times S)/\sim$$

とおく. $(m, s) \in M \times S$ の同値類を $\frac{m}{s}$ で表す. $S^{-1}M$ の和を

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}$$

によって定義する. 上記の演算は同値類の代表元に依らないため, well-defined である. この演算に関して $S^{-1}M$ はアーベル群である. $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$, $\frac{m}{t} \in S^{-1}M$ に対して

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{t} = \frac{am}{st}$$

とおくことで, $S^{-1}M$ を $S^{-1}A$ 加群とみなすことができる. 但し, 上記の定義が代表元の選び方に依らないことを注意する. 任意の $x \in M$ に対し $\iota_M(x) = \frac{x}{1}$ とおき, 写像 $\iota_M \colon M \to S^{-1}M$ を定義する.

注意 3.23. 任意の $s \in S$ に対し, 写像 $M \xrightarrow{s} M$, $x \mapsto sx$ が同型写像であると仮定する. このとき, $\iota_M \colon M \to S^{-1}M$ は同型写像である. なぜならば, $x \in \mathrm{Ker}(\iota_M)$ のとき $\frac{x}{1} = 0$ より $sx = 0$ となる $s \in S$ が存在する. 仮定より $x = 0$ となり, ゆえに ι_M が単射である. また, $s \in S$, $x \in M$ とする. 仮定より, $x = sy$ を満たす $y \in M$ が存在する. よって, $\frac{x}{s} = \frac{sy}{s} = \frac{y}{1} = \iota_M(y)$ である. したがって, ι_M が全単射となる.

定理 3.24. 任意の $a \in A$, $s \in S$, $m \in M$ に対して $f(\frac{a}{s} \otimes m) = \frac{am}{s}$ を満たす $S^{-1}A$ 加群の同型写像

$$f \colon S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$$

が一意的に存在する.

証明

$S^{-1}A \otimes_A M$ の任意の元が $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i$, $a_i \in A$, $s_i \in S$, $m_i \in M$ と表せるので, f の一意性が分かる. 次に, f の存在性について考える. 写像 $S^{-1}A \times M \to S^{-1}M$, $(\frac{a}{s}, m) \mapsto \frac{am}{s}$ は明らかに A 双線形写像である. よって, $f(\frac{a}{s} \otimes m) = \frac{am}{s}$ を満たす A 線形写像 $f \colon S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M$ が一意的に存在する. また, $a, b \in A$, $s, t \in S$, $m \in M$ に対し

$$f\left(\frac{ba}{ts} \otimes m\right) = \frac{bam}{ts} = \frac{b}{t} f\left(\frac{a}{s} \otimes m\right)$$

であるので, f が $S^{-1}A$ 線形写像であることも分かる. 最後に, f が同型写像であることを確認する. f が明らかに全射である. 逆に, $\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i$ $(a_i \in A,\ s_i \in S,\ m_i \in M)$ が f の核に属すると仮定する. $s = s_1 \dots s_n$ とおく. 分母を払うことで, $\frac{a_i}{s_i} = \frac{b_i}{s}$ $(b_i \in A)$ と書ける. $m = \sum_i^n b_i m_i$ とおくと, $\varepsilon = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \otimes b_i m_i = \frac{1}{s} \otimes m$ が成り立つ. $\varepsilon \in \mathrm{Ker}(f)$ より, $f(\frac{1}{s} \otimes m) = \frac{m}{s} = 0$. 故に, $t \in S$ を用いて $tm = 0$ と書ける. したがって, $\varepsilon = \frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{ts} \otimes m = \frac{1}{ts} \otimes tm = \frac{1}{ts} \otimes 0 = 0$ が成り立つ. 以上より, f は同型写像である.

定義 3.25. $\mathfrak{p}$ を素イデアルとし, $S = A - \mathfrak{p}$ とする. このとき, $S^{-1}M = M_{\mathfrak{p}}$ と表し, $\mathfrak{p}$ における M の局所化という.

加群の局所化の部分加群を調べる. M を A 加群とする. 写像 $\iota_M \colon M \to S^{-1}M$ を考える. $M' \subset M$ が部分 A 加群であるとき, 局所化の完全性より $S^{-1}M'$ は $S^{-1}M$ の部分 $S^{-1}A$ 加群である. 逆に, $N \subset S^{-1}M$ が $S^{-1}A$ 部分加群であるならば, $\iota_M^{-1}(N)$ が M の部分 A 加群である. ゆえに, イデアルの場合と同様に以下の 2 つの写像が得られる.

$$\begin{aligned} \{M \text{ の部分 } A \text{ 加群}\} &\longleftrightarrow \left\{S^{-1}M \text{ の部分 } S^{-1}A \text{ 加群}\right\} \\ M' &\longmapsto S^{-1}M' \\ \iota_M^{-1}(N) &\longleftarrow N \end{aligned}$$

写像 $M' \mapsto S^{-1}M'$ を α とおき, 写像 $N \mapsto \iota_M^{-1}(N)$ を β とおく.

補題 3.26. $\alpha \circ \beta$ は恒等写像である. つまり, 任意の部分 $S^{-1}A$ 加群 $N \subset S^{-1}M$ に対して, 以下が成り立つ.

$$N = \alpha(\beta(N)) = S^{-1}(\iota_M^{-1}(N)).$$

証明

$x \in M$, $s \in S$ とする. このとき, $\frac{x}{s} \in N \iff \frac{x}{1} \in N \iff x \in \iota_M^{-1}(N)$ が成り立つことから分かる.

次に, 局所化のねじれ元を調べる．まず, $S^{-1}A$ の正規元を求める．$a \in A$, $s \in S$ とする．このとき, $\frac{a}{s}$ が $S^{-1}A$ の正規元になるための十分条件は, 任意の $b \in A$ に対し

$$ab = 0 \implies \exists t \in S,\ tb = 0$$

が成り立つことである．特に, $a \in A$ が正規元ならば, $\frac{a}{s}$ は $S^{-1}A$ の正規元である．ゆえに, M が A 加群で, $x \in M_{\mathrm{tor}}$ ならば, $\frac{x}{1} \in (S^{-1}M)_{\mathrm{tor}}$．よって, $S^{-1}(M_{\mathrm{tor}}) \subset (S^{-1}M)_{\mathrm{tor}}$ が成り立つ．

命題 3.27. A を整域とし, M を A 加群とする．このとき,

$$S^{-1}(M_{\mathrm{tor}}) = (S^{-1}M)_{\mathrm{tor}}$$

が存在する．

証明

$0 \in S$ のとき, $S^{-1}A = 0$, $S^{-1}M = 0$ となるから明らかに成り立つ．$0 \notin S$ とすれば良い．$x \in M$ で $\frac{x}{1} \in (S^{-1}M)_{\mathrm{tor}}$ とする．このとき, $sax = 0$ となる $s \in S$, $a \in A - \{0\}$ が存在する．よって, $x \in M_{\mathrm{tor}}$ となる．主張が従う．

系 3.28. A を整域とし, M を A 加群とする．M がねじれのない加群であれば, $S^{-1}M$ はねじれのない $S^{-1}A$ である．

3.4 局所化の完全性

M, N を A 加群とし, $f\colon M \to N$ を A 線型写像とする．このとき写像

$$S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s}$$

が well-defined であり, $S^{-1}A$ 線型である．上記の写像を $S^{-1}f$ とおく．こうすると, A 加群の圏 Mod_A から $S^{-1}A$ 加群の圏 $\mathrm{Mod}_{S^{-1}A}$ への共変関手

$$S^{-1}\colon \mathrm{Mod}_A \longrightarrow \mathrm{Mod}_{S^{-1}A}, \quad M \mapsto S^{-1}M, \quad f \mapsto S^{-1}f$$

が得られる．

定理 3.29. $S^{-1}\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{S^{-1}A}$ は完全関手である．

証明

A 加群の完全系列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ を考える．系列

$$0 \to S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M'' \to 0$$

が完全系列であることを示す．

- $S^{-1}M'$ における完全性：$\frac{x}{s}$ $(x \in M',\ s \in S)$ を $\mathrm{Ker}(S^{-1}f)$ の元とする．このとき, $\frac{f(x)}{s} = 0$ より, $t \in S$ を用いて $tf(x) = 0$ である．ゆえに $f(tx) = 0$ となり, $tx \in \mathrm{Ker}(f)$ となる．f が単射より, $tx = 0$ である．よって $\frac{x}{s} = 0$ であり, $S^{-1}f$ は単射である．
- $S^{-1}M$ における完全性：$g \circ f = 0$ より, $S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0$ である．よって, $\mathrm{Im}(S^{-1}f) \subset \mathrm{Ker}(S^{-1}g)$ である．逆に, $x \in M$, $s \in S$ で $\frac{x}{s} \in \mathrm{Ker}(S^{-1}g)$ とする．このとき, $tg(x) = 0$ となる $t \in S$ が存在する．よって, $g(tx) = 0$ となり, $tx \in \mathrm{Ker}(g)$ である．$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ より, $tx = f(y)$ となる $y \in M'$ が存在する．よって $\frac{x}{s} = \frac{f(y)}{ts} = (S^{-1}f)\left(\frac{y}{ts}\right) \in \mathrm{Im}(S^{-1}f)$ となる．
- $S^{-1}M''$ における完全性：$x \in M''$, $s \in S$ ならば, $x = g(y)$ を満たす $y \in M$ がとれる．よって, $\frac{x}{s} = (S^{-1}g)\left(\frac{y}{s}\right)$ であり, $S^{-1}g$ は全射である．

定理 3.30. $S^{-1}A$ は平坦 A 代数である.

証明

M', M を A 加群とし, $f\colon M' \to M$ を単射準同型とする. このとき, $\mathrm{id}_{S^{-1}A} \otimes f\colon S^{-1}A \otimes_A M' \to S^{-1}A \otimes_A M$ も単射であることを示せば良い. 可換図式

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}A \otimes_A M' \arrow[r, "\mathrm{id}_{S^{-1}A} \otimes f"] \arrow[d, "\simeq"] & S^{-1}A \otimes_A M \arrow[d, "\simeq"] \\
S^{-1}M' \arrow[r, "S^{-1}f"'] & S^{-1}M
\end{tikzcd}$$

を考える. 関手 $\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{S^{-1}A}$, $M \mapsto S^{-1}M$ が完全であるので, 下の写像が単射である. ゆえに, 上の写像も単射である. したがって $S^{-1}A$ は平坦 A 代数である.

命題 2.47 で $B = S^{-1}A$ とすると以下の系が得られる.

系 3.31. M, N を A 加群とし, M が有限表示加群であるとする. このとき, 自然な同型写像

$$\alpha\colon S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N), \quad \frac{f}{s} \mapsto \frac{1}{s}(S^{-1}f)$$

が存在する.

3.5 局所・大域原理

$\mathcal{P}$ を加群に関する性質とする. 任意の A 加群 M に対し

$$M \text{ が性質 } \mathcal{P} \text{ をもつ} \iff \text{全ての素イデアル } \mathfrak{p} \text{ に対し } M_{\mathfrak{p}} \text{ が性質 } \mathcal{P} \text{ をもつ}$$

が成り立つときに, 局所・大域原理が成り立つという. 以下の命題で, 「〜がゼロ加群である」という性質は局所・大域原理を満たすことを示す.

命題 3.32. M を A 加群とする. 以下が同値である.
(i) $M = 0$ である.
(ii) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $M_{\mathfrak{p}} = 0$ である.
(iii) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $M_{\mathfrak{m}} = 0$ である.

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである. (iii) $\Longrightarrow$ (i) は以下の補題から従う.

補題 3.33. M を A 加群とする. 自然な写像

$$M \longrightarrow \prod_{\mathfrak{m}\ \text{極大イデアル}} M_{\mathfrak{m}}$$

は単射である.

証明

x を上記の写像の核の元とし,

$$\operatorname{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$$

とおく. $\operatorname{Ann}(x)$ は A のイデアルである. 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $M_{\mathfrak{m}}$ において $x = 0$ であるので, $s \in A - \mathfrak{m}$ を用いて $sx = 0$ と書ける. よって, $\operatorname{Ann}(x) \not\subset \mathfrak{m}$ である. $\operatorname{Ann}(x)$ を含む極大イデアルが存在ので, $\operatorname{Ann}(x) = A$ となる. とくに $1 \in \operatorname{Ann}(x)$ であり, したがって $x = 0$ である.

M を A 加群とし, $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする. $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m}$ とおき, $k(\mathfrak{m})$ ベクトル空間 $M \otimes_A k(\mathfrak{m})$ を考える.

系 3.34. M を有限生成 A 加群とする. 以下が同値である.
(i) $M = 0$ である.
(ii) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し $M \otimes_A k(\mathfrak{m}) = 0$ である.

証明

$M \otimes_A k(\mathfrak{m}) = 0$ とする. M が有限生成だから, $A_\mathfrak{m}$ 加群 $M_\mathfrak{m}$ も有限生成である. また,

$$M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m}) = M \otimes_A k(\mathfrak{m}) = 0$$

である. 命題 1.35 より $M_\mathfrak{m} = 0$ が成り立つ. したがって, 主張が命題 3.32 から分かる.

系 3.35. M を A 加群とし, $M \oplus A^{n-1} \simeq A^n$ とする. このとき, $M \simeq A$ である.

証明

ケネット公式より,

$$\begin{aligned} A = \bigwedge^n A^n &\simeq \bigwedge^n (M \oplus A^{n-1}) \\ &\simeq \bigoplus_{k=0}^{n} \left(\bigwedge^k M \otimes_A \bigwedge^{n-k} A^{n-1} \right) \\ &\simeq M \oplus \bigoplus_{k=2}^{n} \left(\bigwedge^k M \otimes_A \bigwedge^{n-k} A^{n-1} \right). \end{aligned}$$

ゆえに, $A = M \oplus N$ となる A 加群 N が存在する. また, $M \oplus A^{n-1} \simeq A^n$ より, 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $M_\mathfrak{m} \oplus A_\mathfrak{m}^{n-1} \simeq A_\mathfrak{m}^n$ である. 特に, $M_\mathfrak{m} \neq 0$ である. $k(\mathfrak{m}) := A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ とおく. $A_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m} \oplus N_\mathfrak{m}$ より,

$$k(\mathfrak{m}) = (M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m})) \oplus (N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m}))$$

である. 上記の加群は $k(\mathfrak{m})$ ベクトル空間であるので, $M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m})$, $N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m})$ のどちらかが零ベクトル空間である. M, N は A の商加群であるので, 有限生成である. $M_\mathfrak{m} \neq 0$ が成り立つので, 系 3.34 より $M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m}) \neq 0$ である. ゆえに $N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} k(\mathfrak{m}) = 0$ となる. 系 3.34 より $N = 0$ である. よって $M \simeq A$ である.

以下は,「系列が完全である」という性質が局所・大域原理を満たすことを示す.

定理 3.36. $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ を系列とする. 以下が同値である.
(i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ が完全系列である.
(ii) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p}$ が完全系列である.
(iii) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m}$ が完全系列である.

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである. 逆に, (iii) が成り立つと仮定する. $x \in M'$ とする. 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $g_\mathfrak{m} \circ f_\mathfrak{m} = 0$ であるより, $g \circ f(x)$ は $M''_\mathfrak{m}$ において 0 になる. 補題 3.33 より, $g \circ f(x) = 0$ であり, ゆえに $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ が成り立つ. $T = \mathrm{Ker}(g)/\mathrm{Im}(f)$ とおく. 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $T_\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(g)_\mathfrak{m}/\mathrm{Im}(f)_\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(g_\mathfrak{m})/\mathrm{Im}(f_\mathfrak{m}) = 0$ である. 命題 3.32 より $T = 0$ となり, すなわち $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ である.

最後に,「平坦」という性質も局所・大域原理を満たすことを示す.

定理 3.37. M を A 加群とする. 以下が同値である.

(i) M が平坦 A 加群である.

(ii) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $M_{\mathfrak{p}}$ が平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群である.

(iii) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $M_{\mathfrak{m}}$ が平坦 $A_{\mathfrak{m}}$ 加群である.

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らかである. (iii) $\Longrightarrow$ (i) を示す. $N' \xrightarrow{f} N$ を A 加群の単射準同型とする. 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $(N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \simeq N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} M_{\mathfrak{m}}$ である. $M_{\mathfrak{m}}$ が平坦 $A_{\mathfrak{m}}$ 平坦加群であるので, $(N' \otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \to (N \otimes_A M)_{\mathfrak{m}}$ は単射である. 故に, $f \otimes \mathrm{id}_M \colon N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$ は単射である. 以上より, M は平坦である.

4　ネーター加群, アルティン加群

4.1　順序集合

$(X, \leq)$ を半順序集合とする. $Y \subset X$ を部分集合とし, $y \in Y$ とする.

- y が Y の最大元であるとは, 任意の $y' \in Y$ に対し $y' \leq y$ が成り立つことをいう.
- y が極大元であるとは, $y' > y$ を満たす $y' \in Y$ が存在しないことをいう.

Y が最大元 y を持つとき, y が極大元であり, y 以外の極大元が存在しない. しかし, 最大元を持たない順序集合においては, 複数の極大元が存在する場合がある.

X の増加列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ が停止するとは, $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$ を満たす $n \geq 1$ が存在するときにいう.

命題 4.1. 以下の条件が互いに同値である.

(i) 任意の X の増加列 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ が停止する.

(ii) X の任意の空でない部分集合が極大元をもつ.

証明

- (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す：Y を空でない X の部分集合とし, Y が極大元を持たないと仮定する. $y_1 \in Y$ とする. y_1 が極大でないので, $y_1 < y_2$ となる y_2 が存在する. 同様に, y_2 が極大元でないので, $y_2 < y_3$ となる y_3 がとれる. こうすると, 狭義単調増加列が得られ, 矛盾する. よって, Y は極大元をもつ.
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す：$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ を X の増加列とし, $Y = \{x_i, i \in I\}$ とする. Y が極大元 x_n をもつので, $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$ が成り立つ.

4.2　定義

M を A 加群とする. M の部分加群の昇鎖とは,

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$$

を満たす部分加群の列のことをいう. 同様に, M の部分加群の降鎖とは,

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$$

を満たす部分加群の列のことをいう.

定義 4.2. M を A 加群とする.

(1) M がネーター加群であるとは, M の任意の部分加群の昇鎖 $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$ に対して, $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \dots$ となる n が存在するときにいう.

(2) M がアルティン加群であるとは, M の任意の部分加群の降鎖 $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$ に対して, $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \dots$ となる n が存在するときにいう.

注意 4.3. 命題 4.1 より, ネーター加群 M の部分加群からなる空でない任意の集合 X は極大元をもつ. すなわち, 「$N' \in X$ かつ $N \subset N'$ ならば $N' = N$」を満たす $N \in X$ が存在する. 同様に, アルティン加群 M の部分加群からなる空でない任意の集合は極元小元をもつ.

定義 4.4. A を可換環とする.

(a) A 自身がネーター A 加群であるとき, A をネーター環という.

(b) A 自身が A がアルティン加群であるとき, A をアルティン環という.

命題 4.5. M を A 加群とする. 以下が同値である.
(i) M がネーター加群である.
(ii) M の任意の部分加群が有限生成加群である.

証明

- (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す：N を M の部分加群とする. N が有限生成加群でないことを仮定する. $x_1 \in N$ とする. $N \neq Ax_1$ より, $x_2 \in N - Ax_1$ が存在する. 同様に $N \neq Ax_1 + Ax_2$ だから, $x_3 \in N - (Ax_1 + Ax_2)$ がとれる. この議論を繰り返すことによって, $x_n \notin (Ax_1 + \cdots + Ax_{n-1})$ を満たす列 $(x_n)_{n \geq 1}$ をつくる. $M_n = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ とおくと部分加群の昇鎖 $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \ldots$ が得られる ($x_{n+1} \notin M_n$ より, $M_n \subsetneq M_{n+1}$ である). これは M がネーター加群であることに矛盾する.
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す：$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$ を部分加群の昇鎖とする. $N := \cup_{i \geq 1} M_i$ とおくと, N が M の部分加群である ($x, y \in N$ ならば, $x, y \in M_n$ となる n が存在するので, $a, b \in A$ に対して $ax + by \in M_n \subset M$ である). 仮定より, N を生成する元 $x_1, \ldots, x_m$ がとれる. また, $x_1, \ldots, x_m \in M_d$ を満たす $d \geq 1$ が存在する. よって, $M = M_d = M_{d+1} = M_{d+2} = \ldots$ となる. よって, M がネーター加群である.

注意 4.6. A を可換環とする. 上記の命題より, A がネーター環 $\Longleftrightarrow$ A の全てのイデアルが有限生成である.

命題 4.7.
(1) A 加群の完全系列 $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ が与えられているとする. このとき, 以下が成り立つ.
- M がネーター加群である $\Longleftrightarrow$ M' および M'' がネーター加群である.
- M がアルティン加群である $\Longleftrightarrow$ M' および M'' がアルティン加群である.

(2) $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = 0$ を M の部分加群降鎖とする. このとき, 以下が成り立つ.
- M がネーター加群である $\Longleftrightarrow$ M_i/M_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ がネーター加群である
- M がアルティン加群である $\Longleftrightarrow$ M_i/M_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ がアルティン加群である

証明

まず, (1) の一つ目の同値を示す.
- $\Longrightarrow$ を示す：M がネーター加群であるとする. 明らかに, M' はネーター加群である. また, $M''_1 \subset M''_2 \subset \ldots$ が M'' の部分加群の昇鎖であるとする. $M_n := g^{-1}(M''_n)$ とおけば, $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ であるので, $M_n = M_{n+1} = \ldots$ を満たす $n \geq 1$ が存在する. $M''_i = g(M_i)$ より, $M''_n = M''_{n+1} = \ldots$ となる.
- $\Longleftarrow$ を示す：$M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ を M の部分加群の昇鎖とする. $M''_i = g(M_i)$ とおく. 仮定より, $M''_n = M''_{n+1} = \ldots$ となる $n \geq 1$ が存在する. 同様に, $M'_i := f^{-1}(M_i)$ とおくと, $M'_m = M'_{m+1} = \ldots$ となる $m \geq n$ が存在する. $x \in M_i$ $(i \geq m)$ とする. $g(x) \in M''_i = M''_m$ より, $g(x) = g(y)$, $y \in M_m$ と表せる. よって, $x - y \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ である. また, $x - y = f(z)$ と書くと, $z \in M'_i = M'_m$ である. よって, $x - y \in M_m$ となり, $x \in M_m$ である. したがって, $M_m = M_{m+1} = \ldots$ が成り立つ.

アルティン加群の場合は同様に証明できる.
次に (2) を帰納法により示す. $n = 1$ のとき (1) から分かる. $n > 1$ とし, 短完全列 $0 \to M_1 \to M \to M/M_1 \to 0$ を考える. ゆえに, M がネーター加群 $\Longleftrightarrow$ M_1 と M/M_1 がネーター加群である. また, 帰納法の仮定より, M_1 がネーター加群 $\Longleftrightarrow$ M_i/M_{i+1} $(i = 1, \ldots, n-1)$ がネーター加群である. このことから, ネーター加群に関する (2) の主張が分かる. アルティン加群の場合は同様に示せる.

特に, 2 つの加群 M_1, M_2 が与えられているとき, $M_1 \oplus M_2$ がネーター加群 $\Longleftrightarrow$ M_1 と M_2 がネーター加群である. なぜならば, 短完全列

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$$

が存在することから分かる.

命題 4.8. S を積閉集合とし, M を A 加群とする.
(1) M がネーター A 加群ならば, $S^{-1}M$ はネーター $S^{-1}A$ 加群である.
(2) M がアルティン A 加群ならば, $S^{-1}M$ はアルティン $S^{-1}A$ 加群である.

証明

$\iota_M\colon M \to S^{-1}M$ を自然な写像 $x \mapsto \frac{x}{1}$ とする. $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ を部分 $S^{-1}A$ 加群の昇鎖とする. $M_i = \iota_M^{-1}(N_i)$ とおくと, $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ である. M がネーター A 加群なので, $M_n = M_{n+1} = \ldots$ となる $n \geq 1$ が存在する. 補題 3.26 $N_i = S^{-1}(M_i)$ より, $N_n = N_{n+1} = \ldots$ となる. よって, N はネーター $S^{-1}A$ 加群である. アルティン加群の場合は同様に示せる.

特に, A がネーター環ならば, S^{-1} はネーター環である.

命題 4.9. A をネーター環とし, M を A 加群とする. このとき以下が同値である
(i) M が有限生成 A 加群である.
(ii) M がネーター A 加群である.
(iii) M が有限表示 A 加群である.

証明

- (b) $\Longrightarrow$ (a) と (c) $\Longrightarrow$ (a) は明らかである.
- まず, n に関する帰納法により A^n $(n \geq 1)$ がネーター加群であることを示す. $n = 1$ のとき明らかに成立する. n のとき成り立つことを仮定する. $A^{n+1} = A \oplus A^n$ であるので, A^{n+1} もネーター加群になる. よって, 全ての $n \geq 1$ に対し A^n はネーター A 加群である. M を有限生成 A 加群とする. このとき, 全射 $u\colon A^n \to M$ が存在する. 命題 4.7 より M がネーター加群である. ゆえに (a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ. また, $\mathrm{Ker}(u)$ はネーター加群 A^n の部分加群だから, 有限生成である. ゆえに (a) $\Longrightarrow$ (c) も成り立つ.

4.3 加群の長さ

定義 4.10. A を可換環とし, $M \neq \{0\}$ を A 加群とする. M が単純加群であるとは, M が 0 と M 以外の部分加群を持たないことをいう.

命題 4.11. M を単純加群とする. このとき, $M \simeq A/\mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する. さらに, $\mathfrak{m}$ は一意的に定まる.

証明

$x \in M$ を 0 でない元とする. A 線形写像 $f\colon A \to M$, $a \mapsto ax$ を考える. $\mathrm{Im}(f)$ は M の部分加群だから, $\mathrm{Im}(f) = M$ である. よって, $I = \mathrm{Ker}(f)$ とおくと, $M \simeq A/I$ である. とくに A/I が単純加群になるので, A/I は 0, A/I 以外のイデアルを持たない. ゆえに, A/I が可換体であり, $I = \mathfrak{m}$ は極大イデアルとなる.
$\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ が極大イデアルで, A 加群の同型写像 $f\colon A/\mathfrak{m} \to A/\mathfrak{m}'$ が存在することを仮定する. このとき, $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}(A/\mathfrak{m}) = \mathrm{Ann}(A/\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}'$ となる ($\mathrm{Ann}(-)$ の定義は以下参照).

定義 4.12. M を A 加群とする. このとき,

$$\mathrm{Ann}(M) := \{a \in A \mid \forall x \in M,\ ax = 0\}$$

とおき, M の零下イデアルという.

例 4.13. 例えば, $\mathrm{Ann}(A) = 0$ である. $I \subset A$ がイデアルならば, $\mathrm{Ann}(A/I) = I$ であることを容易に確認できる.

M の部分加群の降鎖とは,

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$$

を満たす部分加群の列 $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ のことである. 自然数 n を列の長さという.

定義 4.14. M の部分加群の降鎖 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$ が組成列であるとは, M_i/M_{i+1} $(i = 1, \ldots, n-1)$ が単純加群であるときにいう.

命題 4.15. 長さ n の組成列が存在すると仮定する. このとき,

(1) 全ての組成列の長さは n である.

(2) $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k$ を部分加群の降鎖とする. この降鎖は組成列に延長できる (すなわち, 組成列 $M'_0 \supsetneq M'_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M'_n$ が存在し, $M_i = M'_{j_i}$, $0 \le j_0 < j_1 < \cdots < j_k \le n$ である).

証明

全ての組成列が同じ長さであることがまだ証明されていないので, 暫定的に M の長さ $\ell(M)$ を次のように定義する. M が組成列を持たないとき $\ell(M) = +\infty$ とおき, M が組成列をもつとき M の最短の組成列の長さを $\ell(M)$ と表す.

- まず, $N \subset M$ のとき $\ell(N) \le \ell(M)$ を示す: $\ell(M) = +\infty$ のときは明らかである. $\ell(M) < +\infty$ のとき, $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$ を最短の組成列とする (よって $\ell(M) = n$ である). $N_i = N \cap M_i$ とおくと, $N = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_n = \{0\}$ である. また, 自然な写像 $N_i/N_{i+1} \to M_i/M_{i+1}$ は単射である. よって, $N_i/N_{i+1} = 0$ または $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ である. $N_i = N_{i+1}$ を満たすものを取り除くと, N の組成列が得られ, その長さが $\le n$ である. ゆえに $\ell(N) \le \ell(M)$ である.
- $N \subsetneq M$ のとき $\ell(N) < \ell(M)$ を示す：$\ell(N) = \ell(M)$ を仮定する. このとき, 上の議論では, $N = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \cdots \supsetneq N_n = \{0\}$ が成り立つ. N_i/N_{i+1} 及び M_i/M_{i+1} が単純加群だから, 自然な写像 $N_i/N_{i+1} \to M_i/M_{i+1}$ が同型写像である. $M_n = N_n = 0$ であるので, $M_{n-1} = N_{n-1}$ となる. 同様に, $N_{n-2}/N_{n-1} = M_{n-2}/M_{n-1}$ より $M_{n-2} = N_{n-2}$ となる. 繰り返してこのように議論すると, 最後に $M = M_0 = N_0 = N$ となり, 矛盾する. よって $\ell(N) < \ell(M)$ である.
- $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k$ を M の部分加群の降鎖とする. このとき, $k \le \ell(M)$ が成り立つことを示す：以上より $\ell(M) \ge \ell(M_0) > \ell(M_1) > \cdots > \ell(M_k) \ge 0$ である. よって $\ell(M) \ge k$ である.
- (1) を示す：$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = \{0\}$ を任意の組成列とする. 以上より, $r \le \ell(M)$ である, ゆえに $r = \ell(M)$ である.
- $M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k$ を部分加群の降鎖とする. $k = \ell(M)$ ならば, 組成列であることを示す：組成列でないとする. このとき, N_i/N_{i+1} が単純加群でない i がとれる. よって, N_i/N_{i+1} が非自明な部分加群 $\overline{P}$ をもつ. $\overline{P}$ は $N_i \supsetneq P \supsetneq N_{i+1}$ を満たす部分加群 P に対応している. P を上の降鎖に挿入すれば, 長さ $k+1$ の降鎖が得られ, 矛盾する.
- 最後に, (2) を示す：$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k$ を部分加群の降鎖とする. $k = \ell(M)$ のとき組成列であるので, (2) の主張が明らかである. よって $k < \ell(M)$ を仮定すれば良い. このとき, 降鎖が組成列でないので, 新しい項を挿入することができる. この議論を繰り返すことによって, $\ell(M) - k$ のステップで長さ $\ell(M)$ の降鎖に延長できる. 以上より, 長さ $\ell(M)$ の降鎖が組成列であるので, (2) が示せた.

定義 4.16. M を A 加群とする. M が組成列をもつとき, その長さを M の長さという. M が組成列を持たないとき, $\ell(M) = +\infty$ とおき, M の長さが無限であるという.

