

線形代数学 B

Jean-Stefan Koskivirta

目次

1	ベクトル空間	3
1.1	アーベル群	3
1.2	ベクトル空間の定義	3
1.3	ベクトル空間一例	4
1.4	線形部分空間	4
1.5	補空間	6
1.6	生成される線型部分空間	7
1.7	線型独立	8
1.8	基底	9
1.9	次元	11
1.10	線型部分空間と次元	13
1.11	ベクトル空間の直積	14
2	線型写像	15
2.1	定義	15
2.2	線型写像の演算	16
2.3	線型写像の核と像	16
2.4	線型写像と基底	17
2.5	有限次元ベクトル空間と線型写像	18
2.6	正則行列	19
2.7	ランク	19
2.8	基底変換	21
2.9	基底変換公式	22
2.10	相似	23
2.11	階数標準形とランク	24
2.12	射影	24
2.13	一次形式	25
2.14	双対基底	26
3	連立一次方程式	29
3.1	行列の基本変形	29
3.2	連立一次方程式と行列	31
3.3	行階段形	31
3.4	連立一次方程式の解き方	33
3.5	$\text{Im}(A)$ の基底の求め方	37

3.6	逆行列の計算方法	38
4	行列式	41
4.1	多重線型形式	41
4.2	交代線型形式	42
4.3	行列式の定義	43
4.4	行列の行列式	44
4.5	行列式の性質	45
4.6	自己準同型の行列式	48
4.7	余因子	49
4.8	余因子行列と逆行列	50
4.9	行列式の計算方法	52
5	自己準同型写像	54
5.1	固有ベクトル, 固有値	54
5.2	固有多項式	54
5.3	対角化	56

1 ベクトル空間

1.1 アーベル群

G を集合とし、演算 $G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x + y$ が与えられているとする。以下の条件を満たすとき、 $(G, +)$ がアーベル群であるという。

- 任意の $x, y, z \in G$ に対し、 $x + (y + z) = (x + y) + z$ が成り立つ (結合法則)。
- 次を満たす元 $0 \in G$ が存在する：「任意の $x \in G$ に対し、 $x + 0 = 0 + x = x$ である」。
- 任意の $x \in G$ に対し、 $x + x' = x' + x = 0$ を満たす $x' \in G$ が存在する。
- 任意の $x, y \in G$ に対し、 $x + y = y + x$ が成り立つ (交換法則)。

0 を G の単位元という。

補題 1.1. G をアーベル群とする。単位元が一意的に存在する。

証明

0 と $0'$ を 2 つの単位元とする。 0 が単位元だから、 $0 + 0' = 0'$ である。同様に $0'$ が単位元だから $0 + 0' = 0$ である。ゆえに $0 = 0'$ となる。

$x \in G$ に対して、 $x + x' = x' + x = 0$ を満たす $x' \in G$ を x の逆元という。

補題 1.2. x の逆元が一意的に存在する。

証明

x' と x'' が x の逆元ならば、

$$x' = x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''$$

となる。

x の逆元を $-x$ で表す。よって、 $x + (-x) = (-x) + x = 0$ が成り立つ。

1.2 ベクトル空間の定義

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ の部分体とする (例えば、 $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$)。 $(V, +)$ をアーベル群とする。 V の単位元を $\mathbf{0}$ で表す。写像

$$\mathbb{K} \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

が与えられているとする。以下の条件を満たすとき、 V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間という。また、上記の写像をスカラー倍という。

- 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, x \in V$ に対し、 $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ である (分配法則 1)。
- 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, x \in V$ に対し、 $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ である。
- 任意の $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in V$ に対し、 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ である (分配法則 2)。
- 任意の $x \in V$ に対し、 $1x = x$ である。

命題 1.3. V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする。以下が成り立つ。

- (1) 任意の $x \in V$ に対し、 $0x = \mathbf{0}$ である。
- (2) 任意の $x \in V$ に対し、 $(-1)x = -x$ である。

証明

(1) を示す: $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$ である. よって, 両辺に $0x$ の逆元を足すと $0x = \mathbf{0}$ となる. (2) を示す: $x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = \mathbf{0}$ であるので, $(-1)x = -x$ が成り立つ.

1.3 ベクトル空間一例

- $\mathbb{K}^n$ は自然に $\mathbb{K}$ ベクトル空間である. ベクトルの足し算, スカラー倍は以下のように定義される. ベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ に対し, } x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

- I を $\mathbb{R}$ の区間とし, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ を連続関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合とする. $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

によって関数 $f + g, \lambda f$ を定義する. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$ ベクトル空間であることは簡単に確認できる. $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ の単位元はゼロ関数 $I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ である.

- $M_{m,n}(\mathbb{K})$ とは, 成分を $\mathbb{K}$ の元とする $m \times n$ 行列全体の集合である. 行列 $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対して, 足し算 $A + B$ が成分ごとに定義されており, $m \times n$ 行列である. また, $m \times n$ 行列 A と $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し, スカラー倍 λA も成分ごとに定義できる. この演算に関して, $M_{m,n}(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間である. $m = n$ のとき, n 次正方行列全体のベクトル空間を $M_n(\mathbb{K})$ で表す.
- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を複素数列全体の集合とする. 複素数列 $x = (x_n)_{n \geq 1}, y = (y_n)_{n \geq 1}$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し,

$$(x + y)_n := x_n + y_n$$

$$(\lambda x)_n = \lambda x_n$$

とおき, 足し算とスカラー倍を定める. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は明らかに $\mathbb{C}$ ベクトル空間である.

- $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ を満たす2つの可換体 $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ を考える (例えば, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ など). このとき, $\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$ ベクトル空間としてみなすことができる. なぜならば, $\lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{L}$ に対して, λ と x のスカラー倍 λx を $\mathbb{L}$ における λ と x の積として定義できる. 例えば, 複素数体 $\mathbb{C}$ は自然に $\mathbb{R}$ ベクトル空間として考えることができる.

1.4 線形部分空間

1.4.1 定義

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする.

定義 1.4. $W \subset V$ を部分集合とする. 以下の条件を満たすとき, W を V の部分ベクトル空間 (または線型部分空間) という.

- $\mathbf{0} \in W$ である.
- 任意の $x, y \in W$ に対して, $x + y \in W$ である.
- 任意の $x \in W, \lambda \in \mathbb{K}$ に対し, $\lambda x \in W$ である.

W が V の部分ベクトル空間ならば, W は V の足し算, スカラー倍に関して閉じており, この演算に関して $\mathbb{K}$ ベクトル空間となる.

補題 1.5. W が線型部分空間になるためには, W が空でなく, かつ

$$\text{「任意の } x, y \in W, \lambda \in \mathbb{K} \text{ に対し, } \lambda x + y \in W \text{」}$$

が成り立つことは必要十分である.

証明

W が線型部分空間ならば、明らかに上記の条件を満たす。逆に、 W がこの条件を満たすとする。 $W \neq \emptyset$ より $x \in W$ がとれる。 $y = x$ とし、 $\lambda = -1$ とすると、 $\lambda x + y = (-1)x + x = 0$ である。ゆえに $0 \in W$ である。また、 $x, y \in W$ のとき、 $\lambda = 1$ とすれば $x + y \in W$ が分かる。最後に、 $y = 0$ とすれば $\lambda x \in W$ となる。ゆえに、 W は線形部分空間である。

1.4.2 線型部分空間一例

例 1.6.

- $\{0\}$ と V 自身は常に V の部分ベクトル空間である。
- 係数を $\mathbb{K}$ の元とする多項式全体の集合を $\mathbb{K}[X]$ とおく。つまり、

$$\mathbb{K}[X] = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid n \geq 0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}.$$

多項式 $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $Q(X) = \sum_{i=1}^m b_i X^i$ の足し算 $P(X) + Q(X)$ は係数ごとに定義される。また、 $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し、 $\lambda P(X) = \sum_{i=0}^n \lambda a_i X^i$ とおく。明らかに、 $\mathbb{K}[X]$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間をなす。 $d \geq 0$ について、次数が d 以下の多項式全体の部分集合を $\mathbb{K}_d[X]$ とおく。つまり、

$$\mathbb{K}_d[X] = \{a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \mid a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{K}\}$$

とおく。明らかに

$$\mathbb{K}_1[X] \subset \mathbb{K}_2[X] \subset \mathbb{K}_3[X] \subset \cdots$$

であり、さらに $\mathbb{K}[X]$ は全ての $\mathbb{K}_d[X]$ の和集合である。 $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}_d[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ならば、 $P(X) + Q(X) \in \mathbb{K}_d[X]$ かつ $\lambda P(X) \in \mathbb{K}_d[X]$ である。よって、 $\mathbb{K}_d[X]$ は $\mathbb{K}[X]$ の線型部分空間である。

- $W \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を収束列全体の部分集合とする。 $x = (x_n)_{n \geq 1}$, $y = (y_n)_{n \geq 1}$ が収束列ならば、 $x + \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) も収束列である。ゆえに、 W は $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の線型部分空間である。
- $W_0 \subset W$ を零列全体の部分集合とする (零列とは、 0 に収束する列のことをいう)。明らかに、 W_0 は W の線型部分空間である。
- I を区間とし、 $W \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ を有界である連続関数全体の部分集合とする。つまり、

$$W = \{f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \mid \exists M \geq 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M\}$$

とおく。 $f, g \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。 $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M'$ を満たす $M, M' \geq 0$ が存在する。このとき、任意の $x \in I$ に対し、

$$|f(x) + \lambda g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \leq M + |\lambda| M'$$

となる。よって、 $f + \lambda g \in W$ である。したがって、 W は $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ の線型部分空間である。

以下は線型部分空間でない部分集合の一例である。

例 1.7.

- $W \subset M_2(\mathbb{R})$ を正則でない 2 次行列全体の集合とする。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。 $AB = 0$ だから、 A, B は零因子行列である。特に、 A, B は正則でない。しかし、 $A + B = E_2$ は単位行列だから、 $A + B \notin W$ である。よって、 W は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間でない。

- V を微分可能関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合とする。明らかに、 V は $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ の部分ベクトル空間である。

$$W = \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq |f(x)|\}$$

とおく。明らかに $f(x) = \exp(x)$ で定まる関数 f は W に属する。同様に、 $g(x) = 1$ で定まる関数 g も W に属する。 $h = f - g$ とおく。 $h(x) = \exp(x) - 1$, $h'(x) = \exp(x)$ である。 $x = 0$ のとき、 $|h'(0)| = 1 > |h(0)| = 0$ である。よって、 $h \notin W$ である。ゆえに、 W は V の線型部分空間でない。

1.4.3 線型部分空間の和, 共通部分

W_1, W_2 を V の 2 つの線型部分空間とする.

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$$

とおき, W_1 と W_2 の和という.

命題 1.8. $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ はそれぞれ V の線型部分空間である.

証明

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ と書けるので, $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$ である. $x, y \in W_1 + W_2$ とし, $\lambda \in \mathbb{K}$ とする. $x_1, y_1 \in W_1, x_2, y_2 \in W_2$ を用いて $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ と表せる. ゆえに

$$x + \lambda y = (x_1 + x_2) + \lambda(y_1 + y_2) = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$$

と書くことができる. $x_1 + \lambda y_1 \in W_1$ かつ $x_2 + \lambda y_2 \in W_2$ より, $x + \lambda y \in W_1 + W_2$ である. 以上より, $W_1 + W_2$ は線型部分空間である. $W_1 \cap W_2$ が線型部分空間であることは容易に確認できる.

1.5 補空間

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする.

定義 1.9. W_1, W_2 を V の線型部分空間とする. V が W_1 と W_2 の直和であるとは, V の任意の元 x が一意的に

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

と表すことができることをいう.

命題 1.10. W_1, W_2 を V の線型部分空間とする. 以下が同値である.

- (i) V が W_1 と W_2 の直和である.
- (ii) $V = W_1 + W_2$ であり, かつ $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ である.

証明

- (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す: $V = W_1 + W_2$ は明らかである. $x \in W_1 \cap W_2$ とする. このとき, $x = \mathbf{0} + x = x + \mathbf{0}$ と書くことができるので, 一意性より $x = \mathbf{0}$ となる.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す: $x \in V$ とする. 仮定より, $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$) と表すことができる. この表し方が一意であることを示す. 他の表し方 $x = x'_1 + x'_2$ ($x'_1 \in W_1, x'_2 \in W_2$) を考える. このとき, $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$ が $W_1 \cap W_2$ に属する. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ より, $x_1 = x'_1$ かつ $x_2 = x'_2$ となる.

V が W_1 と W_2 の直和であるとき,

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と表す. また, V の線型部分空間 W が与えられているとする. このとき, $W \oplus W' = V$ を満たす線型部分空間 W' を V における W の補空間という.

例 1.11.

- $V = M_n(\mathbb{K})$ とする. W_1 を対称行列全体の集合とし, W_2 を交代行列全体の集合とする. 明らかに, W_1, W_2 は V の線型部分空間である. $A \in W_1 \cap W_2$ ならば, ${}^t A = A = -A$ となり, ゆえに $A = 0$ である. よって

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ である。また、 A が n 次正方行列ならば、

$$M = \frac{M + {}^t M}{2} + \frac{M - {}^t M}{2}$$

と書くことができる。 $B = \frac{M + {}^t M}{2}$, $C = \frac{M - {}^t M}{2}$ とおく。 ${}^t B = \frac{{}^t A + {}^t({}^t A)}{2} = \frac{{}^t A + A}{2} = B$ である。同様に、 ${}^t C = \frac{{}^t A - {}^t({}^t A)}{2} = \frac{{}^t A - A}{2} = -C$ である。ゆえに $B \in W_1$, $C \in W_2$ である。 $A = B + C$ だから、 $W = W_1 + W_2$ が成り立つ。したがって、 $V = W_1 \oplus W_2$ である。

- $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とする。関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が偶関数であるとは、 $f(-x) = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) が成り立つことである。 f が奇関数であるとは、 $f(-x) = -f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) が成り立つことである。 W_1, W_2 をそれぞれ偶関数全体の集合、奇関数全体の集合とする。 W_1, W_2 が V の線型部分空間であることは容易に確認できる。 $f \in W_1 \cap W_2$ とする。このとき、 $f(-x) = f(x) = -f(x)$ であり、ゆえに $f = 0$ となる。よって、 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ である。また、 $f \in V$ のとき、

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

と書くことができる。 $g_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ とし、 $g_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ とする。 g_1 は偶関数であり、 g_2 は奇関数である。また、 $f = g_1 + g_2$ が成り立つので、 $V = W_1 \oplus W_2$ である。

1.6 生成される線型部分空間

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし、 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ を V の元の族とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

のような和を $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ の一次結合 (または線型結合) という。

定義 1.12. V をベクトル空間とし、 $S \subset V$ を空でない部分集合とする (S が無限集合でも良い)。このとき、 S で生成される線型部分空間とは、

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad n \geq 1, \lambda_i \in \mathbb{K}, \mathbf{x}_i \in S$$

と表せる V の元全体のなす部分集合である。 S で生成される線型部分空間を $\text{Span}(S)$ (または $\text{Span}_{\mathbb{K}}(S)$), または $\langle S \rangle$ で表す。つまり、 S で生成される線型部分空間とは、 S の元から作れる全ての一次結合からなる部分集合のことである。

命題 1.13. $S \subset V$ を空でない部分集合とする。このとき、 $\text{Span}(S)$ は V の部分線型空間である。

証明

$\mathbf{x} \in S$ とすると、 $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ だから、 $\mathbf{0} \in \text{Span}(S)$ である。 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Span}(S)$ とし、 $\lambda \in \mathbb{K}$ とする。 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i$ かつ $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{y}_j$ となる $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$, $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in S$ が存在する。このとき、 $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$ は明らかに $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j$ の一次結合であるから、 $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in \text{Span}(S)$ となる。よって、 $\text{Span}(S)$ は V の線型部分空間である。

$S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ のとき、 $\text{Span}(S)$ を単に $\text{Span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ と表す。このとき、

$$\text{Span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}$$

が成り立つ。

定義 1.14. V をベクトル空間とし、 $S \subset V$ を空でない部分集合とする。 $V = \text{Span}(S)$ のとき、 S が V を生成する (または S が V の生成系である) という。

注意 1.15. $S \subset V$ が V の生成系で, $S \subset T$ ならば, T も V の生成系である.

例 1.16.

