線形代数学A

第1章　集合と写像

§1.1 集合

「もの」の集まりを集合という．その集合に含まれるものを要素あるいは元という．

集合の表記方法：

$X=\{0,1,2\}$ ： 0,1,2 から構成されている集合．

$Y=\{x \mid \underbrace{0 \leq x \leq 4,\ x\text{は偶数}}_{\text{条件}}\}=\{0,2,4\}$．

a が集合 A の要素であるとき a が A に属するといい，$a \in A$ と表す．同様に a が A に属さないときに $a \notin A$ と書く．

2つの集合 A, B について，A の全ての要素が B の要素であるとき，A が B に含まれるといい $A \subset B$ と表す．A が B の部分集合であるともいう．

$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成り立つとき，A と B は等しいといい，$A=B$ と書く．

2つの集合 A, B の和集合を $A \cup B$ で表す.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \}.$$

A と B の共通部分は $A \cap B$ で表す.

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \}$$

例えば, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ のとき,
$A \cup B = \{0, 1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$.

よく出てくる集合:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 自然数全体の集合
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ 整数全体の集合
$\mathbb{Q}$ 有理数
$\mathbb{R}$ 実数
$\mathbb{C}$ 複素数

ϕ 空集合 : 要素を1つももたない集合.

例えば $\{0, 1\} \cap \{2, 3\} = \phi$.

2つの集合の直積:

A, B を集合とする. A と B の直積とは, 2組 (a, b)
$(a \in A, b \in B)$ 全てからなる集合のことをいう.
A と B の直積を $A \times B$ で表す.

例えば $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$ のとき
$A\times B=\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$

§1.2 論理記号

- $\forall x, \cdots$ 「全ての x について, …」を意味する

<u>例</u> $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$

「全ての実数に対して, $x^2\geq 0$ が成り立つ」

- $\exists x, \cdots$ 「x が存在し, …」

<u>例</u> $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2=2$

「$x^2=2$ をみたす実数 x が存在する」

- $P\Rightarrow Q$ 「もし P ならば, Q」

<u>例</u> $x=4 \Rightarrow x^2=16$

「$x=4$ ならば, $x^2=16$ である」

- $P\Leftrightarrow Q$ 「P のとき, かつそのときに限り, Q」

<u>例</u> $x+y=2y \Leftrightarrow x=y$

例題 1.2.1 次の命題が正しいかどうかを判定せよ.

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x^2$
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$
(3) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$

解答:

(1) は「全ての実数 x に対して, $x \neq x^2$ が成り立つ」を意味する. $x = 0, 1$ のとき, $x^2 = x$ であるので, この命題は正しくない.

(2) は「全ての実数 x に対して, 実数 y が存在し, $x + y = 0$ が成り立つ」という意味である. $y = -x$ とすると $x + y = 0$ である. よって, この命題は正しい.

(3) は「実数 x が存在し, 全ての y について $x + y = 0$ である」という意味. このような x が存在しないので, 命題は正しくない.

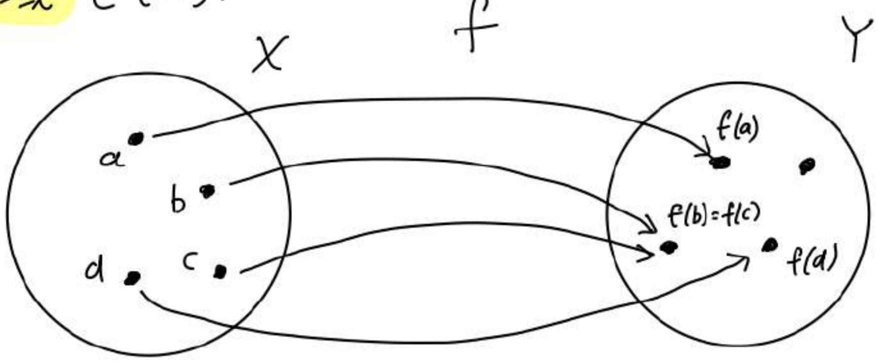
§1.3 写像

集合 X の各元 x に集合 Y の元 y を対応させる規則 f を X から Y への写像といい,

$$f : X \longrightarrow Y$$

と表す. X を f の定義域といい, Y を f の

値域という.



fによって Xの元 x に対応する Yの元を **$f(x)$** と書く.
$f(x)$ は **f による xの像** という.