A 加群の組成列 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$ を考える. 各 $1 \le i \le n$ に対し, $M_{i-1}/M_i \simeq A/\mathfrak{m}_i$

となる極大イデアル $\mathfrak{m}_i$ が存在する．極大イデアルの有限列 $(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n)$ を組成列 $(M_i)_i$ の組成因子という．

定理 4.17 (ジョルダン・ヘルダーの定理)**.** M を長さ有限の A 加群とし, $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$ と $M = M'_0 \supsetneq M'_1 \supsetneq M'_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M'_n = \{0\}$ を 2 つの組成列とし, それぞれの組成因子を $(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n)$ と $(\mathfrak{m}'_1, \dots, \mathfrak{m}'_n)$ とおく．このとき, 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在し, $\mathfrak{m}'_i = \mathfrak{m}_{\sigma(i)}$ が成り立つ．

証明

加群の長さに関する帰納法によって証明する．$\ell(M) = 1$ のとき, M が単純加群であるから, 命題 4.11 より成り立つ．

- 証明の準備：組成列 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}$ の組成因子を $(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n)$ とおく． $N \subset M$ を単純部分加群とし, $N \simeq A/\mathfrak{m}$ を満たす極大イデアル $\mathfrak{m}$ が一意的に存在する．$N = N \cap M_0 \supset N \cap M_1 \supset \cdots \supset N \cap M_n = \{0\}$ であるので, N の単純性より $N \cap M_{r-1} \neq N \cap M_r$ を満たす $1 \leq r \leq n$ はただ一つ存在する．また, 写像

$$N = \frac{N}{0} = \frac{N \cap M_{r-1}}{N \cap M_r} \to \frac{M_{r-1}}{M_r}$$

が単射であるので, M_{r-1}/M_r の単純性より $A/\mathfrak{m} \simeq N \simeq \frac{M_{r-1}}{M_r} \simeq A/\mathfrak{m}_r$ である．ゆえに $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_r$ である．次に, $K_i = N + M_i$ とおき, 降鎖

$$M = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n = N$$

を考える．各 $i = 1, \dots, n$ に対し, 写像

$$\frac{M_{i-1}}{M_i} \to \frac{K_{i-1}}{K_i} = \frac{N + M_{i-1}}{N + M_i}$$

が全射だから, K_{i-1}/K_i は単純加群または零加群である．また, $K_{i-1} \neq K_i$ のとき, $K_{i-1}/K_i \simeq M_{i-1}/M_i$ である． $i = r$ のとき, 写像 $N \cap M_{r-1} \to M_{r-1}/M_r$ が全射であるので, $M_{r-1} = M_r + (N \cap M_{r-1})$ 成り立つ．特に $M_{r-1} \subset N + M_r$ であり, $K_{r-1} = K_r$ である．このことから, 以下の降鎖が組成列であることが分かる．

$$M = K_0 \supsetneq K_1 \supsetneq \dots K_{r-1} \supsetneq K_{r+1} \supsetneq \cdots \supsetneq K_n = N \supsetneq \{0\}. \tag{4.1}$$

また, この組成列の組成因子は $(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{r-1}, \mathfrak{m}_{r+1}, \dots, \mathfrak{m}_n, \mathfrak{m}_r)$ である．

- 次に, 別の組成列 $M = M'_0 \supsetneq M'_1 \supsetneq M'_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M'_n = \{0\}$ を考え, その組成因子を $(\mathfrak{m}'_1, \dots, \mathfrak{m}'_n)$ とおく．以上より, $N \simeq A/\mathfrak{m}'_s$ となる $1 \leq s \leq n$ が一意的に存在する．また, 同様に組成列

$$M = K'_0 \supsetneq K'_1 \supsetneq \dots K'_{s-1} \supsetneq K'_{s+1} \supsetneq \cdots \supsetneq K'_n = N \supsetneq \{0\}. \tag{4.2}$$

が存在し, その組成因子は $(\mathfrak{m}'_1, \dots, \mathfrak{m}'_{s-1}, \mathfrak{m}'_{s+1}, \dots, \mathfrak{m}'_n, \mathfrak{m}'_s)$ である．また, $A/\mathfrak{m}_r \simeq N \simeq A/\mathfrak{m}'_s$ より $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}'_s$ である．組成列 (4.1) と (4.2) が M/N の 2 つの組成列 $(K_i/N)_i$ と $(K'_i/N)_i$ を与える．M/N の長さは $\ell(M) - 1 < \ell(M)$ であるので帰納法の仮定を M/N に適用できる．したがって, 極大イデアル $(\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{r-1}, \mathfrak{m}_{r+1}, \dots, \mathfrak{m}_n)$ と $(\mathfrak{m}'_1, \dots, \mathfrak{m}'_{s-1}, \mathfrak{m}'_{s+1}, \dots, \mathfrak{m}'_n)$ が順番を除いて一致することが分かる．また, $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}'_s$ より, M の場合も定理の主張が成り立つ．主張が従う．

定義 4.18. M を長さ有限の加群とする．M のある組成列の組成因子を M の組成因子という．順番を除いてそれらは組成列の取り方によらない．

例 4.19. $A = \mathbb{Z}$ とし, $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ を整数 $n \neq 0$ の素因数分解とする．このとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は明らかに長さ有限の $\mathbb{Z}$ 加群である．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の組成因子は $(p_1), \dots, (p_1), \dots, (p_r), \dots, (p_r)$ である (但し, (p_i) はちょうど k_i 回現れる)．

命題 4.20. M が長さ有限の A 加群ならば, $S^{-1}M$ は長さ有限の $S^{-1}A$ 加群である．また, $(\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_n)$ を M の組成因子とする ($n=\ell(M)$ とおく)．$\mathfrak{m}_i\cap S=\emptyset$ を満たす $1\le i\le n$ 全体を $i_1<\cdots<i_r$ とおく．このとき, $S^{-1}M$ の組成因子は $(S^{-1}\mathfrak{m}_{i_1},\dots,S^{-1}\mathfrak{m}_{i_r})$ である．特に $\ell_{S^{-1}A}(S^{-1}M)\le\ell_A(M)$ である．

証明

組成列 $M=M_0\supsetneq M_1\supsetneq M_2\supsetneq\cdots\supsetneq M_n=\{0\}$ を考える．以下が成り立つ．

$$\frac{S^{-1}M_{i-1}}{S^{-1}M_i}\simeq S^{-1}\left(\frac{M_{i-1}}{M_i}\right)\simeq S^{-1}(A/\mathfrak{m}_i)\simeq\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\mathfrak{m}_i}$$

である．また, $S^{-1}\mathfrak{m}_i\neq S^{-1}A\iff S\cap\mathfrak{m}_i=\emptyset$ である．また, このとき定理 3.17 より $S^{-1}\mathfrak{m}_i$ は $S^{-1}A$ の極大イデアルである．主張が従う．

注意 4.21. $\mathfrak{m}\subset A$ が極大イデアルで, $S\cap\mathfrak{m}=\emptyset$ のとき, 任意の $s\in S$ に対し $s+\mathfrak{m}$ が $A/\mathfrak{m}$ の単元であるので写像 $A/\mathfrak{m}\xrightarrow{s}A/\mathfrak{m}$ は全単射である．注意 3.23 より自然な写像 $A/\mathfrak{m}\to S^{-1}(A/\mathfrak{m})=\frac{S^{-1}A}{S^{-1}\mathfrak{m}}$ は体の同型写像である．

命題 4.22. M を A 加群とする．以下が同値である．

(i) M の長さは有限である．

(ii) M はネーター加群及びアルティン加群である．

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) は直ちに 4.15 から分かる．(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．$M\neq 0$ を仮定して良い．$M_0=M$ とおく．M がネーター加群だから, $N\subsetneq M_0$ を満たす部分加群の中で 極大元 $M_1\subsetneq M_0$ が存在する．明らかに, M_0/M_1 は単純加群である．同様にして, $M_1\neq 0$ ならば M_1/M_2 が単純加群であるような部分加群 $M_2\subsetneq M_1$ が存在する．M がアルティン加群であるので, 降鎖 $M_0\supsetneq M_1\supsetneq M_2\supsetneq\dots$ が停止する．ゆえに, M が組成列をもつ．

命題 4.23. $0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0$ を A 加群の短完全列とする．このとき, 以下が成り立つ．

(1) M の長さが有限である $\iff$ M', M'' の長さが有限である．

(2) $\ell(M)=\ell(M')+\ell(M'')$ である．

(3) $(\mathfrak{m}'_1,\dots,\mathfrak{m}'_r)$ 及び $(\mathfrak{m}''_1,\dots,\mathfrak{m}''_s)$ をそれぞれ M' と M'' の組成因子とする．このとき, $(\mathfrak{m}'_1,\dots,\mathfrak{m}'_r,\mathfrak{m}''_1,\dots,\mathfrak{m}''_s)$ は M の組成因子である．

証明

$M'=M'_0\supsetneq M'_1\supsetneq\cdots\supsetneq M'_r=\{0\}$ と $M''=M''_0\supsetneq M''_1\supsetneq\cdots\supsetneq M''_s=\{0\}$ をそれぞれ M' と M'' の組成列とする．$0\le i\le s$ のとき $M_i=g^{-1}(M'_i)$ とおき, $s<i\le r+s$ のとき $M_i=f(M_{i-s})$ とおく．このとき, 降鎖

$$M=M_0\supsetneq M_1\supsetneq M_2\supsetneq\cdots\supsetneq M_{r+s}=\{0\}$$

を考える．$1\le i\le s$ のとき $M_{i-1}/M_i\simeq M''_{i-1}/M''_i\simeq A/\mathfrak{m}''_i$ であり, $s\le i\le r+s$ のとき $M_{i-1}/M_i\simeq M'_{i-1}/M'_i\simeq A/\mathfrak{m}'_i$ である．主張が従う．

命題 4.24. k を可換体とし, M を k ベクトル空間とする．以下が同値である．

(i) M は有限次元である．

(ii) M の長さは有限である．

(iii) M はネーター k 加群である．

(iv) M はアルティン k 加群である．

また, 上記の条件が満たされているとき, $\ell(M)=\dim_k(M)$ が成り立つ．

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) は明らかである．(ii) $\Longrightarrow$ (iii) と (ii) $\Longrightarrow$ (iv) は上記の命題 4.22 から分かる．V が無限次元であるとする．このとき, 線型独立である列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ が存在する．$M_n = kx_1 + \cdots + kx_n$ とおくと, $M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq \ldots$ となり, M がネーター加群でない．同様に, $(x_k)_{k\geq n}$ で生成される部分空間を M'_n とおく．$M'_1 \supsetneq M'_2 \supsetneq M'_3 \supsetneq \ldots$ となり, M がアルティン加群でない．したがった, (iii) $\Longrightarrow$ (i), かつ (iv) $\Longrightarrow$ (i) が成り立つ．主張が従う．

系 4.25. A を可換環とし, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ を極大イデアルとする．また, $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n = 0$ を仮定する．このとき, 以下が同値である．

(i) A がネーター環である．

(ii) A がアルティン環である．

証明

$I_k = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ とおき, イデアルの降鎖 $A \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n = 0$ を考える．命題 4.7 より, A がネーター加群 $\Longleftrightarrow$ 全ての I_k/I_{k+1} がネーター加群である．同様に, A がアルティン加群 $\Longleftrightarrow$ 全ての I_k/I_{k+1} がアルティン加群である．I_k/I_{k+1} は $A/\mathfrak{m}_k$ ベクトル空間であるので, 補題 4.24 より I_k/I_{k+1} がネーター加群 $\Longleftrightarrow$ I_k/I_{k+1} がアルティン加群でる．主張が従う．

4.4 ヒルベルトの定理

補題 4.26. A をネーター環とし, I を A のイデアルとする．このとき, A/I はネーター環である．

証明

A が A 加群だから, 命題 4.7 より A/I もネーター A 加群である．特に, A/I がネーター A/I 加群である．

定理 4.27. A がネーター環ならば, $A[X]$ もネーター環である．

証明

I を $A[X]$ のイデアルとする．I が有限生成イデアルでないと仮定する (とくに $I \neq 0$ であることを注意する)．0 でない I の元の中で, 最小次数のもの $f_0 \in I$ をとる．I は有限生成イデアルでないので, $(f_0) \subsetneq I$ となる．次に, $I - (f_0)$ の元の中で, 最小次数のもの f_1 を選ぶ．同様に, $(f_0, f_1) \subsetneq I$ なので, 最小次数のもの $f_2 \in I \setminus (f_0, f_1)$ がとれる．こうすると, I の元の列 $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ が定まり, $f_{n+1} \notin (f_0, \ldots, f_n)$ が成り立つ．明らかに, $\deg(f_0) \leq \deg(f_1) \leq \ldots$ である．f_i の主係数を a_i と表す．A のイデアルの列

$$(a_0) \subset (a_0, a_1) \subset (a_0, a_1, a_2) \subset \ldots$$

を考える．A がネーター環だから, 上の列が停止する．よって, ある自然数 $N \geq 1$ があり, $a_{N+1} \in (a_0, \ldots, a_N)$ が成り立つ．よって $a_{N+1} = \sum_{i=0}^{N} a_i b_i$ $(b_i \in A)$ と書ける．f_i の次数を d_i とおき, 次の多項式を考える：

$$g = f_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} b_i f_i X^{d_{N+1}-d_i}$$

明らかに, $g \in (f_0, \ldots, f_{N+1})$ である．また, $f_{N+1} \notin (f_0, \ldots, f_N)$ より, g は $(f_0, \ldots, f_N)$ に属さない．$f_i X^{d_{N+1}-d_i}$ の次数は $\leq d_{N+1}$ であるので, g の次数も $\leq d_{N+1}$ となる．また, g の d_{N+1} 次の項の係数は $a_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} a_i b_i = 0$ となる．よって, g の次数は $< d_{N+1}$ であり, f_{N+1} の取り方に矛盾する．主張が従う．

系 4.28. A がネーター環ならば, 多変数多項式環 $A[X_1, \ldots, X_n]$ もネーター環である．

証明

$A[X_1, \dots, X_n] = A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$ であるので, 数学的帰納法によって証明できる.

命題 4.29. B が有限生成 A 代数ならば, B はネーター環である.

証明

$B = A[x_1, \dots, x_n]$ となる $x_1, \dots, x_n$ が存在する. $f(X_i) = x_i$ で定まる A 代数の準同型 $f\colon A[X_1, \dots, X_n] \to B$ を考える. f が全射だから, $B \simeq \frac{A[X_1, \dots, X_n]}{I}$ $(I = \mathrm{Ker}(f))$ となる. $A[X_1, \dots, X_n]$ がネーター環であるので, 補題 4.26 よりその剰余環もネーター環である.

例 4.30. $A = \mathbb{C}[X_1, X_2, \dots]$ (無限個の変数の多項式環) とする. $X_1, X_2, \dots$ で生成されるイデアルは有限生成イデアルでないので, A はネーター環でない.

「A がアルティン環ならば $A[X]$ がアルティン環」とは成り立たないことに注意する. 例えば, 体 k はアルティン環であるが, $k[X]$ はアルティン環でない.

5　射影加群, 移入加群

5.1　定義

P, I を A 加群とし, 共変関手 $\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, M)$ と反変関手 $\mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, I)$ を考える. $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ と $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ は左完全関手である.

定義 5.1.
(a) $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ が完全関手であるときに, P を射影加群という.
(b) $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ が完全関手であるときに, I を移入加群という (単射加群または入射加群ともいう).

自由加群は射影加群であることを説明する. X が集合で $P = A^{(X)}$ とすると, $\mathrm{Hom}_A(P, M) \simeq M^X$ である. よって, $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が短完全列が与えられているとき, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P, M') \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_A(P, M) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_A(P, M'') \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'^X \arrow[r] & M^X \arrow[r] & M''^X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

が存在する. 下の行は明らかに短完全列である. よって, 上の行も短完全列であり, $P = A^{(X)}$ が射影加群である. 以下が示せた.

命題 5.2. 自由加群は射影加群である.

以下の命題は, 移入加群, 射影加群という性質が関手によって保たれるための十分条件を与える.

命題 5.3. $F\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B$, $G\colon \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A$ を 2 つの加法的な反変関手とし, (F, G) が随伴関手であるとする.
(1) G が完全関手ならば, 「M が射影 A 加群 $\Longrightarrow$ $F(M)$ が射影 B 加群」が成り立つ.
(2) F が完全関手ならば, 「N が移入 B 加群 $\Longrightarrow$ $G(N)$ が移入 A 加群」が成り立つ.

証明

(1) を示す. 任意の $N \in \mathrm{Mod}_B$ に対し, $\mathrm{Hom}_B(F(M), N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, G(N))$ である. よって, 関手 $N \mapsto \mathrm{Hom}_B(F(M), N)$ は完全関手 $N \mapsto G(N)$ と完全関手 $P \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, P)$ の合成となるので, 完全関手である. ゆえに, $F(M)$ は射影加群である.
(2) を示す. 任意の $N \in \mathrm{Mod}_A$ に対し, $\mathrm{Hom}_A(M, G(N)) \simeq \mathrm{Hom}_B(F(M), N)$ である. よって, 関手 $M \mapsto \mathrm{Hom}_B(M, G(N))$ は完全関手 $M \mapsto F(M)$ と完全関手 $Q \mapsto \mathrm{Hom}_B(Q, N)$ の合成となるので, 完全関手である. ゆえに, $G(N)$ は移入加群である.

例えば, B を A 代数とし, 以下の 3 つの関手を考える.

$$\begin{aligned}
F&\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B, \quad M \mapsto B \otimes_A M \\
G&\colon \mathrm{Mod}_B \to \mathrm{Mod}_A, \quad N \mapsto {}_A N \\
H&\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_B, \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_A(B, M).
\end{aligned}$$

G は明らかに完全関手である. また, (F, G) 及び (G, H) が随伴関手である. したがって, 以下の系が示せた.

系 5.4.
(1) M が射影 A 加群 $\Longrightarrow$ $B \otimes_A M$ が射影 B 加群.
(2) M が移入 A 加群 $\Longrightarrow$ $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ が移入 B 加群.
(3) B が平坦 A 加群とする. N が移入 B 加群 $\Longrightarrow$ ${}_A N$ が移入 A 加群.

証明

G が完全関手だから, (1) と (2) はそれぞれ命題 5.3(1) と (2) から直ちに分かる. B が平坦 A 代数のとき, 関手 H が完全である. (G, H) が随伴関手だから, (3) は 命題 5.3(2) から従う.

系 5.5. M を A 射影加群とし, $S \subset A$ を積閉集合とする. $S^{-1}M$ は射影 $S^{-1}A$ 加群である.

証明

$S^{-1}A$ が平坦 A 代数であるので, 系 5.4 より $S^{-1}A \otimes_A M$ が射影 $S^{-1}A$ 加群である. また, $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$ が成り立つので主張が従う.

同様に, P を A 加群とし, 以下の 2 つの関手を考える.

$$F_P\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A, \quad M \mapsto M \otimes_A P$$
$$G_P\colon \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A, \quad N \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, N).$$

定理 2.16 より (F_P, G_P) が随伴関手である.

系 5.6.

(1) P, M を射影 A 加群とする. このとき, $P \otimes_A M$ は射影 A 加群である.

(2) P を平坦 A 加群とする. このとき, N が移入 A 加群ならば, $\mathrm{Hom}_A(N, P)$ も移入 A 加群である.

証明

P を射影加群とする. このとき, G_P が完全関手である. よって, (1) は 命題 5.3(1) から従う. P を平坦加群とする. このとき, F_P が完全関手である. よって, (2) は 命題 5.3(2) から従う.

5.2 射影加群の性質

命題 5.7. 以下の条件が互いに同値である.

(i) P が射影加群である.

(ii) 任意の全射準同型写像 $g\colon M \to N$ および任意の準同型 $f\colon P \to N$ に対し, $f = g \circ h$ となる準同型 $h\colon P \to M$ が存在する.

(iii) 任意の短完全列 $0 \to M' \to M \to P \to 0$ が分裂する.

(iv) P がある自由 A 加群の直和因子である (すなわち, A 加群 M が存在し, $P \oplus M$ が自由 A 加群である.

証明

- (i) $\Longrightarrow$ (ii) を示す：系列 $M \to N \to 0$ は完全であるので, $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ の完全性より, $\mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, N) \to 0$ も完全系列である. よって (ii) が従う.
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す：$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ を短完全列とする. $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ が左完全であるので, $0 \to \mathrm{Hom}_A(P, M') \to \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, M'')$ は完全系列である. また, (ii) の仮定より, $\mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, M'')$ は全射である. よって, $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ が完全関手となり, P は射影加群である.
- (ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す：$0 \to M' \to M \xrightarrow{g} P \to 0$ を短完全列とする. 恒等写像 $\mathrm{id}_P\colon P \to P$ を考える. 仮定より, $\mathrm{id}_P = g \circ h$ となる準同型 $h\colon P \to M$ が存在する. よって, 短完全列が分裂する.
- (iii) $\Longrightarrow$ (iv) を示す：注意 1.11 より, 自由加群 L と全射準同型 $g\colon L \to P$ が存在する. $K = \mathrm{Ker}(g)$ とおくと, 短完全列 $0 \to K \to L \to P \to 0$ が得られる. (iii) よりこの短完全列が分裂するので, 定理 1.15 により $L \simeq P \oplus K$ となる.
- (iv) $\Longrightarrow$ (ii) を示す：$P \oplus K = L$ が自由加群であるとする. また, $g\colon M \to N$ を全射準同型とし,

$f\colon P \to N$ を準同型とする. $p\colon L \to P$ を自然な射影とし, 準同型 $f \circ p\colon L \to N$ を考える. 自由加群が射影加群であるので, $h'\colon L \to M$ が存在し, $f \circ p = g \circ h'$ となる. よって, h' を P へ制限した写像 $h\colon P \to M$ は $f = g \circ h$ を満たす. よって (ii) が成り立つ.

系 5.8. P が射影加群ならば, 平坦加群である.

証明

命題 5.7 より, $P \oplus N = L$ が自由加群であるような加群 M が存在する. $f\colon M' \to M$ を単射準同型とする. L が自由加群より 写像 $f \otimes \mathrm{id}_L\colon M' \otimes_A L \to M \otimes_A L$ も単射である. ゆえに, 写像

$$(M' \otimes_A P) \oplus (M' \otimes_A N) \to (M \otimes_A P) \oplus (M \otimes_A N), \quad (u,v) \mapsto ((f \otimes \mathrm{id}_P)(u), (f \otimes \mathrm{id}_N)(v))$$

は単射である. とくに, $f \otimes \mathrm{id}_P\colon M' \otimes_A P \to M \otimes_A P$ は単射である. したがって, P は平坦加群である.

定義 5.9. n 次正方行列 $\epsilon \in M_n(A)$ が射影であるとは, $\epsilon^2 = \epsilon$ が成り立つことをいう.

命題 5.10.

(1) $\epsilon \in M(n, A)$ を射影とする. このとき, $1 - \epsilon$ も射影であり, かつ $A^n = \mathrm{Im}(\epsilon) \oplus \mathrm{Ker}(\epsilon)$ が成り立つ.

(2) 逆に, $A^n = P \oplus Q$ (P, Q が部分加群) のとき, この分解で定まる写像 $f\colon A = P \oplus Q \to P \subset A^n$, $x \oplus y \mapsto x$ を考える. f に対応する行列を $\epsilon_{P,Q}$ とおくと, $\epsilon_{P,Q}$ は射影である.

よって, $(P, Q) \mapsto \epsilon_{P,Q}$ で定まる以下の写像は全単射である.

$$\left\{(P,Q) \,\middle|\, \begin{array}{l} P,Q \text{ は } A^n \text{ の部分加群であり,} \\ P \oplus Q = A^n \text{ である} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\epsilon \in M_n(A) \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{射影行列} \\ (\text{つまり } \epsilon^2 = \epsilon \text{ を満たす行列}) \end{array}\right\}$$
$$\begin{array}{rcl} (P,Q) & \longmapsto & \epsilon_{P,Q} \\ (\mathrm{Im}(\epsilon), \mathrm{Ker}(\epsilon)) & \longleftarrow & \epsilon \end{array}$$

よって, 任意の有限生成射影加群 P に対して, 適当な $n \geq 1$ と射影行列 $\epsilon \in M_n(A)$ が存在し, $P = \mathrm{Im}(\epsilon)$ である. 逆に, $\epsilon \in M_n(A)$ が射影行列ならば, $\mathrm{Im}(\epsilon) \subset A^n$ は射影加群である.

例 5.11. 射影加群が自由加群であるとは限らないことに注意する. k を可換環とし, k の票数が $2, 3$ でないとする. 次の可換環を考える.

$$A := \frac{k[X,Y]}{(Y^2 - X^3 - 1)}.$$

可換環 A をアフィン楕円曲線 $y^2 = x^3 - 1$ の関数環という. 明らかに $(Y^2 - X^3 - 1) \subset (X, Y - 1)$ である. よって,

$$\mathfrak{m} := \frac{(X, Y-1)}{(Y^2 - X^3 - 1)}$$

は A のイデアルである. 明らかに $A/\mathfrak{m} \simeq \frac{k[X,Y]}{(X,Y-1)} \simeq k$ である. よって, $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアルである. x, y をそれぞれ A における X, Y の剰余類とする. $y^2 - 1 = x^3$ より $(y-1)(y+1) = x^3$ である. $\mathfrak{m} = Ax + A(y-1)$ である. A 線型写像 $f\colon A^2 \to \mathfrak{m}$, $(a,b) \mapsto ax + b(y-1)$ を考える. 明らかに f は全射である. また, $\mathrm{Ker}(f) = A(-x^2, y+1)$ である. よって, A 加群として $\mathfrak{m} \simeq A^2/A(-x^2, y+1)$ が成り立つ. 以下の行列 $\epsilon \in M_2(A)$ を考える.

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{y+1}{2} & \frac{x^2}{2} \\ \frac{-x}{2} & \frac{(1-y)}{2} \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Tr}(\epsilon) = 1$, $\det(\epsilon) = \frac{1}{4}(x^3 + 1 - y^2) = 0$ である. よって $\epsilon^2 = \epsilon$ が成り立つ. また,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\epsilon) \iff \begin{cases} a(y+1) + bx^2 = 0 \\ ax + b(y-1) = 0 \end{cases}$$

よって $\mathrm{Ker}(\epsilon) \subset \mathrm{Ker}(f)$ である．逆に, 明らかに $(-x^2, y+1) \in \mathrm{Ker}(\epsilon)$ が成り立つので, $\mathrm{Ker}(f) = A(-x^2, y+1) \subset \mathrm{Ker}(\epsilon)$ である．したがって $\mathrm{Im}(\epsilon) \simeq A^2/\mathrm{Ker}(\epsilon) \simeq \mathfrak{m}$. 以上より, $\mathfrak{m}$ は射影加群である．

しかし, $\mathfrak{m}$ は自由 A 加群でないことを確認する．$\mathfrak{m}$ が自由であると仮定する．$\mathfrak{m} \subset A$ より $\mathrm{rank}(\mathfrak{m}) \leq \mathrm{rank}(A) = 1$ より, $\mathrm{rank}(\mathfrak{m}) = 1$ である．よって, $z \in \mathfrak{m}$ が存在し, $\mathfrak{m} = zA$ である．$z = Q \mod Y^2 - X^3 - 1$ となる多項式 $Q(X, Y)$ をとる．このとき, $\mathfrak{m} = (X, Y-1) = (Y^2 - X^3 - 1, Q(X, Y))$ が成り立つ．除法の原理より, $Q(X, Y) = Q_0(X, Y)X + Q_1(Y)$ と書ける．ゆえに, $\mathfrak{m} = (Y^2 - X^3 - 1, Q_1(Y))$ である．同様に, $Q_1(Y) = (Y-1)Q_2(Y) + r$ と書ける．$r \in \mathfrak{m}$ より, $r = 0$ である．したがって, $\mathfrak{m} = (Y^2 - X^3 - 1, Y-1) = (X^3, Y-1)$ となり, $\mathfrak{m} = (X, Y-1)$ に矛盾する．ゆえに, $\mathfrak{m}$ は単項イデアるでない．以上より, $\mathfrak{m}$ は自由 A 加群でない．

例 5.12. 平坦加群が射影加群であるとは限らない．例えば, $A = \mathbb{Z}$ とする．$\mathbb{Q}$ は平坦 A 加群であるが, 射影加群でない．なぜならば, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ であるので, L が自由 $\mathbb{Z}$ 加群ならば, 非自明な準同型 $\mathbb{Q} \to L$ が存在しない．とくに $\mathbb{Q}$ は自由加群の直和因子でない．

5.3 局所環上の射影加群

A を局所環とする．A の唯一の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とおき, $k = A/\mathfrak{m}$ とおく．

定理 5.13. A を局所環とし, M を有限生成射影加群とする．このとき, M が自由加群である．

証明

$\overline{M} = M \otimes_A A/\mathfrak{m} = M/\mathfrak{m}M$ と定める．M が有限生成加群だから, $\overline{M}$ は有限次元 k ベクトル空間である．$\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ を $\overline{M}$ の基底とし, 代表元 $x_1, \dots, x_n \in M$ をとる．命題 1.35 より, $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ が成り立つ．よって, 写像 $g\colon A^n \to M$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$ は全射である．$K = \mathrm{Ker}(f)$ とおくと, 短完全列

$$0 \to K \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{g} M \to 0 \tag{5.1}$$

が得られる．M が射影加群であるので, この短完全列が分裂する．よって, $f' \circ f = \mathrm{id}_{M'}$ を満たす A 線型写像 $M \to M'$ が存在する．また, 任意の A 代数への係数拡大を行って得た系列も短完全列であり分裂する (命題 1.25 参照)．よって k ベクトル空間の系列 $0 \to \overline{K} \to k^n \to \overline{M} \to 0$ も短完全列であり, 分裂する．$\dim_k(\overline{M}) = n$ より, $K \otimes_A k = 0$ が成り立つ．$f'\colon A^n \to K$ が全射であるので, K が有限生成加群である．中山の補題 (定理 1.32) より, $K = 0$ である．したがって, $g\colon A^n \to M$ は同型写像である．主張が従う．

注意 5.14. A がネーター環で, M が有限生成 A 加群ならば, 以下が同値である (期末レポート参照).
(i) M が平坦 A 加群である．
(ii) M が射影 A 加群である．
(iii) M が自由 A 加群である．

以下は Kaplansky によって証明された定理 5.13 の一般化である．

定理 5.15 (Kaplansky)**.** A を局所環とする．任意の射影 A 加群は自由加群である．

A 加群 M が可算生成加群であるとは, 可算集合である生成系をもつことをいう．まず, 次の定理を示す：「M が可算生成部分加群の直和で表せるとする．また, N をその直和因子とする (つまり, $M = N \oplus P$ と書けるような部分加群)．このとき, N が可算生成部分加群の直和で表せる」．もっと分かりやすく説明すると, $\mathcal{E}$ を可算生成部分加群の直和で表せるような加群全体の族とする．上記の主張は以下を意味する．

定理 5.16. $M \oplus N \in \mathcal{E} \iff M \in \mathcal{E}$ かつ $N \in \mathcal{E}$.