- 任意の $P(X) \in \mathbb{K}_d[X]$ が $a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ と表せるので, $1, X, \dots, X^d$ は $\mathbb{K}_d[X]$ の生成系である.
- 同様に, $S = \{1, X, X^2, \dots\}$ は $\mathbb{K}[X]$ の生成系である.
- $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする. $\mathbb{K}^n$ の任意のベクトルを $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ と表すことができるので, $\{e_1, \dots, e_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の生成系である.
- $V = M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対し, (i, j) 成分が 1, 他の成分全てが 0 である (m, n) 型行列を $\epsilon_{i,j}$ とおく. 行列 $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ について

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} \epsilon_{i,j}$$

と表せる. したがって, $\{\epsilon_{i,j}\}_{i,j}$ は $M_{m,n}(\mathbb{K})$ の生成系である.

- $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ ベクトル空間として考える. 任意の $z \in \mathbb{C}$ が $z = \lambda_1 + \lambda_2 i$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) と表せる. $\lambda_1 + \lambda_2 i$ は元 $x_1 = 1$ と $x_2 = i$ の一次結合である. ゆえに, $\mathbb{R}$ ベクトル空間として $\mathbb{C}$ が $\{1, i\}$ で生成される.
- $V = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を複素数列全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする. $k \in \mathbb{N}$ に対し, e_k を $e_k = (\delta_{k,n})_{n \geq 1}$ によって定義する. このとき, $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ は V の生成系でない. 例えば, 定数数列 $(1)_{n \geq 1}$ は $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ の一次結合として表すことができない. 以下が成り立つ.

$$\text{Span}(\{e_k\}_{k \geq 1}) = \{(x_n)_{n \geq 1} \mid \text{有限個の } n \text{ を除き } x_n = 0\}.$$

定義 1.17. V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. V が有限次元ベクトル空間であるとは, 有限個の元で生成されるときにいう.

例えば, $\mathbb{K}^n$ と $\mathbb{K}_d[X]$ は有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間である. $\mathbb{C}$ は有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間である.

1.7 線型独立

定義 1.18. V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $x_1, \dots, x_n \in V$ とする. $x_1, \dots, x_n$ が線型独立であるとは, 任意の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ に対して, 以下が成り立つことをいう.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad \text{である.}$$

$\{x_1, \dots, x_n\}$ が線型独立でないとき, 線型従属であるという. このとき, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ で, 少なくとも一方が 0 でないものが存在し, $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \mathbf{0}$ である.

例 1.19.

- $V = \mathbb{K}^n$ とする. 標準基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ は線型独立である. なぜならば, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \mathbf{0}$ のとき, 第 i 成分を考えれば $\lambda_i = 0$ となる.
- $V = \mathbb{C}$, $x_1 = 1, x_2 = i$ とする. V を $\mathbb{R}$ ベクトル空間としてみなすと, x_1, x_2 は $\mathbb{R}$ 上線型独立である. 実際, $\lambda_1 + i\lambda_2 = 0$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$) のとき, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ である.
- $V = \mathbb{C}$, $x_1 = 1, x_2 = i$ とする. V を $\mathbb{C}$ ベクトル空間としてみなすと, $x_1 + ix_2 = 0$ である. よって, x_1, x_2 は $\mathbb{C}$ 上線型従属である.
- $V = \mathbb{R}^3$ とし,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする (ただし, $a \in \mathbb{R}$ である). $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + a\lambda_2 \\ a\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる. $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ と仮定する. このとき,

$$\begin{cases} \lambda_1 + a\lambda_2 = 0 \\ a\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -a\lambda_2 \\ \lambda_3 = a\lambda_2 \\ \lambda_3 = (a^2 + 1)\lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -a\lambda_2 \\ \lambda_3 = a\lambda_2 \\ (a^2 - a + 1)\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

である. $X^2 - X + 1$ の判別式は $1 - 4 = -3$ だから, 任意の実数 a に対して, $a^2 - a + 1 > 0$ である. よって, $\lambda_2 = 0$ となる. ゆえに, $\lambda_1 = -a\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = a\lambda_2 = 0$. したがって, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は $\mathbb{R}$ 上線型独立である.

- $V = \mathbb{C}^3$ とし, 上のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を考える (今回, $a \in \mathbb{C}$ とする). $a^2 - a + 1 = 0 \iff a \in \{\exp(\frac{i\pi}{3}), \exp(-\frac{i\pi}{3})\}$ が成り立つ. このとき, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = a$, $\lambda_1 = -a$ は上記の連立方程式を満たす. ゆえに, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は線型従属である. $a \notin \{\exp(\frac{i\pi}{3}), \exp(-\frac{i\pi}{3})\}$ のとき, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は線型独立である.

定義 1.20. V をベクトル空間とし, $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ を V の元の族とする (I が無限集合可). $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ が線型独立であるとは, 全ての $i_1, \dots, i_n \in I$ ($n \geq 1$) に対して, $\{\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_n}\}$ が線型独立であるときにいう.

例 1.21. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし, $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ とする. 実数 $\alpha > 0$ に対して, $f_\alpha(x) = \sin(\alpha x)$ とおき, 関数 $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を定義する. $\{f_\alpha\}_{\alpha > 0}$ が線型独立であることを示す. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を互いに異なる正の実数とし, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ とする. $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$ と仮定する. 数学的帰納法によって $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ を示す.

$n = 1$ のときは明らかである. $n > 1$ とする. 2回微分すると, $-\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$ となる. よって,

$$\sum_{i=2}^n (\alpha_1^2 - \alpha_i^2) \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$$

となる. 帰納法の仮定より, $\{f_{\alpha_2}, \dots, f_{\alpha_n}\}$ が線型独立である. ゆえに, 全ての $2 \leq i \leq n$ に対し, $(\alpha_1^2 - \alpha_i^2) \lambda_i = 0$ である. $2 \leq i \leq n$ に対し $\alpha_i > 0$ より $\alpha_i \neq \pm \alpha_1$ である. ゆえに $\alpha_i^2 \neq \alpha_1^2$ である. よって, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ となる. 最後に $\lambda_1 = 0$ となり, $\{f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n}\}$ が線型独立である. 以上より, $\{f_\alpha\}_{\alpha > 0}$ は線型独立である.

注意 1.22. $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ が線型独立であるとき, 任意の部分集合 $J \subset I$ に対し, $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in J}$ も明らかに線型独立である.

1.8 基底

1.8.1 定義

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする.

定義 1.23. V の元の族 $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ が V の基底であるとは, 以下の条件を満たすときにいう.

- (1) $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ が V を生成する.
- (2) $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ が線型独立である.

命題 1.24. $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ を V の基底とする. このとき, V の任意の元 $\mathbf{x}$ が

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_{i_j}, \quad n \geq 1, \lambda_j \in \mathbb{K}, i_j \in I$$

と表すことができ, さらに 0 の項を除けばこの表し方が一意的である.

証明

$\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ が V を生成するので, 任意の元が $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ の一次結合として表すことができる. また,

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_{i_j} = \sum_{k=1}^m \lambda'_k \mathbf{x}_{i'_k}$$

を2つの表し方とする (ただし, $i_j, i'_k \in I$, $\lambda_i, \lambda'_k \in \mathbb{K}$ とする). このとき,

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_{i_j} - \sum_{k=1}^m \lambda'_k \mathbf{x}_{i'_k}$$

となる. $\{\mathbf{x}_i\}_i$ が線形独立だから, 全ての $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$ に対して以下が成り立つ.

$$\begin{cases} i_j \notin \{i'_1, \dots, i'_m\} & \text{ならば} & \lambda_j = 0 \\ i'_k \notin \{i_1, \dots, i_n\} & \text{ならば} & \lambda'_k = 0 \\ i_j = i'_k & \text{ならば} & \lambda_j = \lambda'_k \end{cases}$$

したがって, 0 である λ_j, λ'_k を除けば, $\mathbf{x}$ の表し方が一意的である.

とくに, 有限個の元からなる基底 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ が存在するとき, V の任意の元が一意的に

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

と表すことができる. ベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ の順序に注意したいときに, 基底を $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ と表す. このとき, ベクトル $\mathbf{x}_i$ の並べ方を変えた n 組は, 別の基底であるように考える.

例 1.25.

- $V = \mathbb{K}^n$ とし, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする. つまり,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ は $\mathbb{K}^n$ の基底である.

- $V = M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ に対し, (i, j) 成分が 1, 他の成分全てが 0 である (m, n) 型行列を $\epsilon_{i,j}$ とおく. $\{\epsilon_{i,j}\}_{i,j}$ は $M_{m,n}(\mathbb{K})$ の基底である. 例えば, 以下の行列は $M_2(\mathbb{K})$ の基底をなす.

$$\epsilon_{1,1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{1,2} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{2,1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{2,2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 1.26. W, W' を V の2つの線型部分空間とし, $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ と $\{\mathbf{x}'_{i'}\}_{i' \in I'}$ をそれぞれ W と W' の基底とする. このとき, 以下が同値である.

- (i) $V = W \oplus W'$ である.
- (ii) $(\mathbf{x}_i)_{i \in I} \cup (\mathbf{x}'_{i'})_{i' \in I'}$ は V の基底である.

証明

- (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す: $V = W + W'$ より, $(\mathbf{x}_i)_{i \in I} \cup (\mathbf{x}'_{i'})_{i' \in I'}$ は明らかに V の生成系である. 線型独立であることを示す. $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$, $\{i'_1, \dots, i'_m\} \subset I'$ とし,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_{i_k} + \sum_{j=1}^m \lambda'_j \mathbf{x}'_{i'_j} = \mathbf{0}$$

と仮定する. $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$ より $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_{i_k} = \sum_{j=1}^m \lambda'_j \mathbf{x}'_{i'_j} = \mathbf{0}$ となる. $(\mathbf{x}_i)_{i \in I}$ と $(\mathbf{x}'_{i'})_{i' \in I'}$ が線型独立だから, $\lambda_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) かつ $\lambda'_j = 0$ ($j = 1, \dots, m$) である. よって, $(\mathbf{x}_i)_{i \in I} \cup (\mathbf{x}'_{i'})_{i' \in I'}$ は線形独立である.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す: $(\mathbf{x}_i)_{i \in I} \cup (\mathbf{x}'_{i'})_{i' \in I'}$ が V の基底であるとする. このとき, $V = W + W'$ であることは明らかである. また, $\mathbf{x} \in W \cap W'$ とすると, $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_{i_k} = \sum_{j=1}^m \lambda'_j \mathbf{x}'_{i'_j}$ ($\lambda_k, \lambda'_j \in \mathbb{K}$,

$i_k \in I, i'_j \in I'$ と表すことができる. よって,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_{i_k} - \sum_{j=1}^m \lambda'_j \mathbf{x}'_{i'_j} = \mathbf{0}$$

である. $(\mathbf{x}_i)_{i \in I} \cup (\mathbf{x}'_{i'})_{i' \in I'}$ が V の基底であるので, 全ての k, j に対し $\lambda_k = \lambda'_j = 0$ が成り立つ. したがって, $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$ となり, 主張が従う.

有限個の元からなる基底が存在するとき, 上の定理は次の形になる: W, W' を V の2つの線型部分空間とし, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ と $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_s)$ をそれぞれ W と W' の基底とする. このとき, 以下が同値である.

- (i) $V = W \oplus W'$ である.
- (ii) $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_s)$ は V の基底である.

1.8.2 基底の存在

V を有限次元ベクトル空間とする. つまり, V が有限個の元で生成されるとする.

定理 1.27. $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ を V の生成系とする.

- (1) $i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, N\}$ が存在し, $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d})$ が V の基底である.
- (2) $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r\}$ を線型独立な元とする. $j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, N\}$ が存在し, $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_s})$ が V の基底である.

証明

(1) を示す: $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ の元から構成されている線型独立な組 $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d})$ の中で, 長さが最大のものである. 最大性より, 任意の $k \in \{1, \dots, N\}$ に対し, $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d}, \mathbf{x}_k)$ は線型従属である. よって,

$$\sum_{j=1}^d \lambda_j \mathbf{x}_{i_j} + \lambda' \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

を満たす $(\lambda_1, \dots, \lambda_d, \lambda') \in \mathbb{K}^{d+1}$ が存在する (しかし, 少なくとも一方が 0 でない). $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d})$ が線型独立だから, $\lambda' \neq 0$ である. よって,

$$\mathbf{x}_k = -\frac{1}{\lambda'} \sum_{j=1}^d \lambda_j \mathbf{x}_{i_j}$$

となる. ゆえに, $\mathbf{x}_k \in \text{Span}(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d})$ である. $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ が生成系だから, $\text{Span}(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d}) = V$ となる. したがって, $(\mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_d})$ は V の基底である.

(2) を示す: $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_s})$ という形の線型独立な組の中で, 長さが最大のものである. (1) と同じように, $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r, \mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_s})$ が基底であることが確認できる.

定理 1.27 より, 任意の有限次元ベクトル空間は基底を持つ.

1.9 次元

補題 1.28. $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を V の基底とし, $j \in \{1, \dots, n\}$ とする. また, $\beta_i \in \mathbb{K}$ ($1 \leq i \leq n$) とし, $\beta_j \neq 0$ とする. $\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{e}_i$ とおく. このとき,

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{e}'_j, \mathbf{e}_{j+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$$

は V の基底である.

証明

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ とし, $\sum_{i \neq j} \lambda_i e_i + \lambda_j e'_j = \mathbf{0}$ とする. このとき,

$$\sum_{i \neq j} (\lambda_i + \lambda_j \beta_i) e_i + \lambda_j \beta_j e_j = \mathbf{0}$$

となる. $(e_1, \dots, e_n)$ が基底だから, $\lambda_j \beta_j = 0, \lambda_i + \lambda_j \beta_i = 0$ ($i \neq j$) となる. $\beta_j \neq 0$ より $\lambda_j = 0$ である. ゆえに全ての i に対し $\lambda_i = 0$ ともなる. したがって, $(e_1, \dots, e_{j-1}, e'_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$ は線形独立である. $e_j = \frac{1}{\beta_j} e'_j - \frac{1}{\beta_j} \sum_{i \neq j} \beta_i e_i$ より, $e_j \in \text{Span}(e_1, \dots, e_{j-1}, e'_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$ である. よって, $(e_1, \dots, e_{j-1}, e'_j, e_{j+1}, \dots, e_n)$ は V の基底である.

定理 1.29. V の全ての基底は同じ数の元を持つ.

証明

- $(e_1, \dots, e_n)$ を V の全ての基底の中で, 長さが最小のものとする. また, $(e'_1, \dots, e'_m)$ を V の他の基底とする. n の最小性より, $m \geq n$ である. 帰納法により次を示す: 任意の $1 \leq j \leq n$ に対し, $(e_{r_1}, \dots, e_{r_j}, e'_{s_1}, \dots, e'_{s_{m-j}})$ という形の基底が存在する (ただし, $r_1, \dots, r_j \in \{1, \dots, n\}$ であり, $s_1, \dots, s_{m-j} \in \{1, \dots, m\}$ である). つまり, j 個の e_i と $m-j$ 個の e'_i からなる基底の存在を示す.
- $j = 1$ の場合を考える. $e_1 = \sum_{i=1}^m \lambda'_i e'_i$ ($\lambda'_i \in \mathbb{K}$) と表すことができる. 明らかに, $\lambda'_r \neq 0$ となる r が存在する. 補題 1.28 より, $(e'_1, \dots, e'_{r-1}, e_1, e'_{r+1}, \dots, e'_m)$ が基底である. ゆえに, $j = 1$ のとき成り立つ.
- $1 \leq j < n$ とし, $(e_{r_1}, \dots, e_{r_j}, e'_{s_1}, \dots, e'_{s_{m-j}})$ という形の基底が存在すると仮定する. $k \in \{1, \dots, n\} - \{r_1, \dots, r_j\}$ とする. $e_k = \sum_{i=1}^j \lambda_i e_{r_i} + \sum_{i=1}^{m-j} \lambda'_i e'_{s_i}$ と表すことができる. 明らかに, $\lambda'_d \neq 0$ となる d が存在する. 補題 1.28 より, $(e_{r_1}, \dots, e_{r_j}, e'_{s_1}, \dots, e'_{s_{d-1}}, e_k, e'_{s_{d+1}}, \dots, e'_{s_{m-j}})$ が基底である. ゆえに, $j+1$ のときも成り立つ.
- 以上より, $j = n$ のとき $(e_1, \dots, e_n, e'_{s_1}, \dots, e'_{s_{m-n}})$ という形の基底が存在する. $(e_1, \dots, e_n)$ が基底であるので, ベクトル $e'_{s_1}, \dots, e'_{s_{m-n}}$ がこの基底に現れない. すなわち $m = n$ である.

