

線形代数学 B

レポート 2 (期末レポート)

提出方法: レポートを Webclass で提出して下さい.

提出の際, 写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい.

提出期限: 2023 年 2 月 1 日 (水)18 時まで.

教員名: コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. $x, y, z \in \mathbb{C}$ に対し, 以下の n 次の行列式を考える.

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} x & y & & \\ z & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & y \\ & & z & x \end{vmatrix}$$

- (i) $\Delta_{n+2} = x\Delta_{n+1} - yz\Delta_n$ が成り立つことを示せ.
- (ii) $x^2 = 4yz$ とする. このとき, $\Delta_n = \frac{(n+1)x^n}{2^n}$ が成り立つことを示せ.
- (iii) $x = 3, y = 2, z = 1$ のとき Δ_n を求めよ.

問 2. (i) 以下の行列が正則かどうかを判定せよ.

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

- (ii) A が正則のとき, 基本変形を用いて逆行列を求めよ (全ての基本変形を明記すること).
- (iii) A が正則でないとき, $\text{Im}(A)$ と $\text{Ker}(A)$ の基底を求めよ.

問 3. 以下の行列の核の基底を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 4.

- (1) V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を自己準同型とする. 任意の $x \in V$ に対し, 組 $(x, f(x))$ が線型従属であるとする.
- (i) 任意の $x \in V$ に対し, $f(x) = \lambda_x x$ となる $\lambda_x \in \mathbb{K}$ が存在することを示せ.
 - (ii) 任意の $x, y \in V (x \neq 0, y \neq 0)$ に対し $\lambda_x = \lambda_y$ であることを示せ.
 - (iii) $f = \lambda \text{id}_V$ となる $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在することを示せ.
- (2) $A \in M_n(\mathbb{K})$ とし, $\text{Tr}(A) = 0$ とする (但し, Tr は行列のトレースである).
- (i) $A = \lambda E_n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) ならば, $A = 0$ であることを示せ.
 - (ii) $A \neq 0$ とする. このとき, (x, Ax) が線型独立であるようなベクトル $x \in \mathbb{K}^n$ が存在することを示せ.
 - (iii) $(1, 1)$ 成分が 0 である行列で, A と相似であるものが存在することを示せ. ヒント: $(x, Ax, u_3, \dots, u_n)$ という形の基底を考える.
 - (iv) 全ての対角成分が 0 である行列で, A と相似であるものが存在することを示せ. ヒント: n に関する帰納法によって証明する.
- (3) 任意問題: 行列 $B \in M_n(\mathbb{K})$ に対し, $\psi_B(M) = BM - MB$ とおくことで写像 $\psi_B: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ を定める. $W \subset M_n(\mathbb{K})$ を対角成分が全てゼロである行列全体のなす線型部分空間とする.
- (i) ψ_B が線型写像であることを示せ.
 - (ii) B を対角行列とし, その対角成分が互いに異なるとする. このとき, $\text{Ker}(\psi_B)$ が対角行列全体の集合であることを示せ.
 - (iii) このとき, $\text{Im}(\psi_B) = W$ であることを示せ. ヒント: 次元を考える.
 - (iv) 任意の行列 $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し, 以下が成り立つことを示せ.

$$\text{Tr}(A) = 0 \iff A = BM - MB \text{ を満たす行列 } B, M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ が存在する.}$$

ヒント: 問 5(2)(iv) + 問 5(3)(iii).