証明

$\Longleftarrow$ は明らかである．$\Longrightarrow$ を示す．$M \oplus N = \bigoplus_{i \in I} S_i$ (S_i：可算生成加群) とする．任意の部分集合 $K \subset I$ に対し，$S_K = \bigoplus_{i \in K} S_i$ とおき，射影 $p_M \colon M \oplus N \to M$ と $p_N \colon M \oplus N \to N$ による S_K の像をそれぞれ M_K と N_K とおく．$x \in S_K$ ならば，$x = p_M(x) + p_N(x)$ と書けるから，$S_K \subset M_K \oplus N_K$ であるが，$S_K = M_K \oplus N_K$ とは限らない．また，K が可算集合ならば，$S_K = \bigoplus_{i \in K} S_i$ は可算生成加群である：$\{s_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ が S_i の可算生成系ならば，$\{s_{i,j}\}_{(i,j) \in K \times \mathbb{N}}$ は S_K の生成系であり，$K \times \mathbb{N}$ は可算集合である．

以下の条件を満たす組 $(K, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ を考える．

- $K \subset I$ は $S_K = M_K \oplus N_K$ が成り立つような K の部分集合である．
- $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は $\mathcal{E}$ の加群から構成されている集合である．
- $M_K = \bigoplus_{D \in \mathcal{X}} D$, $N_K = \bigoplus_{D' \in \mathcal{Y}} D'$ が成り立つ．

上のような組 $(K, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 全体の集合を $\mathscr{Z}$ とおく．$(\emptyset, \{0\}, \{0\}) \in \mathscr{Z}$ より，空集合でない．$(K, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $(K', \mathcal{X}', \mathcal{Y}')$ を $\mathscr{Z}$ の元とし．

$$K \subset K',\ \mathcal{X} \subset \mathcal{X}',\ \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}' \iff (K, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) < (K', \mathcal{X}', \mathcal{Y}')$$

とし，$\mathscr{Z}$ に半順序関係を入れる．$\mathscr{Z}$ が帰納法的集合であることを示す．$\mathscr{Z}_1 \subset \mathscr{Z}$ を全順序部分集合とする．

$$\begin{aligned} K &= \bigcup_{(K_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \in \mathscr{Z}_1} K_1 \\ \mathcal{X} &= \bigcup_{(K_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \in \mathscr{Z}_1} \mathcal{X}_1 \\ \mathcal{Y} &= \bigcup_{(K_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \in \mathscr{Z}_1} \mathcal{Y}_1 \end{aligned}$$

とおく．$M_K = \bigcup_{(K_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1) \in \mathscr{Z}_1} M_{K_1}$ である．$M_{K_1} \subset S_{K_1} \subset S_K$ より，$M_K \subset S_K$ である．同様に，$N_K \subset S_K$ である．$S_K \subset M_K \oplus N_K$ は常に成り立つので，$S_K = M_K \oplus N_K$ となる．また，$M_K = \bigoplus_{D \in \mathcal{X}} D$ と $N_K = \bigoplus_{D' \in \mathcal{Y}} D'$ であることも容易に確認できる．よって，$(K, \mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathscr{Z}$ であり，$\mathscr{Z}_1$ の上限である．ゆえに，$\mathscr{Z}$ は帰納法的集合である．

ツォルンの補題より，極大元 $(K, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が存在する．$A = I$ を示せば良い．$K \neq I$ と仮定する．$x_0 \in I - K$ とし，$J_0 = \{x_0\}$ とする．S_{J_0} は可算生成加群だから，M_{J_0} と N_{J_0} も可算生成加群である．よって，

$$S_{J_0} \subset M_{J_0} \oplus N_{J_0} \subset S_{J_1}$$

となる可算部分集合 $J_0 \subset J_1$ が存在する．帰納法的に $S_{J_n} \subset M_{J_n} \oplus N_{J_n} \subset S_{J_{n+1}}$ を満たす可算部分集合の列 $J_0 \subset J_1 \subset J_2 \subset \ldots$ が作れる．

$$J = \bigcup_{n \geq 0} J_n$$

とおき，$K' = K \cup J$ とおく．$S_{K'} = M_{K'} \oplus N_{K'}$ を確認する．$S_{K'} \subset M_{K'} \oplus N_{K'}$ は常に成り立つ．また，$S_K = M_K \oplus N_K$ より，$M_K \oplus N_K \subset M_{K'}$．最後に，$z \in M_J$ ならば，$z \in M_{J_n}$ となる $n \geq 1$ が存在する．$M_{J_n} \subset S_{J_{n+1}}$ より $z \in S_{K'}$ となる．同様に $N_J \subset S_{K'}$ である．したがって，$S_{K'} = M_{K'} \oplus N_{K'}$ が成り立つ．

M_K は S_K の直和因子であり，S_K は $M \oplus N$ の直和因子である．ゆえに，$M_K \oplus T = M \oplus N$ と書ける．ゆえに，$M_{K'} = M_K \oplus (T \cap M_{K'})$ である．$T \cap M_{K'} \in \mathcal{E}$ を示す．同様に $N_K \oplus T' = M \oplus N$ となる T' が取れる．よって，$N_{K'} = N_K \oplus (T' \cap N_{K'})$ である．ゆえに，

$$\begin{aligned} S_{K'} &= M_{K'} \oplus N_{K'} \\ &= M_K \oplus (T \cap M_{K'}) \oplus N_K \oplus (T' \cap N_{K'}) \\ &= S_K \oplus (T \cap M_{K'}) \oplus (T \cap N_{K'}) \end{aligned}$$

ゆえに, $(T \cap M_{K'}) \oplus (T' \cap N_{K'}) \simeq S_{K'-K}$ となる. $K' - K \subset J$ だから, 可算集合である. したがって $S_{K'-K}$ は可算生成である. よって, $T \cap M_{K'}$ と $T' \cap N_{K'}$ も可算生成である. $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \cup \{T \cap M_{K'}\}$, $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \cup \{T' \cap N_{K'}\}$ とおく. 以上より, $(K', \mathcal{X}', \mathcal{Y}') \in \mathscr{Z}$ である. また, $(K', \mathcal{X}', \mathcal{Y}') > (K, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が成り立つので, 極大性に矛盾する. よって, $K = I$ であり, M と N が可算生成部分加群の直和で表せる.

補題 5.17. M を可算生成加群とする. また, M の任意の直和因子 N が次の条件を満たすとする:「任意の $x \in N$ に対して, $x \in L$ を満たす N の自由である直和因子 L が存在する」. このとき, M は自由加群である.

証明

$\{x_1, x_2, \dots\}$ を M の可算生成系とする. $x_1 \in L_1$ となる自由直和因子 L_1 が存在する. よって, $M = L_1 \oplus M_1$ と書ける. この直和で定まる射影 $p_1 \colon M \to M_1$ を考える. $x_i^{(1)} = p_1(x_i)$ $(i \geq 2)$ とおく. 同様に, $x_2^{(1)} \in L_2$ となる M_1 の自由直和 $L_2 \subset M_1$ が存在する. 続いていくと, $M = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \oplus M_n$ となる自由加群 L_i の列が得られる. また, $x_1, \dots, x_n \in L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ である. ゆえに, $M = \bigoplus_{i \geq 1} L_i$ が成り立ち, M が自由加群である.

補題 5.18. M を射影加群とし, $x \in M$ とする. このとき, $x \in L$ を満たす M の自由である直和因子 L が存在する.

証明

M が射影加群だから, $Q := M \oplus N$ が自由加群であるように表せる. $\{e_i\}_{i \in I}$ を Q の基底とし,

$$x = \sum_{j=1}^{n} a_j e_{i_j}, \quad a_j \in A - \{0\}$$

とする. また, Q の全ての基底の中で, 上記の x の書き方が最短であるとする. このとき, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し, $a_i \notin \sum_{j \neq i} A a_j$ である. 実際に, $a_1 = \sum_{j=2}^{n} s_j a_j$ ならば,

$$x = \sum_{j=2}^{n} a_j (e_{i_j} + s_j e_{i_1})$$

と書ける. $\{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_j} + s_j e_{i_1}\}_{2 \leq j \leq n} \cup \{e_i\}_{i \neq i_1, \dots, i_n}$ は Q の基底であるので, n の最小性に矛盾する.
任意の $i \in I$ に対して, $e_i = x_i + y_i$, $x_i \in M$, $y_i \in N$ と書く. よって, $x = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{i_j}$ となる. $\{x_{i_j}\}_{j=1,\dots,n} \cup \{e_i\}_{i \neq i_1, \dots, i_n}$ が Q の基底であることを示せば良い. なぜならば, $L = A x_{i_1} + \cdots + A x_{i_n}$ は自由であり, M の直和因子である. 実際に, R を $\{e_i\}_{i \neq i_1, \dots, i_n}$ で生成される部分加群とすると $Q = L \oplus R$ である. よって, $M = L \oplus (M \cap R)$ が成り立つ.
$\{x_{i_j}\}_{j=1,\dots,n} \cup \{e_i\}_{i \neq i_1, \dots, i_n}$ が Q の基底であることを証明する.

$$x_{i_j} = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} e_{i_k} + t_j$$

と表せる. ただし, ここで t_j は $\{e_i\}_{i \neq i_1, \dots, i_n}$ の一次結合である. $B = (b_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

したがって, B が $M(n, A)$ の正則行列であることを示せば十分である. $x = \sum_{j=1}^{n} a_j e_{i_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{i_j}$ だから,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_{j,k} \right) e_{i_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j t_j = \sum_{k=1}^{n} a_k e_{i_k}$$

したがって, 全ての $k=1,\dots,n$ に対して,

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j b_{j,k}$$

が成り立つ. ゆえに, $(1-b_{k,k})a_k = \sum_{j\neq k} a_j b_{j,k}$ である. 以上より, $1-b_{k,k}$ は単元でない. ゆえに, A が局所環だから, $1-b_{k,k}\in\mathfrak{m}$ である (ただし, $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアルである). よって, $b_{k,k}$ は単元である. 同様な議論より, $j\neq k$ のとき $b_{j,k}\in\mathfrak{m}$ である. $x\in A$ に対して, $\overline{x}=x+\mathfrak{m}\in A/\mathfrak{m}$ とおく. $\overline{B}=(\overline{b}_{j,k})_{j,k}$ は対角行列であり, その対角成分は 0 でない. とくに, $\overline{B}$ の行列式は 0 でない. ゆえに, $\overline{\det(B)}=\det(\overline{B})\neq 0$ である. したがって, $\det(B)$ は A の単元である. 主張が従う.

Kaplansky の定理の証明

M を局所環 A 上の射影加群とする. $M\oplus N$ が自由加群であるような N が存在する. A は巡回加群だから, とくに可算生成加群である. よって, 任意の自由加群は明らかに族 $\mathcal{E}$ に属する. 定理 5.16 より, $M\in\mathcal{E}$ である. ゆえに, $M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ となる可算生成加群 M_i が存在する. 明らかに, M_i は射影加群である. 全ての M_i が自由であることを示せば十分だから, M がもともと可算生成射影加群であると仮定して良い.

N が M の直和因子ならば, N は明らかに射影加群である. 補題 5.18 より, 任意の $x\in N$ に対し, 自由である N の直和因子 L が存在する. 補題 5.17 より, M は自由加群である. 主張が従う.

系 5.19. A を可換環とし, M を射影 A 加群とする. このとき, 全ての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $M_\mathfrak{p}$ は自由 $A_\mathfrak{p}$ 加群である.

証明

系 5.4 より, $M_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ 上の射影加群である. Kaplansky の定理より, $M_\mathfrak{p}$ が自由加群である.

定義 5.20. A 加群 M が与えられているとする. M が「点ごとに○○」であるとは, 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $A_\mathfrak{p}$ 加群 $M_\mathfrak{p}$ が○○であることをいう.

例えば, M が点ごとに自由加群であるとは, 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $M_\mathfrak{p}$ が自由 $A_\mathfrak{p}$ 加群であることをいう. 上記の系より, 任意の射影加群は点ごとに自由である. しかし, 以下の例から分かるように, 点ごとに自由である加群は射影加群であるとは限らない.

例 5.21. $A=\mathbb{Z}$ とし, M を以下のように定義する.

$$M=\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ b\text{ 平方因子を持たない}\right\}$$

M が $(\mathbb{Q},+)$ の部分群であることは簡単に確認できる. $\mathfrak{p}=0$ ならば, $M_\mathfrak{p}=M\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ である. p が素数で $\mathfrak{p}=(p)$ であるならば,

$$M_\mathfrak{p}=M\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{Z}_{(p)}=p^{-1}\mathbb{Z}_{(p)}$$

である. とくに, 任意の素イデアル $\mathfrak{p}\subset\mathbb{Z}$ に対して, $M_\mathfrak{p}$ 自由加群である. ゆえに, M は点ごとに自由である.

しかし, M が射影加群でないことが容易に分かる. なぜならば, $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,\mathbb{Z})=0$ が成り立つ. 実際, 準同型 $f\colon M\to\mathbb{Z}$ が与えられているとする. $x\in M$ で $f(x)\neq 0$ とする. $v=f(x)$ とおく. $p_1,p_2,\dots$ を互いに異なる素数で, x の分母に現れないものとする. このとき, $N_k=p_1\dots p_k$ とおき, $y_k:=\frac{x}{N_k}$ を考える. 明らかに $y_k\in M$ である. ゆえに, $N_kf(y_k)=f(N_ky)=f(x)=v$ となる. ゆえに, v が全ての N_k $(k\geq 1)$ の倍数となり, 矛盾する. ゆえに, $f=0$ となる. ゆえに, L が自由加群ならば, $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,L)=0$ である (実際, 以上より全ての成分写像が零準同型である). 特に, M は自由加群の直和因子で表せないので射影加群でない.

命題 5.22. M を有限表示加群とする. 以下が同値である.

(i) M が射影加群である.

(ii) M が点ごとに自由である. つまり, 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対, $M_{\mathfrak{p}}$ が $A_{\mathfrak{p}}$ 自由加群である.

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii) は系 5.19 から分かる. 逆に, M が点ごとに自由であるとする. M が射影加群であることを示す. $N \xrightarrow{v} N'$ を全射準同型とする. $\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N')$ が全射である $\Longleftrightarrow$ 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $\mathrm{Hom}_A(M,N)_{\mathfrak{p}} \to \mathrm{Hom}_A(M,N')_{\mathfrak{p}}$ が全射である. M が有限表示であり, かつ $A_{\mathfrak{p}}$ が平坦 A 代数であるので, 系 3.31 より自然な同型写像 $\mathrm{Hom}_A(M,N)_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},N_{\mathfrak{p}})$ が存在する. 以下の可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(M,N)_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_A(M,N')_{\mathfrak{p}} \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},N_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},N'_{\mathfrak{p}})
\end{tikzcd}$$

$M_{\mathfrak{p}}$ が自由 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群であるので, 射影 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群である. よって, 図式の下段の写像は全射である. したがって, 上段の写像も全射である. 主張が従う.

まとめると, 任意の A 加群 M に対し, 以下が成り立つ.

$$\text{自由} \Longrightarrow \text{射影} \Longrightarrow \text{点ごとに自由} \Longrightarrow \text{平坦} \Longrightarrow \text{ねじれのない}$$

- 例 5.11 の加群は射影であるが, 自由でない.
- 例 5.21 の加群は点ごとに自由であるが, 射影でない.
- $A=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Q}$ とする. M が平坦 A 加群であるが, 点ごとに自由でない.
- $A=k[X,Y]$ とし, M をイデアル (X,Y) とする. M がねじれのない加群であるが, 平坦 A 加群でない (期末レポート問 3 参照).

5.4 移入加群の性質

命題 5.23. 以下の条件は互いに同値である.

(i) I が移入加群である.

(ii) 任意の単射準同型写像 $f\colon N \to M$ 及び任意の準同型 $u\colon N \to I$ に対し, $u = h\circ f$ となる準同型 $h\colon M \to I$ が存在する.

(iii) 任意の短完全列 $0 \to I \to M \to M'' \to 0$ が分裂する.

(iv) $I \subset M$ を満たす任意の A 加群 M について, $M = I \oplus N$ となる M の部分加群 N が存在する.

証明

- (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) は射影加群の場合と同じように証明できる.
- (ii) $\Longrightarrow$ (iii) を示す：$0 \to I \xrightarrow{f} M \to M'' \to 0$ 短完全列とし, 恒等写像 $\mathrm{id}_I\colon I \to I$ を考える. (ii) より, $\mathrm{id}_I = h\circ f$ を満たす準同型 $h\colon M \to I$ が存在する. 定理 1.15 より, 短完全列は分裂する.
- (iii) $\Longrightarrow$ (iv) を示す：$I \subset M$ とし, 短完全列 $0 \to I \to M \to M/I \to 0$ を考える. この短完全列が分裂するので, $M = I\oplus N$ と書くことができる.
- (iv) $\Longrightarrow$ (ii) を示す：単射準同型写像 $f\colon N \to M$ 及び準同型 $u\colon N \to I$ を考える. $F = I\oplus M$ とおき, $(u(x), f(x))$ $(x\in N)$ 全体の元のなす F の部分加群を F' とおく. 写像 $I \xrightarrow{\alpha} F/F'$, $x \mapsto (x,0)+F'$ は単射である. 実際に, $(x,0)\in F'$ ならば $(x,0) = (u(y), f(y))$ となる $y\in N$ が存在する. 特に $f(y)=0$ となるので, f の単射性より $y=0$ となり, $x=0$ である. 仮定より, $\beta\circ\alpha = \mathrm{id}_I$ を満たす準同型 $\beta\colon F/F' \to I$ が存在する. $m\in M$ に対し $h(m) = \beta((0,-m)+F')$ とおき, 写像 $h\colon M \to I$ を

定義する．$x \in N$ に対し $h(f(x)) = \beta((0, -f(x)) + F') = \beta((u(x), 0) + F') = \beta(\alpha(u(x))) = u(x)$ である．よって $h \circ f = u$ が成り立つ．

定義 5.24. M を加群とする．任意の正規元 $a \in A$ に対して写像 $M \to M$, $x \mapsto ax$ が全射であるときに, M を可除加群という．

命題 5.25. I が移入加群ならば, 可除加群である．

証明

$a \in A$ を正規元とすると, 写像 $f\colon A \to A$, $b \mapsto ab$ は単射である．また, $x \in I$ とし, 準同型 $u\colon A \to I$, $b \mapsto bx$ を考える．移入性より $u = h \circ f$ となる準同型 $h\colon A \to I$ が存在する．よって, $x = u(1) = h(f(1)) = h(a) = ah(1)$ である．よって, I は可除加群である．

§6 で単項イデアル整域上の移入加群を特徴づける性質を説明する．特に, $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が移入加群であることを示される (例 6.4 参照)．系 5.4 より, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は移入 A 加群である．この知識のもとで以下の定理を証明する．

定理 5.26. M を A 加群とする．移入加群 I 及び単射準同型写像 $f\colon M \to I$ が存在する．つまり, M を含む移入加群が存在する．

証明

まず, $A = \mathbb{Z}$ の場合を考える． アーベル群 M に対して, そのポントリャーギン双対を $M^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ と定義する．例えば $\mathbb{Z}^\vee = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ である．同様に, F が自由アーベル群ならば, $F \simeq \mathbb{Z}^{(I)}$ と書け, $F^\vee \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(I)}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I$ である．$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が可除加群だから, $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I$ も可除加群である．よって, $F^\vee$ は移入加群である．
アーベル群 M について, 自然な写像 $\iota\colon M \to M^{\vee\vee}$ が存在する． 実際に, $x \in M$ に対して, 写像 $\iota(x)\colon M^\vee \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $\iota(x)(u) = u(x)$ によって定める． こうすると, 写像 $x \mapsto \iota(x)$ は準同型 $\iota\colon M \to M^{\vee\vee}$ である．ι が単射であることを確認する．$x \in \mathrm{Ker}(\iota)$ とし, $x \neq 0$ を仮定する．このとき, x で生成される部分群 $\langle x \rangle$ は $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \geq 1)$ と同型である．いずれの場合にも, 非自明な準同型 $u_0\colon \langle x \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在する．$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が移入加群だから, u_0 を準同型 $u\colon M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に延長できる．$x \in \mathrm{Ker}(\iota)$ より, $u(x) = 0$ となり, 矛盾する．よって, $\iota\colon M \to M^{\vee\vee}$ が単射である．
M をアーベル群とする．自由アーベル群 F および全射 $F \to M^\vee$ がとれる．よって, Hom 関手の左完全性より以下の完全系列が得られる．

$$0 \to M^{\vee\vee} \to F^\vee.$$

また, $M \xrightarrow{\iota} M^{\vee\vee}$ が単射であるので, 単射 $M \to F^\vee$ が得られる．
今, 一般の可換環 A を考える．M を A 加群とする．以上より, 移入 $\mathbb{Z}$ 加群 I および $\mathbb{Z}$ 加群の単射準同型 $f\colon M \to I$ が存在する．よって, Hom の左完全性より

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$$

は完全系列である．また, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ は移入 A 加群である．最後に, $x \in M$ に対して, $g_x(a) = ax$ とおくことにより A 準同型 $g_x\colon A \to M$ を定める．とくに, g_x はアーベル群の準同型であるので, $g_x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ である．写像 $x \mapsto g_x$, $M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)$ は明らかに単射であり, A 加群の準同型である．以上より, A 加群の単射準同型 $M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, I)$ が得られ, 主張が従う．

加群 M が与えられているとき, M を含む移入加群のうち, 最小のものを M の移入包絡という．例えば, $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Z}$ の移入包絡は移入加群 $\mathbb{Q}$ である．

6 PID 上の加群

6.1 PID 上の移入加群

命題 6.1. A を単項イデアル環とする (整域でない環も可). A 加群 I に対して, 「I が移入加群である $\Longleftrightarrow$ I が可除加群である」が成り立つ.

証明

$M' \subset M$ とし, $f\colon M' \to I$ を準同型とする. N を $M' \subset N \subset M$ を満たす部分加群とし, $g\colon N \to I$ を準同型とする. $g|_{M'} = f$ のとき, 組 (N, g) を組 (M', f) の延長といおう. 以下の集合を考える.

$$X := \left\{ (N, g) \;\middle|\; \begin{array}{l} M' \subset N \subset M,\ g\colon N \to I \\ (N, g) \text{ は組 } (M', f) \text{ の延長である} \end{array} \right\}.$$

X の元 (N, g), (N', g') に対して, $N \subset N'$ かつ $g'|_N = g$ であるとき, $(N, g) \leq (N', g')$ とすることで, X に半順序を入れる. この順序に関して, X は帰納法的順序集合である (つまり, 以下の定義の性質をもつ.)

定義 6.2. $(X, \leq)$ を半順序集合とする. 帰納法的順序集合であるとは, 任意の X の全順序部分集合 Y が X において上界をもつときにいう.

実際, $Y \subset X$ を全順序部分集合とする. Y の元に添字を付けて $(N_i, g_i)_{i \in I}$ と表す.

$$N = \bigcup_{i \in I} N_i$$

と定義する. N が M の部分加群である (なぜならば, $x, y \in N$ に対して, $x \in N_i$, $y \in N_j$ となる $i, j \in I$ がある. Y が全順序集合より, $N_i \subset N_j$ または $N_i \subset N_j$ である. いずれの場合, 任意の $a, b \in A$ に対し $ax + by \in N$ である). また, 準同型 $g\colon N \to I$ を次のように定義する. $x \in N$ とし, $x \in N_i$ $(i \in I)$ とする. このとき, $g(x) = g_i(x)$ とおくことで, 写像 $g\colon N \to I$ を定める (ただし, この定義は i の取り方に依らないことを注意する. 実際に, $x \in N_i \cap N_j$ ならば, $(N_i, g_i) \leq (N_j, g_j)$ または $(N_j, g_j) \leq (N_i, g_i)$ が成り立つ. いずれの場合, $g_i(x) = g_j(x)$ である). 明らかに, $(N, g) \in X$ であり, Y の上界である. よって, X は帰納法的順序集合である.

定理 6.3 (ツォルンの補題)**.** 帰納法的順序集合においては極大元が少なくとも一つ存在する.

ツォルンの補題より, X の極大元 (N, g) がとれる. $N = M$ を示せば良い. $N \neq M$ を仮定し, $x \in M - N$ とする. また, $N' = N + Ax$ とおく. $N' = N \oplus Ax$ ならば, $g'(x) = 0$ とおくことで, 準同型 $g'\colon N' \to I$ が得られる. 明らかに $(N, g) < (N', g')$ より, (N, g) の極大性に矛盾する. そうでなければ, $ax \in N$ を満たす $a \in A - 0$ が存在する. $\mathfrak{a} = \{b \in A \mid bx \in N\}$ は A にイデアルである. よって, $\mathfrak{a} = bA$ を満たす $b \in A - \{0\}$ が存在する. 特に $bx \in N$ である. I が可除加群だから, $g(bx) = by$ となる $y \in I$ が存在する. $z \in N$, $a \in A$ に対して $g'(z + ax) = g(z) + ay$ とおくことによって, 写像 $g'\colon N' \to I$ を定める. ただし, g ‘ が well-defined であることを確認する. $z + ax = z' + a'x$ ならば, $z - z' = (a' - a)x$ となる. よって, $a' - a \in \mathfrak{a} = Ab$ である. よって $a' - a = bc$ $(c \in A)$ と書ける. ゆえに $g(z - z') = g(bcx) = cg(bx) = cby = a'y - ay$ である. したがって, $g(z) + ay = g(z') + a'y$ となり, g' は well-defined である. $(N', g') < (N, g)$ だから, (N, g) の極大性に矛盾する. 以上より, $N = M$ であり, すなわち準同型 $f\colon M' \to I$ は M への延長をもつことが示せた.

例 6.4.

- $A = \mathbb{Z}$ とする. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は明らかに可除加群であるので, $\mathbb{Z}$ 移入加群である.
- K が可換体ならば, 任意の K ベクトル空間は可除であるので, 移入である.

- $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする．このとき，任意の $x \in A$ に対し「x が正規元 $\Longleftrightarrow$ x が単元」が成り立つ．よって，A は移入 A 加群である．しかし，$\mathbb{Z}$ 加群としては $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は可除加群でないので，移入 $\mathbb{Z}$ 加群でない．

6.2 PID 上の自由加群，射影加群

定理 6.5. M を自由 A 加群とし，$N \subset M$ を部分加群とする．このとき，N は自由加群である．

証明

$N \neq 0$ であると仮定して良い．$\{e_i\}_{i\in I}$ を M の基底とする．部分集合 $J \subset I$ に対して，M_J を $\{e_i\}_{i\in J}$ で生成される部分加群とする．M_J は明らかに自由加群である．以下の条件を満たす組 (K, J, u) を考える．

- $J \subset K \subset I$ は部分集合である．
- $N \cap M_K$ が自由加群である．
- $u\colon J \to N \cap M_K$, $j \mapsto u_j$ は写像で，$(u_j)_{j\in J}$ は $N \cap M_K$ の基底である．

上記の条件を満たす組 (K, J, u) 全体の集合を X とおく．X は空集合でないことを確認する．$x \in N$ を 0 でない元とする．明らかに，$x \in M_{K'}$ を満たす有限集合 $K' \subset I$ が取れる．特に，$N \cap M_{K'} \neq 0$ である．$N \cap M_K \neq 0$ を満たす極小の部分集合 $K \subset K'$ を考える．$K = \{j_1, \ldots, j_d\}$ とおく．よって，$N \cap M_{\{j_1,\ldots,j_{d-1}\}} = 0$ である．ゆえに，自然な写像

$$N \cap M_K \longrightarrow \frac{M_K}{M_{\{j_1,\ldots,j_{d-1}\}}} \simeq A$$

は単射である．したがって，$N \cap M_K$ は階数 1 の自由加群である．$x \in N \cap M_K$ を生成元とする．$J = \{j_1\}$ とおき，$u(j_1) = x$ で定まる写像 $u\colon J \to N \cap M_K$ を考える．このとき，(K, J, u) は上記の条件を満たすので，X の元である．

(K_1, J_1, u_1), (K_2, J_2, u_2) を X の元とする．

$$K_1 \subset K_2,\ J_1 \subset J_2,\ u_1 = u_2|_{J_1} \iff (K_1, J_1, u_1) \leq (K_2, J_2, u_2)$$

とし，半順序関係 $\leq$ を X に入れる．X が帰納法的順序集合であることを確認する．$Y \subset X$ を全順序部分集合とする．

$$J = \bigcup_{(K_1,J_1,u_1)\in Y} J_1, \quad K = \bigcup_{(K_1,J_1,u_1)\in Y} K_1$$

とおく．また，$j \in J$ に対し，$j \in J_1$ を満たす $(K_1, J_1, u_1) \in Y$ をとり，$u(j) = u_1(j)$ と定める．これは (K_1, J_1, u_1) の取り方に依らないことに注意する．明らかに，$N \cap M_K = \bigcup_{y_1\in Y}(N \cap M_{K_1})$ であり，$(u(j))_{j\in J}$ は $N \cap M_K$ の基底である．ゆえに，$(K, J, u) \in X$ であり，Y の上限である．以上より，X は帰納法的集合である．したがって，極大元 $(K, J, u) \in X$ がとれる．$K = I$ を示せば $N = N \cap M_K$ となり，よって N が自由加群である．$K \neq I$ を仮定し，$i \in I - K$ とする．$M_{K\cup\{i\}} \cap N = M_K \cap N$ ならば，$(K\cup\{i\}, J, u) \in X$ であり，$(K\cup\{i\}, J, u) > (K, J, u)$ であり，極大性に矛盾する．$M_{K\cup\{i\}} \cap N \neq M_K \cap N$ とする．このとき，$ae_i + x \in N$ となる $a \in A - \{0\}$, $x \in M_K$ が取れる．

$$D := \{a \in A \mid \exists x \in M_K,\ ae_i + x \in N\}$$

とおく．D は明らかに A のイデアルであり，$D \neq 0$ である．$D = (b)$ を満たす $b \in D$ をとる．$be_i + x \in N$ となる $x \in M_K$ が存在する．$u_i := be_i + x$ とおくことで，u を写像 $u'\colon J \cup \{i\} \to N$, に延長する．$(\{u_j\}_{j\in J\cup\{i\}})$ が $N \cap M_{K\cup\{i\}}$ の基底であることを示す．明らかに，生成系であることを示せば十分である．$z \in N \cap M_{K\cup\{i\}}$ とし，$z = a'e_i + z'$ $(a' \in A,\ z' \in M_K)$ とする．$a' \in D$ より，$a' = bc$ $(c \in A)$ と書ける．よって，$z - cu_i = z' - cx \in M_K \cap N$ となるので，$z - cu_i$ が $(u_j)_{j\in J}$ の一次結合で表せる．したがって，$(\{u_j\}_{j\in J\cup\{i\}})$ が $N \cap M_{K\cup\{i\}}$ の基底である．$(K \cup \{i\}, J \cup \{i\}, u') > (K, J, u)$ となり矛盾する．主張が従う．

系 6.6. M を A 加群とする. 以下が同値である.
(i) M が射影加群である.
(ii) M が自由加群である.

証明

射影加群が自由加群の部分加群であることから直ちに分かる.

6.3 PID 上の平坦加群

定理 6.7. M を A 加群とする. 以下が同値である.
(i) M が平坦加群である.
(ii) M がねじれを持たない.

証明

- (i) $\Longrightarrow$ (ii) は常に成り立つ.
- (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す. I を A のイデアルとし, 写像 $I \otimes_A M \to M$ を考える. A が単項イデアる整域より, $I = (t)$ となる $t \in A$ が存在する. $t \neq 0$ と仮定して良い. 写像 $A \to I$, $a \mapsto at$ は同型写像 $A \simeq I$ である. よって, $I \otimes_A M \simeq M$ となる. また, 写像 $I \otimes_A M \to M$ と写像 $M \to M$, $x \mapsto tx$ を同一視ことができる. M がねじれを持たないので, この写像が単射である. よって, 主張は定理 2.39 から従う.

例 6.8. 任意の可換環 A と任意の A 加群 M に対し,

$$\text{自由} \Longrightarrow \text{射影} \Longrightarrow \text{点ごとに自由} \Longrightarrow \text{平坦} \Longrightarrow \text{ねじれのない}$$

は常に成り立つ. A が PID である場合,

$$\text{自由} \Longleftrightarrow \text{射影} \Longrightarrow \text{点ごとに自由} \Longrightarrow \text{平坦} \Longleftrightarrow \text{ねじれのない}$$

が成り立つ.

6.4 有限生成自由加群

定理 6.9. M を有限生成自由 A 加群とし, $N \subset M$ を部分加群とする. このとき, N も有限生成自由加群であり, さらに $\mathrm{rank}(N) \leq \mathrm{rank}(M)$ が成り立つ.

証明

A の階数に関する数学的帰納法によって証明する. $M = A^n$ とすれば良い. $\pi\colon A^n \to A$ を第一成分への射影とする. $N \cap \mathrm{Ker}(\pi) \subset \{0\} \times A^{n-1}$ だから, 帰納法の仮定より $N \cap \mathrm{Ker}(\pi)$ は自由加群であり, その階数は $\leq n-1$ である. また, 短完全列

$$0 \to N \cap \mathrm{Ker}(\pi) \to N \to \pi(N) \to 0$$

が得られる. $\pi(N)$ は A のイデアルであるので, $\pi(A) \simeq A$ または $\pi(A) = 0$ である. 自由加群が射影加群であるので, この短完全列が分裂する. したがって, $N \simeq (N \cap \mathrm{Ker}(\pi)) \oplus \pi(N)$ となり, N が自由加群である. さらに, $\mathrm{rank}(N) \leq (n-1) + 1 = n$ が成り立つ.