定義 1.30. V を有限次元ベクトル空間とする. V の任意の基底の元の個数を V の次元といい, $\dim(V)$ (または $\dim_{\mathbb{K}}(V)$) と表す.

命題 1.31. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ である.

証明

標準基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ が $\mathbb{K}^n$ の基底であることから分かる.

例 1.32.

- $(1, i)$ が $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $\mathbb{C}$ の基底であるので, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ である. しかし, 上記の命題より $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ である.
- $\{\epsilon_{i,j}\}$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) が $M_{m,n}(\mathbb{K})$ の基底をなすので, $\dim_{\mathbb{K}}(M_{m,n}(\mathbb{K})) = mn$ である.
- $(1, X, \dots, X^d)$ が $\mathbb{K}_d[X]$ の基底であるので, $\dim(\mathbb{K}_d[X]) = d+1$ である. $\mathbb{K}[X]$ は有限次元ベクトル空間でない.

定理 1.33. V を有限次元ベクトル空間とし, $\dim(V) = n$ とおく.

- (1) $(x_1, \dots, x_m)$ が線型独立ならば, $m \leq n$ である.
- (2) $(x_1, \dots, x_m)$ が生成系ならば, $m \geq n$ である.

証明

$(e_1, \dots, e_n)$ を基底とする. (1) を示す: 定理 1.27 より, $(x_1, \dots, x_m, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$ という形の基底が存在する. 定理 1.29 より, $m \leq n$ である. (2) を示す: 定理 1.27 より, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ という形の基底が存在する. 定理 1.29 より, $d = n$ である. 特に $m \geq n$ である.

定理 1.34. V を有限次元ベクトル空間とし, $\dim(V) = n$ とおく. $(x_1, \dots, x_n)$ を V の元の n 組とする. このとき, 以下が同値である.

- (i) $(x_1, \dots, x_n)$ が基底である.
- (ii) $(x_1, \dots, x_n)$ が線型独立である.
- (iii) $(x_1, \dots, x_n)$ が生成系である.

証明

- (i) $\Rightarrow$ (ii) 及び (i) $\Rightarrow$ (iii) は明らかである.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す: $(x_1, \dots, x_n)$ が線型独立であるとする. また, $(e_1, \dots, e_n)$ を基底とする. 定理 1.27 より, $(x_1, \dots, x_n, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$ という形の基底が存在する. 定理 1.29 より, $s = 0$ である. よって, $(x_1, \dots, x_n)$ が基底である.
- (iii) $\Rightarrow$ (i) を示す: $(x_1, \dots, x_n)$ が生成系であるとする. 定理 1.27 より, $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ という形の基底が存在する. 定理 1.29 より, $d = n$ であり, $(x_1, \dots, x_n)$ が基底である.

1.10 線型部分空間と次元

V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする.

定理 1.35. $W \subset V$ を線型部分空間とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) W が有限次元ベクトル空間である.
- (2) $\dim(W) \leq \dim(V)$ である.
- (3) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$ である.

証明

$n = \dim(V)$ とおく. $(x_1, \dots, x_m)$ を W の最大個数の線型独立な組とする. 明らかに $m \leq n$ である. m の最大性より, 任意の $x \in W$ に対し, $(x_1, \dots, x_m, x)$ が線型従属であるので, $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + \lambda' x = 0$ となる $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda' \in \mathbb{K}$ が存在する. $(x_1, \dots, x_m)$ が線型独立だから, $\lambda' \neq 0$ である. よって, $x = -\frac{1}{\lambda'} \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ となる. よって, $(x_1, \dots, x_m)$ は W の生成系である. 仮定より線型独立でもあるので, $(x_1, \dots, x_m)$ は基底である. とくに, W が有限次元であり, $\dim(W) \leq \dim(V)$ が成り立つ. 最後に, $\dim(W) = \dim(V)$ とする. $(e_1, \dots, e_n)$ を W の基底とする. とくに $(e_1, \dots, e_n)$ は線型独立である. 定理 1.34 より, $(e_1, \dots, e_n)$ は V の基底である. ゆえに, $V = W$ となる.

定理 1.36. V を有限次元ベクトル空間とし, $W \subset V$ を線型部分空間とする. このとき, W の補空間が存在する.

証明

$(e_1, \dots, e_m)$ を W の基底とする. とくに $(e_1, \dots, e_m)$ が線型独立であるので, 定理 1.27 より適当なベクトル $e_{m+1}, \dots, e_n$ が存在し, $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ が V の基底である. $W' = \text{Span}(e_{m+1}, \dots, e_n)$ と定める. 命題 1.26 より, $V = W \oplus W'$ が成り立つ.

命題 1.37. W, W' を V の線型部分空間とする. $V = W \oplus W'$ であるならば, 以下が成り立つ.

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W').$$

証明

$(e_1, \dots, e_d)$ と $(e'_1, \dots, e'_{d'})$ をそれぞれ W と W' の基底とする. 定理 1.26 より, $(e_1, \dots, e_d, e'_1, \dots, e'_{d'})$ は V の基底である. よって, $\dim(V) = d + d' = \dim(W) + \dim(W')$ である.

例 1.38. $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ をそれぞれ n 次対象行列, n 次交代行列からなる $M_n(\mathbb{K})$ の線型部分空間とする. 例 1.26 より

$$M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

が成り立つ. $\{\epsilon_{i,j}\} (1 \leq i, j \leq n)$ を例 1.25 で定義された $M_n(\mathbb{K})$ の基底とする. このとき,

$$\{\epsilon_{i,j} + \epsilon_{j,i} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\epsilon_{i,i} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

は $S_n(\mathbb{K})$ の基底をなす. 同様に,

$$\{\epsilon_{i,j} - \epsilon_{j,i} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

は $A_n(\mathbb{K})$ の基底である. 特に,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(S_n(\mathbb{K})) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim_{\mathbb{K}}(A_n(\mathbb{K})) &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

1.11 ベクトル空間の直積

V, V' を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. $x, y \in V$, $x', y' \in V'$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\begin{aligned} (x, x') + (y, y') &:= (x + y, x' + y') \\ \lambda(x, x') &:= (\lambda x, \lambda x') \end{aligned}$$

とおくことによって, $V \times V'$ が $\mathbb{K}$ ベクトル空間になる. $V \times V'$ を V と V' の直積という. $\{e_i\}_{i \in I}$ と $\{e'_{i'}\}_{i' \in I'}$ をそれぞれ V と V' の基底とすると,

$$\{(e_i, \mathbf{0})\}_{i \in I} \cup \{(\mathbf{0}, e'_{i'})\}_{i' \in I'}$$

が $V \times V'$ の基底である. 特に, V, V' が有限次元ならば, $V \times V'$ も有限次元であり, さらに

$$\dim(V \times V') = \dim(V) + \dim(V')$$

が成り立つ.

2 線型写像

2.1 定義

定義 2.1. V_1, V_2 を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を写像とする. f が $\mathbb{K}$ 線型写像であるとは, f が以下の条件を満たすことをいう.

- (a) 任意の $x, y \in V_1$ に対し, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ である.
- (b) 任意の $x \in V_1, \lambda \in \mathbb{K}$ に対し, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ が成り立つ.

補題 2.2. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $f(0) = 0$ である.
- (2) $f(-x) = -f(x)$ ($x \in V_1$) である.

証明

$f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0$ である. $x \in V_1$ とする. $f(-x) = f((-1)x) = (-1)f(x) = -f(x)$ である.

補題 2.3. V_1, V_2 を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を写像とする. f が $\mathbb{K}$ 線型写像であるためには, 任意の $x, y \in V_1, \lambda \in \mathbb{K}$ に対し,

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

が成り立つことは必要十分である.

証明

明らかに, f が線型写像ならば, 上記の条件を満たす. 逆に, f がこの条件を満たすと仮定する. $\lambda = 1$ とすれば, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ($x, y \in V_1$) が分かる. $y = x, \lambda = \mu - 1$ とすると, $f(\mu x) = \mu f(x)$ ($x \in V_1, \mu \in \mathbb{K}$) となる. よって, f は $\mathbb{K}$ 線型写像である.

定義 2.4. V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. V 上の線型形式 (または一次形式) とは, 線型写像 $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ のことをいう.

例 2.5.

- $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ とする.

$$\varphi(g) := \int_0^1 g(t) dt$$

で定まる写像 $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ は V 上の線型形式である.

- I を区間とし, $V_1 = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), V_2 = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ とする ($\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ とは, I 上の微分可能関数で, その微分関数が連続関数であるような関数全体の集合である). 明らかに, V_1 が V_2 の線型部分空間である. $g \in V_1$ に対し,

$$\psi(g) = g'$$

とおくことで, 線型写像 $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ が定まる.

定義 2.6. V_1, V_2, V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする.

- (a) 線型写像 $f: V_1 \rightarrow V_2$ が全単射であるとき, f を同型写像という.
- (b) 線型写像 $f: V \rightarrow V$ のことを V の自己準同型という.
- (c) 同型写像 $f: V \rightarrow V$ を V のことを自己同型という.

補題 2.7. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ ベクトル空間の同型写像とする. このとき, f の逆写像 $f^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$ も同型写像である.

証明

f^{-1} は明らかに全単射であるので, $\mathbb{K}$ 線型写像であることを示せば十分である. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_2, \lambda \in \mathbb{K}$ とする.

$$f(f^{-1}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})) = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} = f(f^{-1}(\mathbf{x})) + \lambda f(f^{-1}(\mathbf{y})) = f(f^{-1}(\mathbf{x}) + \lambda f^{-1}(\mathbf{y}))$$

である. f が単射だから, $f^{-1}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{x}) + \lambda f^{-1}(\mathbf{y})$ となる. ゆえに, f^{-1} は線型写像である.

2.2 線型写像の演算

命題 2.8. $f: V_1 \rightarrow V_2$ と $g: V_2 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. このとき, $g \circ f: V_1 \rightarrow V_2$ は $\mathbb{K}$ 線型写像である.

証明

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1, \lambda \in \mathbb{K}$ に対し,

$$(g \circ f)(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y})) = g(f(\mathbf{x})) + \lambda g(f(\mathbf{y})) = (g \circ f)(\mathbf{x}) + \lambda (g \circ f)(\mathbf{y})$$

となる.

定義 2.9. V_1, V_2 を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. 線型写像 $f, g: V_1 \rightarrow V_2, \lambda \in \mathbb{K}$ に対し,

$$(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_1$$

$$(\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V_1$$

とおき, $f + g: V_1 \rightarrow V_2, \lambda f: V_1 \rightarrow V_2$ を定める.

$f + g$ と λf が線型写像であることは簡単な計算により確認できる. $\mathbb{K}$ 線型写像 $f: V_1 \rightarrow V_2$ 全体の集合を $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ とおく. 上の定義で定まる演算に関して, $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V_1, V_2)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間である.

2.3 線型写像の核と像

定義 2.10. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする.

(a) $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in V_1 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ とおき, f の核という.

(b) $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V_1\}$ とおき, f の像という.

命題 2.11. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする.

(1) $\text{Ker}(f)$ は V_1 の線型部分空間である.

(2) $\text{Im}(f)$ は V_2 の線型部分空間である.

証明

(1) を示す: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より, $\mathbf{0} \in \text{Ker}(f)$ である. また, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Ker}(f), \lambda \in \mathbb{K}$ ならば, $f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ である. ゆえに, $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \in \text{Ker}(f)$ であり, $\text{Ker}(f)$ は V_1 の線型部分空間である.

(2) を示す: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より, $\mathbf{0} \in \text{Im}(f)$ である. $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \text{Im}(f)$ とし, $\lambda \in \mathbb{K}$ とする. $\mathbf{z}_1 = f(\mathbf{x}_1)$ かつ $\mathbf{z}_2 = f(\mathbf{x}_2)$ となる $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$ が存在する. ゆえに, $\mathbf{z}_1 + \lambda \mathbf{z}_2 = f(\mathbf{x}_1) + \lambda f(\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2) \in \text{Im}(f)$ である. 以上より, $\text{Im}(f)$ は V_2 の線型部分空間である.

注意 2.12. $f: V_1 \rightarrow V_2$ が線型写像で, W が V_1 の線型部分空間ならば, $f(W) \subset V_2$ が V_2 の線型部分空間である.

命題 2.13. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. 以下が同値である.

(i) f が単射である.

(ii) $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

証明

- (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す: $\mathbf{x} \in \text{Ker}(f)$ とする. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{x})$ である. f の単射性より, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる. ゆえに $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ である.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す: $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ ($\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$) とする. このとき, $f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ である. よって, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker}(f)$ である. 仮定より, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ となり, すなわち $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ である. したがって, f は単射である.

系 2.14. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. 以下が同値である.

(i) f が同型写像である.

(ii) $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ かつ $\text{Im}(f) = V_2$ が成り立つ.

証明

命題 2.13 から従う.

注意 2.15. 線型写像 $f: V_1 \rightarrow V_2$ が単射ならば, f は同型写像 $V_1 \rightarrow \text{Im}(f)$ を誘導する.

2.4 線型写像と基底

命題 2.16. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. $S \subset V_1$ を部分集合とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$f(\text{Span}(S)) = \text{Span}(f(S))$$

特に, S が V_1 の生成系ならば, $f(S)$ は $\text{Im}(f)$ の生成系である.

証明

$\mathbf{x} \in \text{Span}(S)$ とすると, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i$ ($\mathbf{x}_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{K}$) とできる. ゆえに, $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\mathbf{x}_i)$ となり, よって $f(\mathbf{x}) \in \text{Span}(f(S))$ である. ゆえに $f(\text{Span}(S)) \subset \text{Span}(f(S))$ が成り立つ. 逆に, $\text{Span}(f(S)) \subset f(\text{Span}(S))$ を示す. 明らかに, $f(S) \subset f(\text{Span}(S))$ が成り立つ. 注意 2.12 より, $f(\text{Span}(S))$ が V_2 の線型部分空間である. したがって, $\text{Span}(f(S)) \subset f(\text{Span}(S))$ となる. 主張が従う.

命題 2.17. $f: V_1 \rightarrow V_2$ を線型写像とする. $(\mathbf{e}_i)_{i \in I}$ を V_1 の基底とする. このとき, 以下が成り立つ.

(i) f が単射である $\iff (f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が線型独立である.

(ii) f が全射である $\iff (f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が V_2 の生成系である.

(iii) f が同型写像である $\iff (f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が V_2 の基底である.

証明

- (i) を示す. f が単射であるとする. $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(\mathbf{e}_{i_k}) = \mathbf{0}$ ($\lambda_k \in \mathbb{K}, i_k \in I$) とする. このとき,

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\mathbf{e}_{i_k}) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{e}_{i_k}\right)$$

である. f が単射だから, $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ である. ゆえに, $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{e}_{i_k} = \mathbf{0}$ となる. $(\mathbf{e}_i)_{i \in I}$ が線型独立であるので, $\lambda_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) となる. 以上より, $(f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が線型独立である. 逆に, $(f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が線型独立であるとし, $\mathbf{x} \in \text{Ker}(f)$ とする. $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{e}_{i_k}$ ($\lambda_k \in \mathbb{K}, i_k \in I$) と表すことができる. よって, $\mathbf{0} = f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\mathbf{e}_{i_k})$ である. $(f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が線型独立だから, $\lambda_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$) が成り立つ. したがって, $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ となり, f は単射である.

- (ii) を示す: 命題 2.16 より $(f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ は $\text{Im}(f)$ の生成系である. ゆえに, $(f(\mathbf{e}_i))_{i \in I}$ が V_2 の生成系

である $\iff \text{Im}(f) = V_2$ である.

- (iii) は (i) と (ii) から従う.

2.5 有限次元ベクトル空間と線型写像

系 2.18. V_1, V_2 を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 同型写像とする. このとき, $\dim(V_1) = \dim(V_2)$ である.

証明

$(e_1, \dots, e_n)$ を V_1 の基底とする. f が同型写像より, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ が V_2 の基底である (命題 2.17 参照). 主張が従う.

例 2.19. $a, b \in \mathbb{C}$ とし,

$$V = \{(x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n\}$$

とおく. 明らかに, V が $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ の線型部分空間である. 写像 $\varphi: V \rightarrow \mathbb{C}^2, (x_n)_{n \geq 1} \mapsto (x_1, x_2)$ を考える. 明らかに, φ は $\mathbb{C}$ 線型写像である. $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \text{Ker}(\varphi)$ ならば, $x_1 = x_2 = 0$ である. $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ より, 帰納法的に $x_n = 0$ ($n \geq 1$) が分かる. ゆえに, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ である. また, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ について, $x_1 = a_1, x_2 = a_2$ とおき, $n \geq 3$ のとき, 帰納法的に $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ によって $(x_n)_{n \geq 1}$ が作れる. したがって, φ は同型写像 $V \rightarrow \mathbb{C}^2$ を引き起こす. とくに, $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$ である.

