

代数学 D・代数学特論 IV

レポート 1 (中間レポート)

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。

提出の際、写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認ください。

提出期限：2022 年 11 月 24 日 (木) 18 時まで。

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. A 加群 M と $a \in A$ に対し, $M[a] := \{x \in M \mid ax = 0\}$ とおく。

(i) M を A 加群とし, $N \subset M$ を部分加群とする。写像 $N \xrightarrow{a} N, x \mapsto ax$ が全射であるとする。蛇の補題を用い, 完全系列

$$0 \rightarrow \frac{M[a]}{N[a]} \rightarrow M/N \xrightarrow{a} M/N$$

が存在することを示せ。

(ii) このとき, 同型写像 $(M/N)[a] \simeq \frac{M[a]}{N[a]}$ が存在することを示せ。

問 2. A を整域とし, K を A の商体とする。 $A \neq K$ のとき, K が有限生成 A 加群でないことを示せ。

問 3. 以下の $\mathbb{Z}$ 加群のねじれ部分加群 M_{tor} を求めよ。

$$M = \prod_{p \text{ 素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

任意問題： M/M_{tor} が自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるかどうかを判定せよ。

問 4. $m, n, k \in \mathbb{N}$ とする。以下の $\mathbb{Z}$ 加群を求めよ。

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \bigwedge^k (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}), \quad (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\otimes k}, \quad \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}[X]).$$

任意問題： $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ を求めよ。

問 5. A を可換環とし, $B = \frac{A[X]}{(X^2)}$ とする。 B が平坦 A 代数であることを示せ。