定理 6.10. A を PID とし, M を有限生成 A 加群とする. このとき,

$$M \text{ がねじれをもたない} \Longleftrightarrow M \text{ が自由加群である}$$

証明

$\Longleftarrow$ は明らかである．逆に, M がねじれを持たないとする．M の元 $x_1, \ldots, x_k$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

が成り立つときに, $(x_1, \ldots, x_n)$ を A 上線型独立であるという．$(x_1, \ldots, x_n)$ を M の生成系とする．元 $x_1, \ldots, x_n$ からなる A 上線型独立な全ての組の中で, 元の個数が最大であるもの $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ を考える．添字を付け直せば, $(x_1, \ldots, x_k)$ $(k \leq n)$ が A 上線型独立であると仮定すれば良い．よって, $M_1 := Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_k$ は自由加群である．$k = n$ ならば, $M = M_1$ となるので, 自由加群である．$k < n$ ならば, $k < i \leq n$ について, k の最大性より $(x_1, \ldots, x_k, x_i)$ は線型従属である．よって, $a_1x_1 + \ldots a_kx_k + b_ix_i = 0$ を満たす $(a_1, \ldots, a_k, b_i) \in A^{k+1} - \{(0, \ldots, 0)\}$ が存在する．$(x_1, \ldots, x_k)$ が A 上線型独立だから, $b_i \neq 0$ である．よって, $b_ix_i \in M_1$ である．$b = b_{k+1} \ldots b_n$ とおくと, $b \neq 0$ であり, かつ任意の $i = k+1, \ldots, n$ に対して $bx_i \in M_1$ である．よって, $bM \subset M_1$ が成り立つ．定理 6.9 より, bM が自由加群である．$b \neq 0$ より, b は A の正規元である (A は整域であることに注意する)．M がねじれを持たないので, 写像 $M \to bM$, $x \mapsto bx$ は単射である．したがって, M が bM と同型であり, ゆえに自由加群である．

よって, PID 上の有限生成加群の場合は, 「自由」, 「射影」,「点ごとに自由」,「平坦」,「ねじれを持たない」という条件は互いに同値である．

6.5 有限生成加群構造定理

補題 6.11. M を有限生成 A 加群とする．このとき, $F := M/M_{\mathrm{tor}}$ は有限生成自由加群であり, $M \simeq M_{\mathrm{tor}} \oplus F$ が成り立つ．

証明

$F := M/M_{\mathrm{tor}}$ はねじれのない有限生成加群であるので, 自由加群である．自由加群が射影加群であるので, 短完全列 $0 \to M_{\mathrm{tor}} \to M \to F \to 0$ は分裂する．主張が従う．

M を A 加群とし, $x \in M$ とする．$\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ は A のイデアルであり, x の零化イデアルという．A が PID であるので, $\mathrm{Ann}(x) = (u)$ となる $u \in A$ が存在する．素元 $p \in A$ について

$$M(p) := \{x \in M \mid \exists n \geq 1,\ p^n x = 0\}$$

とおく．つまり, $M(p)$ は零化イデアルが p の冪で生成されるような元全体のなす M の部分集合である．明らかに, p と p' が $(p) = (p')$ を満たす素元ならば, $M(p) = M(p')$ となる．S を素元全体の代表系とする．

補題 6.12. M をねじれ加群とする．

$$M = \bigoplus_{p \in S} M(p)$$

が成り立つ．

証明

$p_1, \ldots, p_m \in S$ を互いに異なる素元とする．$x_i \in M(p_i)$ で $x_1 + \cdots + x_m = 0$ とする．$p^{k_i} x_i = 0$ となる $k_i \geq 0$ が存在する．$N = p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$ とおくと $Nx_2 = \cdots = Nx_m = 0$ である．また, N と p_1 が互いに素であるので, $ap_1^{n_1} + bN = 1$ となる $a, b \in A$ が取れる．よって,

$$x_1 = ap_1^{n_1}x_1 + bNx_1 = bNx_1 = -bN(x_2 + \cdots + x_m) = 0$$

である．同様に $x_2 = \cdots = x_m = 0$ が分かる．

次に, M の任意の元を $x_1+\cdots+x_n$ $(x_i\in M(p_i),\ p_i\in S)$ と表すことができることを示す. $x\in M$ とし, $\mathrm{Ann}(x)=(d)$ となる $d\in A$ を考える. $d=p_1^{k_1}\dots p_n^{k_n}$ $(p_i\in S,\ n_i>0)$ と書く. $d_i=\frac{d}{p_i^{k_i}}$ とおく. $\mathrm{lcm}(d_1,\dots,d_n)=1$ より明らかに, $(d_1,\dots,d_n)=A$ であるので, $a_1d_1+\cdots+a_nd_n=1$ となる $a_1,\dots,a_n$ が存在する. ゆえに, $x=a_1d_1x+\cdots*a_nd_nx$ となる. $p_i^{k_i}(d_ix_i)=dx=0$ より, $d_ix\in M(p_i)$ である. 以上より主張が従う.

$M=M(p)$ のとき, M を p 準素加群という. 任意の加群 M に対して, $M(p)$ が p 準素加群である. また, $A/(p^n)$ は p 準素加群である. 逆に, M が巡回 p 準素加群ならば, $M\simeq A/(p^n)$ であり, $(p^n)=\mathrm{Ann}(M)$ が成り立つ.

定理 6.13. M を有限生成 p 準素加群とする. このとき,

$$M\simeq A/(p^{k_1})\oplus\cdots\oplus A/(p^{k_r})$$

となる $k_1\geq\cdots\geq k_r\geq 1$ が存在する. さらに, $k_1,\dots,k_r$ が一意的に定まる.

M を有限生成 p 準素加群とし, $\mathrm{Ann}(M)=(p^{k_1})$ $(k_1\geq 1)$ と書く. 明らかに, $\mathrm{Ann}(x_1)=p^{k_1}$ を満たす x_1 が存在する. $M_1=Ax_1$ とおく. $x\in M$ に対し, $\overline{x}=x+M_1\in M/M_1$ とおく. $ax=0\Longrightarrow a\overline{x}=0$ より, $\mathrm{Ann}(x)\subset\mathrm{Ann}(\overline{x})$ が成り立つ.

補題 6.14. $\mathrm{Ann}(\overline{x})=\mathrm{Ann}(y)$ かつ $\overline{x}=\overline{y}$ を満たす $y\in M$ が存在する.

証明

$\mathrm{Ann}(\overline{x})=(p^m)$ $(m\leq r)$ とおく. $p_m\overline{x}=0$ より, $p^mx=ax_1$ $(a\in A)$ と表せる. $a=p^sa'$ $(\gcd(a',p)=1$ かつ $s<k_1)$ と書くことができる. $ua'+vp^{k_1}=1$ となる $u.v\in A$ が存在するので, 写像 $x\mapsto\quad a'x$ は同型写像 $M\to M$ であり, その逆写像は $x\mapsto ux$ である. ゆえに $\mathrm{Ann}(ax_1)=\mathrm{Ann}(p^sx_1)$ である. また, $\mathrm{Ann}(p^sx_1)=(p^{k_1-s})$ である. なぜならば, $p^{k_1-s}(p^sx_1)=p^{k_1}x=0$ より, $(p^{k_1-s})\subset\mathrm{Ann}(p^sx_1)$. よって $\mathrm{Ann}(p^sx_1)=(p^t)$, $t\leq k_1-s$ である. $p^{k_1-s-1}(p^sx_1)=p^{k_1-1}x_1\neq 0$ より, $\mathrm{Ann}(p^sx_1)=(p^{k_1-s})$ が成り立つ. 以上より, $\mathrm{Ann}(p^mx)=\mathrm{Ann}(ax_1)=(p^{k_1-s})$ である. 杖に, $\mathrm{Ann}(x)=(p^{m+k_1-s})$ である. $\mathrm{Ann}(M)=p^{k_1}$ より, $m+k_1-s\leq k_1$ となり, すなわち $m\leq s$ である. $p^mx=p^sa'x_1$ より $p^m(x-p^{s-m}a'x_1)=0$ である. $y=x-p^{s-m}a'x_1$ とおくと, $\overline{y}=\overline{x}$ である. ゆえに $\mathrm{Ann}(y)\subset\mathrm{Ann}(\overline{y})=(p^m)$. 一方, $p^my=0$ より $(p^m)\subset\mathrm{Ann}(y)$. よって, $\mathrm{Ann}(\overline{x})=\mathrm{Ann}(y)$ である.

M が有限生成加群 M ならば, $M\otimes_A A/(p)=M/pM$ は有限次元 $A/(p)$ ベクトル空間である.

証明

[定理 6.13 の証明] $\mathrm{Ann}(M)=(p^n)$ となる $n\geq 0$ が存在する. $\dim(M/pM)$ に関する帰納法により証明する. $\dim(M/pM)=0$ ならば, $pM=M$ となり, ゆえに $p^kM=M$ $(k\geq 1)$ となる. M が p 準素加群だから, $M=0$ である. $\dim(M/pM)\geq 1$ とする. $\mathrm{Ann}(x_1)=(p^{k_1})$ となる $x_1\in M$ をとり, $M_1=Ax_1$ とおく. また. 短完全列 $0\to M_1\to M\to M/M_1\to 0$ を $A/(p)$ とのテンソル積をとることで完全系列 $M_1/pM_1\to M/pM\to(M/M_1)\otimes_A A/(p)\to 0$ が得られる. $\mathrm{Ann}(x_1)=(p^{k_1})=\mathrm{Ann}(M)$ より, $x_1\notin pM$ である $(x_1=pz$ ならば, $\mathrm{Ann}(z)=(p^{k_1+1})$ となり, 矛盾する). ゆえに, 写像 $M_1/pM_1\to M/pM$ は零準同型でない. ゆえに, $\dim((M/M_1)\otimes A/(p))<\dim(M\otimes A/(p))$ である. 帰納法の仮定より, $M/M_1=A\overline{x}_2\oplus\cdots\oplus A\overline{x}_r$ かつ $\mathrm{Ann}(\overline{x}_2)\supset\cdots\supset\mathrm{Ann}(\overline{x}_r)$ となる 0 でない $\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_r\in M/M_1$ が存在する. 補題 6.14 より, $\mathrm{Ann}(x_i)=\mathrm{Ann}(\overline{x}_i)$ となる代表元 $x_i\in\overline{x}_i$ が取れる. $M_i=Ax_i$ $(2\leq i\leq r)$ と定める. $M_i\cap M_1=0$ であることを示す. $ax_i\in M_1$ ならば, $a\overline{x}_i=0$ となり, $a\in\mathrm{Ann}(\overline{x}_i)=\mathrm{Ann}(x_i)$ である. よって $ax_i=0$ である. 次に, $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_r$ が成り立つことを示す. $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_rx_r=0$ $(a_i\in A)$ ならば, $a_2\overline{x}_2+\cdots+a_r\overline{x}_r=0$ であるので, $a_i\overline{x}_i=0$

となる．ゆえに $a_ix_i = 0$ $(2 \le i \le r)$ が成り立つ．よって, $a_1x_1 = 0$ となり, $M_1, \dots, M_r$ が直和となっていることが分かる．最後に, $M = M_1 + \cdots + M_r$ を示す．$x \in M$ とする．$\overline{x} = a_2\overline{x}_2 + \cdots + a_r\overline{x}_r$ となる $a_2, \dots, a_r \in A$ が存在する．ゆえに $x - \sum_{i=2}^r a_ix_i \in M_1 = Ax_1$ である．よって, $x = \sum_{i=1}^r a_ix_i$ $(a_i \in A)$ と書くことができる．また, $\mathrm{Ann}(x_1) = \mathrm{Ann}(M) \subset \mathrm{Ann}(x_2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ann}(x_r)$ である．つまり, $\mathrm{Ann}(x_i) = (p^{k_i})$ と書くと, $M_i \simeq A/(p^{k_i})$, $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_1 \ge 1$ である．
次に, $k_1, \dots, k_r$ の一意性を示す．$\mathrm{Ann}(M) = (p^{k_1})$ となる k_1 に関する帰納法によって示す．

$$M \simeq A/(p^{k_1}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{k_r}) \simeq A/(p^{k'_1}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{k'_{r'}})$$
$$k_1 \ge \cdots \ge k_r \ge 1 \quad \text{かつ} \quad k'_1 \ge \cdots \ge k'_{r'} \ge 1$$

とする．まず, 上記の同型から $M \otimes_A A/(p)$ の次元は $r = r'$ であることが分かる．また,

$$pM \simeq A/(p^{k_1-1}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{k_r-1}) \simeq A/(p^{k'_1-1}) \oplus \cdots \oplus A/(p^{k'_r-1})$$

である．特に $\mathrm{Ann}(pM) = (p^{k_1-1})$ であるので, 帰納法の仮定より整数 $k_1 - 1, k_2 - 1, \dots, k_r - 1$ の中で 0 でないものは一意的に定まる．$k_i = 1$ を満たす i の個数を m とおき, $k'_i = 1$ を満たす i の個数を m' とおく．以上より, $m = m'$ を示せば十分である．上記の議論を pM に適用すれば,

$$\dim(pM/p^2M) = r - m = r - m'$$

であるので, $m = m'$ が成り立つ．

定理 6.15. M を有限生成 A 加群とする．このとき,

$$M \simeq A^d \oplus A/(a_1) \oplus \cdots \oplus A/(a_r)$$

かつ $a_1|a_2|\dots|a_r$ となる整数 $d \ge 0$ および $a_1, \dots, a_r \in A - \{0\}$ が存在する．さらに, 整数 $d \ge 0$ と単項イデアル $(a_1), \dots, (a_r)$ は一意的に定まる．

証明

- 存在性を示す：$M \simeq M_{\mathrm{tor}} \oplus F$ となる有限生成自由加群 F が存在する．よって, $N := M_{\mathrm{tor}} \simeq A/(a_1) \oplus \cdots \oplus A/(a_m)$ となる $a_i \in A - \{0\}$ が存在することを示せば良い．$\mathrm{Ann}(N) = (u)$, $u = p_1^{\alpha_1} \dots p_d^{\alpha_d}$ ($p_i \in S$ が互いに異なり, $\alpha_i \ge 1$) とすると, $N = \bigoplus_{i=1}^d N(p_i)$．また,

$$N(p_i) \simeq A/(p_i^{k_1^{(i)}}) \oplus \cdots \oplus A/(p_i^{k_{r_i}^{(i)}})$$

となる $k_1^{(i)} \ge k_2^{(i)} \ge \cdots \ge k_{r_i}^{(i)}$ が存在する．$j > r_i$ のとき, $k_j^{(i)} = 0$ とおく．また, $r = \max\{r_1, \dots, r_d\}$ とおく．こうすると, $N(p_i) \simeq \bigoplus_{j=1}^r A/(p_i^{k_j^{(i)}})$ である．$1 \le j \le r$ に対して,

$$a_j = \prod_{i=1}^d p_i^{k_{r+1-j}^{(i)}}$$

と定める．中国剰余定理より $\bigoplus_{i=1}^d A/(p_i^{k_j^{(i)}}) \simeq A/(a_{r+1-j})$ であるので, $M \simeq \bigoplus_{j=1}^r A/(a_j)$ である．また, 明らかに $a_1|a_2|\dots|a_r$ が成り立つ．
- 一意性を示す：A の商体を K とおく．$M \simeq A^d \oplus A/(a_1) \oplus \cdots \oplus A/(a_r)$ とすると $M \otimes_A K \simeq K^d$ となる (なぜならば, $A/(a_i) \otimes_A K = K/a_iK = 0$ である)．よって, $d = \dim_K(M \otimes_A K)$ となり, d が一意的に定まる．また, このとき $M_{\mathrm{tor}} \simeq A/(a_1) \oplus \cdots \oplus A/(a_r)$ となる．また, $a_1|a_2|\dots|a_r$ と仮定する．$a_1 = p_1^{\alpha_1^{(1)}} \dots p_d^{\alpha_d^{(1)}}$ とする (ただし, $p_i \in S$ が互いに異なり, $\alpha_j^{(1)} \ge 1$)．また, $a_i = p_1^{\alpha_1^{(i)}} \dots p_d^{\alpha_d^{(i)}}$ とおく (ただし $\alpha_j^{(i)} \ge 0$ である)．明らかに, 任意の $j = 1, \dots, d$ に対して

$$\alpha_j^{(r)} \ge \cdots \ge \alpha_j^{(1)} \ge 0$$

である．$M_i = A/(a_i)$ とおくと

$$M_i(p_j) \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} A/(p_j^{\alpha_j^{(i)}})$$

が成り立つ．定理 6.13 より指数 $\alpha_j^{(r)} \leq \cdots \leq \alpha_j^{(1)}$ が一意的に定まる．したがって，イデアル $(a_1), \ldots, (a_r)$ が一意的に定まる．

定理 6.16. M を階数 n の自由加群とし，$N \subset M$ を階数 $r \leq n$ の部分加群とする．このとき，以下の条件を満たす M の基底 $(x_1, \ldots, x_n)$ 及び $a_1, \ldots, a_r \in A - \{0\}$ が存在する．

- $a_1|a_2|\ldots|a_r$ が成り立つ．
- $a_1x_1, \ldots, a_rx_r$ が N の基底である．

さらに，単項イデアル $(a_1), \ldots, (a_r)$ は一意的に定まる (つまり，それらは $x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r$ の取り方に依らない)．

証明

- 一意性を示す：上記の条件を満たす M の基底 $(x_1, \ldots, x_n)$ 及び $a_1, \ldots, a_r \in A - \{0\}$ をとる．このとき，
$$M/N \simeq A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r) \times A^{n-r}$$
となる．よって，イデアル $(a_1), \ldots, (a_r)$ が一意的に定まる．
- 存在性を示す：$N \subset M$ が与えられているとする．$N \neq 0$ を仮定すれば良い．以下の集会を考える．
$$X_N = \{\lambda(N) \mid \lambda\colon M \to A,\ A \text{ 線形写像}\}.$$
$(0) \in X_N$ より，$X_N \neq \emptyset$ である．ここで，$\lambda(N)$ は A の部分加群であり，すなわち A のイデアルである．PID がネーター環であるので，X_N は極大元 $\lambda_1(N)$ を持つ．$\lambda_1(N) = (a_1)$ となる a_1 をとる．まず，$a_1 \neq 0$ を示す．$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ を M の基底とし，$z \in N$ を 0 でない元とする．基底 $\mathcal{B}$ で定まる e_i への射影を p_i とおく．$z = z_1e_1 + \cdots + z_ne_n$ $(z_i \in A)$ と表す．z_i のいずれかが 0 でないので，$p_i(z) \neq 0$ を満たす $1 \leq i \leq n$ が存在する．よって，$a_1 \neq 0$ が成り立つ．
$a_1 = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n$ $(t_i \in A)$ と表す．また，$\lambda_1(x_1) = a_1$ を満たす $x_1 \in N$ が存在する．このとき，$(a_1) = (t_1, \ldots, t_n)$ であることを示す．明らかに，$\lambda_1(x_1) = \sum_{i=1}^n t_i\lambda_1(e_i) \in (t_1, \ldots, t_n)$ より，$(a_1) \subset (t_1, \ldots, t_n)$ である．また，$(t_1, \ldots, t_n) = (u)$, $u = \gcd(t_1, \ldots, t_n)$ と書ける．よって，$u = s_1t_1 + \cdots + s_nt_n = u$ となる $s_1, \ldots, s_n$ がとれる．$\lambda' = s_1p_1 + \cdots + s_np_n$ とおくと，$\lambda'(x_1) = u$ となる．$\lambda_1(M)$ の最大性より $(a_1) = (u)$ が成り立つ．ゆえに，$x_1 = a_1y_1$ となる $y_1 \in M$ が存在する．とくに $\lambda_1(y_1) = 1$ である．
$$M = Ay_1 \oplus \mathrm{Ker}(\lambda_1)$$
が成り立つ．なぜならば，明らかに $Ay_1 \cap \mathrm{Ker}(\lambda_1) = 0$ であり，さらに $x \in M$ に対して $x - \lambda(x)y_1 \in \mathrm{Ker}(\lambda_1)$ である)．$M' := \mathrm{Ker}(\lambda_1)$ とおく．同様に $N = Ax_1 \oplus (M' \cap N)$ を示す．$x \in N$ とし，$x = ae_1 + z$ $(a \in A,\ z \in \mathrm{Ker}(\lambda_1))$ と書く．このとき，$a \in (a_1)$ を示せば十分である．$(a, a_1) = (h)$ となる h をとり，$h = ua + va_1$ $(u, v \in A)$ と表す．よって，$ux + vx_1 = he_1 + z'$, $z' \in \mathrm{Ker}(\lambda_1)$．よって，$\lambda_1(ux + vx_1) = h$ となる．$(a_1) \subset (h)$ だから，(a_1) の最大性より $(a, a_1) = (a_1)$，すなわち $a \in (a_1)$ である．以上より $N = Ax_1 \oplus (M' \cap N)$ である．
任意の A 線形写像 $\lambda\colon M \to A$ に対して $\lambda(M') \subset (a_1)$ が成り立つことを示す．なぜならば，$\lambda(M') = (a')$ とし，$(a', a_1) = (c)$ となる $c \in A$ をとる．また，$c = ua_1 + va'$ $(u, v \in A)$ と表し，$\lambda(x') = c$ を満たす x を考える．よって
$$(u\lambda_1 \oplus v\lambda|_{M'})(x_1 + x') = ua_1 + va' = c$$

である. (a_1) の最大性より, $(a_1)=(c)=(a_1,a')$ が成り立つ. ゆえに, $\lambda(M')\subset(a_1)$ である.
帰納法により, M' の基底 $(x_2,\dots,x_n)$ 及び $a_2,\dots,a_r\in A-\{0\}$ が存在し, 以下が成り立つ.

- $a_2|\dots|a_r$ が成り立つ.
- $a_2x_2,\dots,a_{r-1}x_{r-1}$ が N の基底である.

よって, $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が M の基底である. $q_2\colon M\to Ax_2$ をこの基底で定まる Ax_2 への射影とする. 以上より $a_2\in q_2(M)\subset(a_1)$ であり, すなわち $a_1|a_2$ が成り立つ. ゆえに基底 $(x_1,\dots,x_n)$ は望まれた条件を満たす.

6.6 線形代数学への応用

6.6.1 同伴行列

K を可換体とする. $P(X)$ を K 上の次数 n のモニックな多項式とし,

$$P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_1X+a_0$$

とする. このとき, P の同伴行列とは, 以下の行列のことをいう.

$$C(P):=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&-a_0\\1&0&\dots&0&-a_1\\0&1&\dots&0&-a_2\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}$$

行列 A の固有多項式を χ_A とおく.

補題 6.17. $\chi_{C(P)}=P$ である.

証明

帰納法によって示す.

$$\begin{aligned}\chi_{C(P)}=\begin{vmatrix}X&0&\dots&0&a_0\\-1&X&\dots&0&a_1\\0&-1&\dots&0&a_2\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0&-1&X+a_{n-1}\end{vmatrix}&=X\begin{vmatrix}X&&&a_1\\-1&\ddots&&a_2\\&\ddots&\ddots&\vdots\\&&-1&X+a_{n-1}\end{vmatrix}+(-1)^n\begin{vmatrix}-1&X&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&X\\&&&-1\end{vmatrix}\\&=X(X^{n-1}+a_{n-1}X^{n-2}+\dots+a_2X+a_1)+a_0\\&=P.\end{aligned}$$

6.6.2 有理標準形

V を K 上 n 次元ベクトル空間とし, $f\colon V\to V$ を自己準同型写像とする. $P\in K[X]$, $v\in V$ に対して,

$$Pv:=P(f)v$$

とおくことで V を $K[X]$ 加群とみなす. V が有限次元ベクトル空間なので, $V=V_{\mathrm{tor}}$ である $(\dim_K(K[X])=+\infty)$. $K[X]$ が PID だから, $K[X]$ 加群 V を

$$V\simeq\frac{K[X]}{(P_1)}\oplus\dots\oplus\frac{K[X]}{(P_r)}$$

と分解できる. 但し, $P_1|P_2|\dots|P_r$ が成り立つ. さらに, $P_1,\dots,P_r$ がモニックな多項式であることを仮定するば, $P_1,\dots,P_r$ は一意的に定まる. ゆえに, f に関して閉じれている部分空間 $W_1,\dots,W_r$ があり, $V=W_1\oplus\dots\oplus W_r$

と分解される．さらに, $K[X]$ 加群としては $W_i \simeq \frac{K[X]}{(P_i)}$ である．$1, X, \dots, X^{m_i-1}$ は $\frac{K[X]}{(P_i)}$ の基底である．上の同型によりこの基底に対応する W_i の基底を $\mathcal{B}_i$ とおく．$\mathcal{B}_i$ に関する $f|_{W_i}$ の表現行列は明らかに同伴行列 $C(P_i)$ である．以上より, 以下の定理が分かる．

定理 6.18. $A \in M(n, K)$ を n 次平方行列とする．$P_1|\dots|P_r$ を満たすモニックな多項式 $P_1, \dots, P_r$ が存在し, A が以下の行列と相似である．

$$C(P_1, \dots, P_r) := \begin{pmatrix} C(P_1) & & & \\ & C(P_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

また, $P_1, \dots, P_r$ が一意的に定まる．

証明

$P_1, \dots, P_r$ の存在は上記の議論から分かる．A が $C(P_1, \dots, P_r)$ と相似ならば, $K[X]$ 加群として $V \simeq \frac{K[X]}{(P_1)} \oplus \dots \oplus \frac{K[X]}{(P_r)}$. 定理 6.15 より, $P_1, \dots, P_r$ が一意的に定まる．

定義 6.19. 行列 A が与えられているとき, $C(P_1, \dots, P_r)$ の形の行列で, A と相似であるものを A の有理標準形という．同様に, 有限次元のベクトル空間の自己準同型の有理標準形を定義する．上記の定理より, 有理標準形が一意的に存在する．

系 6.20. $A, B \in M(n, K)$ とする．A と B が相似になるためには, それぞれの有理標準形が一致することは必要十分である．

証明

明らかである．

命題 6.21. L/K を体拡大とし, $A, B \in M(n, K)$ とする．A, B が $M(n, L)$ の行列として相似ならば, $M(n, K)$ においても相似である．

証明

有理標準形の一意性より, A, B を $M(n, L)$ の行列として考えても, それらの有理標準形は変わらない．ゆえに, A, B が $M(n, L)$ において相似ならば, A, B の有理標準形が一致する．したがって, $M(n, K)$ の行列としても相似である．

6.6.3 巡回加群とベクトル空間

V を n 次元のベクトル空間とし, $f\colon V \to V$ を自己準同型とする．$V \simeq \frac{K[X]}{(P)}$ (但し, P：モニックな多項式) のとき, f の有理標準形 $C(P)$ である．逆に, ある基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に関して, f の表現行列が $C(P)$ であるならば, 写像 $e_i \mapsto X^{i-1}$ が同型 $V \simeq \frac{K[X]}{(P)}$ を誘導し, すなわち V が巡回加群である．

f の固有多項式と最小多項式をそれぞれ χ_f と M_f とおく．同様に, 行列 $A \in M(n, K)$ の固有多項式と最小多項式をそれぞれ χ_A と M_A とおく．

補題 6.22. $A \in M(n, K)$ とし, $C(P_1, \dots, P_r)$ を A の有理標準形とする．但し, $P_1, \dots, P_r$ はモニックな多項式であり, $P_1|\dots|P_r$ である．このとき, 以下が成り立つ．

$$\chi_A = P_1 \dots P_r \tag{6.1}$$
$$M_A = P_r. \tag{6.2}$$

証明

$\chi_{C(P_i)} = P_i$ から $\chi_A = P_1 \dots P_r$ が分かる．下段を示す前に，まず $r = 1$ の場合を考える．このとき，$V \simeq \frac{k[X]}{(P_1)}$ である．f の最小多項式は $K[X]$ 加群の零化イデアル $\mathrm{Ann}(V)$ のモニックな生成元にほかならない．ゆえに，f の最小多項式は明らかに P_1 である．
最後に，$C(P_1, \dots, P_r)$ の場合を考える．明らかに，$P_r(A) = 0$ である．また，$C(P_r)$ の最小多項式は P_r であるので，P_r は A の最小多項式になる．

定義 6.23. f の中心化とは，$g \circ f = f \circ g$ を満たす自己準同型 $g \colon V \to V$ 全体の集合のことをいう．f の中心化を $\mathrm{Com}(f)$ と表す．

明らかに，$g_1, g_2 \in \mathrm{Com}(f)$，$\lambda_1 \in K$ ならば，$\lambda_1 g_1 \in \mathrm{Com}(f)$，$g_1 + g_2 \in \mathrm{Com}(f)$，$g_1 g_2 \in \mathrm{Com}(f)$ が成り立つ．ゆえに，$\mathrm{Com}(f)$ は $\mathrm{End}_K(V)$ の K 部分代数である．f で生成される部分代数を $k[f]$ とおく．つまり，

$$k[f] = \{P(f) \ \mid \ P \in k[X]\}$$

とおく．明らかに，$k[f] \subset \mathrm{Com}(f)$ が成り立つ．

命題 6.24. 以下が同値である
(i) V が $K[X]$ 巡回加群である．
(ii) f の有理標準形は $C(P)$ である．ただし，P は次数 n のモニックな多項式である．
(iii) $M_f = \chi_f$ が成り立つ．
(iv) $x \in V$ が存在し，$(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ が V の基底をなす．
(v) $\mathrm{Com}(f) = k[f]$ である．

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) は既に証明している．また，(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) は補題 6.22 からただちに分かる．基底 $(e_1, \dots, e_n)$ に関する f の表現行列が $C(P)$ ならば，$e_i = f^{i-1}(e_1)$ であるので，(iv) が成り立つ．逆に，(iv) が成り立つときに，$K[X]$ 加群 V は明らかに x で生成される．ゆえに V が巡回加群である．次に，(iv) $\Longrightarrow$ (v) を示す：$(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ が V の基底，$f \circ g = g \circ f$ とする ($g \in \mathrm{End}_K(V)$)．また，$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x)$ と表す．よって，$Q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$ とおくと $g(x) = Q(f)(x)$ である．ゆえに，$g(f^i(x)) = f^i(g(x)) = f^i(Q(f)(x)) = Q(f^i(x))$ となる．仮定より，$g = Q(f)$ となる．ゆえに，$\mathrm{Com}(f) = k[f]$ が成り立つ．最後に，行列 $A = C(P_1, \dots, P_r)$ を考える (但し，$P_1 | \dots | P_r$ である)．$r \geq 2$ のとき，ブロック体格行列 $B = \mathrm{diag}(C(P_1), 0, \dots, 0)$ は明らかに $\mathrm{Com}(A)$ に属する．しかし，$B = Q(A)$ ならば，$0 = Q(P_r)$ となる．P_r の最小多項式が P_r だから，$P_r | Q$ となる．よって，第一ブロックは $Q(P_1) = 0 = C(P_1)$ となり，矛盾する．したがって，$B \notin k[A]$ である．以上より，主張が従う．

L/K が体拡大ならば，L ベクトル空間 $V \otimes_K L$ を V_L とおく．また，$f \otimes_L \mathrm{id}_L \colon V_L \to V_L$ を単に f_L と表す．

命題 6.25. $K \subset L$ を体拡大とする．
(1) f の最小多項式と $f_L \colon V_L \to V_L$ の最小多項式とが一致する．
(2) (V, f) が $K[X]$ 巡回加群 $\Longleftrightarrow$ (V_L, f_L) が $L[X]$ 巡回加群である．

証明

(1) を示す：有理標準形は拡大体に依らないことは明らかである．よって，補題 6.22 より最小多項式も同様である．　(2) を示す：χ_f 及び M_f が拡大体に依らないので，条件 $\chi_f = M_f$ の成立も拡大体に依存しない．主張が従う．

7　準素分解

7.1　準素イデアル

7.1.1　定義と一例

定義 7.1. $\mathfrak{q}$ を A のイデアルとする．$\mathfrak{q}$ が準素であるとは, 任意の $x,y\in A$ に対して, 以下が成り立つことをいう．

$$xy\in\mathfrak{q}\quad\Longrightarrow\quad x\in\mathfrak{q}\text{ または }y\in\sqrt{\mathfrak{q}}$$

明らかに, 素イデアルは準素イデアルである．$\mathfrak{q}$ が準素イデアルであるためには, 可換環 $A/\mathfrak{q}$ の任意の零因子が冪零元であることは必要十分である．

補題 7.2. $\varphi\colon A\to B$ を可換環の準同型とし, $\mathfrak{P}$ を B の素イデアルとする．$\mathfrak{p}=\varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ とおく．任意の $\mathfrak{P}$ 準素イデアル $\mathfrak{Q}$ に対し, $\mathfrak{q}=\varphi^{-1}(\mathfrak{Q})$ は $\mathfrak{p}$ 準素イデアルである．

証明

準同型定理より単射準同型 $A/\mathfrak{q}\to B/\mathfrak{q}$ が存在する．$\mathfrak{q}$ が準素だから, $B/\mathfrak{q}$ の任意の零因子は冪零元である．よって, $A/\mathfrak{p}$ の任意の零因子は冪零元である．また, $x\in\mathfrak{p}$ なら, $\varphi(x)\in\mathfrak{P}$ であり, ゆえに $\varphi(x)^m\in\mathfrak{Q}$ となる $m\geq 1$ が存在する．よって, $x^m\in\varphi^{-1}(\mathfrak{Q})=\mathfrak{q}$ である．したがって, $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}$ である．

補題 7.3. $\mathfrak{q}$ を準素イデアルとする．このとき, $\sqrt{\mathfrak{q}}$ は素イデアルである．

証明

$\mathfrak{p}=\sqrt{\mathfrak{q}}$ とおき, $xy\in\mathfrak{p}$ $(x,y\in A)$ とする．$y\notin\mathfrak{p}$ ならば, $x\in\mathfrak{q}$ が成り立つ．とくに $x\in\mathfrak{p}$ となる．よって, $\mathfrak{p}$ は素イデアルである．

$\mathfrak{q}$ が準素イデアルで, $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}$ のとき, $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ 準素イデアルという．

命題 7.4. $\mathfrak{q}$ をイデアルとする．$\sqrt{\mathfrak{q}}$ が極大イデアルならば, $\mathfrak{q}$ は準素イデアルである．

証明

$\mathfrak{m}=\sqrt{\mathfrak{q}}$ とおく．$xy\in\mathfrak{q}$ $(x,y\in A)$ とする．$x\notin\mathfrak{m}$ ならば, $\mathfrak{m}+Ax=A$ となるので, $1=m+ax$ $(m\in\mathfrak{m},\ a\in A)$ と書ける．よって, $y=my+axy\in\mathfrak{q}$ である．ゆえに, $\mathfrak{q}$ は準素イデアルである．

例 7.5.

