

代数学 C・代数学特論 III

レポート 2 (期末レポート)

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。
提出の際、写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい。

提出期限：2022 年 8 月 11 日（木）18 時まで。

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. p, q ($q > p$) を素数とし、 $q - 1$ が p の倍数でないとする。 G を位数 pq の群とする。

- (1) n_p, n_q をそれぞれ p シロー部分群, q シロー部分群の数とする。 $n_p = n_q = 1$ を証明せよ。
- (2) H_p, H_q をそれぞれ p シロー部分群, q シロー部分群とする。 H_p と H_q が G の正規部分群であることを示せ。
- (3) $x \in H_p, y \in H_q$ に対し、 $xy = yx$ が成り立つことを示せ。
- (4) G が巡回群であることを示せ。

問 2. G, H を群とし、 $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(G)$ を準同型写像とする。

- (1) $\theta: H \rightarrow H$ を H の自己同型とする。 このとき、群同型写像

$$G \rtimes_{\varphi} H \simeq G \rtimes_{\varphi \circ \theta} H$$

が存在することを示せ。

- (2) $f \in \text{Aut}(G)$ とし、写像 $c_f: \text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ を $c_f(u) = f \circ u \circ f^{-1}$ によって定義する。 このとき、群同型写像

$$G \rtimes_{\varphi} H \simeq G \rtimes_{c_f \circ \varphi} H$$

が存在することを示せ。

問 3.

- (1) 位数 8 のアーベル群を (同型を除いて) 全て求めよ.
- (2) 位数 8 の群で, 非自明な群 H, K を用いて $G = H \rtimes K$ と表せるものを (同型を除き) 全て求めよ.
- (3) G を行列 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成された $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ の部分群とする. G が位数 8 の群であり, 非自明な半直積として表せないことを証明せよ.

問 4.

- (1) 自然数 n に対して, 群同型 $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ が存在することを示せ.
- (2) H を位数 m の巡回群とする. m の任意の正の約数 d に対して, 位数 d の部分群が一意的に存在することを示せ.
- (3) p, q を素数とし, $q - 1$ が p の倍数であるとする. 位数 pq の群の同型類を全て求めよ. ヒント: webclass の「期末レポート参考」の定理 5.5.4 参照. また, 問 2(1) を用いる.

問 5. $G = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ とし, $H = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ とする. 自然数 k に対して, 数列 e_k を $e_k = (\delta_{k,n})_{n \geq 1}$ によって定める (但し, $\delta_{k,n}$ はクロネッカーのデルタ記号を表す.)

- (1) $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}$ を準同型写像とし, $\varphi(H) = 0$ を仮定する.
 - a) 素数 p に対して, $(pa_1, p^2a_2, p^3a_3, \dots)$ の形の数列全体のなす G の部分群を A_p とおく. $\varphi(A_p) = 0$ が成り立つことを示せ.
 - b) 互いに異なる素数 p, q に対して, $A_p + A_q = G$ が成り立つことを示せ.
 - c) $\varphi(G) = 0$ を示せ.
- (2) $\varphi: G \rightarrow \mathbb{Z}$ を準同型写像とする. 自然数 k に対して, $a_k = \varphi(e_k)$ とおく.
 - a) $\sum_{i=1}^{k-1} |a_i| 2^{d_i} < \frac{1}{2} \times 2^{d_k}$ を満たす自然数の増加列 $d_1 < d_2 < \dots$ が存在することを示せ.
 - b) k に対して, 数列 $y^{(k)} = (y_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$y_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{if } n < k \\ 1 & \text{if } n = k \\ 2^{d_n - d_k} & \text{if } n > k. \end{cases}$$

によって定義し, $b_k = \varphi(y^{(k)})$ とおく. また, $x = (2^{d_1}, 2^{d_2}, \dots)$ とおく.

$$|2^{d_k} b_k| < \frac{2^{d_k}}{2} + |\varphi(x)|$$

が成り立つことを示せ.

- c) 適当な $N \geq 1$ が存在し, 全ての $k \geq N$ に対して $b_k = 0$ であることを示せ.
 - d) $k \geq N$ ならば $\varphi(e_k) = 0$ であることを示せ.
- (3) G が自由アーベル群でないことを示せ. ヒント: 準同型写像 $G \rightarrow \mathbb{Z}$ 全体の集合が可算集合であることを示せ.