代数学 D・代数学特論 IV

レポート２（期末レポート）

<u>提出方法</u>：レポートを Webclass で提出して下さい.
提出の際, 写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい.

<u>提出期限</u>：2023 年 2 月 2 日 (木)18 時まで.

<u>教員名</u>：コスキヴィルタ・ジャンステファン

<u>全ての問題に解答する必要はありません.</u>

問 1. M を A 加群とし, $M' \subset M$ を部分加群とする. また, $M/M' \simeq A^n$ となる $n \geq 1$ が存在するとする.

(i) 短完全列 $0 \to M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/M' \to 0$ が分裂することを示せ (但し, ι は自然な包含写像であり, π は自然な射影である). ヒント：自由 $\Longrightarrow$ 射影.

(ii)「M が有限生成 $\Longleftrightarrow$ M' が有限生成」であることを示せ. ヒント：「$\Longrightarrow$」には, 上記の短完全列が分裂することを用い, 全射 $M \to M'$ が存在することを示せ.

問 2. A を可換環とし, $f\colon A^n \to A^n$ を A 線形写像とする ($n \geq 1$). f が全射であるとする.

(1) (i) $N = \mathrm{Ker}(f)$ とおく. 短完全列 $0 \to N \xrightarrow{\iota} A^n \xrightarrow{f} A^n \to 0$ が分裂することを示せ (但し, ι は自然な包含写像である).

(ii) N が有限生成 A 加群であることを示せ.

(iii) $\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする. このとき, 系列 $0 \to N_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}^n \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}}^n \to 0$ が短完全列であることを示せ.

(iv) 局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ の唯一の極大イデアルを $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ とおき, $k(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ とおく. 系列

$$0 \to N_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \to A_{\mathfrak{p}}^n \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \to A_{\mathfrak{p}}^n \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \to 0$$

が短完全列であることを示せ. ヒント：(1)(i) の短完全列が分裂するので, 講義ノートの命題 1.25 を使うことができる.

(v) $N_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p}) = 0$ を示せ．ヒント：次元

(vi) $N_\mathfrak{p} = 0$ を示せ．ヒント：中山．

(vii) $N = 0$ を示せ．

(viii) f が同型写像であることを示せ．

(2) 以下は, f が同型写像であることは別証明で示される．

(i) $f \circ g = \mathrm{id}_{A^n}$ を満たす A 線形写像 $g\colon A^n \to A^n$ が存在することを示せ．ヒント：分裂．

(ii) S, T をそれぞれ f, g で定まる n 次正方行列とする．$ST = E_n$ であることを示せ．

(iii) $\det(S)$ が A の単元であることを示せ．

(iv) S が正則行列であることを示せ．ヒント：余因子行列

(v) f が同型写像であることを示せ．

問 3. A を整域とし, K を A の商体とする．また, M を A 加群とする．$f_M(x) = x \otimes 1$ で定まる写像 $f_M\colon M \to M \otimes_A K$ を考える．

(i) $x \in M_{\mathrm{tor}}$ とする．このとき, $f_M(x) = 0$ であることを示せ．ヒント：$x \otimes 1 = ax \otimes \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$．

(ii) 逆に, $x \in M$ とし, $f_M(x) = 0$ とする．$N = Ax$ とおく (x で生成される部分加群)．また, $\iota\colon N \to M$ を自然な包含写像とする．以下の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f_N} & N \otimes_A K \\ {\scriptstyle\iota}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota\otimes\mathrm{id}_K} \\ M & \xrightarrow[f_M]{} & M \otimes_A K \end{array}$$

$\iota \otimes \mathrm{id}_K$ が単射であることを示せ．ヒント：K は平坦 A 加群である．

(iii) $f_N(x) = 0$ を示せ．

(iv) $N \otimes_A K = 0$ を示せ．

(v) $x \in M_{\mathrm{tor}}$ を示せ．問題 (i)〜(v) をまとめ, $M_{\mathrm{tor}} = \mathrm{Ker}(f_M)$ が成り立つことを示せ．

(vi)「M がねじれを持たない $\Longleftrightarrow$ K ベクトル空間 V が存在し, M が V の部分 A 加群である」が成り立つことを示せ．

問 4.

(1) A を局所整域とし, $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする．$K = \mathrm{Frac}(A)$ を A の商体とし, $k = A/\mathfrak{m}$ とおく．M を有限生成 A 加群とする．

$$M_k := M \otimes_A k, \quad M_K := M \otimes_A K$$

とおく．また, M を生成する集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ のうち最も小さなものの濃度を $d(M)$ とおく．まず, $\dim_k(M_k)$, $\dim_K(M_K)$, $d(M)$ の関係について調べる．

(i) 中山の補題を用いて $d(M) = \dim_k(M_k)$ が成り立つことを示せ.

(ii) $\dim_K(M_K) \le \dim_k(M_k)$ が成り立つことを示せ.

(2) 今, A をネーター局所整域とし, M を有限生成平坦 A 加群とする. このとき M が自由 A 加群であることは, 以下に示される.

(i) $n = d(M)$ とおく. 全射準同型 $u\colon A^n \to M$ が存在することを示せ.