定理 2.20. V_1, V_2 を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. また, $\dim(V_1) = \dim(V_2)$ とする. このとき, 以下が同値である.

- (i) f が単射である.
- (ii) f が全射である.
- (iii) f が同型写像である.

証明

$(e_1, \dots, e_n)$ を V_1 の基底とする ($n = \dim(V_1)$ とおく). $\dim(V_2) = \dim(V_1) = n$ だから, 定理 1.34 より 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ が線型独立である} &\iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ が } V_2 \text{ の生成系である} \\ &\iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ が } V_2 \text{ の基底である} \end{aligned}$$

よって, 主張が命題 2.17 から分かる.

例 2.21. $V_1 = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ とし, $V_2 = \mathbb{K}^n$ とする. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ を互いに異なる元とする. 多項式 $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ に対し, $\varphi(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$ とおくことで, 線型写像

$$\varphi: \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}^n$$

が定まる. $P \in \text{Ker}(\varphi)$ とする. このとき, $P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ である. a_1 が P の根であるので, $P(X) = (X - a_1)P_1(X)$ と分解できる. $P(a_2) = 0 = (a_2 - a_1)P_1(a_2)$ である. よって, $P_1(a_2) = 0$ となり, $P_1 = (X - a_2)P_2(X)$ と分解できる. 続いていくと, $P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_n)P_n(X)$ と表すことができる. しかし, $\deg(P) \leq n - 1$ より, $P_n = 0, P = 0$ となる. 以上より, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ であり, すなわち φ は単射である. $\dim(V_1) = \dim(V_2) = n$ より, φ は同型写像である (定理 2.20 参照). 特に, 任意の $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ に対し, $P(a_i) = b_i$ を満たす多項式 $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ が一意的に存在する. 次元を用いた以上の議論で, 手間なく P の

存在性と一意性が示せた. P の具体的な表現は以下の通りである.

$$P(X) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}.$$

2.6 正則行列

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を $m \times n$ 行列とする. M に対応する線型写像を

$$f_M: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

とおく. $\text{Im}(f_M)$ と $\text{Ker}(f_M)$ をそれぞれ単に $\text{Im}(M)$ と $\text{Ker}(M)$ と表し, M の像と核という. M が正則行列であることは, f_M が同型写像であることと同値である.

定理 2.22. M を n 次正方行列とする. 以下が同値である.

- (i) M が正則行列である.
- (ii) $\text{Ker}(M) = \{\mathbf{0}\}$ である.
- (iii) $\text{Im}(M) = \mathbb{K}^n$ である.

証明

定理 2.20 から従う.

n 次正則行列全体の集合を $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ と表す.

2.7 ランク

定義 2.23. V_1, V_2 を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする.

- (a) $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. $\text{Im}(f)$ の次元を f のランクといい, $\text{rank}(f)$ と表す.
- (b) $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. M で定まる線型写像 $f_M: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ のランクを M のランクといい, $\text{rank}(M)$ と表す. つまり, $\text{rank}(M) = \text{rank}(f_M) = \dim(\text{Im}(M))$ である.

補題 2.24. V_1, V_2 を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. W を V_1 における $\text{Ker}(f)$ の補空間とする. このとき, f を W へ制限するとことによって, 同型写像 $W \rightarrow \text{Im}(f)$ が誘導される.

証明

f の W への制限を $f': W \rightarrow V_2$ とおく. $\text{Ker}(f') = W \cap \text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ より, f' は単射である. また, $\mathbf{y} \in \text{Im}(f)$ のとき, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in V_1$) とできる. また, $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \in W, \mathbf{b} \in \text{Ker}(f)$) と書くことができる. よって, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) \in f(W)$ である. よって, $\text{Im}(f') = \text{Im}(f)$ が成り立つ. 以上より, 同型写像 $W \rightarrow \text{Im}(f)$ が得られる.

定理 2.25. V_1, V_2 を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を $\mathbb{K}$ 線型写像とする. V_1 が有限次元ならば, 以下の等式が成り立つ.

$$\dim(V_1) = \text{rank}(f) + \dim(\text{Ker}(f)).$$

証明

W を V_1 における $\text{Ker}(f)$ の補空間とする. 補題 2.24 より同型 $W \simeq \text{Im}(f)$ が存在するので, $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(W)$ である. 一方, 命題 1.37 より $\dim(V_1) = \dim(W) + \dim(\text{Ker}(f))$ である. 主張が従う.

命題 2.26. $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. M の列を $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ とおく (ただし, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{K}^m$ である). このとき, $\text{Im}(M)$ はベクトル $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ によって生成される. つまり, 以下が成り立つ.

$$\text{Im}(M) = \text{Span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n).$$

証明

$f_M: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を M で定まる線型写像とする. $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする. このとき, $f_M(\mathbf{e}_i) = \mathbf{c}_i$ である. ゆえに, $\text{Im}(M) = \text{Im}(f_M) = \text{Span}(f_M(\mathbf{e}_1), \dots, f_M(\mathbf{e}_n)) = \text{Span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ である.

命題 2.27. $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$, $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ とする.

- (1) $\text{Im}(M) = \text{Im}(MQ)$ である.
- (2) $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(PM)$ である.
- (3) $\text{rank}(M) = \text{rank}(PMQ)$ である.

証明

P, Q が正則行列だから, f_P と f_Q が同型写像である. $\text{Im}(MQ) = \text{Im}(f_{MQ}) = \text{Im}(f_M \circ f_Q)$ である. $f_Q: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ が全射だから, $\text{Im}(f_M \circ f_Q) = \text{Im}(f_M) = \text{Im}(M)$ である. 同様に, $\text{Ker}(PM) = \text{Ker}(f_{PM}) = \text{Ker}(f_P \circ f_M)$ である. f_P が単射だから $\text{Ker}(f_P \circ f_M) = \text{Ker}(f_M) = \text{Ker}(M)$ である. 明らかに, $\text{rank}(MQ) = \text{rank}(M)$ である. また, 定理 2.25 より, $\text{rank}(PM) = \text{rank}(M)$ である. よって, $\text{rank}(PMQ) = \text{rank}(PM) = \text{rank}(M)$ が成り立つ.

定理 2.28. V を有限次元ベクトル空間とし, V_1, V_2 を V の線型部分空間とする. このとき,

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

が成り立つ.

証明

以下の写像を考える.

$$f: V_1 \times V_2 \rightarrow V, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2.$$

f は線型写像であり, $\text{Im}(f) = V_1 + V_2$ である. また,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mid v_1 + v_2 = \mathbf{0}\} \\ &= \{(v, -v) \mid v \in V_1 \cap V_2\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ゆえに, 写像 $V_1 \cap V_2 \rightarrow \text{Ker}(f)$, $v \mapsto (v, -v)$ は同型写像である. 以上より

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) &= \dim(\text{Im}(f)) \\ &= \dim(V_1 \times V_2) - \dim(\text{Ker}(f)) \\ &= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

命題 2.29. V_1, V_2, V_3 を有限次元ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ と $g: V_2 \rightarrow V_3$ を線型写像. このとき, 以下が成り立つ.

$$\text{rank}(g \circ f) \leq \min\{\text{rank}(f), \text{rank}(g)\}.$$

証明

明らかに $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ であるので, $\text{rank}(g \circ f) \leq \text{rank}(g)$ である. また, $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im}(f))$ より, $\dim(\text{Im}(g \circ f)) \leq \dim(\text{Im}(f))$ である. 主張が従う.

注意 2.30. 同様に, 行列 A, B に対して $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ が成り立つ.

2.8 基底変換

2.8.1 線型写像の表現行列

V, W を有限次元ベクトル空間とし, $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$ とおく. また, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ と $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ をそれぞれ V と W の基底とする. $f: V \rightarrow W$ を線型写像とする. $1 \leq j \leq n$ に対し,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

となる $a_{ij} \in \mathbb{K}$ が一意的に定まる.

定義 2.31. 基底 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ に関する f の行列とは, 以下の行列のことをいう.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) := (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

以下の写像を考える.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

この写像は明らかに線型写像であり, 全単射である. ゆえに, 同型写像である. 特に, 以下が成り立つ.

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W)) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \dim_{\mathbb{K}}(W). \quad (2.1)$$

補題 2.32. V, V', V'' を有限次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ をそれぞれの空間の基底とする. また, $f: V \rightarrow V'$ と $g: V' \rightarrow V''$ を線型写像とする. このとき, 以下の等式が成り立つ.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

証明

以下の合成写像を考える.

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{g} V''$$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$, $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_r)$ とおく.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

$$g(e'_i) = \sum_{k=1}^r b_{ki} e''_k$$

と表す. よって,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) = \sum_{i=1}^m a_{ij} g(e'_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^r a_{ij} b_{ki} e''_k \\ &= \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} \right) e''_k \end{aligned}$$

である. よって, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f)$ の (k, j) 成分は $\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij}$ である. すなわち,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \left(\sum_{i=1}^m b_{ki} a_{ij} \right)_{k,j} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

2.8.2 基底変換行列

V を有限次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ と $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ を V の 2 つの基底とする.

定義 2.33. $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} := \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_V)$ とおき, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列という.

例 2.34. $V = \mathbb{K}^3$ とし, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ を標準基底とする. また,

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ が $\mathbb{K}^3$ の基底であることは容易に確認できる.

$$e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3$$

$$e'_2 = 2e_1 - e_2$$

$$e'_3 = e_1 + 3e_2 - e_3$$

である. よって, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列は以下の通りである.

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.9 基底変換公式

補題 2.35. $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ を 3 つの V の基底とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''}.$$

証明

補題 2.32 より

$$M_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}(\text{id}_V) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_V) M_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(\text{id}_V)$$

が成り立つ. よって, $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''}$ である.

例 2.36. $V = \mathbb{K}^3$ とし, $e_1, e_2, e_3, e'_1, e'_2, e'_3$ を例 2.34 の通りにする. また,

$$e''_1 = 2e'_1 - 3e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad e''_2 = -e'_2 + e'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e''_3 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathcal{B}'' = (e''_1, e''_2, e''_3)$ が $\mathbb{K}^3$ の基底であることが簡単な計算より分かる. 以下が成り立つ.

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -7 & 4 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''}.$$

系 2.37. $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ を V の 2 つの基底とする. $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ は正則であり, $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ が成り立つ.

証明

補題 2.35 より,

$$E_n = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$$

が成り立つ. 主張が従う.

定理 2.38. V_1, V_2 を有限次元ベクトル空間とし, $f: V_1 \rightarrow V_2$ を線型写像とする. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$ を V_1 の基底とし, $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2$ を V_2 の基底とする. このとき,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f) = P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}'_1}$$

が成り立つ.

証明

以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \text{id}_{V_1} \downarrow & & \uparrow \text{id}_{V_2} \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

上記の図式のベクトル空間にそれぞれ以下の基底を入れる.

$$\mathcal{B}'_1 \quad \mathcal{B}'_2$$

$$\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_2$$

補題 2.32 より, 以下が成り立つ.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(\text{id}_{V_2}) \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1}(\text{id}_{V_1})$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(f) &= P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}'_1} \\ &= P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}'_1}. \end{aligned}$$

2.10 相似

定義 2.39. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ を正方行列とする. A と B が相似であるとは,

$$B = PAP^{-1}$$

となる正則行列 P が存在することをいう.

定義 2.40. V を有限次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B}$ を V の 2 つの基底とする. また, $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とする. 行列 $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ を $\mathcal{B}$ に関する f の行列といい, 単に $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ と表す.

命題 2.41. V を有限次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を V の 2 つの基底とする. このとき, $\mathcal{B}$ に関する f の行列と $\mathcal{B}'$ に関する f の行列は互いに相似である.

証明

基底変換公式より

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

が成り立つ. 主張が従う.

2.11 階数標準形とランク

m, n を自然数とし, $r \leq \min\{m, n\}$ とする. $m \times n$ の行列について, 以下のような形であるときに, 階数標準形であるという.

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 2.42. A を $m \times n$ 行列とし, A のランクを r とおく. このとき, 正則行列 $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ と $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ が存在し, 以下が成り立つ.

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

証明

A に対応する線型写像 $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を考える. W を $\mathbb{K}^n$ における $\mathrm{Ker}(f)$ の補空間とし, $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ を W の基底とする. また, $(\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$ を $\mathrm{Ker}(f)$ の基底とすると, $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ が $\mathbb{K}^n$ の基底である. $\mathbb{K}^n = W \oplus \mathrm{Ker}(f)$ より, 補題 2.24 より f は同型写像 $W \rightarrow \mathrm{Im}(f)$ を誘導する. よって, $(f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_r))$ は $\mathrm{Im}(f)$ の基底であり, 特に線型独立である. ゆえに適当なベクトル $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m$ を用いて, $\mathcal{B}' = (f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_r), \mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$ という形の $\mathbb{K}^m$ の基底が取れる. $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ に関する f の表現行列は

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. $\mathcal{B}_0$ と $\mathcal{B}'_0$ をそれぞれ $\mathbb{K}^n$ と $\mathbb{K}^m$ の標準基底とする. 明らかに, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}'_0}(f) = A$ である. ゆえに, $P = P_{\mathcal{B}'_0 \rightarrow \mathcal{B}_0}^{-1}$ と $Q = P_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}}$ とおくと,

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

系 2.43. $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^t A)$ が成り立つ.

証明

$r = \mathrm{rank}(A)$ とおく. 命題 2.42 より,

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

を満たす正則行列 $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ と $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ が存在する. したがって,

$${}^t A = {}^t Q \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t P$$

となる. ${}^t P$ と ${}^t Q$ が正則行列だから, 命題 2.27 より $\mathrm{rank}({}^t A) = r$ となる.

注意 2.44. $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. 上記に系より, A の列で生成される $\mathbb{K}^m$ の線型部分空間と, A の行で生成される $\mathbb{K}^n$ の線型部分空間は同次元のベクトル空間である.

2.12 射影

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. W, W' が線型部分空間で, $V = W \oplus W'$ が成り立つとする. このとき, V の任意の元 $\mathbf{x} \in V$ が一意的に $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$ ($\mathbf{y} \in W, \mathbf{y}' \in W'$) と表される.

$$f(\mathbf{x}) := \mathbf{y}$$

とおき, 写像 $f: V \rightarrow V$ を定義する. 明らかに, f は V の自己準同型写像である. f を W' に沿った W への射影という.

定義 2.45. V の自己準同型 $f: V \rightarrow V$ が射影であるとは, $f^2 = f$ が成り立つことを言う.

命題 2.46. $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とする. 以下が同値である.

(i) $f^2 = f$ である.

(ii) $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_V) = V$ である.

また, このとき $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ が成り立ち, f は $\text{Ker}(f)$ に沿った $\text{Im}(f)$ への射影である.

証明

- (i) $\Rightarrow$ (ii) を示す: 明らかに $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f - \text{id}_V) = 0$ である. また, $x \in V$ とする. 以下のように分解できる.

$$x = (x - f(x)) + f(x)$$

である. $y := x - f(x)$ とおくと,

$$f(y) = f(x) - f(f(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

同様に,

$$(f - \text{id}_V)(f(x)) = f(f(x)) - f(x) = 0$$

であり, $f(x) \in \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ である. したがって, $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ である.

- (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す: $V = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ を仮定する. $x \in \text{Ker}(f)$ のとき, $f(x) = 0 = f^2(x)$ である. $x \in \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ のとき, $f(x) = x$ より $f^2(x) = f(x)$ である. よって, 任意の $x \in V$ に対し, $f^2(x) = f(x)$ が成り立つ. したがって, $f^2 = f$ である.
- 最後の主張を示す. f を射影とする. $x \in \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ のとき, $f(x) = x$ より $x \in \text{Im}(f)$ である. よって, $\text{Ker}(f - \text{id}_V) \subset \text{Im}(f)$ である. 逆に, $x \in \text{Im}(f)$ とし, $x = f(y)$ とする. このとき, $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ である. よって, $x \in \text{Ker}(f - \text{id}_V)$ である. このことから, f が $\text{Ker}(f)$ に沿った $\text{Im}(f)$ への射影であることが分かる.