- $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする．$\sqrt{\mathfrak{m}^n}=\mathfrak{m}$ だから, $\mathfrak{m}^n$ $(n\geq 1)$ は準素イデアルである．
- $\mathbb{Z}$ の準素イデアルは (p^n) である (但し, p は素数である)．
- $A=\frac{k[X,Y,Z]}{(XY-Z^2)}$ とし, $\mathfrak{p}$ を X,Z の剰余類で生成されるイデアルとする．$A/\mathfrak{p}\simeq k[Y]$ より $\mathfrak{p}$ は素イデアルである．$\mathfrak{q}=\mathfrak{p}^2$ とおくと, $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}$ である．

$$A/\mathfrak{q}\simeq\frac{k[X,Y,Z]}{(XY-Z^2,X^2,XZ,Z^2)}=\frac{k[X,Y,Z]}{(XY,X^2,XZ,Z^2)}$$

よって, $A/\mathfrak{q}$ においては $XY=0$, $X\neq 0$ であるが, Y は冪零元でない．ゆえに, $\mathfrak{q}$ は準素イデアルでない．

補題 7.6. $\mathfrak{p}$ を素イデアルとし, $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n$ を $\mathfrak{p}$ 準素イデアルとする．このとき, $\mathfrak{q}:=\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{p}$ 準素イデアルである．

証明

まず, $\sqrt{\mathfrak{q}} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$. また, $xy \in \mathfrak{q}$ かつ $y \notin \mathfrak{p}$ とする. $\mathfrak{q}_i$ が $\mathfrak{p}$ 準素だから, $x \in \mathfrak{q}_i$ となる. よって, $x \in \mathfrak{q}$ となる.

7.1.2 イデアルに属する素イデアル

イデアル I の準素分解とは, 以下のように I を有限個の準素イデアルの共通部分として表したものをいう.

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$$

上記のような準素分解が与えられているとする. まず, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ ならば, 補題 7.6 より $\mathfrak{q}_i \cap \mathfrak{q}_j$ は準素イデアルである. よって, その根基により準素イデアル $\mathfrak{q}_i$ を整理すれば, $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ の根基が互いに異なるような準素分解が得られる. また, ある j に対し $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_j$ が成り立つならば, $I = \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i$ である. つまり, $\mathfrak{q}_j$ は余分なイデアルである. 以上の考察より, 準素分解が存在するとき, 以下の条件を満たす準素分解も存在する.

(1) 素イデアル $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が互いに異なる.

(2) 余分なイデアルがない. つまり, 任意の i に対し $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i \subsetneq \mathfrak{q}_j$ である.

定義 7.7. I を A のイデアルとする.

(a) I が準素分解をもつとき, I を分解可能という.

(b) 上記の条件 (1),(2) を満たす準素分解を最短準素分解という.

イデアル I, 元 $x \in A$ に対して,

$$(I : x) = \{y \in A \mid xy \in I\}$$

とおく. 明らかに, $I \subset (I : x)$ である. また, $x \in I$ ならば $(I : x) = A$ である.

補題 7.8. $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ 準素イデアルとし, $x \in A$ とする.

- $x \in \mathfrak{q}$ ならば, $(\mathfrak{q} : x) = A$ である.
- $x \notin \mathfrak{q}$ ならば, $(\mathfrak{q} : x)$ は $\mathfrak{p}$ 準素イデアルである.
- $x \notin \mathfrak{p}$ ならば, $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{p}$ である.

証明

$x \in \mathfrak{q} \Rightarrow (\mathfrak{q} : x) = A$ は明らかである. 次に, $x \notin \mathfrak{q}$ とする. $\mathfrak{q} \subset (\mathfrak{q} : x)$ より, $\mathfrak{p} \subset \sqrt{(\mathfrak{q} : x)}$ である. また, $xy \in \mathfrak{q}$ ならば, $x \notin \mathfrak{q}$ より $y \in \mathfrak{p}$ である. ゆえに $(\mathfrak{q} : x) \subset \mathfrak{p}$ であり, $\sqrt{(\mathfrak{q} : x)} = \mathfrak{p}$ である. また, $uv \in (\mathfrak{q} : x)$ とし, $u \notin \mathfrak{p}$ とする. $uvx \in \mathfrak{q}$ より, $vx \in \mathfrak{q}$ である. よって, $v \in (\mathfrak{q} : x)$ が成り立つ. したがって, $(\mathfrak{q} : x)$ は $\mathfrak{p}$ 準素イデアルである.

定理 7.9. I をイデアルとし, $I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ を最短準素分解とする. $\mathfrak{q}_i$ の根基を $\mathfrak{p}_i$ とおく. このとき,

$$\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} = \left\{ \text{素イデアル } \mathfrak{p} \;\middle|\; \mathfrak{p} = \sqrt{(I : x)} \text{ となる } x \in A \text{ が存在する} \right\}$$

特に, 集合 $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ はイデアル I で一意的に定まり, 準素分解の取り方に依らない.

証明

準素分解の最短性より, 任意の j に対し $x \in \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{q}_i$ かつ $x \notin \mathfrak{q}_j$ を満たす x が取れる. よって,

$$(I : x) = \{y \in A \mid\mid yx \in I\} = \{y \in A | yx \in \mathfrak{q}_j\} = (\mathfrak{q}_j : x).$$

補題 7.8 より $(\mathfrak{q}_j : x)$ は $\mathfrak{p}_j$ 準素イデアルである. よって, $\sqrt{(I : x)} = \mathfrak{p}_j$ である. 逆に, $\sqrt{(I : x)} = \mathfrak{p}$ が素イデアルであるとする.

$$(I : x) = \bigcap_{i=1}^n (\mathfrak{q}_i : x) \tag{7.1}$$

となる．ゆえに $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{(\mathfrak{q}_i : x)}$ である．補題 7.8 より $(\mathfrak{q}_i : x)$ は $\mathfrak{p}_i$ 準素イデアルまたは A である．よって, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ となる $\mathfrak{p}_i$ が存在する．

上の定理の証明の (7.1) から以下の系が分かる．

系 7.10. $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ を I の最短分解とする．$x \in A$ に対して,

$$\sqrt{(I : x)} = \bigcap_{\substack{1 \le i \le n \\ x \notin \mathfrak{q}_i}} \mathfrak{p}.$$

定義 7.11. 素イデアル $\mathfrak{p}$ が I に属するとは, $\mathfrak{p}$ が I の準素分解に現れる準素イデアルの根基であるときにいう．イデアル I に属する素イデアル全体の集合を $\mathrm{Ass}(I)$ と書く．

例 7.12. $A = k[X, Y]$ とし, $I = (X^2, XY)$ とする．$\mathfrak{p}_1 = (X)$, $\mathfrak{p}_2 = (X, Y)$ とおく．

$$\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2 = (X) \cap (X^2, XY, Y^2) = (X^2, XY) = I.$$

である．$\mathfrak{p}_2$ が極大イデアルだから, $\mathfrak{p}_2$ は準素イデアルである．よって $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2$ は I の準素分解である．よって, $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ は I に属する全ての素イデアルである．

ここで, $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ であることを注意する．ゆえに, $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$ である．しかし, I は $\mathfrak{p}_1$ 準素イデアルでない (なぜならば, I が準素イデアルであるならば, $I = I$ は I の準素分解になる．$\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}_2$ を満たす準素イデアル $\mathfrak{q}$ がこの分解で現れないので, イデアルに属する素イデアルの一意性に矛盾する)．また,

$$I = (X^2, XY) = (X) \cap (X^2, Y)$$

とも書くことができる．$\mathfrak{q}_2 = (X^2, Y)$ とおくと, $\sqrt{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{p}_2$ より極大イデアルである．ゆえに, $\mathfrak{q}_2$ は $\mathfrak{p}_2$ 準素イデアルである．したがて, 準素分解が一意的であるとは限らない．

7.1.3 孤立素イデアル, 非孤立素イデアル

定義 7.13. I を分解可能イデアルとし, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ を I に属する素イデアル全体とする．
(a) $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ の中の最小元を I に属する孤立素イデアルという．
(b) その他の素イデアルは非孤立素イデアル (あるいは埋め込まれた素因子) という．

例 7.14. 例 7.12 のイデアル $I = (X^2, XY)$ を考える ($A = k[X, Y]$)．$\mathfrak{p}_1 = (X)$, $\mathfrak{p}_2 = (X, Y)$ とおくと, $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2$ である．$\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ だから, $\mathfrak{p}_1$ が I に属する孤立素イデアルであり, $\mathfrak{p}_2$ は非孤立素イデアルである．

イデアル I が与えられているとする．I を含む素イデアル $\mathfrak{p}$ の中で, 最小のものを集めた集合を $\mathrm{Min}(I)$ とおく．

補題 7.15. I を分解可能イデアルとする．以下が成り立つ．

$$\mathrm{Min}(I) = \{I \text{ に属する孤立素イデアル }\}.$$

証明

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$ とする．$I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}$ より $\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ である．特に $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}$ となる．よって, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ となる素イデアル $\mathfrak{p}_i$ が存在する．$I \subset \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ であるので, $\mathfrak{p}$ の最小性より $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ となる．逆に, I に属する $\mathfrak{p}_i$ を孤立素イデアルとし, $I \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在すると仮定する． 同様に根基を取れば $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$ である．よって, $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$ となる素イデアル $\mathfrak{p}_j$ が存在する．$\mathfrak{p}_i$ が孤立素イデアルだから, $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_i$ である．特に $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ となる．したがって, $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Min}(I)$ である．

7.1.4　準素分解と準同型

補題 7.16. $\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とする．J を B の分解可能イデアルとし，$J = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{Q}_i$ とする (ただし，$\mathfrak{Q}_i$ が準素イデアルであるとし，$\mathfrak{P}_i = \sqrt{\mathfrak{Q}_i}$ とおく)．このとき，$I = \varphi^{-1}(J)$ は A の分解可能イデアルである．また，$\mathfrak{q}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{Q}_i)$, $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{P}_i)$ とおくと，以下が成り立つ．

$$I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i, \qquad \sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i.$$

証明

補題　から従う．

I を A のイデアルとする．このとき，

$$I \text{ が分解可能である} \iff (0) \text{ が } A/I \text{ の分解可能イデアルである．}$$

なぜならば，$I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ のとき，$I \subset \mathfrak{q}_i$ であり，さらに $\overline{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}_i/I$ とおくと $\overline{A} = A/I$ において $0 = \bigcap_{i=1}^n \overline{\mathfrak{q}}_i$ が成り立つ．また，$\overline{A}/\overline{\mathfrak{q}} \simeq A/\mathfrak{q}$ より，$\overline{\mathfrak{q}}$ は準素イデアルである．また，自然な射影 $\pi\colon A \to A/I$ を考えて補題 7.16 を使えば逆が分かる．

7.1.5　準素分解と零因子

命題 7.17. I を分解可能イデアルとし，$I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ を最短準素分解とする．$\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ とおく．このとき，

$$\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \{x \in A \mid (I : x) \neq I\}$$

が成り立つ．

可換環 A について，零因子全体の集合を $\mathcal{D}(A)$ と表す．

系 7.18. 0 が分解可能であるとする．このとき，零因子全体の集合は 0 に属する全ての素イデアルの和集合である．つまり，$0 = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ $(\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}_i})$ が最短分解で，以下が成り立つ．

$$\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i = \mathcal{D}(A).$$

証明

[命題 7.17 の証明] 系 7.18 を示せば十分である．なぜならば，$0 = \bigcap_{i=1}^n \overline{\mathfrak{q}_i}$ $(\overline{\mathfrak{q}_i} = \frac{\mathfrak{q}_i}{I})$ は A/I における 0 の準素分解である．系 7.18 より，$\bigcup_{i=1}^n \overline{\mathfrak{p}_i}$ は A/I の零因子全体の集合である．$\pi\colon A \to A/I$ による逆像をとれば，$\bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ は $\pi(x)$ が A/I の零因子であるような元 x 全体の集合となる．$\pi(x)$ が零因子 $\iff (I : x) \neq I$ であるから，主張が従う．

系 7.18 を示す．n に関する帰納法により以下が容易に示せる．

$$x^n \text{ が零因子である} \implies x \text{ が零因子である．}$$

したがって，以下が成り立つ．

$$\mathcal{D}(A) = \bigcup_{x \neq 0} (0 : x) = \bigcup_{x \neq 0} \sqrt{(0 : x)}.$$

系 7.10 より

$$\sqrt{(0 : x)} = \bigcap_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x \notin \mathfrak{q}_i}} \mathfrak{p}_i.$$

$x \neq 0$ より, $x \notin \mathfrak{q}_i$ となる i が存在する. ゆえに, $\sqrt{(0:x)} \subset \mathfrak{p}_i$ である. したがって, $\mathcal{D}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ である. 逆に, 定理より各 $\mathfrak{p}_i = \sqrt{(0:x)}$ となる $x \in A$ が存在する. 明らかに $x \neq 0$ だから, $\mathfrak{p}_i \subset \mathcal{D}(A)$ である. 主張が従う.

7.1.6 準素分解と局所化

補題 7.19. S を積閉集合とし, $\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ 準素イデアルとする.

(1) $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$ ならば, $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$ である.

(2) $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ ならば, $S^{-1}\mathfrak{q}$ は $S^{-1}\mathfrak{p}$ 準素イデアルである.

証明

$S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$ ならば, $s \in S \cap \mathfrak{p}$ が存在する. よって, $s^n \in S \cap \mathfrak{q}$ となり, $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$ である. $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ とする. このとき, $S^{-1}\mathfrak{p}$ は素イデアルである. また, 3.16 より, $\sqrt{S^{-1}\mathfrak{q}} = S^{-1}\mathfrak{p}$ である.

最後に, $S^{-1}\mathfrak{q}$ が準素イデアルであることを示す. $\frac{x}{s}\frac{y}{t} = \frac{x}{u}$ $(x, y \in A,\ s, t, u \in S,\ z \in \mathfrak{q})$ とし, $\frac{y}{t} \notin S^{-1}\mathfrak{p}$ とする. このとき, $s'xy \in \mathfrak{q}$ となる $s' \in S$ が存在する. $s' \notin \mathfrak{p}$ より, $xy \in \mathfrak{q}$ となる. $y \notin \mathfrak{p}$ より, $x \in \mathfrak{q}$ が成り立つ. 主張が従う.

$\mathfrak{q}$ が準素イデアルで, $\sqrt{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset$ が成り立つとき, $\mathfrak{q}$ が飽和イデアルであるので, $\mathfrak{q} = S(\mathfrak{q})$ が成り立つ. したがって, 以下の写像は全単射である.

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset \text{ を満たす準素イデアル}\right\} &\longleftrightarrow \left\{S^{-1}A \text{ の準素イデアル}\right\} && (7.2)\\ \mathfrak{q} &\longmapsto S^{-1}\mathfrak{q} && (7.3)\\ \iota^{-1}(\mathfrak{Q}) &\longleftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{Q} && (7.4)\end{aligned}$$

定理 7.20. I を A の分解可能イデアルとし, $I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ を最短準素分解とする. また, $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ とおく. $1 \leq i \leq m$ のとき $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset$ とし, $m+1 \leq i \leq n$ のとき $S \cap \mathfrak{p}_i \neq \emptyset$ とする. このとき,

$$S^{-1}I = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}\mathfrak{q}_i$$

$$S(I) = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{q}_i$$

また, 上記の分解は両方とも最短準素分解である.

証明

上の考察から従う.

I を A の分解可能イデアルとし, $\Sigma \subset \mathrm{Ass}(I)$ を部分集合とする. Σ が孤立集合であるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \Sigma$ に対して

$$\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(I) \text{ で}, \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p} \implies \mathfrak{p}' \in \Sigma$$

が成り立つことをいう. I の最短準素分解 $I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ が与えられているとき,

$$I(\Sigma) = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \in \Sigma} \mathfrak{q}_i$$

とおく. しかし, 一般には $I(\Sigma)$ が最短準素分解の取り方に依存し, well-defined でない.

定理 7.21. Σ が孤立集合ならば, $I(\Sigma)$ は最短準素分解の取り方に依らない.

証明

積閉集合 $S = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\Sigma} A - \mathfrak{p}$ を考える．$S(I) = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset} \mathfrak{q}_i$ が成り立つ．また, 補題 3.19 より

$$\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset \iff \mathfrak{p}_i \subset \bigcup_{\mathfrak{p}\in\Sigma} \mathfrak{p} \iff \exists \mathfrak{p} \in \Sigma,\ \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p}_i \in \Sigma.$$

したがって, $S(I) = \bigcap_{\mathfrak{p}_i\in\Sigma} \mathfrak{q}_i = I(\Sigma)$ である．とくに, $I(\Sigma)$ は最短分解の取り方に依らない.

とくに, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)$ が孤立素イデアル (つまり $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$) ならば, $\Sigma = \{\mathfrak{p}\}$ は孤立集合である．したがって

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$$

が最短準素分解ならば, $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ が孤立素イデアルであるような準素イデアル $\mathfrak{q}_i$ は上記の分解の取り方に依らない.

定義 7.22. I を分解可能イデアルとし, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$ とする．$\Sigma = \{\mathfrak{p}\}$ のとき, $I(\Sigma)$ を I の $\mathfrak{p}$ 準素成分という.

系 7.23. I を分解可能イデアルとする．$\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$ とし, $S = A - \mathfrak{p}$ とおく．I の $\mathfrak{p}$ 準素成分は $S(I)$ である.

7.1.7 素イデアルの記号的冪乗

$\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとし, $S = A - \mathfrak{p}$ とする．$n \geq 1$ に対して,

$$\mathfrak{p}^{(n)} := S(\mathfrak{p}^n) = \{x \in A \mid \exists s \in A - \mathfrak{p},\ sx \in \mathfrak{p}^n\}$$

とおき, $\mathfrak{p}$ の記号的 n 乗冪という.

補題 7.24. $\mathfrak{p}^{(n)}$ は $\mathfrak{p}$ 準素イデアルである.

証明

$\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^n$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルの冪乗であるので, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 準素イデアルである．よって, $\iota^{-1}(\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}})$ は $\mathfrak{p}$ 準素イデアルである.

命題 7.25. $\mathfrak{p}^n$ が準素分解を持つとする．このとき, $\mathfrak{p}^{(n)}$ は $\mathfrak{p}^n$ の $\mathfrak{p}$ 準素成分である.

証明

系 7.23 から従う.

7.1.8 準素分解の存在

定義 7.26. イデアル I が規約であるとは, 任意のイデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対して

$$I = I_1 \cap I_2 \quad \Longrightarrow \quad I = I_1 \ \text{または}\ I = I_2$$

が成り立つときにいう.

補題 7.27. A をネーター環とする．任意のイデアル I に対し, $I = J_1 \cap \cdots \cap J_m$ となる規約イデアル $J_1, \ldots, J_m$ が存在する.

証明

$I = J_1 \cap \cdots \cap J_m$ (J_i 規約) と表せないイデアル I 全体の集合を X とおく．$X = \emptyset$ を示せば良い．$X \neq \emptyset$ ならば, 極大元 I が存在する．I が規約でないので, $I = I_1 \cap I_2$, $I \neq I_1$, $I \neq I_2$ を満たすイデアル I_1, I_2 が存在する．I の極大性より I_1, $I_2 \notin X$ である．ゆえに, $I_1 = J_1 \cap \cdots \cap J_m$, $I_2 = J'_1 \cap \cdots \cap J'_r$ となる規約イデアル J_i, J'_i が存在する．よって, $I = J_1 \cap \cdots \cap J_m \cap J'_1 \cap \cdots \cap J'_r$ となり, 矛盾する．主張が従う.

補題 7.28. A をネーター環とする．イデアル I が規約ならば, I は準素イデアルである．

証明

I を規約イデアルとする．このとき, A/I の零イデアルは規約である．ゆえに, $I=0$ と仮定して良い．$xy=0$ かつ $y\neq 0$ とする．以下のイデアルの列を考える

$$\mathrm{Ann}(x)\subset\mathrm{Ann}(x^2)\subset\mathrm{Ann}(x^3)\subset\dots$$

A がネーター環だから, $\mathrm{Ann}(x^n)=\mathrm{Ann}(x^{n+1})=\dots$ となる $n\geq 1$ が存在する．よって, $(y)\cap(x^n)=0$ となる (なぜならば, $z\in(y)\cap(x^n)$ とすると $z=ay=bx^n$ $(a,b\in A)$ と書ける．よって $bx^{n+1}=axy=0$ であり, $b\in\mathrm{Ann}(x^{n+1})$ である．ゆえに $b\in\mathrm{Ann}(x^n)$ となり, $z=0$ である)．したがって, $x^n=0$ が成り立つ．以上より, (0) は準素イデアルである．

定理 7.29. A をネーター環とする．このとき, 任意のイデアルは準素分解をもつ．

証明

補題 7.27 と補題 7.28 から従う．

7.2 加群に伴う素イデアル

7.2.1 定義

M を A 加群とする．

$$\mathrm{Ann}(M)=\{a\in A \mid aM=0\}$$

とおき, M の零化イデアルという．明らかに $\mathrm{Ann}(M)$ は A のイデアルである．一方, $x\in M$ に対して, $\mathrm{Ann}(x)=\{a\in A \mid ax=0\}$ とおき, x の零化イデアルという．例えば, I がイデアルならば, $\mathrm{Ann}(A/I)=I$ である．

定義 7.30. $\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする．A が M に伴う素イデアルであるとは, $\mathfrak{p}=\mathrm{Ann}(x)$ となる $x\in M$ が存在するときにいう．M に伴う素イデアル全体の集合を $\mathrm{Ass}(M)$ とおく．

補題 7.31. 素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)\iff$ 単射準同型 $A/\mathfrak{p}\to M$ が存在する．

証明

$x\in M$ で生成される部分加群が $A/\mathrm{Ann}(x)$ であることから分かる．

補題 7.32. $M\neq 0$ とし, 以下の集合を考える．

$$X=\{\mathrm{Ann}(x) \mid x\in M-\{0\}\}.$$

$I\in X$ で, I が X の極大元ならば, I は素イデアルである．

証明

$ab\in I$ $(a,b\in A)$ とし, $b\notin I$ とする．$I=\mathrm{Ann}(x)$ となる $x\in M$ が存在する．$abx=0$ かつ $bx\neq 0$ が成り立つ．したがって, $(a)+I\subset\mathrm{Ann}(bx)$ である．I の極大性より, $(a)+I=I$ となり, $a\in I$ である．

A がネーター環ならば, 昇鎖条件より上記の集合 X は極大元をもつ．ゆえに, $\mathrm{Ann}(x)=\mathfrak{p}$ $(x\in M-\{0\})$ という形の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在する．特に, $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ である．このことから, 以下の命題が示せた．

命題 7.33. A をネーター環とし, $M\neq 0$ を A 加群とする．このとき, $\mathrm{Ass}(M)$ は空集合でない．

7.2.2 イデアルに属する素イデアルとの関係

分解可能イデアル I に対して, 定義 7.11 の意味で I に属するイデアルの集合をここで $\mathrm{Ass}'(I)$ と表すことにする.

命題 7.34. A がネーター環ならば, 定義 7.11 の意味で I に属するイデアルの集合は, A 加群 A/I に伴う素イデアル全体の集合に一致する. つまり,

$$\mathrm{Ass}'(I) = \mathrm{Ass}(A/I)$$

が成り立つ.

証明

A がネーター環だから, I は準素分解をもつ. 任意の $x \in A$ に対して, $x + I \in A/I$ の零化イデアルは $\mathrm{Ann}(x + I) = \{a \in A \mid ax \in I\} = (I : x)$ である. よって, $\mathrm{Ass}(A/I) \subset \mathrm{Ass}'(I)$ である.
逆に, $\mathrm{Ass}'(I) \subset \mathrm{Ass}(A/I)$ を示す. まず I が準素イデアルである場合を考える. $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ とおくと $\mathrm{Ass}'(I) = \{\mathfrak{p}\}$ である. $x \in A - \mathfrak{p}$ のとき, $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{p}$ が成り立つ. ゆえに, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/I)$ である. 次に, 一般的なイデアル I を考える. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}'(I)$ とする. $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ を最短準素分解とし, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 = \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ として良い. $J = \bigcap_{i=2}^{n} \mathfrak{q}_i$ とおく. このとき,

$$\frac{J}{I} = \frac{J}{(\mathfrak{q}_1 \cap J)} \simeq \frac{J + \mathfrak{q}_1}{\mathfrak{q}_1} \subset A/\mathfrak{q}_1$$

が成り立つ. ゆえに, $\mathrm{Ass}(J/I) \subset \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{q}_1)$ である. $\mathfrak{q}_1$ が準素イデアルだから, $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{q}_1) = \{\mathfrak{p}_1\}$ である. よって, $\mathrm{Ass}(J/I) \subset \{\mathfrak{p}_1\}$ である. 一方, J/I は 0 でない有限生成加群であるので, $\mathrm{Ass}(J/I)$ は空集合でない. ゆえに, $\mathrm{Ass}(J/I) = \{\mathfrak{p}_1\}$ となる. また, $\mathrm{Ass}(J/I) \subset \mathrm{Ass}(A/I)$ より, $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}(A/I)$ が成り立つ. 以上より, $\mathrm{Ass}'(I) = \mathrm{Ass}(A/I)$ である.

7.2.3 有限生成加群に伴う素イデアル

命題 7.35. A をネーター環とし, M を有限生成加群とする. 素イデアル $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ 及び部分加群の昇鎖

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

が存在し, $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ である.

証明

$M \neq 0$ として良い. 命題 7.33 より, $\mathrm{Ass}(M) \neq 0$ である. $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Ass}(M)$ とする. このとき, 単射準同型 $A/\mathfrak{p}_1 \to M$ が存在する. この準同型の像を M_1 とおく. 同様に, $M_1 \neq M$ ならば, 素イデアル $\mathfrak{p}_2$ 及び単射準同型 $A/\mathfrak{p}_2 \to M/M_1$ が存在する. その像を $\overline{M}_2 \in M/M_1$ とおく. また, M_2 を自然な射影 $M \to M/M_1$ による $\overline{M}_2$ の逆像とする. このとき, $M_2/M_1 \simeq \overline{M}_2 \simeq A/\mathfrak{p}_2$ である. こうして $M_{n-1} \neq M$ 限り, $M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$ ($\mathfrak{p}_i$: 素イデアル) を満たす部分加群の昇鎖

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n$$

が作れる. また, M が有限生成だから, ネーター加群である. ゆえに, $M_n = M$ となる n が存在する.

補題 7.36. M を A 加群とする.

(1) 短間前列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が与えられているとする. このとき, $\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$ である.

(2) $M = M' \oplus M''$ ならば, $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$ である.

