線形代数学 B

レポート 1（中間レポート）

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい.
提出の際, 写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい.

提出期限：2022 年 11 月 23 日 (水) 18 時まで.

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. 以下のそれぞれの場合に, W が V の $\mathbb{R}$ 線型部分空間であるかどうかを判定せよ.
(1) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $W = \{(a_n)_{n\geq 1} \mid a_{2n+1} = a_n\}$.
(2) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体の集合), $W = \{f \in V \mid f \circ f = f\}$.
(3) $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $W = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int_0^1 f(t)dt = f(\frac{1}{2})\}$.
(4) $V = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R}[X])$, $W = \{\varphi \in V \mid \varphi(X^2) \in \mathbb{R}_3[X]\}$.

問 2. V を関数 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体のなす $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする. 以下の族が V において線型独立であるかどうかを判定せよ.
(1) $(e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$
(2) $(\sin(x), \cos(x), 1, x, e^x)$
(3) 任意問題： $(|x-a|)_{a\in\mathbb{R}}$

問 3. V を n 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f\colon V \to V$ を自己準同型とする. 自然数 k に対して, f^k を帰納法的に $f^k := f^{k-1} \circ f$ によって定義する ($f^0 = \mathrm{id}_V$ と約束する). f が冪零であるとは, $f^k = 0$ を満たす $k \in \mathbb{N}$ が存在することをいう. f が冪零であるとし,

$$m := \min\{k \geq 1 \mid f^k = 0\}$$

とおく. m を f の冪零指数という.

(i) $f^{m-1}(x) \neq 0$ を満たす $x \in V$ が存在することを示せ.

(ii) $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x))$ が線型独立であることを示せ.

(iii) $m \leq n$ であることを示せ.

(iv) $f^n = 0$ が成り立つことを示せ.

(v) <u>任意問題</u>：f の冪零指数が n であるとする. このとき, V の任意の自己準同型 g に対し, 以下が成り立つことを示せ.

$$f \circ g = g \circ f \iff g \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(\mathrm{id}_V, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).$$

<u>ヒント</u>：$(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ が基底であるような $x \in V$ を考える. $g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x)$ ($\lambda_i \in \mathbb{K}$) ならば, $g = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i$ が成り立つことを示せ).

問 4. $V = \mathbb{R}_3[X]$ とする. $i \in \{1,2,3,4\}$ に対し, $f_i(P) = P(i)$ ($P \in V$) とおくことで写像 $f_i\colon V \to \mathbb{R}$ を定める.

(i) f_i が V 上の一次形式であることを示せ。

(ii) $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ が V^* の基底であることを示せ.

(iii) $\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$ を満たす基底 $\mathcal{B} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ を求めよ.

(iv) 基底 $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ を求めよ.

(v) $\varphi\colon V \to V$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ と定義する. 行列 $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ を求めよ.

(vi) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ を $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ と $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ を用いて表せ.

(vii) $P_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}}$ の逆行列を計算せず $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ を求めよ.