V を有限次元ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を射影とする. $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_r)$ を $\text{Ker}(f)$ の基底とし, $\mathcal{B}_2 = (u_{r+1}, \dots, u_n)$ を $\text{Ker}(f - \text{id}_V)$ の基底とする. また, $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ と定義する. f が射影だから $\mathcal{B}$ は V の基底である. $\mathcal{B}$ に関する f の行列は以下の通りである.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

逆に, $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とし, 適当な基底 $\mathcal{B}$ に関して $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ が上記のような行列であることを仮定する. このとき,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2)$$

より, $f^2 = f$ である. したがって, f が射影である.

2.13 一次形式

V をベクトル空間とし, $W \subset V$ を線型部分空間とする.

定義 2.47. W が V の超平面であるとは, 1 次元の線型部分空間 $L \subset V$ が存在し, $V = L \oplus W$ が成り立つことを言う.

1 次元のベクトル空間を直線という. L が直線ならば, ゼロでない任意の $a \in L$ に対し $L = \text{Span}_{\mathbb{K}}(a)$ が成り立つ. よって, 写像 $\mathbb{K} \rightarrow L, \lambda \mapsto \lambda a$ は同型写像である.

定理 2.48. $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ を一次形式とする. このとき, $\text{Ker}(f)$ が V の超平面である. 逆に, W が V の超平面ならば, $W = \text{Ker}(f)$ を満たす一次形式 $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ が存在する.

証明

$\mathbf{a} \in V \setminus \text{Ker}(f)$ とする. 特に, $\varphi(\mathbf{a}) \neq 0$ である. $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathbf{a}) \oplus \text{Ker}(f)$ を示す. 明らかに, $\text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathbf{a}) \cap \text{Ker}(f) = 0$ である. また, $\mathbf{x} \in V$ のとき,

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x} - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{a})} \mathbf{a} \right) + \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{a})} \mathbf{a}$$

と書ける. $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{a})} \mathbf{a}$ とおくと,

$$\varphi(\mathbf{y}) = \varphi \left(\mathbf{x} - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{a})} \mathbf{a} \right) = \varphi(\mathbf{x}) - \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{a})} \varphi(\mathbf{a}) = 0$$

である. よって, $\mathbf{y} \in \text{Ker}(\varphi)$ が成り立つ. よって, $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathbf{a}) \oplus \text{Ker}(f)$ である.

逆に, W を超平面とし, $V = W \oplus L$ とおく. $p: V \rightarrow L$ を W に沿った L への射影とする. $\mathbf{a} \in L \setminus \{0\}$ とする. L が直線だから, 写像 $\gamma(\lambda) = \lambda \mathbf{a}$ で定まる写像 $\gamma: \mathbb{K} \rightarrow L$ は同型写像である. $f = \gamma^{-1} \circ p$ とおく. 明らかに $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(p) = W$ である.

V 上の一次形式全体のベクトル空間を V^* で表す. つまり $V^* = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ である. V が有限次元のとき,

$$\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$$

が成り立つ.

定義 2.49. $V = M_n(\mathbb{K})$ とする. n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j}$ に対し,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

とおき, A のトレースという.

明らかに, 写像 $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto \text{tr}(A)$ は一次形式である.

2.14 双対基底

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_i)_{i \in I}$ を V の基底とする. $i \in I$ に対し, 以下を満たす一次形式 $\mathbf{e}_i^* \in V^*$ が一意的に存在する.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_i) &= 1 \\ \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) &= 0 \quad (j \neq i) \end{aligned}$$

つまり, 全ての $i, j \in I$ に対し, $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$ である.

命題 2.50. 族 $(\mathbf{e}_i^*)_{i \in I}$ は V^* において線型独立である.

証明

$\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_{i_j}^* = 0$ ($\lambda_j \in \mathbb{K}, i_j \in I$) とする. $1 \leq k \leq n$ とする. この一次形式をベクトル $\mathbf{e}_{i_k}$ に適用すると, $\lambda_k = 0$ であることが分かる. よって, $(\mathbf{e}_i^*)_{i \in I}$ は線型独立である.

しかし, $(\mathbf{e}_i^*)_{i \in I}$ は V^* の生成系であるとは限らない (V が無限次元ならば, $(\mathbf{e}_i^*)_{i \in I}$ は決して生成系でない). V を有限次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を V の基底とする ($n = \dim(V)$ とおく). 上記の命題より $\mathcal{B}^* = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*)$ が V^* において線型独立である. $\dim(V^*) = \dim(V)$ より, $\mathcal{B}^*$ が V^* の基底である.

定義 2.51. B^* を B の双対基底という.

逆に, $C = (u_1, \dots, u_n)$ を V^* の基底とする. $B^* = C$ を満たす V の基底の存在について調べる. $B^* = C$ を満たす基底を antidual という (「反双対基底」).

まず, V を一般のベクトル空間とする (無限次元でも良い).

$$V^{**} := (V^*)^*$$

とおき, V の二重双対空間という. $x \in V$ ならば, 写像 $V^* \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto f(x)$ は明らかに線型写像である. この写像を $\varphi(x)$ とおくと, 写像

$$\varphi: V \rightarrow V^{**}$$

が定まる.

補題 2.52.

- (1) $\varphi: V \rightarrow V^{**}$ が単射である.
- (2) V が有限次元ならば, φ が同型写像である.

証明

- (1) を示す. $x \in \text{Ker}(\varphi)$ とし, $x \neq 0$ とする. W を $\text{Span}_{\mathbb{K}}(x)$ の補空間とする. $\ker(f) = W$ を満たす一次形式 $f \in V^*$ が存在する. $x \notin W$ より, $f(x) \neq 0$. よって $\varphi(x)(f) \neq 0$ となり, 矛盾する. したがって, $\text{Ker}(\varphi) = 0$ であり, φ が単射である.
- (2) を示す. V が有限次元ならば, $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$ である. 定理 2.20 より φ は全単射である.

命題 2.53. V を有限次元ベクトル空間とし, $C = (u_1, \dots, u_n)$ を V^* の基底とする. このとき, $B^* = C$ となる V の基底が存在する.

証明

$C^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ を C の双対基底とする. つまり, $u_i^* \in V^{**}$ であり, $u_i^*(u_j) = \delta_{i,j}$ が成り立つ. φ が同型写像より, $u_i^* = \varphi(v_i)$ を満たす $v_i \in V$ が存在する. $B = (v_1, \dots, v_n)$ とおき, $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ を B の双対基底とする. 以下が成り立つ.

$$u_i(v_j) = \varphi(v_j)(u_i) = u_i^*(u_i) = \delta_{i,j} = v_i^*(v_j)$$

である. ゆえに, $u_i = v_i^*$ である.

命題 2.54. V を有限次元ベクトル空間とし, $f_1, \dots, f_k$ を V 上の一次形式とする. このとき, 任意の一次形式 $f \in V^*$ に対し, 以下が成り立つ.

$$f \in \text{Span}(f_1, \dots, f_k) \iff \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f).$$

証明

- 「 $\implies$ 」を示す. $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ ($\lambda_i \in \mathbb{K}$) とする. 明らかに, $f_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) ならば, $f(x) = 0$ である. よって, $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f)$ である.
- 「 $\impliedby$ 」を示す. $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_r}\}$ を $\text{Span}(f_1, \dots, f_k)$ の基底とする. (1) より, $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) = \bigcap_{j=1}^r \text{Ker}(f_{i_j})$ である. よって, $(f_1, \dots, f_k)$ が線型独立であると仮定して良い. $C = (f_1, \dots, f_n)$ が基底をなすような一次形式 $(f_{k+1}, \dots, f_n)$ を考える. また, $B = (e_1, \dots, e_n)$ を C の antidual 基底とする. つまり, $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$ である. $f \in V^*$ とし, $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ とする. また, $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f)$ とする. このとき, $j = k+1, \dots, n$ ならば $e_j \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)$ であるので,

$f(\mathbf{e}_j) = 0$. よって, $j = k + 1, \dots, n$ に対し $\lambda_j = 0$ である. 以上より $f \in \text{Span}(f_1, \dots, f_k)$ が成り立つ.

3 連立一次方程式

3.1 行列の基本変形

3.1.1 基本行列

n を自然数とする. 以下の (a), (b), (c) では 3 種類の基本行列を定義する.

- (a) $1 \leq i, j \leq n$ に対し, (i, j) 成分が 1 で, 他の成分が全て 0 である n 次正方行列を $\epsilon_{i,j}$ とおく. また, $i \neq j$ のとき, $U_{i,j}(\lambda) := E_n + \lambda \epsilon_{i,j}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) と定義する. すなわち, $i < j$ か $i > j$ によって以下のような形の行列である.

$$U_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \lambda \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad U_{i,j}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & \lambda & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$U_{i,j}(\lambda)$ で定まる線型写像 $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ は $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_i + \lambda x_j, \dots, x_n)$ である.

- (b) $1 \leq i \leq n$ とし, $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ とする. 対角行列で, 第 i 対角成分が λ で, 他の対角成分が全て 1 である n 次正方行列を $D_i(\lambda)$ とおく. すなわち

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$D_i(\lambda)$ で定まる線型写像 $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ は $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n)$ である.

- (c) $1 \leq i < j \leq n$ とする. ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ の第 i 成分と第 j 成分を入れ換える線型写像を考える. その表現行列は以下の通りである.

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & 1 & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

上記の行列 $U_{i,j}(\lambda)$, $D_i(\lambda)$, $T_{i,j}$ を基本行列という. 行列のサイズを明記する必要があるとき, $U_{i,j}^{(n)}(\lambda)$, $D_i^{(n)}(\lambda)$, $T_{i,j}^{(n)}$ と表す場合がある. 以下の命題は容易に確認できる.

命題 3.1. 基本行列は全て正則行列である. さらに,

$$U_{i,j}(\lambda)^{-1} = U_{i,j}(-\lambda), \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1}), \quad T_{i,j}^{-1} = T_{i,j}.$$

特に, 基本行列の逆行列は基本行列である. また, 基本行列の転置行列も基本行列である. さらに,

$${}^t U_{i,j}(\lambda) = U_{j,i}(\lambda), \quad {}^t D_i(\lambda) = D_i(\lambda), \quad {}^t T_{i,j} = T_{i,j}.$$

3.1.2 基本変形

以下の行列を考える.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

A の基本変形とは, A に左右から基本行列をかける操作のことをいう. A に基本変形を行うことによって, A のランク, 像, 核などが計算できる.

■列に関する基本変形

右から A に基本行列 $U_{i,j}^{(n)}(\lambda)$, $D_i^{(n)}(\lambda)$, $T_{i,j}^{(n)}$ をかけることで, 以下の通り新しい行列が得られる.

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ とし, $1 \leq i, j \leq n$ ($i \neq j$) とする. A の第 j 列に A の第 i 列の λ 倍を足した行列:

$$AU_{i,j}^{(n)}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} + \lambda a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} + \lambda a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(b) $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ のとき, A の第 i 列を λ 倍にした行列:

$$AD_i^{(n)}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(c) A の第 i 列と第 j 列を入れ換えた行列:

$$AT_{i,j}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

上のような操作を列に関する A の基本変形 (または列基本変形) という.

■行に関する基本変形

左から A に基本行列 $U_{i,j}^{(m)}(\lambda)$, $D_i^{(m)}(\lambda)$, $T_{i,j}^{(m)}$ をかけることで, 以下の通り新しい行列が得られる.

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ とし, $1 \leq i, j \leq m$ ($i \neq j$) とする. A の第 i 行に A の第 j 行の λ 倍を足した行列:

$$U_{i,j}^{(m)}(\lambda)A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(b) $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ のとき, A の第 i 行を λ 倍にした行列:

$$D_i^{(m)}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(c) A の第 i 行と第 j 行を入れ換えた行列：

$$T_{i,j}^{(m)} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

上の操作を行に関する A の基本変形 (または行基本変形) という。

命題 3.2. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする。

- (1) A に有限回の列基本変形を行って得た行列を A_1 とおく。このとき, $\text{Im}(A) = \text{Im}(A_1)$ が成り立つ。
- (2) A に有限回の行基本変形を行って得た行列を A_2 とおく。このとき, $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A_2)$ が成り立つ。

証明

基本行列が正則だから, $A_1 = AP$ を満たす正則行列 P が存在する。よって, $\text{Im}(A_1) = \text{Im}(A)$ となる。同様に $A_2 = QA$ を満たす正則行列 Q が存在する。よって, $\text{Ker}(A_2) = \text{Ker}(A)$ となる。

3.2 連立一次方程式と行列

a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) を $\mathbb{K}$ の元とする。また, $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{K}$ とする。以下のような連立方程式を連立一次方程式という。

$$(E) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = y_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = y_m \end{cases}$$

以下の行列を考える。

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

また,

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

とおくと, 連立一次方程式 (E) を以下のように表すことができる。

$$(E') \quad A\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

3.3 行階段形

定義 3.3. 行列 $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ が行階段形であるとは, 以下の条件を満たす増加列 $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ (ただし $1 \leq k \leq m$) が存在するときという。

- (a) 任意の $i = 1, \dots, k$ に対して, $a_{i,j_i} = 1$ であり, $a_{i,j} = 0$ ($j < j_i$) が成り立つ。

(b) 任意の $i > k$ に対して, A の第 i 行は零行ベクトルである.

成分 (i, j_i) を行階段形行列 A の主成分という. つまり, 行階段形の行列は以下のような形を持つ (行列に現れない成分は全て 0 である).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & * \\ & & & & & & 1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & * \\ & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ & & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \dots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

また, 上記の行列では各主成分 (i, j_i) の上にある成分が全て 0 のとき, A を行簡約階段形という.

例 3.4. 以下の行列は行階段形である:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の行列は行簡約階段形である:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -4 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 9 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

命題 3.5. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. A に行基本変形を行うことによって行簡約階段形へと変換できる.

証明

A が零行列ならば明らかであるので, $A \neq 0_{m,n}$ と仮定して良い. A の第 j 列が零列ベクトルでないような最小の $j \geq 1$ を j_1 とおく. このとき, $a_{i,j_1} \neq 0$ を満たす i が存在する. 以下の操作を行う.

- A の第 1 行と第 i 行を入れ換えることで, $(1, j_1)$ 成分がゼロでないような行列 B が得られる.
- B の第 1 行を $\frac{1}{a_{i,j_1}}$ 倍にすることで, $(1, j_1)$ 成分が 1 であるような行列 C が得られる.
- $C = (c_{i,j})_{i,j}$ とおく. 全ての $i = 2, 3, \dots, m$ に対し, C の第 i 行に第 1 行の $-c_{i,j_1}$ 倍を足すことによって, 全ての (i, j_1) 成分 ($i = 2, \dots, m$) がゼロであり, $(1, j_1)$ 成分が 1 であるような行列 D が得られる. すなわち, D は以下のような形の行列である.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{array} \right)$$

- 上の行列の右下の $(m-1, n-j_1)$ 型のブロックに上記の操作を繰り返して行う. このブロックの第 k 列が零ベクトルでない最小の k を j'_1 とおく. $j_2 = j_1 + j'_1$ とおく. 以下のような行列 E が得られる.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{array} \right)$$

- $E = (e_{i,j})_{i,j}$ とおく. 第 1 行に第 2 行の $-e_{1,j_2}$ 倍を足す操作を行うと, 成分 $(2, j_2)$ の上にある成分 $(1, j_2)$ がゼロである行列 F が得られる.
- このプロセスを繰り返して行うことで, 有限回のステップで行簡約階段形へと変換できる.