(ii) 短完全列 $0 \to \mathrm{Ker}(u) \to A^n \to M \to 0$ を考える. 以下の系列が短完全列であることを示せ.

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \otimes_A k \to A^n \otimes_A k \to M_k \to 0$$

ヒント: 講義ノートの命題 2.53.

(iii) $\mathrm{Ker}(u) \otimes_A k = 0$ であることを示せ.

(iv) $\mathrm{Ker}(u) = 0$ であることを示せ. ヒント：中山

(v) M が自由加群であることを示せ.

(vi) $\dim_K(M_K) = \dim_k(M_k)$ であることを示せ.

(3) 今, A をネーター局所整域とし, M を有限生成 A 加群とする. また, $\dim_k(M_k) = \dim_K(M_K)$ と仮定する.

(i) 全射準同型 $u\colon A^n \to M$ を考える (但し, $n = d(M)$ とする). 以下の系列が短完全列であることを示せ.

$$0 \to \mathrm{Ker}(u) \otimes_A K \to A^n \otimes_A K \to M_K \to 0.$$

(ii) $\mathrm{Ker}(u) \otimes_A K = 0$ を示せ. ヒント：次元

(iii) $\mathrm{Ker}(u) = 0$ を示せ. ヒント：問 3.

(iv) M が自由加群であることを示せ.

(4) A をネーター局所整域とし, M を有限生成 A 加群とする. 上の問題 (1)〜(3) をまとめ, 以下が成り立つことを示せ.

$$M \text{ が平坦加群} \iff M \text{ が自由加群} \iff \dim_k(M_k) = \dim_K(M_K).$$

(5) 今, A をネーター整域とし, M を有限生成平坦 A 加群とする. K を A の商体とし, $M_K = M \otimes_A K$ とおく. A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, 局所化 $A_\mathfrak{p}$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ とおき, $k(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ とおく (授業より $k(\mathfrak{p}) = \mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})$ である). また

$$M_{k(\mathfrak{p})} := M \otimes_A k(\mathfrak{p})$$

とおく.

(i) 全ての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $\dim_K(M_K) \le \dim_{k(\mathfrak{p})}(M_{k(\mathfrak{p})})$ が成り立つことを示せ.

(ii) 以下が同値であることを示せ.

- M が平坦 A 加群である.
- 全ての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $M_\mathfrak{p}$ が自由 $A_\mathfrak{p}$ 加群である.
- 全ての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, $\dim_K(M_K) = \dim_{k(\mathfrak{p})}(M_{k(\mathfrak{p})})$ である.
- M が射影 A 加群である.

(6) $A = \mathbb{C}[X,Y]$ とし, イデアル (X,Y) を考える (つまり, X と Y で生成されるイデアル). $K = \mathbb{C}(X,Y)$ を A の商体とする. (X,Y) をイデアルとみなすときにそれを $\mathfrak{m}$ とおき, A 加群とみなすときにはそれを M とおくことにしょう. 以下は, M が平坦 A 加群でないことが示される.

(i) $\dim_K(M_K) = 1$ であることを示せ. ヒント：$M \subset A$

(ii) $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることを示せ. ヒント：環準同型 $\mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}$, $P(X,Y) \mapsto P(0,0)$ を考える.

(iii) $k(\mathfrak{m}) = \mathbb{C}$ であることを示せ.

(iv) $M_{k(\mathfrak{m})} \simeq \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を示せ. ヒント：命題 2.21

(v) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$ を示せ. ヒント：$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ における X, Y の剰余類をそれぞれ x, y とおく. このとき, (x, y) が複素ベクトル空間 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の基底をなすことを示せ.

(vi) M が平坦 A 加群でないことを示せ.

(vii) M がねじれを持たないことを示せ.

以上より, 「ねじれのない加群が平坦加群であるとは限らない」ということが分かった.

問 5. $n \geq 1$ を自然数とし, M を $\mathbb{Z}$ 加群とする. $f_M(x) = nx$ とおき, 写像 $f_M \colon M \to M$ を定める. $C_0^M = M$, $C_1^M = M$ とおき, 他の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $C_i^M = 0$ とおく. また, $d_1^M = f$ とおき, 他の $i \in \mathbb{Z}$ に対し $d_i^M = 0$ とおく. チェイン複体 $C_\bullet^M = (C_i^M, d_i^M)_i$ を考える.

$$\mathrm{Tor}_i(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) := H_i(C_\bullet^M)$$

と定義する.

(i) $M[n] = \{x \in M \mid nx = 0\}$ とおく. 以下が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{Tor}_i(M, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \begin{cases} M/nM & \text{if} \quad i = 0 \\ M[n] & \text{if} \quad i = 1 \\ 0 & \text{if} \quad i \neq 0, 1. \end{cases}$$

(ii) $\mathbb{Z}$ 加群の短完全列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ が与えられているとき, チェイン複体の短完全列 $0 \to C_\bullet^{M'} \to C_\bullet^M \to C_\bullet^{M''} \to 0$ が存在することを示せ.

(iii) このとき, 完全列

$$0 \to M'[n] \to M[n] \to M''[n] \to M'/nM' \to M/nM \to M''/nM'' \to 0$$

が存在することを示せ.