X, Yを集合とし，$f: X \to Y$を写像とする．

$f(x)$ $(x \in X)$ 全体のなすYの部分集合を fの像 といい，$\mathrm{Im}(f)$ あるいは $f(X)$ で表す．すなわち

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

同様に，部分集合 $A \subset X$ について

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$$

と定義し，fによるAの像 という．

<u>定義 1.3.1</u>: $f: X \to Y$を写像とする．

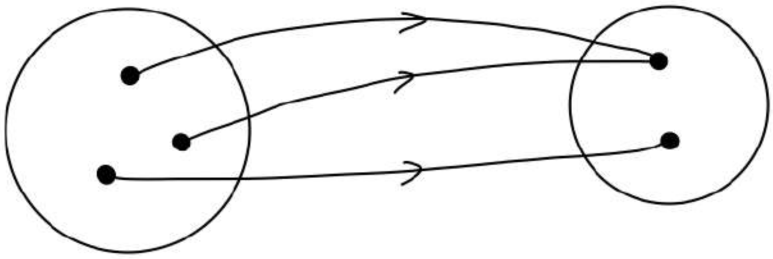
(1) $Y = f(X)$ のとき，fが全射であるという．

(2) 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して

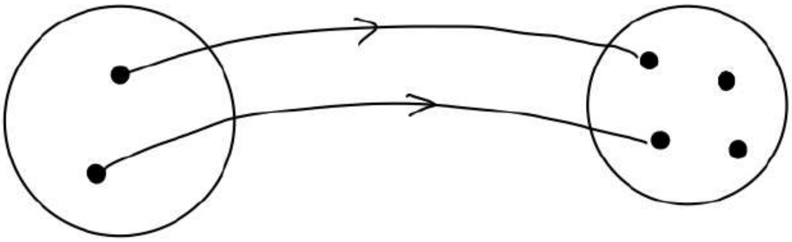
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

が成り立つときに，fが単射であるという．

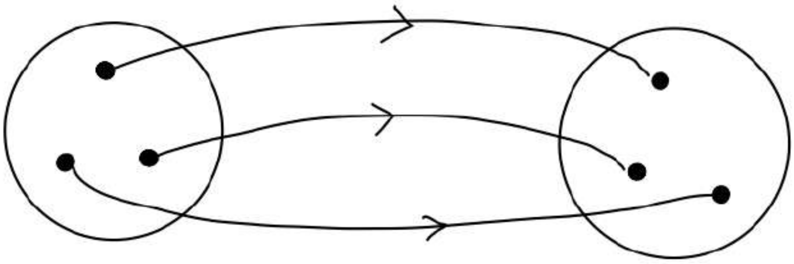
(3) fが全射かつ単射であるとき，fを全単射という．



全射
単射でない



単射
全射でない



全単射

X, Y, Z を集合とし，$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ を写像とする．f と g の合成写像 $g \circ f$ は

$$
\begin{aligned}
g \circ f : X &\longrightarrow Z \\
x &\longmapsto g(f(x))
\end{aligned}
$$

によって定義される．

例 1.3.2：

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x+1 \qquad , \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2-1$$

とすると，
$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+1) \\ &= (x+1)^2-1 \\ &= x^2+2x\end{aligned}$$

同様に
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2-1) \\ &= x^2-1+1 \\ &= x^2\end{aligned}$$

Xを集合とする．Xの恒等写像とは，写像

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

のことをいう．Xの恒等写像を通常

$id_X : X \to X$ で表す．この写像は明かに

全単射である

命題 1.3.4 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ を写像とする.

(1) f と g がそれぞれ単射ならば, $g \circ f$ も単射である.

(2) ———— 全射 ———— 全射 ——

(3) ———— 全単射 ———— 全単射 ——

証明: (1) を示す. $x_1, x_2 \in X$ とし, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ とする. よって $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ である. g が単射より $f(x_1) = f(x_2)$ となる. 同様に g が単射だから $x_1 = x_2$ となる. (2) を示す. $z \in Z$ とする. g が全射より $z = g(y)$ となる $y \in Y$ がとれる. f が全射より $y = f(x)$ をみたす $x \in X$ が存在する. よって, $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. したがって, $g \circ f$ は全射である. (3) は (1) と (2) から従う. □

命題 1.3.5：$f: X \to Y$ と $g: Y \to Z$ を写像とする.

(1) $g \circ f$ が単射ならば, f も単射である.