(3) 部分加群の昇鎖 $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ が与えられているとする．このとき，$\mathrm{Ass}(M) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1})$ である．

証明

(1) を示す：$\mathrm{Ass}(M') \subset \mathrm{Ass}(M)$ は明らかである．$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M) - \mathrm{Ass}(M')$ とする．このとき，単射準同型 $f\colon A/\mathfrak{p} \to M$ が存在する．0 でない $A/\mathfrak{p}$ の任意の元 $x = a + \mathfrak{p}$ について $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$ である．ゆえに，0 でない任意の元 $x \in \mathrm{Im}(f) \cap M'$ の零化イデアルは $\mathfrak{p}$ である．したがって，$\mathrm{Im}(f) \cap M' = 0$ である．よって，準同型 $A/\mathfrak{p} \to M \to M''$ も単射である．(2) は直ちに (1) から従う．(3) を示す：帰納法によって示す．短完全列 $0 \to M_{n-1} \to M \to M/M_{n-1} \to 0$ を考える．(1) より $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M/M_{n-1}) \cup \mathrm{Ass}(M_1)$ である．帰納法の仮定より $\mathrm{Ass}(M_{n-1}) \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{Ass}(M_i/M_{i-1})$ である．主張が従う．

命題 7.37. A をネーター環とし，M を有限生成 A 加群とする．また，S を積閉集合とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Ass}(S^{-1}M) = \left\{ S^{-1}\mathfrak{p} \;\middle|\; \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M),\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \right\}.$$

証明

$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ann}(M)$ とする．このとき，単射準同型 $A/\mathfrak{p} \to M$ が存在する．ゆえに，$S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \to S^{-1}M$ も単射である．また，$S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \simeq S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}$ だから，$S^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(S^{-1}M)$ となる．

逆に，$\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}(S^{-1}M)$ とする．$\mathfrak{P} = S^{-1}\mathfrak{p}$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ が一意的に存在する．明らかに $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ であるので，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ を示せば良い．単射準同型 $f'\colon S^{-1}(A/\mathfrak{p}) \to S^{-1}M$ が存在する．A がネーター環だから，$A/\mathfrak{p}$ は有限表示加群である．よって，$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}(A/\mathfrak{p}), S^{-1}M) = S^{-1}\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, M)$ である．ゆえに，準同型 $f\colon A/\mathfrak{p} \to M$ 及び $s \in S$ が存在し，$f' = \frac{1}{s}f$ である．$f(x+\mathfrak{p}) = 0$ ならば，$tx \in \mathfrak{p}$ を満たす $t \in S$ が存在する．$t \notin \mathfrak{p}$ より $x \in \mathfrak{p}$．したがった，f は単射である．以上より，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ である．

定理 7.38. A をネーター環とし，$M \neq 0$ を有限生成 A 加群とする．

(1) $\mathrm{Ass}(M)$ は有限集合であり，$\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$ である．

(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ に対して，$\mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}$ である．

(3) $\mathrm{Min}(\mathrm{Ann}(M)) \subset \mathrm{Ass}(M)$ である．

(4) $\mathrm{Ass}(M)$ の孤立素イデアル全体の集合は $\mathrm{Min}(\mathrm{Ann}(M))$ である．

証明

(1) を示す：$M_i/M_{i-1} \simeq A/\mathfrak{p}_i$ $0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ を満たす昇鎖が取れる．$\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ より，$\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ である．また，$M \neq 0$ より，$\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

(2) を示す：$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ ならば，$\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ となる $x \in M$ が存在する．よって，$\mathrm{Ann}(M) \subset \mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$ である．

(3) を示す：$\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\mathrm{Ann}(M))$ とする．命題 7.37 より，$\mathfrak{P} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(M_{\mathfrak{p}})$ を示せば良い．明らかに，$\frac{a}{s} \in \mathrm{Ann}(M_{\mathfrak{p}})$ ($a \in A$, $s \in A - \mathfrak{p}$) とする．このとき，任意の $x \in M$ に対し，$sax = 0$ となる $s \in S$ が存在する．M が有限生成だから，$s'a \in \mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}$ を満たす $s' \in A - \mathfrak{p}$ が存在する．特に，$a \in \mathfrak{p}$ である．よって，$\mathrm{Ann}(M_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{P}$ である．また，$\mathrm{Ann}(M_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ となる素イデアル $\mathfrak{P}'$ を考える．$\iota\colon A \to A_{\mathfrak{p}}$ を自然な写像とする．明らかに，$\mathrm{Ann}(M) \subset \iota^{-1}(\mathrm{Ann}(M_{\mathfrak{p}}))$ である．ゆえに，$\mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ であり，$\mathfrak{p}$ の消極性より $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ である．よって $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ である．したがって，$\mathfrak{P} \in \mathrm{Min}(M_{\mathfrak{p}})$ が成り立つ．したがって，A が局所環であり，$\mathfrak{p}$ がその極大イデアルであることを仮定して良い．(2) より，M に伴う任意の素イデアル $\mathfrak{p}'$ に対して $\mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}'$ である．また，$\mathfrak{p}$ が唯一の極大イデアルだから，$\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ である．したがって，$\mathfrak{p}$ の極小性より，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ となる．ゆえに，$\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}\}$ である．$\mathrm{Ass}(M)$ が空集合でないので，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$．以上より $\mathrm{Min}(\mathrm{Ann}(M)) \subset \mathrm{Ass}(M)$ が成り立つ．

(4) を示す．$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ を $\mathrm{Ass}(M)$ の孤立素イデアルとする (つまり, $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(M)$ で $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$ を満たすものが存在しないとする)．$\mathrm{Ann}(M) \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Min}(\mathrm{Ann}(M))$ が存在する．(3) より, $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(M)$ であるので, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ が成り立つ．したがって, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(\mathrm{Ann}(M))$ である．

M を A 加群とする．$a \in A$ に対して, 準同型

$$f_a \colon M \to M, \quad x \mapsto ax$$

を考える．$\mathrm{Ker}(f_a) \neq 0$ ときに, a を M の零因子という．つまり, a が M の零因子であるとは, $ax = 0$ を満たす $x \neq 0$ が存在することである．M の零因子全体の集合を

$$\mathcal{D}(M) \subset A$$

とおく．

系 7.39. A をネーター環とし, M を有限生成 A 加群とする．以下が成り立つ．

$$\mathcal{D}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

証明

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ のとき, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$ を満たす $x \in M - \{0\}$ が存在するので, $\mathfrak{p} \subset \mathcal{D}(M)$ である．逆に, $a \in \mathcal{D}(M)$ とする．$ax = 0$ を満たす $x \in M - \{0\}$ が取れる．$Ax \simeq A/\mathrm{Ann}(x)$ を考える．$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(Ax)$ とする．$a \in \mathrm{Ann}(Ax) \subset \mathfrak{p}$ である．また, $\mathrm{Ass}(Ax) \subset \mathrm{Ass}(M)$ である．よって, $a \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$ が成り立つ．

7.2.4 加群の準素分解

A をネーター環とし, M を有限生成 A 加群とする．

定義 7.40. 部分加群 $N \subset M$ が $\mathfrak{p}$ 準素であるとは, $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$ であることをいう．

補題 7.41. $N_1, \ldots, N_k \in M$ を $\mathfrak{p}$ 準素部分加群とする．このとき, $N_1 \cap \cdots \cap N_k$ は $\mathfrak{p}$ 準素加群である．

証明

短完全列

$$0 \to \frac{N_1}{N_1 \cap N_2} \to \frac{M}{N_1 \cap N_2} \to \frac{M}{N_1} \to 0$$

より, $\mathrm{Ass}(M/(N_1 \cap N_2)) \subset \{\mathfrak{p}\} \cup \mathrm{Ass}(N_1/(N_1 \cap N_2))$ である．また, $N_1/(N_1 \cap N_2) \simeq \frac{N_1+N_2}{N_2} \subset \frac{M}{N_2}$ より $\mathrm{Ass}(N_1/(N_1 \cap N_2)) \subset \{\mathfrak{p}\}$ である．ゆえに, $\mathrm{Ass}(M/(N_1 \cap N_2)) = \{\mathfrak{p}\}$ である．

$N \subset M$ を部分加群とする．$\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ が素イデアルで, N_i $(i = 1, \ldots, n)$ が M の $\mathfrak{p}_i$ 準素部分加群で,

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$$

と表したものを N の準素分解という．また, 以下の条件を満たすときに, 最短準素分解という．
(1) 素イデアル $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ が互いに異なる．
(2) 余分な部分加群がない．つまり, 任意の $1 \leq j \leq r$ に対し $N \neq \bigcap_{i \neq j} N_i$ である．

定義 7.42. M の部分加群 N が規約であるとは,

$$N = M_1 \cap M_2 \implies N = M_1 \text{ または } N = M_2$$

が成り立つときにいう．

補題 7.43. M の任意の部分加群は有限個の M の規約部分加群の共通部分として表せる． つまり, 任意の部分加群 $N \subset M$ に対し, $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ となる M の規約部分加群 $N_1, \ldots, N_r$ が存在する．

証明

規約イデアル分解の証明と同様である．

命題 7.44. N を M の規約部分加群とする．このとき, N が準素部分加群である．

証明

そうでなければ, 互いに異なる素イデアル $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ 及び単射準同型 $A/\mathfrak{p} \to M/N$, $A/\mathfrak{q} \to M/N$ が存在する．それぞれの像を $\overline{N_1}$, $\overline{N}_2$ とおく．また, 自然な射影 $M \to M/N$ による $\overline{N}_i$ $(i = 1, 2)$ の逆像を N_i とおく．0 とは異なる $A/\mathfrak{p}$ の任意の元の零化イデアルは $\mathfrak{p}$ である．ゆえに, $\overline{N}_1 \cap \overline{N}_2 = 0$ であり, 矛盾する．

以上より, M の任意の部分加群は準素分解をもつ．また, M における部分加群 N の準素分解と, M/N における 0 の準素分解とは一対一で対応している．

定理 7.45. N を部分加群とし, $N = \bigcap_{i=1}^r N_i$ を M における最短準素分解とする．また, $\mathrm{Ann}(M/N_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$ とおく．このとき, $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} = \mathrm{Ass}(M/N)$ である．

証明

準同型 $M \to \frac{M}{N_1} \oplus \cdots \oplus \frac{M}{N_r}$, $x \mapsto (x + N_1, \ldots, x + N_r)$ の核は $N_1 \cap \cdots \cap N_r = N$ であるので, 単射準同型

$$\frac{M}{N} \to \frac{M}{N_1} \oplus \cdots \oplus \frac{M}{N_r}$$

が得られる． よって, $\mathrm{Ass}(M/N) \subset \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ である． 逆に, $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\} \subset \mathrm{Ass}(M/N)$ を示す．$1 \leq j \leq r$ のとき, $N'_j = \bigcap_{i \neq j} N_j$ とおく．よって, $N'_j \cap N_j = N$ である．

$$\frac{N'_j}{N} \simeq \frac{N'_j + N_j}{N_j} \subset \frac{M}{N_j}$$

より, $\mathrm{Ass}(N'_j/N) \subset \mathrm{Ass}(M/N_j) = \{\mathfrak{p}_j\}$ である． $N \neq N'_j$ より, $\mathrm{Ass}(N'_j/N) \neq \emptyset$ である． ゆえに, $\mathrm{Ass}(N'_j/N) = \{\mathfrak{p}_j\}$ である．また, $N'_j/N \subset M/N$ だから, $\mathfrak{p}_j \in \mathrm{Ass}(M/N)$ となる．

8 アルティン環

8.1 構造定理

定義 8.1. A を可換環とする．A の任意の素イデアルが極大イデアルであるとき，A のクルル次元が 0 であるといい，$\dim(A) = 0$ と書く．

例 8.2.

- 可換体のクルル次元は 0 である (その唯一の素イデアルは 0 である).
- K を可換体とし，$A = \frac{K[X]}{(X^n)}$ とおく．A の素イデアルと X^n を含む $K[X]$ の素イデアルとは一対一で対応している．$\mathfrak{p}$ が $K[X]$ の素イデアルで，$X^n \in \mathfrak{p}$ ならば，$X \in \mathfrak{p}$ となる．(X) が極大イデアルだから，$\mathfrak{p} = (X)$ である．ゆえに，A は唯一の素イデアルをもつ．よって，$\dim(A) = 0$ である．

補題 8.3. A をアルティン環とする．A が整域ならば，A が可換体である．

証明

$x \in A - \{0\}$ とし，イデアルの列

$$(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \dots$$

を考える．この降鎖が停止するので，$(x^{n+1}) = (x^n)$ となる $n \geq 1$ が存在する．よって，$x^n = ax^{n+1}(a \in A)$ と書くことができ，A が整域だから $1 = ax$ となる．したがって x が単元である．

系 8.4. アルティン環 A のクルル次元は 0 である．つまり，任意の素イデアルは極大イデアルである．

補題 8.5. A をアルティン環とする．A が有限個の極大イデアルしか持たない．

証明

無限個の極大イデアル $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \dots$ が存在すると仮定する (但し，m_i が互いに異なるとする)．また，$I_n = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$ と定めると，

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

である．よって，$I_n = I_{n+1}$ を満たす $n \geq 1$ が存在する．よって，$\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_n \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_{n+1}$ である．よって，$\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_{n+1}$ を満たす $i \in \{1, \dots, n\}$ が存在する．したがって $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{n+1}$ となり，矛盾する．

命題 8.6. A を局所アルティン環とし，$\mathcal{N} = \sqrt{0}$ を A の冪零根基とする．$\mathcal{N}^n = 0$ を満たす $n \geq 1$ が存在する．

証明

以下の降鎖を考える．

$$\mathcal{N} \supset \mathcal{N}^2 \supset \mathcal{N}^3 \supset \dots$$

降鎖条件より，$\mathcal{N}^n = \mathcal{N}^{n+1} = \dots$ となる $n \geq 1$ が存在する．$I = \mathcal{N}^n$ とおき，$I \neq 0$ を仮定する．また，

$$X = \{J \mid J \text{ がイデアル}, IJ \neq 0\}$$

とおく．$I \neq 0$ より $A \in X$ である．A がアルティン環だから，極小元 $J \in X$ が存在する．ゆえに，$IJ \neq 0$ である．したがった，$Ix \neq 0$ を満たす $x \in J$ が存在する．よって，$(x) \in X$ である．J の極小性より $J = (x)$ である．また，$I = I^2$ より $Ix = I^2x = I(Ix)$ である．ゆえに，$Ix \in J$ である．J の極小性より，$Ix = (x)$ である．したがって，$y \in I$ を用いて $x = xy$ とできる．最後に，$x = xy = xy^2 = \dots$ である．$y \in I$ だから $y^m = 0$ となる $m \geq 1$ が存在する．よって，$x = 0$ であり，矛盾する．以上より，$I = 0$ である．

定理 8.7. A を可換環とする．以下が同値である．

(i) A はアルティン環である．

(ii) A はネーター環であり，かつ $\dim(A) = 0$.

(iii) A は長さの有限の A 加群である．

証明

- (i)$\Longrightarrow$(ii) を示す：系 8.4 より $\dim(A) = 0$ である．A の全ての極大イデアルを $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ と表す (補題 8.5 より有限個の極大イデアルしか存在しない)．ただし，$\mathfrak{m}_i$ が互いに異なるとする．A の根基は $\mathcal{N} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i = \prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$ となる．$\mathcal{N}^n = 0$ となる $n \geq 1$ が存在する．系 4.25 より，A がネーター環である．
- (ii)$\Longrightarrow$(iii) を示す：A の長さが無限であると仮定する．$\ell(A/I) = +\infty$ を満たすイデアル I の中で，極大元 I が存在する．I が素イデアルであることを示す．$a \notin I$, $ab \in I$ とする．極大性とり $\frac{A}{I+(a)}$ の長さは有限である．以下の短完全列を考える．

$$0 \to \frac{A}{(I:a)} \xrightarrow{f} \frac{A}{I} \xrightarrow{g} \frac{A}{I+(a)} \to 0$$

ここで，f は次のように定義される．$f'(x) = ax$ で定まる準同型 $a \to A/I$ を考える．f' の核は $ax \in I$ を満たす $x \in A$ 全体の集合であり，すなわち $\mathrm{Ker}(f') = (I : x)$ である．ゆえに，単射準同型 $\frac{A}{(I:x)} \xrightarrow{f} \frac{A}{I}$ が得られる．g は自然な射影 $\frac{A}{I} \xrightarrow{g} \frac{A}{I+(a)}$ である．上の系列が短完全列であることは容易に確認できる．$\ell(A/I) = +\infty$, $\ell(\frac{A}{I+(a)}) < +\infty$ より，$\ell(\frac{A}{(I:a)}) = +\infty$ である．$I \subset (I : a)$ であるから，I の極大性より $I = (I : a)$ である．$ab \in I$ より $b \in (I : a) = I$ となる．以上より，I は素イデアルである．仮定より，I が極大イデアルである．したがって，A/I は可換体であり，A/I の長さが無限であることに矛盾する．よって，A の長さが有限である．
- (iii)$\Longrightarrow$(i) は命題 4.22 から分かる．

系 8.8. A をネーター環とし，$\mathfrak{m} \subset A$ を極大イデアルとする．このとき $A/\mathfrak{m}^n$ $(n \geq 1)$ はアルティン局所環である．

証明

$A/\mathfrak{m}^n$ はネーター環である．$A/\mathfrak{m}^n$ のイデアルと $\mathfrak{m}^n$ を含む A のイデアルとは一対一で対応している．また，$A/\mathfrak{m}^n$ の素イデアルと $\mathfrak{m}^n$ を含む A の素イデアルとは一対一で対応している．$\mathfrak{p}$ が素イデアルで，$\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p}$ ならば，$\mathfrak{m} \subset \sqrt{\mathfrak{p}}$ となり，ゆえに $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ である．したがって $A/\mathfrak{p}$ が 0 次元の局所環である．定理 8.7 より $A/\mathfrak{m}^n$ はアルティン環である．

定理 8.9. A をアルティン環とする．このとき，アルティン局所環 $A_1, \ldots, A_n$ が存在し

$$A \simeq A_1 \times \cdots \times A_n$$

である．また，上の表し方が一意的である．

証明

$\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ を互いに異なる A の全ての極大イデアルとする．このとき，命題 8.6 より $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^r = 0$ となる $r \geq 1$ が存在する．イデアル $\mathfrak{m}_i^r$ $(1 \leq i \leq n)$ は互いに素である．ゆえに，中国剰余定理より，自然な写像

$$A \to \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{m}_i^r$$

は同型写像である．$A/\mathfrak{m}_i^r$ はアルティン局所環であるので，$A_i = A/\mathfrak{m}_i^r$ とおけば良い．

逆に, A_i がアルティン局所環で, 同型写像 $f\colon A \to A_1 \times \cdots \times A_m$ が与えられているとする. $p_i\colon A_1 \times \cdots \times A_m \to A_i$ を第 i 成分への射影とし, $f_i = p_i \circ f$ とおく. また, $J_i = \mathrm{Ker}(f_i)$ とおく. 任意の k に対し, $x_k \equiv 1 \pmod{J_k}$, $x_k \equiv 0 \pmod{J_i}$ $(i \neq k)$ を満たす $x_k \in A$ が存在する. 特に $(J_k)_k$ は互いに素である. よって, $\prod_{i=1}^m J_i = \bigcap_{i=1}^m J_i = \{0\}$ である. A/J_i がアルティン局所環だから, $\sqrt{J_i}$ は A の極大イデアルである. よって, $\bigcap_{i=1}^m J_i = \{0\}$ は最短準素分解である. また, 全ての $\sqrt{J_i}$ が孤立素イデアルであるので, 定理 7.21 よりイデアル J_i が一意的に定まる.

8.2 有限可換環

補題 8.10. 有限可換環はアルティン環である.

証明

明らかに降鎖条件を満たす.

ゆえに, 定理 8.9 より有限可換環は有限局所環の積で分解できる.

補題 8.11. A を有限局所環とし, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする. このとき,

(1) A の票数 $\mathrm{char}(A)$ が p^m であるような素数 p が存在する.

(2) $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \subset A$ である.

(3) $A/\mathfrak{m}$ は有限体 $\mathbb{F}_{p^d}$ である.

(4) $|A| = p^{dr}$ となる $r \geq 1$ が存在する.

証明

自然な準同型 $f\colon \mathbb{Z} \to A$ を考える. $\mathfrak{m}$ が素イデアルだから, $f^{-1}(\mathfrak{m}) = (p)$ となる素数 p が存在する. よって, $p \in \mathfrak{m}$ である. $\mathfrak{m}^k = 0$ となる $k \geq 1$ が存在するので, $p^k = 0$ である. ゆえに, A の票数は p のベキ p^m である. $\mathrm{Ker}(f) = (p)$ より, 単射 $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to A$ が得られる. 明らかに $A/\mathfrak{m}$ は有限体である. よって, $A/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{F}_{p^d}$ となる自然数 $r \geq 1$ が存在する. 最後に, 降鎖

$$A \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}^k = 0$$

を考える. $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ は $A/\mathfrak{m} = \mathbb{F}_{p^d}$ ベクトル空間であるので, $\left|\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}\right|$ は p^d のベキである. したがって, $|A| = p^{dr}$ となる $r \geq 1$ が存在する.

$|A|$ を A の位数という. $|A| = p$ のとき, $\mathbb{F}_p \subset A$ より $A = \mathbb{F}_p$ である. 以下は, 位数 p^2, p^3 の可換環の分類を考える. $\mathfrak{m}^k = 0$ を満たす最小の自然数 k を $k_{\min}$ とおく. また, $1 \leq n \leq k_{\min}$ に対し,

$$d_n := \dim_{A/\mathfrak{m}}\left(\mathfrak{m}^{n-1}/\mathfrak{m}^n\right)$$

とおく. A が $(d_1, \ldots, d_{k_{\min}})$ 型であるという.

8.2.1 位数 p^2 の局所可換環

命題 8.12. 位数 p^2 の局所環は以下の通りである.

A	$A/\mathfrak{m}$	$\mathrm{char}(A)$	$k_{\min}$	型
$\mathbb{F}_{p^2}$	$\mathbb{F}_{p^2}$	p	1	(1)
$\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(X^2)}$	$\mathbb{F}_p$	p	2	$(1,1)$
$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_p$	p^2	2	$(1,1)$

証明

A を位数 p^2 の局所環とする．$\mathrm{char}(A)=p^2$ ならば, $A\simeq\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ である．$\mathrm{char}(A)=p$ とする．このとき, $\mathbb{F}_p\subset A$ である．$A=\mathbb{F}_p\oplus\mathbb{F}_px$ となる $x\in A$ を考える．x の $\mathbb{F}_p$ 上の最小多項式を $M(X)$ と表す．$M(X)=X^2+aX+b$ $(a,b\in\mathbb{F}_p)$ と書くことができる．また, $A\simeq\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(M(X))}$ である．$M(X)$ が $\mathbb{F}_p$ 内で根をもつとき, $M(X)=(X-\alpha)(X-\beta)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{F}_p)$ となる．$\alpha\neq\beta$ ならば, $(X-\alpha)$ と $(X-\beta)$ が互いに素だから, $A\simeq\mathbb{F}_p\times\mathbb{F}_p$ となる．A が局所環であることに矛盾する．$\alpha=\beta$ ならば, $A\simeq\frac{\mathbb{F}_p[X]}{((X-\alpha)^2)}\simeq\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(X^2)}$ である．$M(X)$ が $\mathbb{F}_p$ 内で根を持たないとき, $\mathbb{F}_p$ 上既約多項式であり, $\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(M(X))}\simeq\mathbb{F}_{p^2}$ となる．

8.2.2 位数 p^3 の局所可換環

p を奇素数とする．$\varphi(x)=x^2$ で定まる準同型写像 $\varphi\colon(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\to(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ を考える．$\mathrm{Ker}(\varphi)=\{\pm1\}$ であるので, 準同型定理より $\mathrm{Im}(\varphi)$ は指数 2 の部分群である．$\epsilon\in\{1,\ldots,p-1\}$ を $\mathrm{Im}(\varphi)$ に属さない元とする．

命題 8.13. p を奇素数とする．位数 p^3 の局所環は以下の通りである．

A	$A/\mathfrak{m}$	$\mathrm{char}(A)$	$k_{\min}$	型
$\mathbb{F}_{p^3}$	$\mathbb{F}_{p^3}$	p	1	(1)
$\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(X^3)}$	$\mathbb{F}_p$	p	3	$(1,1,1)$
$\frac{\mathbb{F}_p[X,Y]}{(X^2,XY,Y^2)}$	$\mathbb{F}_p$	p	2	$(1,2)$
$\frac{(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})[X]}{(pX,X^2)}$	$\mathbb{F}_p$	p^2	2	$(1,2)$
$\frac{(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})[X]}{(pX,X^2-p)}$	$\mathbb{F}_p$	p^2	3	$(1,1,1)$
$\frac{(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})[X]}{(pX,X^2-\epsilon p)}$	$\mathbb{F}_p$	p^2	3	$(1,1,1)$
$\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$	$\mathbb{F}_p$	p^3	3	$(1,1,1)$

また, $p=2$ のとき, 位数 p^3 の可換環の同値類は, $\frac{(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})[X]}{(pX,X^2-\epsilon p)}$ 以外の上記のものである.

証明

A を位数 p^2 の局所環とする. $A/\mathfrak{m}=\mathbb{F}_{p^d}$ とおくと, d が 3 の約数である. よって, $d\in\{1,3\}$ である. $d=3$ のとき, 明らかに $A=\mathbb{F}_{p^3}$ である. $d=1$ とする. $\mathrm{char}(A)=p^3$ のとき, $A=\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ である. $\mathrm{char}(A)=p$ とする. このとき, A が $\mathbb{F}_p$ 代数である. また, $A=\mathbb{F}_p\oplus\mathbb{F}_p x\oplus\mathbb{F}_p y$ を満たす $x,y\in\mathfrak{m}$ が存在する. $k_{\min}=3$ とする. このとき, $\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=1$ である. $x\in\mathfrak{m}-\mathfrak{m}^2$ とする. このとき, $\mathfrak{m}=(x)+\mathfrak{m}^2=(x)+\mathfrak{m}^3=(x)$ より, x は $\mathfrak{m}$ の生成元である. よって, $x^2\neq 0$, $x^3=0$ である. したがって, $A\simeq\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(X^3)}$ である. $k_{\min}=2$ とする. このとき, $x^2=y^2=xy=0$ である. ゆえに, $A\simeq\frac{\mathbb{F}_p[X,Y]}{(X^2,XY,Y^2)}$ である. 最後に, $\mathrm{char}(A)=p^2$ とする. 明らかに, $\mathfrak{m}\cap\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ である. $x\in\mathfrak{m}-p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ とする. このとき, $\mathfrak{m}=(p,x)$ である. よって, $\mathfrak{m}^2=(px,x^2)$ であり, $\mathfrak{m}^3=(x^3)$ である. $k_{\min}=2$ とする. このとき, $px=x^2=0$ であるので, $A\simeq\frac{\mathbb{F}_p[X]}{(X^2,pX)}$ である. $k_{\min}=3$ とする. このとき, $x^2\neq 0$, $x^3=0$ である. また, 上と同様に, $\mathfrak{m}=(x)$, $\mathfrak{m}^2=(x^2)$ である. また, $p^2=0$ より p は $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の生成元でない. よって, $p\in\mathfrak{m}^2$ である. ゆえに, $px=0$ であり, $\mathfrak{m}^2=(p)=p\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ である. ゆえに, $x^2=ap$ となる $a\in\{1,\ldots,p-1\}$ が存在する. a が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ において平方数ならば, $a=b^2$ と書くことができる. $y=xb^{-1}$ とおくと, $y^2=p$, $py=0$ である. ゆえに, $A\simeq\frac{(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})[X]}{(pX,X^2-p)}$ となる. $p=2$ の場合は主張が従う. $p\neq 2$ かつ a が $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ の平方数でないとき, $a=\epsilon b^2$ ($b\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$) と書くことができる. $y=xb^{-1}$ とおくと, $y^2=p\epsilon$, $py=0$ である. ゆえに, $A\simeq\frac{(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})[X]}{(pX,X^2-p\epsilon)}$ となる. 主張が従う.

9 整拡大

9.1 整

定義 9.1. A を環とし, B を A 代数とする. $x \in B$ が A 上整であるとは,

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

を満たす $n \geq 1$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ が存在する.

上記のような多項式をモニック多項式という. ゆえに, A 上整な元とは, A の元を係数とするモニック多項式の根のことをいう. $x \in B$ のとき, x で生成される B の A 部分代数を $A[x]$ とおく. つまり, $A[x] = \{P(x) \mid P \in A[X]\}$ である.

命題 9.2. $x \in B$ とする. 以下が同値である.
(i) x が A 上整である.
(ii) $A[x]$ が有限生成 A 加群である.
(iii) $x \in C$ を満たす有限生成 A 加群である A 部分代数 $C \subset B$ が存在する.

証明

- (1)$\Longrightarrow$ (2) を示す：$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ より, $A[x]$ の任意の元を $b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ と表すことができる. よって, $A[x] = A + Ax + \cdots + Ax^{n-1}$ は有限生成 A 加群である.
- (2)$\Longrightarrow$ (3) を示す：$C = A[x]$ とおけば良い.
- (3)$\Longrightarrow$ (1) を示す：A 加群としての C の生成系 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ をとる. 任意の $i = 1, \ldots m$ に対して,

$$xx_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j$$

となる $a_{i,j} \in A$ が存在する. よって, B 行列として以下が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & x - a_{2,2} & \ldots & -a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & \ldots & x - a_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

上記の次 m 正方行列を A と表す. よって, A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とおくと, $\widetilde{A}A = \det(A)E_m$ が成り立つ. ゆえに, 全ての $i = 1, \ldots, m$ に対して $\det(A)x_i = 0$ である. $\{x_1, \ldots, x_m\}$ が A 加群 C を生成するので, $1 = \sum_{i=1}^{m} d_i x_i$ を満たす $d_1, \ldots, d_m \in A$ が存在する. よって $\det(A) = 0$ が成り立つ. 行列式を展開すれば, $x^m + a'_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a'_1 x + a'_0 = 0$ $(a'_i \in A)$ となる. よって x は A 上整である.

定義 9.3. B を A 代数とする. B の任意の元が A 上整であるとき, 環拡大 B/A が整拡大であるという.

命題 9.4. $A \to B$, $B \to C$ を可換環の準同型写像とする. B/A と C/B が整拡大ならば, C/A も整拡大である.

証明

$x \in X$ とする. C/B が整であるので, $x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0$ を満たす $b_i \in B$ が存在する. B/A が整拡大だから, $A[b_i]$ が有限生成 A 加群である. 自然な写像 $A[b_1] \otimes \cdots \otimes A[b_{n-1}] \to A[b_1, \ldots, b_{n-1}]$ は明らかに全射である. 有限生成加群のテンソル積が有限生成であるので, $B' = A[b_1, \ldots, b_{n-1}]$ も A 上有限生性である. また, x が B' 上整であるので, $B'[x]$ は有限生成 B' 加群である. よって, $B'[x]$ は有限

生成 A 加群である. 以上より, x は A 上整である.

9.2 整閉包

$f\colon A \to B$ を準同型とする.

補題 9.5. $x, y \in B$ が A 上整ならば, $x - y$, xy も A 上整である.

証明

$A[x]$, $A[y]$ が有限生成 A 加群であるので $C = A[x, y]$ も有限生成 A 加群である. $x - y, xy \in C$ であるので, 命題 9.2 より $x + y$, xy が A 上整である.

A 上整な B の元全体の集合を $\overline{A}$ とおく. 補題 9.5 より $\overline{A}$ は B の部分環である. 明らかに, $f(A) \subset B$ の元は A 上整である. $f(A) = \overline{A}$ のとき, A が B において整閉であるという.

定義 9.6. A を整域とし, $\mathrm{Frac}(A)$ を A の商体とする. A が $\mathrm{Frac}(A)$ において整閉であるときに, A を整閉整域という.

補題 9.7. A が UFD ならば, 整閉整域である.

証明

K を A の商体とし, $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(x \in K, a_i \in A)$ とする. $x = \frac{s}{t}$, $s, t \in A$ (ただし, s, t が共通因数を持たない) と表すことができる. よって, $s^n + a_{n-1}ts^{n-1} + \cdots + a_1 t^{n-1}s + a_0 t^n = 0$ が成り立つ. よって, t が s^n の約数である. s, t が共通因数を持たないので t が単元である. よって $x \in A$ となり, A は K において整閉である.

補題 9.8. A を整域とし, S を積閉集合とする. A が整閉ならば, $S^{-1}A$ が整閉である.

証明

A の商体を K とおく. K が $S^{-1}A$ の商体でもあることを注意する. $x \in K$ が $S^{-1}A$ 上整であると仮定し, $x^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{s_1}x + \frac{a_0}{s_0} = 0$ $(x \in K, a_i \in A, s_i \in S)$ とする. $s = s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$ とおくと, sx が A 上整である. よって, $sx \in A$ となり, $x \in S^{-1}A$ である.

以下の命題は,「整閉」という性質が局所・大域原理を満たすことを意味する.

命題 9.9. A を整域とする. A が整閉整域である $\iff$ 全ての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $A_{\mathfrak{p}}$ が整閉整域である $\iff$ 全ての極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $A_{\mathfrak{m}}$ が整閉整域である.

証明

A が整閉ならば, 上の補題より $A_{\mathfrak{p}}$ が整閉である. 逆に, 全ての極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する局所化 $A_{\mathfrak{m}}$ が整閉であるとする. $x \in K$ が A 上整とすると, x は $A_{\mathfrak{m}}$ 上整でもあるので, $x \in \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} = A$ が成り立つ. よって A が整閉である.

9.3 拡大体における整閉包

A を整域とし, A の商体を K とおく. また, L/K を有限次体拡大とする. L を含む K の代数的閉包 $\overline{K}$ を固定する. B を L における A の整閉包とする.

補題 9.10.
(1) B の商体は L である.
(2) L の任意の元を $\frac{x}{y}$ $(x \in B,\, y \in A - \{0\})$ と表すことができる.
(3) B が整閉整域である.

証明

(1) は (2) から従う. (2) を示す. 任意の $x \in L$ が K 上代数的であるので, $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 = 0$ となる $a_i \in K$ が存在する. よって, a_i たちの分母を払えば, $a_i = \frac{b_i}{s}$, $s \in A - \{0\}$, $b_i \in A$ と書ける. よって, sx は A 上整であり, すばわち $sx \in B$.
最後に, (3) を示す. $x \in L$ が B 上整であるとする. B/A が整拡大であるので, x が A 上整であり, すなわち $x \in B$ となる.

$\overline{K}$ を K の代数的閉包とし, $\sigma\colon L \to \overline{K}$ を K 上の埋め込みとする (すなわち, $x \in K$ に対して $\sigma(x) = x$ である).

補題 9.11. x が A 上整ならば, $\sigma(x)$ も A 上整である.

証明

A の元を係数とするモニックな多項式 P が存在し, $P(x) = 0$ である. $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ と書く. $\sigma(a_i) = a_i$ より, $0 = \sigma(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) = \sigma(x)^n + a_{n-1}\sigma(x)^{n-1} + \cdots + a_1\sigma(x) + a_0$ となり, すなわち $\sigma(x)$ が A 上整である.

これから A が整閉整域であるとする. また, L/K を分離拡大とする. K 双線形写像

$$\psi\colon L \times L \to K, \quad (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$$

を考える. ここで, $\mathrm{Tr}\colon L \to K$ はトレース関数である. 拡大 L/K の全ての埋め込みを $\sigma_1, \ldots, \sigma_n\colon L \to \overline{K}$ とおく. このとき, $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x)$ と定める. L/K が分離拡大であるので, ψ が非退化である. 非退化であるとは, 以下が成り立つときにいう：

$$\text{任意の } x \in L \text{ に対して } \mathrm{Tr}_{L/K}(xy) = 0 \text{ ならば, } y = 0 \text{ となる.}$$

なぜならば, 上記が成り立たない場合は, 任意の $x \in L$ に対して $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x) = 0$ となる. これは以下の補題に矛盾する.

補題 9.12. G を群とし, k を体とする. $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ を互いに異なる群準同型 $G \to k^\times$ とする. このとき, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ は k 上線形独立である. つまり $\sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i = 0$ $(a_i \in k)$ ならば, $a_1 = \cdots = a_n = 0$ となる.