例題 3.6. 基本変形を行うことで以下の行列を行簡約階段形へ変換せよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

以下の基本変形を行う：

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & -7 & -8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(7)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 34 & -38 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_3(1/34)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \end{pmatrix}$$

上記の行列は行階段形である．以下のような行基本変形を行うと行簡約階段形へと変換することもできる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,2}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 16 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,3}(-6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -15 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,3}(15)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{17} \end{pmatrix}$$

命題 3.7. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を行階段形の行列とする．このとき、以下が成り立つ．

- (1) A の零でない行の数を r とおく． $\text{Im}(A) = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ (ただし, $\{\mathbf{e}_i\}$ は標準基底である)．
- (2) 特に, A のランクは r である．

証明

明らかに, $\text{Im}(A) \subset \text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ ．また, $1 \leq i \leq r$ とし, 主成分 (i, j_i) を考える． i に関する帰納法によって, 全ての $1 \leq i \leq r$ に対し $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i \in \text{Im}(A)$ であることを示す． $i = 1$ のとき, $A\mathbf{e}_{j_1} = \mathbf{e}_1$ が成り立つので, $\mathbf{e}_1 \in \text{Im}(A)$ ． $1 < i \leq r$ とする．同様に, $A\mathbf{e}_{j_i} = \mathbf{e}_i + \mathbf{v}_i$ ($\mathbf{v}_i \in \text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1})$) と書くことができる．帰納法の仮定より, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1} \in \text{Im}(A)$ が成り立つ．ゆえに $\mathbf{v}_i \in \text{Im}(A)$ である．したがって, $\mathbf{e}_i \in \text{Im}(A)$ である．主張が従う．

3.4 連立一次方程式の解き方

3.4.1 斉次連立一次方程式

$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とし, 以下の連立一次方程式を考える．

$$(E_A) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$$

このような連立一次方程式は斉次であるという．このとき,

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ が } (E_A) \text{ を満たす } \iff \mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$$

が成り立つ．以下は斉次連立一次方程式の解答方法を説明する．

- (1) A に行基本変形を行い, 行簡約階段形へ変換する．基本変形を行って得た行簡約階段形の行列を B とおく．行基本変形を行うとき核が変わらないので, $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(B)$ である．とくに, 方程式 (E_A) と (E_B) の解は同じである．

(2) $B = (b_{ij})_{i,j}$ とおく. B の主成分を (i, j_i) と書く (ただし, $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ である).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (3.1)$$

とする. このとき,

$$\mathbf{x} \in \text{Ker}(B) \iff \forall i = 1, \dots, r \quad \text{に対し, } x_{j_i} = - \sum_{j > j_i} b_{ij} x_j.$$

$j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ とする. $\gamma(j) \in \{0, 1, \dots, r\}$ を以下のように定義する.

- $j_1 < j < j_r$ のとき, $j_i < j < j_{i+1}$ となる i がただ一つ存在する. $\gamma(j) := i$ とおく.
- $j < j_1$ のとき $\gamma(j) = 0$ とおく.
- $j_r < j$ のとき $\gamma(j) = r$ とおく.

以下のベクトルを考える.

$$\mathbf{v}_j := \mathbf{e}_j - \sum_{k=1}^{\gamma(j)} b_{kj} \mathbf{e}_{j_k}. \quad (3.2)$$

B が行簡約階段形であるので, 全ての $1 \leq i \leq r$ に対し $B\mathbf{e}_{j_i} = \mathbf{e}_i$ が成り立つ. よって, 任意の $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ に対し

$$\begin{aligned} B\mathbf{v}_j &= B\mathbf{e}_j - \sum_{k=1}^{\gamma(j)} b_{kj} B\mathbf{e}_{j_k} \\ &= B\mathbf{e}_j - \sum_{k=1}^{\gamma(j)} b_{kj} \mathbf{e}_k = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ゆえに, $\mathbf{v}_j \in \text{Ker}(B)$ である. 以上より, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \text{ が } (E_A) \text{ を満たす} &\iff \mathbf{x} \in \text{Ker}(A) \\ &\iff \mathbf{x} \in \text{Ker}(B) \\ &\iff \mathbf{x} = \sum_{j \notin \{j_1, \dots, j_r\}} x_j \mathbf{v}_j. \end{aligned}$$

命題 3.8. $\{\mathbf{v}_j\}_j$ は $\text{Ker}(A)$ の基底をなす (ただし j は集合 $\{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_r\}$ を走る).

証明

$\mathbf{v}_j \in \text{Ker}(B) = \text{Ker}(A)$ は既に確認された. また, 以上より $\{\mathbf{v}_j\}_{j \notin \{j_1, \dots, j_r\}}$ が $\text{Ker}(A)$ を生成することも分かる. 最後に, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rank}(A) = n - r$ より, $\{\mathbf{v}_j\}_{j \notin \{j_1, \dots, j_r\}}$ が $\text{Ker}(A)$ の基底をなす.

例題 3.9. 以下の行列の核の基底を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

以下の基本変形を行う.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,1}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -14 & -15 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{T_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 39 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_3(\frac{1}{16})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} \end{pmatrix}$$

上記の行列は行階段形である。以下の行基本変形を行うと行簡約階段形へと変換できる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,3}(-8)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{17}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} \end{pmatrix}$$

よって、以下が成り立つ。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 = -\frac{17}{8}x_5 \\ x_4 = -\frac{39}{16}x_5 \end{cases} \iff \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2x_2 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_2 \\ -\frac{17}{8}x_5 \\ -\frac{39}{16}x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{17}{8} \\ -\frac{39}{16} \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、ベクトル

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{17}{8} \\ -\frac{39}{16} \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\text{Ker}(A)$ の基底をなす。

3.4.2 非斉次連立一次方程式

$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とし、以下の連立一次方程式を考える。

$$(E) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = y_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = y_m. \end{cases}$$

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ をそれぞれ以下のベクトルとする。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{y}$ を固定し、変数 $\mathbf{x}$ に関する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を満たす解全体の集合を $\mathcal{S}(A, \mathbf{y})$ とおく。つまり、

$$\mathcal{S}(A, \mathbf{y}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{y}\} \quad (3.3)$$

と定める。

命題 3.10.

- (1) $\mathcal{S}(A, \mathbf{y}) \neq \emptyset \iff \mathbf{y} \in \text{Im}(A)$ である。
- (2) $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$ を仮定し、 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}(A, \mathbf{y})$ とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\mathcal{S}(A, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \text{Ker}(A)\}.$$

証明

(1) は明らかである. (2) を示す. $\mathbf{v} \in \text{Ker}(A)$ とすると, $A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{v} = \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y}$ であり, $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$ は (E) の解となる. 逆に, $\mathbf{x}$ を (E) の解とする. このとき, $A\mathbf{x} = \mathbf{y} = A\mathbf{x}_0$ より, $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ が成り立つ. よって, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \text{Ker}(A)$ であるので, $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \in \text{Ker}(A)$) の形のベクトルである.

$\mathbf{x}_0$ を非斉次連立一次方程式 (E) の特殊解という. 以下の行列を考える.

$$A' := (A \mid \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array} \right) \in M_{m,n+1}(\mathbb{K})$$

つまり, 行列 A にベクトル $\mathbf{y}$ を付け加えた行列である. A' に行基本変形を行うことで, A' を以下のような形の行列へと変換できる.

$$B' = (B \mid \mathbf{z}) \quad \text{ただし, } \mathbf{z} \in \mathbb{K}^m, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}), B \text{ は行簡約階段形である.}$$

特に, 正則行列 $P \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$ が存在し, $B' = PA'$ が成り立つ. よって, $B = PA$ かつ $\mathbf{z} = P\mathbf{y}$ である. ゆえに,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \mathcal{S}(A, \mathbf{y}) &\iff A\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ &\iff PA\mathbf{x} = P\mathbf{y} \\ &\iff B\mathbf{x} = \mathbf{z} \\ &\iff \mathbf{x} \in \mathcal{S}(B, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって $\mathcal{S}(A, \mathbf{y}) = \mathcal{S}(B, \mathbf{z})$ である. ベクトル $\mathbf{z}$ の成分を $z_1, \dots, z_m$ とおく. また, B のランクを r とおく ($B = PA$ より A のランクも r であることに注意する). B が行階段形であるので, 命題 3.16 より $\text{Im}(B) = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ である. したがって, 以下の補題が分かる.

補題 3.11. 非斉次連立一次方程式 (E) が解を持つためには「全ての $i > r$ に対し $z_i = 0$ である」ことは必要十分である.

全ての $i > r$ に対し $z_i = 0$ であることを仮定する. このとき, (E) の特殊解 $\mathbf{x}_0$ を次のように求められる. 行簡約階段形行列 B の主成分を (i, j_i) ($i = 1, \dots, r$) と書く. 以下のベクトルは (E) を満たす.

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^r z_i \mathbf{e}_{j_i}.$$

実際に, $B\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^r z_i B\mathbf{e}_{j_i} = \sum_{i=1}^r z_i \mathbf{e}_i = \mathbf{z}$ が成り立つ. よって, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}(B, \mathbf{z}) = \mathcal{S}(A, \mathbf{y})$ である.

例題 3.12. 以下の非斉次連立一次方程式の解を求めよ.

$$(E) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases} \quad (3.4)$$

解答: 上記の連立一次方程式で定まる行列を A とおく. すなわち

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

また, 以下の行列を考える.

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

例題 3.9 で A の行簡約階段形が計算された. 同じ基本変形を行列 A' に行う.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,1}(1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & -2 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,1}(-3)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -14 & -15 & -10 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{T_{2,3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{D_2(-1)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 4 & 4 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(5)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 39 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{D_3(\frac{1}{16})} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} & \frac{7}{8} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,2}(2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} & \frac{7}{8} \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,3}(-2)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{17}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} & \frac{7}{8} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,3}(-8)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{17}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{39}{16} & \frac{7}{8} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

したがって, (E) の特殊解として以下のベクトルが取れる.

$$\mathbf{x}_0 := 0\mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_3 + \frac{7}{8}\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 3.9 で $\text{Ker}(A)$ の基底が求められた. したがって, 非斉次連立一次方程式 (E') の全ての解は以下の通りである.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{17}{8} \\ -\frac{39}{16} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{K}.$$

3.5 $\text{Im}(A)$ の基底の求め方

定義 3.13. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. A の転置行列 tA が行階段形であるときに, A が列段階形であるという. 同様に, tA が行簡約階段形であるときに, A が列簡約段階形であるという.

例 3.14. 例えば, 以下の行列は列段階形である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

命題 3.15. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. 列基本変形を行うことで, A を列簡約段階形へと変形できる.

証明

命題 3.5 を転置行列 tA に適用すると, 行基本変形を用いて tA を行簡約階段形へと変形できる. よって, 行簡約階段形の行列 B と基本行列の積である行列 P が存在し, ${}^tA = BP$ と書ける. よって, $A = {}^tP {}^tB$ が成り立つ. 基本行列の転置行列は基本行列であるので, tP は基本行列の積である. また, tB は列簡約階

段形の行列である．主張が従う．

命題 3.16. $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を行階段形の行列とし, B の零でない列の数を r とおく．以下が成り立つ．

- (1) B の第 i 列を $\mathbf{c}_i$ とおく． $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r)$ は $\text{Im}(B)$ の基底である．
- (2) 特に, B のランクは r である．

証明

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を標準基底とする． $\mathbf{c}_i = B\mathbf{e}_i$ であるので, $\text{Im}(B) = \text{Span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_r)$ である．命題 3.16 より $\text{rank}(B) = \text{rank}({}^t B) = r$ である．主張が従う．

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする．列基本変形を行って得た列簡約行列を B とおく．列基本変形を行うとき行列の像が変わらないので, $\text{Im}(A) = \text{Im}(B)$ である．上記の命題より, ゼロでない B の列全体は $\text{Im}(B) = \text{Im}(A)$ の基底をなす．

注意 3.17. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする． $\text{rank}(A) = n$ のとき, 基本変形などを行わずに直接 $\text{Im}(A)$ の基底が分かる．なぜならば, A の列を $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$ とおくと, これらが $\text{Im}(A)$ を生成するので, $\text{rank}(A) = n$ という仮定より, $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ は $\text{Im}(A)$ の基底をなす．

3.6 逆行列の計算方法

A を n 次正方行列とする． A が正則かどうかを調べる方法と, 正則の場合は A の逆行列の求め方を説明する．

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とおき, 斉次連立一次方程式

$$(E): \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

を考える．§3.4.1 のプロセスを行う．行基本変形を行い, A を行階段形の行列 B へと変換する． B が行階段形だから, そのランクは直ちに読み取ることができる． $\text{rank}(B) = n$ ならば, $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ より A が正則行列である． $\text{rank}(B) < n$ ならば, A は正則でない．

以下は, A が正則であるとし, A の逆行列の計算方法を説明する．以下の $(n, 2n)$ 型行列を考える．

$$A' := (A \mid E_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & & & & 1 \end{array} \right) \in M_{n,2n}(\mathbb{K})$$

A が正則より, 行基本変形を行うことで, A' を以下のような行列へと変換できる．

$$B' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & 1 & & & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$$

つまり, 基本変形を用いて, 左の $n \times n$ ブロック行列を単位行列へと変換する．この操作を行ったときの右 $n \times n$ ブロック行列を $(b_{ij})_{i,j}$ と書く．行った基本変形に対応する基本行列の積を P とおくと, $PA' = B'$ が成り立つ．よって, $PA = E_n$ かつ $PE_n = (b_{ij})_{i,j}$ が成り立つ．したがって, 以下が示された．

$$A^{-1} = (b_{ij})_{i,j}.$$

注意 3.18. 上記のプロセスを以下の2つのステップに分けた計算方法もある.

(1) まず, A に行基本変形を行い, 単位行列 E_n へと変換する.

(2) 単位行列から始めて, ステップ (1) で使われた基本変形 E_n に行う.

ステップ (2) から得た行列は A の逆行列である.

以下の例では, 逆行列を計算するアルゴリズムを正確に説明する.

例題 3.19. 以下の行列が正則かどうかを判定せよ. 正則ならば A の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

以下の基本変形を行う.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{T_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,1}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & -8 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,1}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & -8 & 3 \\ 0 & 17 & -13 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{T_{2,4}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 9 & -8 & 3 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 9 & -8 & 3 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(-9)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 19 & -42 \\ 0 & 20 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,2}(-20)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 19 & -42 \\ 0 & 0 & 57 & -102 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,3}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 19 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_3(1/19)} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{42}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_4(1/24)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{42}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上記の行列は行階段形であり, そのランクは4である. ゆえに, A は正則行列である. 基本変形を行い, 単位行列へと変換する.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{42}{19} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,4}(\frac{42}{19})} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,4}(-5)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,3}(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,2}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

次に単位行列 E_4 から始めて上記の基本変形を行う.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{T_{1,3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,1}(-5)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,1}(-4)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,3}(-2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{T_{2,4}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_2(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,2}(-9)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -17 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,2}(-20)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -17 & 0 & -2 & 9 \\ -40 & 1 & -5 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{4,3}(-3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -17 & 0 & -2 & 9 \\ 11 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_3(1/19)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{17}{19} & 0 & -\frac{2}{19} & \frac{9}{19} \\ 11 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{D_4(1/24)} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{17}{19} & 0 & -\frac{2}{19} & \frac{9}{19} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{3,4}(42/19)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{9}{76} & \frac{7}{76} & \frac{-1}{76} & \frac{-13}{76} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,4}(-5)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-7}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{11}{24} \\ \frac{9}{76} & \frac{7}{76} & \frac{-1}{76} & \frac{-13}{76} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{2,3}(3)} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{29}{456} & \frac{31}{456} & \frac{-113}{456} & \frac{-25}{456} \\ \frac{9}{76} & \frac{7}{76} & \frac{-1}{76} & \frac{-13}{76} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,3}(-2)} \begin{pmatrix} \frac{-9}{38} & \frac{-7}{38} & \frac{39}{38} & \frac{13}{38} \\ \frac{29}{456} & \frac{31}{456} & \frac{-113}{456} & \frac{-25}{456} \\ \frac{9}{76} & \frac{7}{76} & \frac{-1}{76} & \frac{-13}{76} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行}]{U_{1,2}(4)} \begin{pmatrix} \frac{1}{57} & \frac{5}{57} & \frac{2}{57} & \frac{7}{57} \\ \frac{29}{456} & \frac{31}{456} & \frac{-113}{456} & \frac{-25}{456} \\ \frac{9}{76} & \frac{7}{76} & \frac{-1}{76} & \frac{-13}{76} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

したがって、 A の逆行列は以下の通りである。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{57} & \frac{5}{57} & \frac{2}{57} & \frac{7}{57} \\ \frac{29}{456} & \frac{31}{456} & \frac{-113}{456} & \frac{-25}{456} \\ \frac{9}{76} & \frac{7}{76} & \frac{-1}{76} & \frac{-13}{76} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & -\frac{7}{24} \end{pmatrix}.$$

4 行列式

4.1 多重線型形式

定義 4.1. $V_1, \dots, V_n, W$ を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $\varphi: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ を写像とする. φ が n -重線型写像であるとは, 任意の $(y_1, \dots, y_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ と任意の $1 \leq i \leq n$ に対して, 写像

$$V_i \rightarrow W, \quad x_i \mapsto \varphi(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

が線型写像であることをいう. $W = \mathbb{K}$ のとき, f を n -重線型形式という. また, $n = 2$ の場合, f を双線型写像という.

n -重線型写像 $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ 全体の集合を

$$\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; W)$$

とおく. $\varphi, \varphi' \in \text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; W)$ で, $a, b \in \mathbb{K}$ ならば, $\varphi + \lambda\varphi'$ も n -重線型写像である. ゆえに, $\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; W)$ は $\mathbb{K}$ ベクトル空間である.