証明

n に関する帰納法によって示す. $n \geq 2$ として良い. $\sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i = 0$ $(a_i \in k)$ とする. $z \in G$ とする. 任意の $x \in G$ に対して, $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i(zx) = \sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_i(z)\sigma_i(x)$ である. また, $\sum_{i=1}^{n} a_i\sigma_1(z)\sigma_i(x) = 0$ より,

$$\sum_{i=2}^{n} a_i(\sigma_i(z) - \sigma_1(z))\sigma_i(x) = 0$$

となる. 帰納法の仮定より, 任意の $z \in G$ に対し, $a_i(\sigma_i(z) - \sigma_1(z)) = 0$ である. よって, $a_2 = \cdots = a_n = 0$ となり, ゆえに $a_1 = 0$ も成り立つ.

上の補題より, $\psi\colon (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$ は非退化である. 基底 $(x_1, \ldots, x_n)$ $(n = [L : K])$ に関する ψ の行列を

$$T := (\psi(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$$

と定義する.

$$\psi(x_ix_j) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x_ix_j) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k(x_i)\sigma_k(x_j)$$

である. よって, $U = (\sigma_j(x_i))_{1 \leq i,j \leq n}$ とおくと, $T = U^tU$ と表すことができる. ψ が非退化だから, T の行列式は 0 でない.

補題 9.10 より, B の元からなる L/K の基底 $x_1, \dots, x_n$ が取れる.

定義 9.13. 上のように $U = (\sigma_j(x_i))_{1 \leq i,j \leq n}$, $T = (\mathrm{Tr}_{L/K}(x_ix_j))_{i,j}$ とおく. 基底 $(x_1, \dots, x_n)$ の判別式とは, $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \det(T) = \det(U)^2$ によって定める. のものである.

以上より, 判別式が 0 でないことが分かる. 補題 9.11 より U の全ての成分は A 上整である. ゆえに, T の成分は K の元であり, A 上整である. A が整閉整域だから, T の全ての成分は A に属する. とくに $\Delta(x_1, \dots, x_n) \in A$ である.

補題 9.14. $y \in B$ とし, $y = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ $(a_i \in K)$ とする. $\delta = \Delta(x_1, \dots, x_n)$ とおく. このとき, $a_i \in \delta^{-1}A$ である. つまり, 以下が成り立つ.

$$\delta B \subset Ax_1 + \cdots + Ax_n.$$

証明

$\mathrm{Tr}_{L/K}(yx_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{Tr}_{L/K}(x_ix_j)$ である. $y \in B$ より, $\mathrm{Tr}_{L/K}(yx_j) \in A$ である. よって,

$$T \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in A^n$$

となる. したがって, 両辺に T の余因子行列をかけることで $\delta a_i \in A$ $(i = 1, \dots, n)$ が成り立つ.

命題 9.15. L/K が分離有限次拡大であるとする. また, A がネーター環であると仮定する. このとき, B が有限生成 A 加群である. 特に, B がネーター環である.

証明

$B \subset \delta^{-1}(Ax_1 + \cdots + Ax_n)$ より, B が有限生成 A 加群の部分加群である. A がネーター環だから, B は有限生成 A 加群である. B はネーター A 加群になるので, とくにネーター B 加群であり, すなわちネーター環である.

9.4 ヒルベルトの零点定理

A, B を整域とし, $A \subset B$ とする.

補題 9.16. B が A 上整であるとする. このとき, A が可換体である $\Longleftrightarrow$ B が可換体である.

証明

$A = K$ が可換体とし, $x \in B - \{0\}$ とする. $I = \{f \in K[X] \mid f(x) = 0\}$ とする. 仮定より, $I \neq 0$ である. また, $K[x] \simeq \frac{K[X]}{I}$. よって, I は 0 でない $K[X]$ の素イデアルであり, ゆえに極大イデアルである. したがって $K[x]$ は可換体である.
逆に, B が可換体であるとし, $a \in A - \{0\}$ とする. $ab = 1$ を満たす $b \in B$ が存在する. また, $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1b + a_0 = 0$ を満たす $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ が存在する. よって, $b = -(a_{n-1} + \cdots + a_1a^{n-2} + a_0a^{n-1})$ となり, $b \in A$ となる. よって, A は可換体である.

定理 9.17 (ネーターの正規化補題)**.** k を可換体とし, A を有限生成 k 代数とする．このとき, 以下の条件を満たす元 $t_1, \dots, t_r \in A$ が存在する．
(1) $t_1, \dots, t_r$ は k 上代数的独立である．
(2) A が $k[t_1, \dots, t_r]$ 上整である．

証明

A の生成元の個数に関する帰納法により示す．A が n 個の元 $y_1, \dots, y_n$ で生成されるとする．$\varphi(X_i) = y_i$ で定まる k 代数の準同型
$$\varphi\colon k[X_1, \dots, X_n] \to A$$
を考える．f が単射ならば, $y_1, \dots, y_n$ が代数的独立であるので, $r = n$, $y_i = x_i$ とおけば良い．φ が単射でない場合は, $f \in \mathrm{Ker}(\varphi) - \{0\}$ をとる．f の次数を $\deg(f)$ とおき, $m > \deg(f)$ を満たす自然数 m をとる．また, $Y_i = X_i - X_n^{m^i}$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $Y_n = X_n$ とおく．明らかに $k[Y_1, \dots, Y_n] = k[X_1, \dots, X_n]$ である．また, $g = X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$ ならば,
$$g(X_1, \dots, X_n) = (Y_1 + Y_n^m)^{e_1} \dots (Y_{n-1} + Y_n^{m^{n-1}})^{e_{n-1}} Y_n^{e_n} = Y_n^{e_{n-1}m^{n-1} + \dots + e_1 m + e_n} + h(Y_1, \dots, Y_n)$$
但し, $\deg(h) < e_{n-1}m^{n-1} + \dots + e_1 m + e_n$ である．また, $(e_1, \dots, e_n) \neq (e'_1, \dots, e'_n)$ ならば, $e_{n-1}m^{n-1} + \dots + e_1 m + e_n \neq e'_{n-1}m^{n-1} + \dots + e'_1 m + e'_n$ である (m 進法の表し方の一意性より分かる)．ゆえに,
$$f(X_1, \dots, X_n) = Y_n^r + h'(Y_1, \dots, Y_n), \quad \deg(h') < N$$
を満たす多項式 h' が存在する．$y_i := \varphi(Y_i)$ とおくと, $k[y_1, \dots, y_n] = A$. また, $0 = \varphi(f(X_1, \dots, X_n)) = y_n^r + h'(y_1, \dots, y_n)$ が成り立つ．したがって, A は $k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ 上整である．帰納法の仮定より, 代数的独立な元 $t_1, \dots, t_r \in k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ が存在し, 環拡大 $k[t_1, \dots, t_r] \subset k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ が整拡大である．ゆえに, 拡大 $k[t_1, \dots, t_r] \subset A$ も整であり, 主張が分かる．

多項式環 $k[X_1, \dots, X_n]$ の極大イデアルを調べる．$a_1, \dots, a_n \in k$ のとき, $\mathfrak{m} := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ は $k[X_1, \dots, X_n]$ の極大イデアルである．なぜならば, 写像 $\phi\colon k[X_1, \dots, X_n] \to k$, $g \mapsto g(a_1, \dots, a_n)$ は全射であり, $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathfrak{m}$ である．よって, $\frac{K[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}} \simeq k$ となる．ゆえに $\mathfrak{m}$ は極大イデアルである．一般には, $k[X_1, \dots, X_n]$ の極大イデアルには他の形もある．例えば, (X^2+1) は $\mathbb{R}[X]$ の極大イデアルであり, $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+1)} \simeq \mathbb{C}$ である．

定理 9.18 (ヒルベルトの零点定理)**.** $\mathfrak{m}$ を $k[X_1, \dots, X_n]$ の極大イデアルとする．
(1) $\frac{k[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}}$ は k の有限次拡大である．
(2) k が代数的閉体であるとする．このとき, $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ となる $a_1, \dots, a_n \in k$ が存在する．

証明

(1) を示す：$A = \frac{K[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}}$ とする．定理 9.17 より, 整拡大 $k[t_1, \dots, t_r] \subset A$ が存在する (但し, t_i が代数的独立である)．A が可換体であるので, 補題 9.16 より, $k[t_1, \dots, t_r]$ が可換体となる．よって, $r = 0$ であり, A が k の有限次拡大である．
(2) を示す：k が代数的閉体だから, $\frac{k[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}} = k$ となる．ゆえに, $X_i + \mathfrak{m} = a_i + \mathfrak{m}$ となる $a_i \in k$ が存在する．よって, $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \subset \mathfrak{m}$ である．$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ が極大イデアルであるので, $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ となる．

系 9.19. k を代数的閉体とし, $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ とする．$I := (f_1, \dots, f_r)$ とおき, $A = \frac{k[X_1, \dots, X_n]}{I}$ とおく．また,
$$V := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad i = 1, \dots, r\}$$

と定める．また, $a=(a_1,\dots,a_n)$ に対し, $\mathfrak{m}_a:=(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$ とおく．このとき, 対応 $a\mapsto\mathfrak{m}_a/I$ によって, V の元と A の極大イデアルとが一対一で対応している．

証明

A の極大イデアルは I を含む $k[X_1,\dots,X_n]$ の極大イデアルに一対一で対応している． よって, $I\subset\mathfrak{m}_a\iff a\in V$ を示せば良い． また, $I\subset\mathfrak{m}_a \iff f_i\in\mathfrak{m}_a\ (i=1,\dots,r)$ である．一方, $f_i(X_1,\dots,X_n)\equiv f_i(a_1,\dots,a_n)\pmod{\mathfrak{m}_a}$ であるので, $f_i\in\mathfrak{m}_a \iff f_i(a_1,\dots,a_n)=0$ が成り立つ．主張が従う．

9.5 上昇と下降

$\mathfrak{P}$ が B の素イデアルならば, $\mathfrak{p}:=f^{-1}(\mathfrak{P})$ は A の素イデアルである．$f^{-1}(\mathfrak{P})$ を単に $A\cap\mathfrak{P}$ とも書く．このとき, $\mathfrak{P}$ が「$\mathfrak{p}$ の上にある」といい, $\mathfrak{p}$ が「$\mathfrak{P}$ の下にある」という．

定理 9.20 (下降)**.** $\mathfrak{Q},\mathfrak{P}$ を B の素イデアルとし, 両方とも A の同じ素イデアル $\mathfrak{p}$ の上にあるとする．このとき, $\mathfrak{Q}\subset\mathfrak{P}$ ならば, $\mathfrak{Q}=\mathfrak{P}$ である．

証明

$\overline{A}=A/\mathfrak{p}$, $\overline{B}=B/\mathfrak{Q}$ とおき, f に誘導される準同型写像 $\overline{f}\colon\overline{A}\to\overline{B}$ を考える．明らかに, $\overline{f}$ は整拡大である．$\overline{\mathfrak{P}}=\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$ とおくと, $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}\iff\overline{\mathfrak{P}}=0$ である．ゆえに, A, B が整域で, $\mathfrak{p}=0$, $\mathfrak{Q}=0$ であることを仮定すれば良い．$x\in\mathfrak{P}$ とし, $x\neq 0$ とする．$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ となる $a_i\in A$ が存在する．また, A が整域だから, $a_0\neq 0$ と仮定して良い．ゆえに, $a_0=-(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x)\in\mathfrak{P}\cap A=0$ となり, 矛盾する．以上より, $\mathfrak{P}=0$ が成り立つ．

定理 9.21 (上昇)**.** $\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ を A の素イデアルとし, $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$ とする．また, $\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{p}$ の上にある B の素イデアルとする．このとき, $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{Q}$ を満たす $\mathfrak{q}$ の上にある素イデアル $\mathfrak{Q}$ が存在する．

証明

$\overline{A}=A/\mathfrak{p}$, $\overline{B}=B/\mathfrak{P}$ とおくことで, $\mathfrak{p}=0$, $\mathfrak{P}=0$ であることを仮定すれば良い．また, $S=A-\mathfrak{q}$ とおき, 拡大 $S^{-1}A=A_{\mathfrak{q}}\to S^{-1}B$ を考える．$\mathfrak{q}$

10 クルル次元

10.1 可換環の次元, 素イデアルの高さ

定義 10.1. 互いに異なる A の素イデアルからなる減少列

$$\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$$

を長さ n の降鎖という．上記のような列の中で, 最長のものの長さを $\dim(A) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ と表し, A のクルル次元という．

例 10.2.

- $A = \mathbb{Z}$ とし, p を素数とする．降鎖 $(p) \supset 0$ は最大の長さの素イデアル降鎖である．ゆえに, $\dim(\mathbb{Z}) = 1$ である．同様に, 可換体でない単項イデアル整域 A において, 0 以外の任意の素イデアルは極大イデアルである．ゆえに, $\dim(A) = 1$ である．
- $(X_n)_{n\geq 1}$ を不定元とし, $A = k[(X_n)_{n\geq 1}]$ とする．$\mathfrak{p}_n$ を $(X_k)_{k\geq n}$ で生成されるイデアルとする．このとき, $\mathfrak{p}_n$ 素イデアルであり, $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_2 \supsetneq \ldots$ であるので, $\dim(A) = +\infty$. A がネーター環でないので, その次元が無限であることは驚くべきことでない．しかし, 以下は永田によって与えられた反例である．

定理 10.3 (永田)**.** $R = k[(X_n)_{n\geq 1}]$ とする．$m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$ を満たす増加列 $(m_i)_{i\geq 1}$ を考える．

$$\mathfrak{p}_i = (X_{m_i+1}, \ldots, X_{m_{i+1}})$$

と定義する．$\mathfrak{p}_i$ は R の素イデアルである．よって, $S = R - \bigcup_{i\geq 1} \mathfrak{p}_i$ は積閉集合である．$A = S^{-1}R$ と定める．A はネーター環であり, $\dim(A) = +\infty$ である．とくに, 無限次元のネーター環が存在する．

補題 10.4. $\dim(A) = +\infty$ である

証明

$\mathfrak{p}_i \supsetneq (X_{m_i}, \ldots, X_{m_{i+1}}) \supsetneq \cdots \supsetneq (X_{m_{i+1}}) \supsetneq 0$ である．$S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset$ だから, $S^{-1}\mathfrak{p}_i \supsetneq S^{-1}(X_{m_i}, \ldots, X_{m_{i+1}}) \supsetneq \cdots \supsetneq S^{-1}(X_{m_{i+1}}) \supsetneq 0$ である．ゆえに, $\dim(A) \geq m_{i+1} - m_i$ であり, ゆえに $\dim(A) = +\infty$ が成り立つ．

補題 10.5. I を $R = k[(X_n)_{n\geq 1}]$ のイデアルとする．$I \subset \bigcup_{i\geq 1} \mathfrak{p}_i$ ならば, $I \subset \mathfrak{p}_i$ となる $i \geq 1$ が存在する．

証明

$I \subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{p}_i$ ならば, 主張は補題 3.19 から分かる．よって, 全ての $N \geq 1$ に対し $I \not\subset \bigcup_{i=1}^{N} \mathfrak{p}_i$ であることを仮定して良い．$f \in R - \{0\}$ について,

$$E(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f \in \mathfrak{p}_i\}$$

とおく．$E(f)$ は明らかに有限集合である．$f \in I - \{0\}$ のとき, $I \subset \bigcup_{i\geq 1} \mathfrak{p}_i$ より $E(f) \neq \emptyset$ である．
$E(f)$ が有限だから, $I \not\subset \bigcup_{i\in E(f)} \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_i$ である．ゆえに, $g \in I - \{0\}$ が存在し, $E(f) \cap E(g) = \emptyset$ である．
$j \in E(g)$ とする．f の次数を d とおく．

$$E(f + x_{m_j+1}^{d+1} g) = \emptyset$$

を示す．$D(x_{m_j+1}^{d+1} g) = D(g)$ であるので $k \in E(f) \cup E(g)$ のとき, $f + x_{m_j+1}^{d+1} g \notin \mathfrak{p}_k$ である．$k \notin E(f)$ とする．このとき, f は $\mathfrak{p}_k$ に属さない単項式 M をもつ．$x_{m_j+1}^{d+1} g$ の最低次数の単項式 M' は $\deg(M') > d \geq \deg(M)$ であるから, M は $f + x_{m_j+1}^{d+1} g$ の単項式でもある．ゆえに, $f + x_{m_j+1}^{d+1} g \notin \mathfrak{p}_k$ である．以上より, $E(f + x_{m_j+1}^{d+1} g) = \emptyset$ であり, 矛盾する．主張が従う．

補題 10.6. A を可換環とし, 以下の条件を満たすとする.

(1) 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し, $A_{\mathfrak{m}}$ がネーター環である.

(2) 任意の $a \in A - \{0\}$ に対して, a を含む極大イデアルの数が有限である.

このとき, A がネーター環である.

証明

$I \neq 0$ をイデアルとし, $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ を I を含む全ての極大イデアルとする. $x_0 \in I$ とし, x_0 を含む全ての極大イデアルを $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_{r+s}$ と書く (但し, $\mathfrak{m}_i$ が互いに異なるとする). $\mathfrak{m}_{r+1}, \dots, \mathfrak{m}_{r+s}$ は I を含まないので, 任意の $1 \leq j \leq s$ に対し, $x_j \in I$, $x_j \notin \mathfrak{m}_{r+j}$ を満たす元が存在する. $A_{\mathfrak{m}_i}$ がネーター環だから, $IA_{\mathfrak{m}_i}$ が有限生成である. よって, $x_{s+1}, \dots, x_n \in I$ が存在し, 任意の $1 \leq i \leq r$ に対し $A_{\mathfrak{m}_i}$ におけるそれらの像が $IA_{\mathfrak{m}_i}$ を生成する. $I_0 = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ とおく. $1 \leq i \leq r$ ならば, $I_0 A_{\mathfrak{m}_i} = IA_{\mathfrak{m}_i}$ である. $r+1 \leq j \leq r+s$ ならば, $x_j \notin \mathfrak{m}_{r+j}$ だから $A_{\mathfrak{m}_j} = I_0 A_{\mathfrak{m}_j} = IA_{\mathfrak{m}_j}$ である. また, $x_0 \not\subset \mathfrak{m}$ のとき $A_{\mathfrak{m}} = I_0 A_{\mathfrak{m}} = IA_{\mathfrak{m}}$ である. ゆえに, 任意の極大イデアルに対し, $(I_0)_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}$ が成り立つので, $I_0 = I$ である. 以上より, A はネーター環である.

永田の定理の証明

補題 10.5 より, $\mathfrak{m}_i := S^{-1}\mathfrak{p}_i$ $(i \geq 1)$ は A の全ての極大イデアルである. とくに, 任意の $a \in A - \{0\}$ に対して, a を含む極大イデアル全体の集合は有限である. また,

$$K_i = k(X_1, \dots, X_{m_i - 1}, X_{m_{i+1}}, X_{m_{i+1}+1}, \dots)$$

とおくと, $A_{\mathfrak{m}_i}$ は極大イデアル $(X_{m_i, \dots, X_{m_{i+1}-1}})$ に関する $K_I[X_{m_i, \dots, X_{m_{i+1}-1}}]$ の局所環と同型である. とくに, $A_{\mathfrak{m}_i}$ はネーター環である. 補題 10.6 より, A はネーター環である. また, 補題 10.4 より $\dim(A) = +\infty$ である.

命題 10.7. A, B を整域とし, $\varphi\colon A \to B$ を単射準同型とする. φ が整拡大ならば, $\dim(A) = \dim(B)$ が成り立つ.

証明

$\mathfrak{P}_0 \supsetneq \mathfrak{P}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{P}_n$ を長さ n の B の素イデアルからなる減少列とする. このとき, $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{P}_i)$ とおくと, 定理 9.20 より $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ である. ゆえに, $\dim(A) \geq \dim(B)$ が成り立つ. 逆に, $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n = 0$ を A の素イデアル減少列とする. $\mathfrak{P}_n = 0$ とおくと, φ が単射だから, $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}_n) = \mathfrak{p}_n = 0$ である. 定理 9.21 より, $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{P}_i)$ を満たす B の素イデアル減少列 $\mathfrak{P}_0 \supsetneq \mathfrak{P}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{P}_n$ が存在する. よって, $\dim(B) \geq \dim(A)$ である.

定義 10.8. $\mathfrak{p}$ を素イデアルとする. $\mathfrak{p}$ の高さとは, 減少列 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_m$ の長さ m の上限である.

$\mathfrak{p}$ の高さを $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ で表す. 明らかに, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$ である. 高さ 0 の素イデアルは極小素イデアルである. また, $\dim(A)$ は全ての素イデアルの高さの上限である.

10.2 多項式環の次元

補題 10.9. A を UFD とし, $\mathfrak{p}$ を高さ 1 の素イデアルとする. このとき, $\mathfrak{p}$ は単項イデアルである.

証明

$f \in \mathfrak{p} - \{0\}$ とし, $f = f_1^{e_1} \dots f_n^{e_n}$ を f の素元分解とする. $\mathfrak{p}$ が素イデアルであるので, $f_i \in \mathfrak{p}$ となる素元 f_i が存在する. ゆえに $(f_i) \subset \mathfrak{p}$ である. $\mathfrak{p}$ が高さ 1 の素イデアルだから, $(f) = \mathfrak{p}$ となる.

定理 10.10. $\dim(k[X_1,\dots,X_n]) = n$ である.

証明

$A = k[X_1,\dots,X_n]$ とおく. $\mathfrak{p}_0 = (X_0,\dots,X_n)$, $\mathfrak{p}_i = (X_{n-i},\dots,X_n)$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $\mathfrak{p}_n = 0$ とおくと, 長さ n の素イデアルの減少列 $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ が得られる. よって, $\dim(A) \geq n$ である. 逆に, n に関する帰納法により $\dim(A) \leq n$ を示す. $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_m$ を素イデアルの減少列とする. $\mathfrak{p}_m = 0$ と仮定して良い. また, $\mathfrak{p}_{m-1}$ が高さ 1 の素イデアルであると仮定して良い. よって, $\mathfrak{p}_{m-1} = (f)$ となる既約多項式 f が存在する. $m > \deg(f)$ を満たす自然数 m をとり, $\psi(X_i) = Y_i + Y_n^{m^i}$ $(i = 1,\dots,n-1)$, $\psi(X_n) = Y_n$ で定まる k 代数の準同型

$$\psi\colon k[X_1,\dots,X_n] \to k[Y_1,\dots,Y_n]$$

を考える. 明らかに, ψ は k 代数の同型写像である. $\mathfrak{p}'_i := \psi(\mathfrak{p}_i)$ とおき, $f' := \psi(f)$ とおく. ネーターの正規化補題とよばれる定理 9.17 の証明と同様に, f' は Y_n に関するモニックな多項式である. $A' := \frac{[Y_1,\dots,Y_n]}{(f')}$ とおく. $y_i = Y_i + (f')$ とおくと, $f'(y_1,\dots,y_n) = 0$ である. ゆえに, y_n は $k[y_1,\dots,y_{n-1}]$ 上整である. 故に,

$$\dim\left(\frac{[Y_1,\dots,Y_n]}{(f')}\right) = \dim(k[y_1,\dots,y_{n-1}])$$

明らかに, $y_1,\dots,y_{n-1}$ が代数的独立だから, $k[y_1,\dots,y_{n-1}] \simeq k[Y_1,\dots,Y_{n-1}]$ である. 帰納法の仮定より, $\dim(k[Y_1,\dots,Y_{n-1}]) = n-1$ である. ゆえに, $\dim\left(\frac{[Y_1,\dots,Y_n]}{(f')}\right) = n-1$ である. また, $\overline{\mathfrak{p}}_i := \frac{\mathfrak{p}'_i}{(f')}$ とおくと, $\frac{[Y_1,\dots,Y_n]}{(f')}$ の素イデアルからなる減少列

$$\overline{\mathfrak{p}}_0 \supsetneq \overline{\mathfrak{p}}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \overline{\mathfrak{p}}_{m-1} = 0$$

が得られる. よって, $m-1 \leq n-1$ となり, すなわち $m \leq n$ である. 以上より, $\dim(k[X_1,\dots,X_n]) = n$ が成り立つ.

10.3 クルルの単行イデアル定理, クルルの高度定理

定義 10.11. A を可換環とし, I を A のイデアルとする. I の極小素因子とは, $I \subset \mathfrak{p}$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ の中で極小のものである. つまり, I の極小素因数全体は $\mathrm{Min}(I)$ の素イデアルである.

明らかに, I の極小素因子は A/I の極小素イデアルと一対一で対応している.

定理 10.12 (クルルの単項イデアル定理)**.** A をネーター環とし, I を単行イデアルとする. 任意の I の小素因子 $\mathfrak{p}$ について, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ が成り立つ.

証明

$I = (x)$ とし, $\mathfrak{p}$ を I を含む極小素イデアルとする. $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ を示す. $S = A - \mathfrak{p}$ とする. 明らかに, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ は $\frac{x}{1}$ を含む極小素イデアルである. よって, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \leq 1$ を示せば良い. ゆえに, A が局所環であり, $\mathfrak{p}$ が A の極大イデアルであることを仮定して良い. このとき, $\mathfrak{p}$ の最小性より $\mathfrak{p}$ は x を含む唯一の素イデアルである. 特に, (x) の根基は $\sqrt{(x)} = \mathfrak{p}$ である. ゆえに, $\mathfrak{p}$ が有限生成イデアルなので, $\mathfrak{p}^N \subset (x)$ となる $N \geq 1$ が存在する. よって, 局所環 $\overline{A} := A/(x)$ の極大イデアル $\overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/(x)$ は冪零イデアルである. よって, $\overline{A}$ はクルル次元 0 のネーター環であり, アルティン環である.
今, $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ が素イデアルであるとする. このとき, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 0$ を示せば良い. 積閉集合 $A - \mathfrak{q}$ に関する $\mathfrak{q}$ の記号的冪乗 $\mathfrak{q}^{(n)}$ を考える. 明らかに,

$$\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}^{(2)} \supset \mathfrak{q}^{(3)} \supset \dots$$

また, $\mathfrak{a}_n := \frac{\mathfrak{q}^{(n)}+(x)}{(x)}$ 及び $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{q}+(x)}{(x)}$ とおく. $\mathfrak{a}_n$ は $\overline{A}$ のイデアルであり,

$$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}_2 \supset \mathfrak{a}_3 \supset \dots$$

である. $\overline{A}$ がアルティン環だから, $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \dots$ となる $n \geq 1$ が存在する. よって, $\mathfrak{q}^{(n)} + (x) = \mathfrak{q}^{(n+1)} + (x)$ となる. ゆえに, 任意の $a \in \mathfrak{q}^{(n)}$ に対して, $a = a' + xy$ となる $a' \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$, $y \in A$ が存在する. 特に $xy \in \mathfrak{q}^{(n)}$ であるので, $sxy \in \mathfrak{q}^n$ となる $s \in A - \mathfrak{q}$ が存在する. $x \notin \mathfrak{q}$ より, $y \in \mathfrak{q}^{(n)}$ となる. よって, $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + x\mathfrak{q}^{(n)}$ が成り立つ. 特に, $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)}$ が成り立つ. 中山の補題より $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ である. よって, $\mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1} A_\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}A_\mathfrak{q})(\mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q})$ となる. 局所環 $A_\mathfrak{q}$ と有限生成 $A_\mathfrak{q}$ 加群 $\mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q}$ に中山の補題を適用すれば, $\mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q} = 0$ となる. したがって, $A_\mathfrak{q}$ はアルティン環である. ゆえに, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 0$ である.

定理 10.13 (クルルの高度定理)**.** A をネーター環とし, $I = (a_1, \dots, a_n)$ とする. 任意の I の小素因子 $\mathfrak{p}$ について, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$ が成り立つ.

証明

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$ について $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$ を示す. $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ であるので, A が局所環であり, $\mathfrak{p}$ がその極大イデアルであると仮定して良い. $\mathfrak{p}$ は I を含む唯一の素イデアルである. ゆえに, $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ である.
$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ を満たす素イデアルとし, $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{p}$ となる素イデアル $\mathfrak{q}'$ が存在しないとする. このとき, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq n-1$ を示せば良い. また, $I \not\subset \mathfrak{q}$ より, $x_1 \notin \mathfrak{q}$ と仮定して良い. ゆえに, $\sqrt{(x_1) + \mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ である. よって, $x_i^N = y_i + a_i x_1$ となる $N \geq 1$, $y_i \in \mathfrak{q}$, $a_i \in A$ が存在する. $\overline{A} = \frac{A}{(y_2, \dots, y_n)}$ とおく. $\overline{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{p}}{(y_2, \dots, y_n)}$ は $\overline{x}_1 = x_1 + (y_2, \dots, y_n)$ を含む極小素イデアルである. ゆえに, $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(y_2, \dots, y_n)$ である. 帰納法の仮定より, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq n-1$ である.

10.4 正則局所環

10.4.1 余接空間, 接空間

A をネーター局所環とし, その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とおく. このとき, 明らかに

$$\dim(A) = \mathrm{ht}(\mathfrak{m})$$

が成り立つ.

系 10.14. $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ ならば, $n \geq \dim(A)$ である.

証明

クルルの高度定理より $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \leq n$ である.

$k = A/\mathfrak{m}$ とおく. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は自然に k ベクトル空間である. A がネーター環だから, $\mathfrak{m}$ が有限生成イデアルである. よって, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は有限次元 k ベクトル空間である.

命題 10.15. 以下が成り立つ.

$$\dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) \geq \dim(A)$$

証明

$m = \dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right)$ とおくと, $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_m) + \mathfrak{m}^2$ となる $x_1, \dots, x_m$ が存在する. 中山の補題より, $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_m)$ となり, ゆえに $m \geq \dim(A)$ である.

系 10.16. 局所ネーター環の次元は有限である.

上記の命題の証明より, 以下の関係が分かる.

$$\mathfrak{m} \text{ の生成系の個数の下限} = \dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) \geq \dim(A).$$

定義 10.17. A をネーター局所環とする. 以下の条件が互いに同値である
(i) $\mathfrak{m}$ が $\dim(A)$ 個の元からなる生成系をもつ.
(ii) $\dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) = \dim(A)$ である.
上記の条件を満たすとき, A が正規局所環であるという.

A をネーター環とし, $\mathfrak{p}$ を素イデアルとする. 局所化 $A_{\mathfrak{p}}$ はネーター局所環であり, その極大イデアルは $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ である. また, $k(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ とおく

$$T^*_{\mathfrak{p}}(A) := \frac{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}^2A_{\mathfrak{p}}} = (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_{A/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}).$$

とおき, $\mathfrak{p}$ における A の余接空間という. $T^*_{\mathfrak{p}}(A)$ は有限次元 $k(\mathfrak{p})$ ベクトル空間である. $T^*_{\mathfrak{p}}(A)$ の双対空間 $\mathrm{Hom}_{k(\mathfrak{p})}(T^*_{\mathfrak{p}}(A), k(\mathfrak{p}))$ を $\mathfrak{p}$ における接空間といい, $T_{\mathfrak{p}}(A)$ と表す.

定理 10.18. 正則局所環は UFD である. とくに, 整閉整域である.

10.4.2 大局次元

M を A 加群とする. M の左分解とは, 完全系列

$$\dots \xrightarrow{f_3} N_2 \xrightarrow{f_2} N_1 \xrightarrow{f_1} N_0 \xrightarrow{f_0} N \to 0$$

のことである. 上記の分解を単に $N_\bullet \to M$ で表す.

- 全ての N_i $(i \geq 0)$ が自由加群であるとき, 自由分解という.
- 全ての N_i $(i \geq 0)$ が射影加群であるとき, 射影分解という.
- $0 = N_n = N_{n+1} = \dots$ を満たす $n \geq 0$ が存在するとき, 有限分解という.

命題 10.19. M を A 加群とする. M が自由分解をもつ.

証明

$\{x_i\}_{i\in I_0}$ を M の生成系とする. $f_0(e_i) = x_i$ で定まる準同型 $f_0\colon A^{(I_0)} \to M$ を考える. $\mathrm{Ker}(f_0)$ の生成系 $\{x_i^{(0)}\}_{i\in I_1}$ をとり, $f_1(e_i) = x_i^{(0)}$ で定まる準同型 $f_1\colon A^{(I_1)} \to \mathrm{Ker}(f)$ を考える. このとき, 系列 $A^{(I_1)} \to A^{(I_0)} \to M \to 0$ が完全系列である. こうして続けていくと, 完全系列

$$\cdots \to A^{(I_2)} \xrightarrow{f_2} A^{(I_1)} \xrightarrow{f_1} A^{(I_0)} \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

が得られる.