例 4.2. $V = \mathbb{K}^4$ とおく. i, j, k を $\{1, 2, 3, 4\}$ のいずれかとする. 以下の写像 $f: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ は 3-重線型である.

$$f: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_i y_j z_k$$

定理 4.3. $V_1, \dots, V_n, W$ を有限次元ベクトル空間とする.

$$\dim(\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; W)) = \dim(W) \times \prod_{i=1}^n \dim(V_i).$$

証明

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ を W の基底とし, $\mathcal{B}$ に関する $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ の第 k 成分を $\varphi_k(x_1, \dots, x_n)$ とおく. 明らかに φ が n -重線型である $\iff$ 全ての成分写像 φ_k が n -重線型である. ゆえに,

$$\dim(\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; W)) = \dim(W) \times \dim(\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; \mathbb{K})).$$

よって, $\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; \mathbb{K})$ の次元を計算すれば良い. 全ての $j = 1, \dots, n$ に対して, $d_j = \dim(V_j)$ とおき, V_j の基底 $(e_i^{(j)})_{1 \leq i \leq d_j}$ を固定する. $(s_1, \dots, s_n)$ を $1 \leq s_j \leq d_j$ を満たす列とし,

$$e_{s_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{s_n}^{(n)}: \left(\sum_{i_1=1}^{d_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \dots, \sum_{i_n=1}^{d_n} x_{i_n}^{(n)} e_{i_n}^{(n)} \right) \mapsto \prod_{j=1}^n x_{s_j}^{(j)}$$

とおくことによって写像 $e_{s_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{s_n}^{(n)}: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{K}$ を定義する. 明らかに, $e_{s_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{s_n}^{(n)}$ は n -重線型写像である.

$e_{s_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{s_n}^{(n)}$ という形の n -重線型写像が $\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; \mathbb{K})$ の生成系をなすことを示す. $\varphi: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{K}$ を n -重線型写像とする. このとき,

$$\varphi \left(\sum_{i_1=1}^{d_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \dots, \sum_{i_n=1}^{d_n} x_{i_n}^{(n)} e_{i_n}^{(n)} \right) = \sum_{i_1=1}^{d_1} \dots \sum_{i_n=1}^{d_n} \varphi(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_n}^{(n)}) \prod_{j=1}^n x_{i_j}^{(j)}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\varphi = \sum_{i_1=1}^{d_1} \dots \sum_{i_n=1}^{d_n} \varphi(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_n}^{(n)}) e_{i_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i_n}^{(n)}$$

となり, 生成することが分かる.

次に, $e_{s_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{s_n}^{(n)}$ が $\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; W)$ において線型独立であることを示す. $\gamma(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{K}$ を用いて,

$$0 = \sum_{i_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{d_n} \gamma(i_1, \dots, i_n) e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}$$

と書けると仮定する. $(s_1, \dots, s_n)$ を $1 \leq s_j \leq d_j$ を満たす列とすると,

$$e_{i_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}^{(n)}(e_{s_1}, \dots, e_{s_n}) = \prod_{j=1}^n \delta_{i_j, s_j}$$

である. よって, $0 = \gamma(s_1, \dots, s_n)$ となる. したがって, $e_{s_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{s_n}^{(n)}$ は線型独立である. 以上より, $e_{s_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{s_n}^{(n)}$ は $\text{Mult}_n(V_1, \dots, V_n; \mathbb{K})$ の基底をなす. 主張が従う.

4.2 交代線型形式

定義 4.4. V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $\varphi: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を n -重線型写像とする. φ が交代線型形式であるとは, 以下を満たすときにいう.

$$x_i = x_j \text{ なる } i \neq j \text{ が存在するならば, } \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ である.}$$

例 4.5. $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ とする. 写像

$$\varphi: (f, g) \mapsto f(0)g(1) - f(1)g(0)$$

は交代双線型形式 $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ である.

V 上の交代 n -重線型形式 $V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ 全体の集合を $\text{Alt}_n(V, \mathbb{K})$ で表す. 明らかに, $\text{Alt}_n(V, \mathbb{K})$ は $\text{Mult}_n(V, \dots, V, \mathbb{K})$ の線型部分空間である.

補題 4.6. $\varphi: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を n -重線型形式とする. 以下が同値である.

- (i) φ が交代線型形式である.
- (ii) 任意の $i < j$ に対して $\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ が成り立つ.
- (iii) 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \text{sgn}(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_n)$ が成り立つ.

証明

- (i) $\implies$ (ii) を示す: φ が交代線型形式であると仮定する. このとき,

$$0 = \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n)$$

が成り立つ. 双線型性を用いて上記の式を展開する. $0 = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)$ かつ $0 = \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n)$ が成り立つので, (ii) の等式が分かる.

- (ii) $\implies$ (i) を示す: 逆に, (ii) を仮定する. $x_i = x_j = x$ を (ii) に代入すると, $\varphi(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = -\varphi(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n)$ となる. よって, $\varphi(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_n) = 0$ である. したがって, φ が交代線型形式.
- (ii) $\implies$ (iii) を示す. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が互換の積 $\sigma = t_1 \dots t_m$ と分解できる. (ii) より, 任意の $k = 1, \dots, m$ に対し

$$\varphi(x_{t_k(1)}, \dots, x_{t_k(n)}) = -\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ. 故に, 帰納法を用いて, 以下が分かる.

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= (-1)^m \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- (iii) $\implies$ (ii) : σ を互換 $(i\ j)$ とすると分かる.

補題 4.7. $\varphi: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を交代 n -重線型形式とする. $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ を V の元の n 組とする. $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ が線型従属ならば

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = 0$$

である.

証明

$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ が線型従属ならば, $\mathbf{x}_i$ の一方がベクトル $\mathbf{x}_j$ ($j \neq i$) の一次結合と表せる. $i = 1$ と仮定して良い. このとき, $\mathbf{x}_1 = \sum_{j=2}^n a_j \mathbf{x}_j$ となる $a_j \in \mathbb{K}$ が存在する. ゆえに

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{j=2}^n a_j \varphi(\mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_n) = 0.$$

4.3 行列式の定義

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ を $\mathbb{K}^n$ のベクトルとし, $\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ とおく.

定義 4.8. ベクトル $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{K}^n$ について,

$$\det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$$

とおき, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ の行列式という.

例 4.9. $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}$ のとき, $\det(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}$ となる.

一般に, V を n 次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を V の基底とする. $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ とする. 基底 $\mathcal{B}$ に関する $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ の行列式を次のように定義する. $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} \mathbf{e}_i$ ($x_{ij} \in \mathbb{K}$) と一意的に表せる. このとき,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det \left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

と定める.

定理 4.10. 行列式 $\det$ は交代 n -重線型形式 $\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ である. 同様に, $\mathcal{B}$ が n 次元ベクトル空間 V の基底ならば, $\det_{\mathcal{B}}$ は交代 n -重線型形式 $V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ である.

証明

一つ目の主張のみ示せば十分である. $\tau \in \mathfrak{S}_n$ とする.

$$\det(\mathbf{x}_{\tau(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{1\tau(\sigma(1))} \cdots x_{n\tau(\sigma(n))}$$

$\sigma' = \tau\sigma$ とおくと, $\sigma \mapsto \sigma'$ は $\mathfrak{S}_n$ から自分自身への全単射である. よって

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) x_{1\tau(\sigma(1))} \cdots x_{n\tau(\sigma(n))} &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\tau^{-1}\sigma') x_{1\sigma'(1)} \cdots x_{n\sigma'(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma') x_{1\sigma'(1)} \cdots x_{n\sigma'(n)} \\ &= \text{sgn}(\tau) \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

補題 4.6 より $\det$ は交代 n 重線型形式である.

命題 4.11. V を n 次元ベクトル空間とする. このとき, $\text{Alt}_n(V, \mathbb{K})$ は 1 次元ベクトル空間である.

証明

$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を V の基底とする. 以下の写像を考える.

$$\Psi: \text{Alt}_n(V, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \varphi \mapsto \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Ψ は明らかに線型写像である. Ψ が単射であることを示す. $\varphi: V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{K}$ を交代 n -重線型形式とし, $\varphi \in \text{Ker}(\Psi)$ とする. $\varphi = 0$ を示す. φ が n -重線型であるので, 任意の $a_1, \dots, a_n \in \{1, \dots, n\}$ に対し, $\varphi(\mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_n}) = 0$ を示せば十分である. $a_i = a_j$ を満たす $i \neq j$ が存在する場合, 交代性より $\varphi(\mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_n}) = 0$ が成り立つ. そうでなければ, $a_i = \sigma(i)$ となる置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_n}) &= \varphi(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 0. \end{aligned}$$

以上より, $\varphi = 0$ となり, Ψ は単射である. よって, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Alt}_n(V, \mathbb{K})) \leq 1$ である. $\det_{\mathcal{B}} \in \text{Alt}_n(V, \mathbb{K})$ があるので $\text{Alt}_n(V, \mathbb{K}) \neq 0$ である. したがって, $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Alt}_n(V, \mathbb{K})) = 1$ である.

4.4 行列の行列式

定義 4.12. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とする. A の列ベクトルの行列式を A の行列式といい, $\det(A)$ で表す. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ならば,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とも書く.

例 4.13. 2×2 型行列の行列式は以下の通り計算できる.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

命題 4.14 (サラスの方法). 3×3 型行列の行列式は以下の通り計算できる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

証明

$\mathfrak{S}_3$ の偶置換は $\{\text{id}, (123), (132)\}$ であり, 奇置換は $\{(12), (23), (13)\}$ である. このことから上記の等式が分かる.

例 4.15. 対角行列の行列式は対角成分の積と表せる．すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_i.$$

命題 4.16. n 組の $\mathbb{K}^n$ のベクトル $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ に対して，以下が成り立つ

$$\det(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n) = \det(A) \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n).$$

証明

以下の写像を考える． n 組の $\mathbb{K}^n$ のベクトル $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ に対して，

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \det(A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_n)$$

と定義する．明らかに， Ψ は交代 n -重線型形式である．命題 4.11 より $\lambda(A) \in \mathbb{K}$ が存在し，全ての $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ に対し

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \lambda(A) \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

が成り立つ． $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする． $\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) とおくと，

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n) \\ &= \Psi(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= \lambda(A) \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \lambda(A) \end{aligned}$$

となる．主張が従う．

定理 4.17. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して， $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ が成り立つ．

証明

$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ ($\mathbf{x}_i \in \mathbb{K}^n$) を n 組のベクトルとする．命題 4.16 より

$$\det(AB\mathbf{x}_1, \dots, AB\mathbf{x}_n) = \det(AB) \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

である．一方， $\mathbf{y}_i = B\mathbf{x}_i$ とおくと，

$$\begin{aligned} \det(AB\mathbf{x}_1, \dots, AB\mathbf{x}_n) &= \det(A\mathbf{y}_1, \dots, A\mathbf{y}_n) \\ &= \det(A) \det(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \\ &= \det(A) \det(B\mathbf{x}_1, \dots, B\mathbf{x}_n) \\ &= \det(A) \det(B) \det(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

したがって， $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ が成り立つ．

4.5 行列式の性質

定理 4.18. 任意の $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し $\det({}^t A) = \det(A)$ が成り立つ．

証明

$A = (a_{ij})_{i,j}$ とおき, ${}^tA = (a'_{ij})_{i,j}$ とおく. よって, $a'_{ij} = a_{ji}$ である.

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}\end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n, \sigma \mapsto \sigma^{-1}$ は全単射であることと $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ であることより,

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A).$$

定理 4.19. 行列式は行に関しても n -重線形である. すなわち, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ を n 個の列ベクトルとする. 写像

$$(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \mapsto \det \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}$$

は交代 n -重線型である.

証明

定理 4.18 より

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{y}_1 & \cdots & {}^t\mathbf{y}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ. 行列式が列に関して n -重線型であることから主張が従う.

定理 4.20. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とする. 以下が互いに同値である.

- (i) A が正則である.
 - (ii) $\det(A) \neq 0$.
 - (iii) A の列ベクトルが線型独立である.
 - (iv) A の列ベクトルが $\mathbb{K}^n$ の生成系をなす.
 - (v) A の列ベクトルが $\mathbb{K}^n$ の基底をなす.
 - (vi) A の行ベクトルが線型独立である.
 - (vii) A の行ベクトルが $\mathbb{K}^n$ の生成系をなす.
 - (viii) A の行ベクトルが $\mathbb{K}^n$ の基底をなす.
 - (ix) $AB = E_n$ を満たす行列 $B \in M_n(\mathbb{K})$ が存在する.
 - (x) $BA = E_n$ を満たす行列 $B \in M_n(\mathbb{K})$ が存在する.
- また, A が正則ならば $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である. (ix) と (x) では $B = A^{-1}$ が成り立つ.

証明

- (iii) $\iff$ (iv) $\iff$ (v) と (vi) $\iff$ (vii) $\iff$ (viii) は直ちに定理 1.34 から従う.
- 命題 2.17 より (i) $\iff$ (v) が成り立つ.
- (i) $\implies$ (ii) を示す: A が正則であるとし, $B = A^{-1}$ とおく. $AB = E_n$ より $1 = \det(E_n) = \det(A) \det(B)$ となる. 特に $\det(A) \neq 0$ であり, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である.
- (ii) $\implies$ (iii) を示す: $\det(A) \neq 0$ とする. $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を標準基底とする. 補題 4.7 より $(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n)$ は線型独立である.

- (ii) $\iff$ (viii) には, $\det(A) \neq 0 \iff \det({}^t A) \neq 0 \iff {}^t A$ の列が基底をなす $\iff A$ の行が基底をなす.
- (i) $\implies$ (ix) と (i) $\implies$ (x) は明らかである.
- (ix) $\implies$ (ii) を示す: $AB = E_n$ より, $\det(A)\det(B) = 1$ であり, $\det(A) \neq 0$ である. (x) $\implies$ (ii) は同様に示せる.

補題 4.21. 三角形行列の行列式は対角成分の積である. すなわち,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

証明

上記の行列を A とおく. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\sigma \neq \text{id}$ ならば $\sigma(i) > i$ を満たす $i \in \{1, \dots, n\}$ が存在する. よって,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

定理 4.22. $A_1 \in M_{n_1}(\mathbb{K})$, $A_2 \in M_{n_2}(\mathbb{K})$ とする.

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix} = \det(A_1) \det(A_2)$$

が成り立つ (ただし, ここで $*$ は $n_2 \times n_1$ 型の行列を表す).

証明

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ M & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ M & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

と分解できる. 補題 4.21 より

$$\det \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ M & E_{n_2} \end{pmatrix} = 1$$

である. ゆえに, $\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E_{n_2} \end{pmatrix} = \det(A_1)$ かつ $\det \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det(A_2)$ を示せば良い. n_1 組 $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1})$ を列ベクトルとする行列 A を考え,

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1}) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{n_2} \end{pmatrix}$$

とおく. Ψ は明らかに交代 n_1 -重線型形式 $\mathbb{K}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{n_1} \rightarrow \mathbb{K}$ である. 命題 4.11 より, $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在し, 任意の $A \in M_{n_1}(\mathbb{K})$ に対し

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{n_2} \end{pmatrix} = \lambda \det(A)$$

である. $A = E_{n_1}$ とおくと, $\lambda = 1$ が分かる. よって $\det \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & E_{n_2} \end{pmatrix} = \det(A_1)$ が示せた. 同様な議論

で $\det \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} = \det(A_2)$ を証明できる.

系 4.23. $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}$ が正則である $\iff A_1, A_2$ が正則である.

証明

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix} \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} B \text{ が正則である} &\iff \det(B) \neq 0 \\ &\iff \det(A_1) \det(A_2) \neq 0 \\ &\iff \det(A_1) \neq 0 \text{ かつ } \det(A_2) \neq 0 \\ &\iff A_1 \text{ と } A_2 \text{ が正則である.} \end{aligned}$$

4.6 自己準同型の行列式

V を n 次元ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とする. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ を V の基底とする. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{i,j}$ を $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列とする. すなわち,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

である.

命題 4.24. $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ は基底 $\mathcal{B}$ の取り方によらない.

証明

$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ を V の基底とする. このとき, $P = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ とおくと,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P^{-1}$$

である. よって,

$$\begin{aligned} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) &= \det(P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P^{-1}) \\ &= \det(P) \det(P^{-1}) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \det(P) \det(P)^{-1} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)). \end{aligned}$$

定義 4.25. $\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ とおき, 自己準同型 f の行列式という.

系 4.26. $f: V \rightarrow V$ が自己同型であるための必要十分条件は $\det(f) \neq 0$ が成り立つことである.

証明

$$f \text{ が同型写像} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ が正則である} \iff \det(f) \neq 0.$$

$\mathcal{B}$ を V の基底とする. 命題 4.16 と同様に,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ.

系 4.27. V を n 次元ベクトル空間とし, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ を V の基底とする. ベクトル $y_1, \dots, y_n$ に対し, 以下が成り立つ.

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ が } V \text{ の基底である} \iff \det_{\mathcal{B}}(y_1, \dots, y_n) \neq 0.$$

証明

$f: V \rightarrow V$ を $f(e_i) = \mathbf{y}_i$ で定まる自己準同型とする. よって, $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \det(f)$ である.

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \text{ が } V \text{ の基底である} &\iff f \text{ が } V \text{ の自己同型である} \\ &\iff \det(f) \neq 0 \\ &\iff \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \neq 0. \end{aligned}$$

4.7 余因子

4.7.1 小行列式, 余因子行列

$A \in M_n(\mathbb{K})$ とし, $1 \leq i, j \leq n$ とする. A の第 i 行と第 j 列を取り除いた行列を考える:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上記の行列を A_{ij} とおく. その行列式を A の (i, j) 小行列式という. また,

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

とおき, A の (i, j) 余因子という.

定義 4.28. $\tilde{A} := (\tilde{a}_{ij})_{i,j}$ とおき, A の余因子行列という.

4.7.2 余因子展開

A の行列式は, 行と列に関して展開することで計算できる. 行列 A の第 i 行を考える.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

第 i 行に関する余因子展開は以下の定理の内容である.

定理 4.29.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}.$$

証明

行列式の n -重線形性より,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上記の和に現れる行列式の列を置換 $\sigma = (12 \dots j)$ で置き換えると, 以下が分かる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1 \ j-1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{n \ j-1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

置換 $\sigma = (12 \dots i)$ で置き換えると, 以下が分かる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1 \ j-1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2 \ j-1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1 \ j} & a_{i-1 \ 1} & \dots & a_{i-1 \ j-1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{n \ j-1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1 \ j-1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2 \ j-1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1 \ 1} & \dots & a_{i-1 \ j-1} & \dots & a_{i-1 \ n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n \ j-1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{ij}$$

である. 主張が従う.

次に, 行列 A の第 j 列を考える.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \boxed{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

同様に, 第 j 列に関しても展開できる.

定理 4.30.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}.$$

4.8 余因子行列と逆行列

定理 4.31. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$A({}^t \tilde{A}) = ({}^t \tilde{A})A = \det(A)E_n.$$

証明

$B := {}^t\tilde{A}$ とおき, $B = (b_{ij})$ とおく. よって, $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ である. 行に関する余因子展開より,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

である. したがって, AB の対角成分 (i, i) が $\det(A)$ である. $k \neq i$ とする. A の第 k 行に A の第 i 行を入れ換えた行列を C とおく. C の第 k 行と第 i 行が一致するので, $\det(C) = 0$ である. また, A と C の第 k 行以外の行が全て一致するので, 第 k 行の成分に関する余因子が一致し, すなわち $\tilde{c}_{kj} = \tilde{a}_{kj}$ が成り立つ. ゆえに, 定理 4.29 より

$$0 = \sum_{j=1}^n c_{kj} \tilde{c}_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{kj}$$

が成り立つ. このことから, 積 AB の (i, k) 成分が 0 であることが分かる. 以上より, $AB = \det(A)E_n$ が分かる. 同様に, 列に関する展開することで, $BA = \det(A)E_n$ が確認できる.

系 4.32. $A \in M_n(\mathbb{K})$ を正則行列とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\tilde{A}$$

4.8.1 連立一次方程式と行列式

以下の連立一次方程式を考える.

$$(E) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{cases}$$

連立一次方程式 (E) で定まる行列 $(a_{ij})_{i,j}$ を A とおき, 成分を $b_1, \dots, b_n$ とする列ベクトルを $\mathbf{b}$ とおく. また, $j = 1, \dots, n$ について,

$$\Delta_j := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とおく. つまり, Δ_j は A の第 j 列を $\mathbf{b}$ に入れ換えた行列の行列式である. また, 行列 A が正則行列であることを仮定する. このとき, 連立一次方程式 (E) はただ一つの解をもち, すなわち

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

である.

定理 4.33. A が正則行列ならば, (E) の唯一の解 $\mathbf{x}$ は以下を満たす.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)}.$$

証明

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ を標準基底とする. 写像 $\mathbf{b} \mapsto \Delta_j$ が明らかに線型であるので, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_k$ ($1 \leq k \leq n$) の場合のみ考えれば十分である. このとき,

$$\Delta_j = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) = \tilde{a}_{kj}$$

である。また、定理 4.31 より、 $1 \leq i \leq n$ に対して以下が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\det(A)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\det(A)} a_{ij} \tilde{a}_{kj} = \delta_{ik}$$

である。主張が従う。

例 4.34.

4.9 行列式の計算方法

4.9.1 基本変形と行列式

基本行列の行列式は以下の通りである。

$$\det(U_{i,j}(\lambda)) = 1, \quad \det(D_i(\lambda)) = \lambda, \quad \det(T_{i,j}) = -1.$$

行列 A が与えられているとき、 A に行列基本変形を行うことで A の行列式が計算できる。基本変形を行うとき、以下のことに注意する。

- $i \neq j$ とする。 A の第 i 行 (または列) に A の第 j 行 (または列) の λ 倍を足すという操作を行うとき、行列式は変わらない。
- $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とする。 A の第 i 行 (または列) を λ 倍にする操作を行うと、行列式は λ 倍になる。
- $i \neq j$ とする。 A の第 i 行 (または列) と第 j 行 (または列) を入れ換えるという操作を行うとき、行列式は -1 倍になる。

また、一個以外の成分全てゼロであるような行 (または列) が存在する場合、その行 (または列) に関する余因子展開を行う。例えば、以下の行列式を第 2 行に関して展開すると 3×3 行列式の計算に帰着できる。

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 6 & 3 & -4 & 11 \\ 5 & -8 & 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} 7 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & 11 \\ 5 & -8 & 2 \end{vmatrix}.$$

例題 4.35. 以下の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

解答：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & -11 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -5 & -5 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & -11 \\ 0 & -3 & -5 & -5 \\ 0 & -6 & -3 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 & -11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -6 & -3 & -15 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -7 & 2 & -11 \\ -3 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 12 & 9 \\ -3 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 12 & 9 \\ 0 & -41 & -32 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -41 & -32 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 41 \times 5 - 32 \times 7 = -19 \end{aligned}$$

4.9.2 ヴァンデルモンドの行列式

以下の形の行列を考える。 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ について

$$V(x_1, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

$V(x_1, \dots, x_n)$ をヴァンデルモンドの行列という. その行列式をヴァンデルモンドの行列式という.

定理 4.36. 以下が成り立つ.

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

証明

$x_i = x_j$ ($i \neq j$) のとき, 両辺が明らかに 0 である. よって, x_i が互いに異なると仮定して良い. t を変数とし, のヴァンデルモンドの行列

$$V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$$

を考え, その行列式を $R(t)$ とおく. 第 1 列に関して展開すると, $R(t)$ が変数 t に関する次数 $n-1$ の多項式であることが分かる. 明らかに, $x_2, \dots, x_n$ が R の根である. x_i が互いに異なるので, $R(t)$ が $\prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i)$ で割り切れる. すなわち,

$$R(t) = c \prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i)$$

を満たす $c \in \mathbb{K}$ が存在する ($\deg(R) = n-1$ より c が定数多項式である). 特に, c は $R(t)$ の最高次の項である. $R(t)$ において第 1 列に関して展開すれば,

$$c = \det(V(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

となる. 一方, 帰納法により $\det(V(x_1, \dots, x_{n-1})) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$ が成り立つ. ゆえに,

$$R(t) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (t - x_i)$$

である. $t = x_n$ を代入すれば主張が得られる.

例 4.37.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

5 自己準同型写像

5.1 固有ベクトル, 固有値

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とする.

定義 5.1. $\mathbf{x} \in V$ が固有ベクトルであるとは, $\mathbf{x} \neq 0$ であり, かつ $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在し, $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ が成り立つことをいう. このとき, λ が f の固有値であるという.

言い換えれば, 以下が互いに同値である.

- (i) $\lambda \in \mathbb{K}$ が f の固有値である.
- (ii) $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ となる $\mathbf{x} \neq 0$ が存在する.
- (iii) $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) \neq 0$ である.

定義 5.2. $\lambda \in \mathbb{K}$ を f の固有値とする. 線型部分空間 $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$ を λ の固有空間という.

定理 5.3. $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とし, $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ を互いに異なる f の固有値とする. また, $\mathbf{x}_i$ を λ_i に関する固有ベクトルとする. このとき, 族 $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I}$ は線型独立である.

証明

$\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ とし, $\sum_{j=1}^n a_j \mathbf{x}_{i_j} = 0$ ($a_j \in \mathbb{K}$) を仮定する. n に関する帰納法によって $a_1 = \dots = a_n = 0$ を示す. この関係に f を適用すると

$$\sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \mathbf{x}_{i_j} = 0$$

となる. よって,

$$\sum_{j=2}^n a_j (\lambda_j - \lambda_1) \mathbf{x}_{i_j} = 0$$

が成り立つ. $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$ であるので, 帰納法の仮定より $a_2 = \dots = a_n = 0$. ゆえに $a_1 = 0$ となり, 主張が従う.

例 5.4. $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を無限回微分可能関数全体のなす集合とする. 明らかに, V が $\mathbb{R}$ ベクトル空間である. 自己準同型

$$\varphi: V \rightarrow V, \quad g \mapsto g'$$

を考える. 実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, $g_\alpha(x) = \exp(\alpha x)$ とおき関数 $g_\alpha \in V$ を定める.

$$\varphi(g_\alpha) = g'_\alpha = \alpha g_\alpha$$

が成り立つので, g_α は固有ベクトルであり, その固有値は α である. 定理 5.3 より族 $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ は線型独立である.

5.2 固有多項式

定義 5.5. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し,

$$p_A(t) = \det(tE_n - A)$$

とおき, A の固有多項式という. つまり, $A = (a_{ij})_{i,j}$ とおくと, $p_A(t)$ は以下の行列式によって定まる.

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

命題 5.6. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とし, $\lambda \in \mathbb{K}$ とする. λ が A の固有値であるための必要十分条件は, λ が $p_A(\lambda) = 0$ が成り立つことである.

証明

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値である} \iff A - \lambda E_n \text{ が正則でない} \iff p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0.$$

定義 5.7. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とする. A の対角成分の和を A のトレースといい, $\text{Tr}(A)$ と表す. すなわち,

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

定理 5.8. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とする. 固有多項式 $p_A(t)$ は以下の性質を持つ.

- (1) $p_A(t)$ の係数は $\mathbb{K}$ の元である.
- (2) $p_A(t)$ は次数 n のモニックな多項式である.
- (3) $p_A(t)$ の定数項は $(-1)^n \det(A)$ である.
- (4) $p_A(t)$ の次数 $n-1$ の項は $-\text{Tr}(A)$ である.

証明

- (i) は明らかである.
- (ii) を示す. $A = (a_{ij})_{i,j}$ とおく.

$$p_A(t) = \det(tE_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) (t\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)})$$

が成り立つ. 上記の和において $\sigma \neq \text{id}$ に対応する項の次数は $\leq n-2$ である. $\sigma = \text{id}$ に対応する項は $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$ である. ゆえに $p_A(t)$ の次数は n であり, 最高次の項は 1 である.

- (iii) を示す. $p_A(t)$ の定数項は $p_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ である.
- (iv) を示す. 上記の公式において, $\sigma \neq \text{id}$ に対応する項の次数は $\leq n-2$ である. よって, $p_A(t)$ の次数 $n-1$ の項は多項式 $\prod_{i=1}^n (t - a_{ii})$ の次数 $n-1$ の項と一致する. この項は明らかに $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Tr}(A)$ である.

例 5.9. 以下の行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は以下の通りである.

$$p_A(t) = t^2 - \text{Tr}(A)t + \det(A) = t^2 - (a+d)t + (ad-bc).$$

命題 5.10. $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ とする. A と A' が相似であれば, $p_A(t) = p_{A'}(t)$ が成り立つ.

証明

$A' = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ が存在する. このとき, $tE_n - A' = tE_n - PAP^{-1} = tPP^{-1} - PAP^{-1} = P(tE_n - A)P^{-1}$ である. よって, $tE_n - A'$ と $tE_n - A$ が相似である. 特に,

$$p_{A'}(t) = \det(tE_n - A') = \det(tE_n - A) = p_A(t).$$

定理 5.11. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ とする. このとき,

$$p_{AB}(t) = p_{BA}(t)$$

が成り立つ.

証明

まず, B が正則行列であるとする. このとき, $BA = B(AB)B^{-1}$ より, AB と BA が互いに相似である. 命題 5.10 より $p_{AB}(t) = p_{BA}(t)$ である. 以下は, 一般の場合を考える. $(x_{ij})_{i,j}$ を n^2 個の変数とし, $\mathbb{K}'$ を変数 $(x_{ij})_{i,j}$ に関する有理関数体とする. (i, j) 成分を x_{ij} とする行列を $B(x)$ とおく. $B(x) \in M_n(\mathbb{K}')$ は明らかに正則である. ゆえに, 上記の議論より, $\mathbb{K}'$ 上の多項式として

$$p_{AB(x)}(t) = p_{B(x)A}(t)$$

が成り立つ. つまり, $\det(tE_n - AB(x)) = \det(tE_n - B(x)A)$ が成り立つ. これは, 変数 $(x_{ij})_{i,j}$ と t に関する多項式の等式である. この等式において, 変数 $(x_{ij})_{i,j}$ に B の成分 $(b_{ij})_{i,j}$ を代入すると $p_{AB}(t) = p_{BA}(t)$ が得られる.

注意 5.12. 特に, 上の定理より $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ が分かる (このことは直接に容易な計算からも確認できる).

5.3 対角化

定義 5.13. 正方行列 $A \in M_n(\mathbb{K})$ が対角化可能であるとは, A が対角行列と相似であるときにいう.

定義 5.14. V を有限次元ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を自己準同型写像とする. f が角化可能であるとは, f の固有ベクトルからなる V の基底が存在するときにいう.

$A \in M_n(\mathbb{K})$ とし, $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ を A に対応する $\mathbb{K}^n$ の自己準同型とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$A \text{ が対角化可能である} \iff f_A \text{ が対角化可能である.}$$

定理 5.15. $A \in M_n(\mathbb{K})$ とする. A が n 個の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ を持つとする (ただし, λ_i が互いに異なるとする). このとき, A が対角化可能である.

証明

$\mathbf{x}_i$ を固有値 λ_i の固有ベクトルとする. 定理 5.3 より, $\mathcal{B} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ は線型独立である. よって, $\mathcal{B}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底である. 主張が従う.

例 5.16. 以下の行列を考える.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A の固有多項式を求める.

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \begin{vmatrix} t & -2 & 1 \\ -3 & t+2 & 0 \\ 2 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -2 & 1 \\ -3 & t+2 & 0 \\ 2-t(t-1) & 2t-4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & t+2 \\ 2-t(t-1) & 2t-4 \end{vmatrix} \\ &= -8t + 8 + t(t-1)(t+2) \\ &= (t-1)(t^2 + 2t - 8) \\ &= (t-1)(t-2)(t+4) \end{aligned}$$

よって, A の固有値は $1, 2, -4$ である. したがって, A が対角化可能である. 以下は, 固有値 $1, 2, -4$ の固有ベクトルを求める.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \iff \begin{cases} 2x_2 - x_3 = x_1 \\ 3x_1 - 2x_2 = x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

よって, $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである.

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \iff \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 2x_1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

よって, $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ は固有値 2 の固有ベクトルである.

$$A\mathbf{x} = -4\mathbf{x} \iff \begin{cases} 2x_2 - x_3 = -4x_1 \\ 3x_1 - 2x_2 = -4x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -4x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

よって, $\mathbf{z} := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 -4 の固有ベクトルである. $f_A: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ を A で定まる自己準同型とする. 以上より, $\mathcal{B}' = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ に関する f_A の行列は

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

である. $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を標準基底とし, P を $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列とする. すなわち

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.