定義 10.20. M を A 加群とする. M が有限射影分解をもつときに, M の射影次元が有限であるという. 有限射影分解を持たないときに, 射影次元が無限であるという. 射影次元が有限のとき, 有限射影分解

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

の長さ n の下限を M の射影次元といい, $\mathrm{pd}(M)$ と表す.

例 10.21. $A = \mathbb{Z}$ とし, M をアーベル群とする. 自由アーベル群 F_0 及び全射 $f_0\colon F_0 \to M$ が取れる. $F_1 = \mathrm{Ker}(f_0)$ とおく. 定理より, F_0 が自由アーベル群である. よって

$$0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

は有限自由分解である. 特に, M の射影次元が ≤ 1 である. また, $\mathrm{pd}(M) = 0 \iff M$ が射影 $\mathbb{Z}$ 加群である $\iff M$ が自由アーベル群である.

同様に, A が PID ならば, 任意の A 加群の射影次元が ≤ 1 である.

定義 10.22. A を可換環とする. A の大局次元とは, M が全ての A 加群を走るときの $\mathrm{pd}(M)$ の上限のことである. 大局次元を $\mathrm{gd}(A)$ とおく.

例えば, A が PID ならば, $\mathrm{gd}(A) = 1$ である.

定理 10.23. A を局所ネーター環とし, $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする. 以下が同値である.
(i) A が正則局所環である.
(ii) $\mathrm{gd}(A)$ が有限である.
(iii) A 加群 $A/\mathfrak{m}$ の射影次元が有限である.
また, このとき $\mathrm{gd}(A) = \dim(A)$ である.

系 10.24. A を正則局所環とし, $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする. 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ に対して, $A_\mathfrak{p}$ は正則局所環である.

証明

M を $A_\mathfrak{p}$ 加群とする. ${}_AM$ を M で定まる A 加群とする. 明らかに, ${}_AM \otimes_A A_\mathfrak{p} \simeq M$ である. A が正則局所環だから, ${}_AM$ の射影次元は $\leq \dim(A)$ である. $n = \dim(A)$ とおき, 射影分解

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to {}_AM \to 0$$

を考える. 局所化は完全関手であるので, 系列

$$0 \to (P_n)_\mathfrak{p} \to (P_{n-1})_\mathfrak{p} \to \cdots \to (P_1)_\mathfrak{p} \to (P_0)_\mathfrak{p} \to M \to 0$$

は分解である. また, A 射影加群 P_i の局所化 $(P_i)_\mathfrak{p}$ は $A_\mathfrak{p}$ 射影加群である. ゆえに, M の射影次元が $\leq n$ である. 以上より, $A_\mathfrak{p}$ の大局次元は $\leq n$ である. 特に, $A_\mathfrak{p}$ は正則局所環である.

定義 10.25. A をネーター環とする. A が正則であるとは, 任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $A_\mathfrak{p}$ が正則局所環であることをいう.

系 10.26. k を代数的閉体とし,

$$A = \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{(f_1, \ldots, f_m)}$$

とおく. $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ が $f_1(a) = \cdots = f_m(a) = 0$ とする. a に対応する A の極大いである $\mathfrak{m}_a$ に関する局所環 $A_{\mathfrak{m}_a}$ が正則であるためには

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

11 可換環のスペクトル

11.1 $\mathrm{Spec}(A)$ の位相

可換環 A のスペクトルとは, A の素イデアル全体の集合のものである．A のスペクトルを $\mathrm{Spec}(A)$ と表す．つまり,

$$\mathrm{Spec}(A) = \{\ A \text{ の素イデアル }\}.$$

イデアル $I \subset A$ に対して,

$$V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \ \mid\ I \subset \mathfrak{p}\}$$

例 11.1.
- A が零環 $\iff \mathrm{Spec}(A) = \emptyset$ である．
- A が可換体ならば, $\mathrm{Spec}(A)$ が一つの要素からなる．
- $A = \mathbb{C}[X]$ とする．A の素イデアルは $(X-a)$ $(a \in \mathbb{C})$ および 0 である．

補題 11.2.
(1) $V(A) = \emptyset$, $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$ である．
(2) $(I_i)_i$ を A のイデアルの族とする．このとき, 以下が成り立つ．

$$V\left(\sum_i I_i\right) = \bigcap_i V(I_i).$$

(3) 任意のイデアル $I_1, \dots, I_n$ に対して, 以下が成り立つ．

$$V(I_1 \dots I_n) = V(I_1 \cap \dots \cap I_n) = \bigcup_{i=1}^n V(I_i).$$

証明

(1) と (2) は明らかである．(3) を示す．$I_1 \dots I_n \subset I_1 \cap \dots \cap I_n$ より $V(I_1 \cap \dots \cap I_n) \subset V(I_1 \dots I_n)$ である．また, 明らかに $\bigcup_{i=1}^n V(I_i) \subset V(I_1 \cap \dots \cap I_n)$ である．最後に, $\mathfrak{p} \in V(I_1 \cap \dots \cap I_n)$ とする, このとき $I_1 \cap \dots \cap I_n \subset \mathfrak{p}$ である．ゆえに, $I_i \subset \mathfrak{p}$ となる $i \in \{1, \dots, n\}$ が存在する (そうでなければ, $x_i \in I_i - \mathfrak{p}$ がとれる．よって, $\mathfrak{p}$ が素イデアルだから $x_1 \dots x_n \in I_1 \dots I_n - \mathfrak{p}$ となり, 矛盾する)．以上より, $\mathfrak{p} \in \bigcup_{i=1}^n V(I_i)$ となる．

イデアル I が与えられているとき,

$$\sqrt{I} := \{x \in A \ \mid\ \exists n \geq 1,\ x^n \in I\}$$

とおき, I の根基という．

命題 11.3.
(1) $\sqrt{I}$ は A のイデアルである．
(2) $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$ が成り立つ．

証明

(2) のみ示せば十分である．$I \subset \mathfrak{p}$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ をとる．$x \in A$ に対して, $x^n \in I$ ならば, $x^n \in \mathfrak{p}$ より $x \in \mathfrak{p}$ となる．よって $\sqrt{I} \in \mathfrak{p}$ である．逆に, $\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} \subset \sqrt{I}$ を示す．$\overline{A} = A/I$ を考えれば, $I = 0$ であることを仮定すれば良い．よって, $\bigcap_{\mathfrak{p})} \mathfrak{p} \subset \sqrt{0}$ を示せば良い．$x \in A$ を冪零でない元とし, $S = \{x, x^2, x^3, \dots\}$ とする．仮定より $0 \notin S$ であるので, $S^{-1}A$ は零環でない．ゆえに, $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) \neq \emptyset$ となる．定理 3.17 より, $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ を満たす A の素イデアルが存在する．とくに $x \notin \mathfrak{p}$ である．主張が従う．

命題 11.4. 任意のイデアル I に対して, $V(I) = V(\sqrt{I})$ である. また, 任意のイデアル I, J に対して, 以下が成り立つ.

$$V(I) \subset V(J) \iff J \subset \sqrt{I}$$
$$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

証明

$I \subset \sqrt{I}$ より, $V(\sqrt{I}) \subset V(I)$ である. 逆に, $I \subset \mathfrak{p}'$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}'$ をとる (すなわち $\mathfrak{p}' \in V(I)$ である). $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ である. ゆえに, $\mathfrak{p}' \in V(\sqrt{I})$ となる.

$\mathrm{Spec}(A)$ に次のように位相を入れる. イデアル I に対して $D(I) = \mathrm{Spec}(A) - V(I)$ とおく. 補題 11.2 より, $\{D(I) \mid I \text{ はイデアル}\}$ は $\mathrm{Spec}(A)$ 上の位相を定める. $\mathrm{Spec}(A)$ の閉集合は $V(I)$ の形の部分集合である. $f \in A$ に対して, $D(fA)$ を単に $D(f)$ と表す. つまり,

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

である. $f, f' \in A$ について,

$$D(ff') = D(f) \cap D(f')$$

が成り立つ. 一般のイデアル I に対して,

$$D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$$

と書けるので, $D(f)$ の形の開集合は $\mathrm{Spec}(A)$ の開基をなす. また,

$$\{D(f) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

は $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ の基本近傍系である.

補題 11.5. $\mathrm{Spec}(A)$ は準コンパクトである. つまり, $\mathrm{Spec}(A)$ の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ. さらに, A がネーター環ならば, $\mathrm{Spec}(A)$ の任意の開集合も準コンパクトである.

証明

$(I_j)_j$ をイデアルの族とする.

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_j D(I_j) \iff \mathrm{Spec}(A) = D\left(\sum_j I_j\right) \iff \emptyset = V\left(\sum_j I_j\right) \iff \sum_j I_j = A.$$

よって, $D(I_j)$ $(j \in J)$ が $\mathrm{Spec}(A)$ を被覆するとき, $\sum_j I_j = A$ である. ゆえに, $j_1, \ldots, j_n \in J$ および $x_i \in I_{j_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が存在し, $x_1 + \cdots + x_n = 1$. 特に, $I_{j_1} + \cdots + I_{j_n} = A$ となる. よって, 以上より $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{i=1}^n D(I_{j_i})$ が成り立ち, すなわち開被覆 $D(I_j)$ $(j \in J)$ は有限部分被覆を持つ.
同様に, イデアル I に対して,

$$D(I) \subset \bigcup_j D(I_j) \iff D(I) \subset D\left(\sum_j I_j\right) \iff V(I) \supset V\left(\sum_j I_j\right) \iff I \subset \sqrt{\sum_j I_j}.$$

I が有限生成イデアルならば, $I = (x_1, \ldots, x_m)$ と書ける. このとき, $I \subset \sqrt{\sum_j I_j} \iff \exists N \geq 1,\ x_1^N, \ldots, x_m^N \in \sum_j I_j$ である. このとき, $x_1^N, \ldots, x_m^N \in \sum_{k=1}^M I_{j_k}$ となる $j_1, \ldots, j_M$ がとれる. よって, $D(I) \subset \bigcup_{k=1}^M D(I_{j_k})$ となる. したがって I が有限生成イデアルならば, $D(I)$ は準コンパクトである. ネーター環の任意のイデアルが有限生成だから, 主張がわかる.

11.2　既約成分

命題 11.6. A をネーター環とする.
(1) A は有限個の極小素イデアルしか持たない.
(2) $\mathrm{Spec}(A)$ は有限個の既約成分しか持たない.

11.3　スペクトル間の射

$\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とする. このとき, $\mathfrak{P}$ が B の素イデアルならば, $\varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ は A の素イデアルである. よって, 以下の写像が得られる.

$$\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), \quad \mathfrak{P} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{P}).$$

補題 11.7.
(1) $\widetilde{\varphi}$ は連続写像である.
(2) $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ の閉包は $V(\mathrm{Ker}(\varphi))$ である.
(3) J を B のイデアルとする. $\widetilde{f}(V(J))$ の閉包は $V(\varphi^{-1}(J))$ である.
(4) I を A のイデアルとする. $\widetilde{\varphi}^{-1}(V(I)) = V(\varphi(I)B)$ である. 但し, $\varphi(I)B$ は $\varphi(I)$ で生成される B のイデアルである.
(5) $f \in A$ とする. $\widetilde{\varphi}^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$ である.

証明

(1) は (4) から分かる. (3) で $J=0$ とすれば (2) が分かる. (5) を示す: $\widetilde{\varphi}^{-1}(D(f)) = \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \mid |f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{P})\} = \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \mid |\varphi(f) \notin \mathfrak{P}\} = D(\varphi(f))$ である. (4) を示す: $\widetilde{\varphi}^{-1}(V(I)) = \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \mid |I \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{P})\} = \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \mid |\varphi(I) \subset \mathfrak{P}\} = \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B) \mid |\varphi(I)B \subset \mathfrak{P}\} = V(\varphi(I)B)$ である. (3) を示す: $\widetilde{\varphi}(V(J)) \subset V(I) \iff V(J) \subset \widetilde{\varphi}^{-1}(V(I)) = V(\varphi(I)B) \iff \varphi(I)B \subset \sqrt{J} \iff \varphi(I) \subset \sqrt{J} \iff I \subset \varphi^{-1}(\sqrt{J}) = \sqrt{\varphi^{-1}(J)} \iff V(\varphi^{-1}(J)) \subset V(I)$ である. よって, $\widetilde{f}(V(J))$ の閉包は $V(\varphi^{-1}(J))$ である.

以上より, 反変関手

$$\mathrm{Spec}\colon \mathrm{Ring} \longrightarrow \mathrm{Top}, \quad A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$$

が定まる. 但し, Ring は可換環の圏であり, Top は位相空間の圏である.

命題 11.8. $\varphi\colon A \to B$ が全射であるとする. このとき, 写像 $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ は $\mathrm{Spec}(B)$ から $\widetilde{\varphi}$ の像への位相同型である.

証明

φ が全射だから, $B \simeq A/I$ $(I = \mathrm{Ker}(\varphi))$ であるので, $B = A/I$ であると仮定して良い.. A/I の素イデアルと I を含む A の素イデアルとは一対一で対応している. よって, $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(A/I) \to V(I)$ は全単射である. また, $I \subset J$ を満たすイデアル J について, 明らかに $\widetilde{\varphi}(V(J/I)) = V(J)$ が成り立つ. ゆえに, $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(A/I) \to V(I)$ は位相同型である.

定義 11.9. X, Y を位相空間とし, $f\colon X \to Y$ を連続写像とする.
(a) f が閉埋め込みであるとは, $f(X)$ が閉集合であり, かつ $f\colon X \to f(X)$ が位相同型であるときにいう.
(b) f が開埋め込みであるとは, $f(X)$ が開集合であり, かつ $f\colon X \to f(X)$ が位相同型であるときにいう.

命題 11.8 より, $\mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ は閉埋め込みである.

命題 11.10. $f \in A$ とし, $B = A_f$ とする．また, 自然な写像 $\varphi\colon A \to A_f$ を考える．$\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$ の像は $D(f)$ である．さらに, $\widetilde{\varphi}$ は位相同型 $\mathrm{Spec}(A_f) \to D(f)$ を誘導する．ゆえに, $\widetilde{\varphi}$ は開埋め込みである．

証明

$S = \{f, f^2, f^3, \dots\}$ とおく．定理 3.17 より, A_f の素イデアルは $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ を満たす A の素イデアルに一対一で対応している．また, $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset \iff f \notin \mathfrak{p}$ が成り立つ．よって, $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$ は単射であり, その像は $D(f)$ である．$g := \frac{a}{f^n} \in A_f$ とする．$D(g) = D(\frac{a}{1}) \subset \mathrm{Spec}(A_f)$ は $\frac{a}{1} \notin \mathfrak{p}'$ を満たす A_f の素イデアル全体の集合である．よって, $\widetilde{\varphi}(D(g)) = D(af) = D(a) \cap D(f)$ となる．

命題 11.11. $\varphi\colon A \to B$ を準同型とする．素数 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して,

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}) \iff B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \neq 0$$

証明

$B \otimes_A A_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{p}$ とおく．$B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \simeq B_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})) \simeq B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ である．$B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ の素イデアルは $\varphi(\mathfrak{p})$ を含む $B_\mathfrak{p}$ の素イデアルと一対一で対応している．また, 補題 3.17 より, $B_\mathfrak{p}$ の素イデアルは $\varphi(A - \mathfrak{p})$ と交わらない B の素イデアルと一対一で対応している．故に, $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ の素イデアルは以下の条件を満たす B の素イデアル $\mathfrak{P}$ と一対一で対応している：

(1) $\varphi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{P}$.

(2) $\varphi(A - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{P} = \emptyset$.

上の条件は $\mathfrak{p} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ かつ $\varphi^{-1}(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{p}$, すなわち $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{P}) = \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathfrak{p})$ を意味する．以上より, 全単射 $\mathrm{Spec}(B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})) \simeq \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathfrak{p})$ が存在する．主張が従う．

11.4 シュヴァレーの定理

$\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とする．一般には, $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ の像は開集合でもなく, 閉集合でもない．しかし, φ が有限表示であるという条件のもとで, $\widetilde{\varphi}$ の像は閉集合と開集合の共通部分と表される部分集合の有限個の和集合である (このような部分集合を constructible という)．これは, シュヴァレーの定理の主張である．

定義 11.12. X を位相空間とし, $Y \subset X$ を部分集合とする．Y が constructible であるとは, 開集合 $U_1, \dots, U_n$ および閉集合 $F_1, \dots, F_n$ が存在し,

$$Y = (U_1 \cap F_1) \cup \cdots \cup (U_n \cap F_n)$$

と表せることをいう．

定義 11.13. φ が有限表示であるとは, $B \simeq \frac{A[X_1,\dots,X_n]}{(f_1,\dots,f_m)}$ となる多項式 $f_1, \dots, f_m$ が存在するときにいう．A がネーター環である場合, B が有限生成 A 代数である $\iff$ B が有限表示 A 代数である．

補題 11.14. 任意の開集合と閉集合は constructible である．有限個の construtible な集合の和集合・ 共通部分は constructible である．

証明

明らかである．

定理 11.15 (シュヴァレー)**.** $\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とする．また, B が有限表示 A 代数であるとする．このとき, $\mathrm{Spec}(B)$ の任意の constructible な部分集合 Y に対して, $\widetilde{\varphi}(Y)$ は $\mathrm{Spec}(A)$ の constructible な部分集合である．とくに, 写像 $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ の像は $\mathrm{Spec}(A)$ の constructible な部分集合である．

補題 11.16. A, B をネーター整域とし, $A \subset B$ とする. また, B が有限生成 A 代数であるとする. b を 0 でない B の元とする. このとき, 以下の条件を満たす $a \in A - \{0\}$ が存在する.

K を代数的閉体とし, $\phi\colon A \to K$ を $\phi(a) \neq 0$ を満たす任意の準同型とする. このとき, $\phi'(b) \neq 0$ を満たす延長 $\phi'\colon B \to K$ が存在する.

証明

$B = A[x_1, \ldots, x_n]$ となる元 $x_1, \ldots, x_n \in B$ がとれる. よって列 $A \subset A[x_1] \subset A[x_1, x_2] \subset \cdots \subset B$ を考えれば, $B = A[x]$ である場合に帰着できる.

- $B = A[X]$ が多項式環である場合を考える：$b(X) \in A[X] - \{0\}$ とし, $a \in A$ を $b(X)$ の最高次係数とする. $\phi\colon A \to K$ を準同型とし, $\phi(a) \neq 0$ とする. $\deg(\phi(b)(X)) = \deg(b(X)$ より, $\phi(b)(X) \neq 0$ である. とくに, $\phi(b)(x) \neq 0$ を満たす $x \in K$ が存在する. したがって, $\phi'(P(X)) = \phi(P)(x)$ で定まる準同型 $\phi'\colon A[X] \to K$ が ϕ を延長し, $\phi'(b) \neq 0$ を満たす.
- $B = A[X]/I$, $I = (f_1, \ldots, f_m) \neq 0$ である場合を考える：$K_A := \mathrm{Frac}(A)$ を A の商体とし, I' を $f1, \ldots, f_m$ で生成される $K_A[X]$ のイデアルとする. $K_A[X]$ が PID だから, $I' = (g)$ をみたす $g \in K_A[X]$ が存在する.
$$\frac{K_A[X]}{I'} = B \otimes_A K_A = K_B$$
である (但し, K_B は B の商体である). とくに, g が $K_A[X]$ の既約多項式である. 任意の f_i に対して, $f_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} g$ となる $\alpha_i \in A$, $\beta_i \in A - \{0\}$ がとれる. $\beta = \prod_{i=1}^n \beta_i$ とおく. また, $sg(X) \in A[X]$ となる $a \in A - \{0\}$ を固定する.
$b \in B - \{0\}$ とし, $b = b_1(X) + I$ となる $b_1(X) \in A[X]$ をとる. $b \neq 0$ より,
$$R(X)b_1(X) + S(X)g(x) = 1$$
を満たす多項式 $R(X), S(X) \in K_A[X]$ が存在する. $\delta R, \delta S \in A[X]$ となる $\delta \in A - \{0\}$ が存在する. b_1 の最高次係数を γ とし, $a = \beta\gamma\delta s$ とおく.
$\phi\colon A \to K$ を準同型とし, $\phi(a) \neq 0$ とする. $aR(X)b_1(X) + \beta\gamma(\delta S(X))(sg(x)) = a$ より $\phi(sg)(X)$ と $\phi(b_1)(X)$ は互いに素である. また, $\phi(\gamma) \neq 0$ より $\deg(\phi(b_1)(X)) > 1$ が成り立つ. $x \in K$ を多項式 $\phi(sg)(X)$ の根とする. 明らかに, $\phi(b_1)(x) \neq 0$ である.
$\beta_i f_i = \alpha_i g$ が成り立つことと, $\phi(\beta_i) \neq 0$ であることから, $\phi(f_i)(x) = 0$ となる. ゆえに, 写像 $A[X] \to K$, $P(X) \mapsto \phi(P)(x)$ は準同型定理より準同型 $\phi'\colon B = \frac{A[X]}{(f_1, \ldots, f_m)} \to K$ を誘導する. $\phi(b_1)(x) \neq 0$ より $\phi'(b) \neq 0$ である.

証明

[定理 11.15 の証明] $\mathrm{Spec}(B)$ の任意の constructible な部分集合 Y に対して, $\widetilde{\varphi}(Y)$ が $\mathrm{Spec}(A)$ の constructible な部分集合であることを示す. $Y = (U_1 \cap F_1) \cup \cdots \cup (U_n \cap F_n)$ と書く (U_i：開集合, F_i：閉集合).

- $Y = \mathrm{Spec}(B)$ の場合に帰着できることを説明する：明らかに, $Y = U \cap F$ (U：開集合, F：閉集合) と仮定して良い. $F = V(I)$ となる B のイデアル I が存在する. 準同型 $A \to B \to B/I$ を考えれば, $Y = U$ であると仮定して良い. また, 補題 11.5 より, $U = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$ と表すことができる. 故に, $Y = D(f)$ ($f \in B$) であることを仮定して良い. 最後に, 準同型 $A \to B \to B_f$ を考えれば, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ と仮定して良い.
- A, B が整域で, $A \subset B$ の場合に帰着できる：B の極小素イデアルを $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ とおく. このとき, $\mathrm{Spec}(B) = \bigcup_{i=1}^m V(\mathfrak{p}_i)$ である. $\varphi\colon A \to B \to B/\mathfrak{p}_i$ を考えれば, $\mathrm{Spec}(B)$ が既約であると仮定して良い. また, $A \to B \to B/\sqrt{0}$ を考えれば, B が被約であることを仮定して良い. このとき, B が整域である. また, $\varphi\colon A \to B$ が $A \to A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to B$ と分解される. 準同型 $A \to A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ は全

射だから, スペクトル上の写像は閉埋め込みである．よって, $A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to B$ を考えれば十分である．したがって, $\varphi\colon A \to B$ が単射であると仮定して良い．B が整域であるので, A も整域である．

- 補題 11.16 では $b = 1$ とし, 補題 11.16 の条件を満たす $a \in A - \{0\}$ を考える．このとき, $D(a) \subset \mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ であることを示す．$\mathfrak{p} \in D(a)$ とする．K を $A/\mathfrak{p}$ の商体の代数的閉包とし, 準同型 $\phi\colon A \to A/\mathfrak{p} \to K$ を考える．$\mathfrak{p} \in D(a)$ より $\phi(a) \neq 0$ である．ゆえに, 補題 11.16 より ϕ の延長 $\phi'\colon B \to K$ が存在する．$\mathfrak{P} = \mathrm{Ker}(\phi')$ とおくと, $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ となる．したがって $\mathfrak{p} \in \mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ である．
- $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ が constructible であることを示す：$\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ が constructible でないと仮定する．また, 以下の集合を考える

$$\mathcal{X} := \left\{ Z \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \subset \mathrm{Spec}(B) \text{ が閉集合} \\ \widetilde{\varphi}(Z) \text{ が constructible ではない} \end{array} \right\}$$

仮定より, $\mathcal{X}$ は空集合でない．$\mathrm{Spec}(B)$ がネーター位相空間だから, $\mathcal{X}$ 内で極小元 Z_0 が存在する．また, Z_0 の最小性より, Z_0 が既約であることがわかる．よって, $Z_0 = V(\mathfrak{P}_0)$ となる素イデアル $\mathfrak{P}_0 \subset B$ が存在する．$\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{P}_0 \cap A$ とおき, φ が誘導する準同型 $\varphi_0\colon A/\mathfrak{p}_0 \to B/\mathfrak{P}_0$ を考える．$A_0 = A/\mathfrak{p}_0$, $B_0 = B/\mathfrak{P}_0$ とおく．よって, $Z_0 = \mathrm{Spec}(B_0)$ である．A_0, B_0 が整域であり, $\varphi_0\colon A_0 \to B_0$ が単射である．以上より $\widetilde{\varphi}_0\colon \mathrm{Spec}(B_0) \to \mathrm{Spec}(A_0)$ の像に含まれる開集合 $D(a_0)$ ($a_0 \in A_0 - \{0\}$) が存在する．また, Z_0 の最小性より, 写像

$$\mathrm{Spec}(B_0/a_0B_0) \to V(a_0) = \mathrm{Spec}(A_0/a_0A_0)$$

の像 $\widetilde{\varphi}\,(\mathrm{Spec}(B_0/a_0B_0))$ は constructible である．したがって,

$$\widetilde{\varphi}(Z_0) = D(a_0) \sqcup \widetilde{\varphi}\,(\mathrm{Spec}(B_0/a_0B_0))$$

も constructible であり, 仮定に矛盾する．主張が従う．

11.5 平坦性の幾何学的な解釈

定義 11.17. X を位相空間とし, $x, y \in X$ とする．また, $Z \subset X$ を部分集合とする．

(a) $x \in \overline{\{y\}}$ のとき, x を y の特殊化 (specialization) と呼び, y を x の一般化 (generalization) と呼ぶ.

(b) Z が特殊化で閉じている (stable under specialization) とは, 任意の $y \in Z$ に対して, y の全ての特殊化 $x \in X$ が Z に属することをいう．

(c) Z が一般化で閉じている (stable under generalization) とは, 任意の $x \in Z$ に対して, x の全ての一般化 $y \in X$ が Z に属することをいう．

明らかに, 閉集合は特殊化で閉じており, 開集合は一般化で閉じている．

命題 11.18. X をザリスキー空間とし, Z を contructible な集合とする．このとき

$$Z \text{ が閉集合である} \iff Z \text{ が特殊化で閉じている．}$$
$$Z \text{ が開集合である} \iff Z \text{ が一般化で閉じている．}$$

証明

開集合 $U_1, \ldots, U_n$ および閉集合 $F_1, \ldots, F_n$ を用いて, $Z = (U_1 \cap F_1) \cup \cdots \cup (U_n \cap F_n)$ と表せる．また, $\overline{U_i \cap F_i}$ を考えれば, $U_i \cap F_i$ が F_i で稠密であると仮定して良い．F_i がネーター空間だから, 有限個の既約成分の和集合 $F_i = F_i^{(1)} \cup \cdots \cup F_i^{(r_i)}$ で表せる．また, $U_i \cap F_i$ が稠密だから, $F_i^{(j)}$ の生成点 $\eta_i^{(j)}$ が $U_i \cap F_i$ に属する．仮定より, $\overline{\eta_i^{(j)}} = F_i^{(j)}$ が成り立つ．Z が特殊化で閉じているので, $F_i^{(j)} \subset Z$ である．ゆえに $\bigcup_{i=1}^n F_i \subset Z$ である．よって $\bigcup_{i=1}^n F_i = Z$ となり, Z が閉集合である．
差集合を考えれば, 「一般化で閉じている $\Longrightarrow$ 開集合」が容易に分かる．

X, Y を位相空間とし, $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. f が開写像であるとは, 任意の開集合 U に対して, $f(U)$ は開集合であることをいう. 同様に, f が閉写像であるとは, 任意の閉集合 U に対して, $f(U)$ は閉集合であることをいう.

定理 11.19. A, B をネーター環とし, $\varphi\colon A \to B$ を準同型とする. また, B が平坦な有限生成 A 代数であるとする. このとき, 写像 $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ は開写像である.

補題 11.20. $\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とし, B が平坦 A 代数であるとする. $\mathfrak{P} \subset B$ を B の素イデアルとし, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ とおく. $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ を満たす A の任意の素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して, $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{Q})$ となる B の素イデアル $\mathfrak{Q}$ が存在する.

証明

$S = A - \mathfrak{p}$ とし, $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$, $S^{-1}B = B_{\mathfrak{p}}$ とおく. $A \to B$ が平坦だから, $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$ も平坦である. 故に, A が局所環であり, $\mathfrak{p}$ がその極大イデアルであることを仮定して良い. $A \to B \to B_{\mathfrak{Q}}$ を考えれば, B も局所環であると仮定してよい. また, $A \otimes_A A/\mathfrak{q} \to B \otimes_A A/\mathfrak{q}$ が平坦である. よって, $\mathfrak{q} = 0$ かつ A が整域であることを仮定して良い. よって,

$$\begin{aligned} 0 \in \mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}) &\Longleftrightarrow B_{\mathfrak{q}} \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow 0 \notin \varphi(A - \mathfrak{q}) \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

B が平坦 A 代数だから, ねじれをもたない. A が整域だから 0 以外の元が正規元である. ゆえに $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ であり, すなわち φ が単射である. よって $1 \notin \varphi(A - \mathfrak{q})$ である.

証明

[定理 11.19 の証明] 任意の開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(B)$ に対し, $\widetilde{\varphi}(U)$ が開集合であることを示す. U が $D(f)$ $(f \in B)$ の形の開集合の和集合で表すことができるので, $U = D(f)$ として良い. また, $A \to B \to B_f$ を考えれば, $U = \mathrm{Spec}(B)$ として良い. 定理 11.15 より $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ の像は constructible である. また, 補題 11.20 より $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ が一般化で閉じている. 命題 11.18 より, $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ は開集合である.

11.6 整拡大の幾何学的な解釈

補題 11.21. $\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とする. また, φ が単射であるとする. このとき, A の全ての極小素イデアルは $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ に属する.

証明

$\mathfrak{p}$ を A の極小素イデアルとする. $A \to B$ が単射だから, $\varphi_{\mathfrak{p}}\colon A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$ も単射である. また, $A_{\mathfrak{p}}$ はただ一つの素イデアルを持つ. よって, $B_{\mathfrak{p}}$ の任意の素イデアル $\mathfrak{Q}'$ について, $\varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{Q}') = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ である. したがって, 自然な写像 $B \to B_{\mathfrak{p}}$ による $\mathfrak{Q}'$ の逆像を $\mathfrak{Q}$ と書くと, $\varphi^{-1}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{p}$ が成り立つ.

定理 11.22. $\varphi\colon A \to B$ を可換環の準同型とする. B が A 上整ならば, 写像 $\widetilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ は閉写像である.

証明

$Z \subset \mathrm{Spec}(B)$ を閉集合とする. $Z = V(I)$ となる B のイデアル I がとれる. $A \to B \to B/I$ が整拡大だから, $Z = \mathrm{Spec}(B)$ の場合に帰着できる. また, φ が $A \to A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to B$ と分解できるので, φ が単射であると仮定して良い. このとき, 補題 11.21 より A の任意の極小素イデアルが $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ に含まれる. 定理

9.21 より, $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi})$ が特殊化で閉じている．したがって, $\mathrm{Im}(\widetilde{\varphi}) = \mathrm{Spec}(A)$ である．

$\varphi\colon A \to B$ を整拡大とする． $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ とおく． A の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $X_{\mathfrak{p}} := \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathfrak{p})$ の全ての点は閉点である．なぜならば, $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in X_{\mathfrak{p}}$ で, $\mathfrak{Q} \in \overline{\mathfrak{P}} = V(\mathfrak{P})$ ならば, 定理より $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ である．故に $\overline{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}\}$ である．また, $k(\mathfrak{p}) := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ とおくと, $k(\mathfrak{p})$ は可換体である．また, $X_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ である．

定理 11.23. $\varphi\colon A \to B$ を整拡大とし, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ とする．

(1) $X_{\mathfrak{p}}$ の全ての点は閉点である．

(2) $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ のクルル次元は 0 である．

(3) B が有限生成 A 加群であるとする．このとき $X_{\mathfrak{p}}$ が有限集合であり, 離散位相空間である．

証明

上記の考察から従う．