(2) $g \circ f$ が全射ならば, g も全射である.

(3) $g \circ f$ が全単射ならば, g は全射であり, f は単射である.

証明：(1) を示す. $x_1, x_2 \in X$ とし, $f(x_1) = f(x_2)$ とする.

よって $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ となり, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ である.

$g \circ f$ が単射より $x_1 = x_2$ が成り立つ. ゆえに f は単射.

(2) を示す. $z \in Z$ とすると, $(g \circ f)(x) = z$ となる $x \in X$ が

存在する ($\because$ $g \circ f$ 全射). よって $y = f(x)$ とおくと

$z = g(f(x)) = g(y)$ となる. したがって g は全射である.

(3) は (1) と (2) から従う. $\square$

定理 1.3.6：$f: X \to Y$ を写像とする．以下の条件は互いに同値である．

(i) f が全単射である．

(ii) 写像 $g: Y \to X$ が存在し，

$$f \circ g = id_Y \quad かつ \quad g \circ f = id_X$$

証明：(ii) が成り立つとする．id_X と id_Y はそれぞれ全単射だから，命題 1.3.5 より f も全単射．

逆に f が全単射であるとする．元 $y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在する．

(x の存在性は f が全射であることから分かる．x の一意性は f が単射であることから分かる．)

y をその x に対応させることによって，写像 $g: Y \to X$ が得られ，$f \circ g = id_Y$ かつ $g \circ f = id_X$ が成り立つ． □

注意 1.3.7： f が全単射ならば，
定理 1.3.6 (ii)の条件をみたす写像 $g: Y \to X$
は一意的に定まり，f の逆写像という．
また，$g = f^{-1}$ と表す．

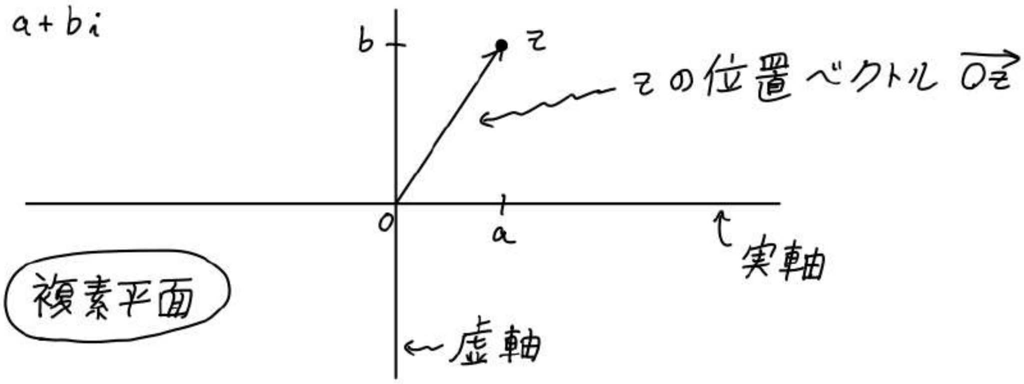
第2章　ベクトル

§2.1 複素数

任意の複素数は一意的に $a+bi$（ただし a, b は実数）と表すことができる.

つまり　$a+bi = a'+b'i \iff a=a'$ かつ $b=b'$.

$z = a+bi$



複素数全体の集合を $\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ で表す.

$z = a+bi$ のとき, a を z の実部といい, $a = \mathrm{Re}\, z$ と書く.
また, b を z の虚部といい, $b = \mathrm{Im}\, z$ で表す.

複素数の演算：

- 加法（和）：　$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
- 乗法（積）：　$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

（とくに $a=c=0$, $b=d=1$ とすると, $i^2 = -1$ が成り立つ）.

加法と乗法はそれぞれ可換である．つまり複素数 z, w に対して $z+w=w+z$ かつ $z\cdot w = w\cdot z$ が成り立つ．

また，積は和に対して分配法則を満たす．すなわち，複素数 s, t, u に対して

$$s\cdot(t+u) = s\cdot t + s\cdot u \quad \text{が成り立つ．}$$

$z\neq 0$ ときに

・<u>共役</u>：複素数 $z=a+bi$ に対して，$a-bi$ をその共役といい，$\bar{z}$ で表す．

<u>定理 2.1.1</u>　複素数 z, w に対して，以下が成り立つ．

(i) $\bar{\bar{z}} = z$

(ii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

(iii) $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

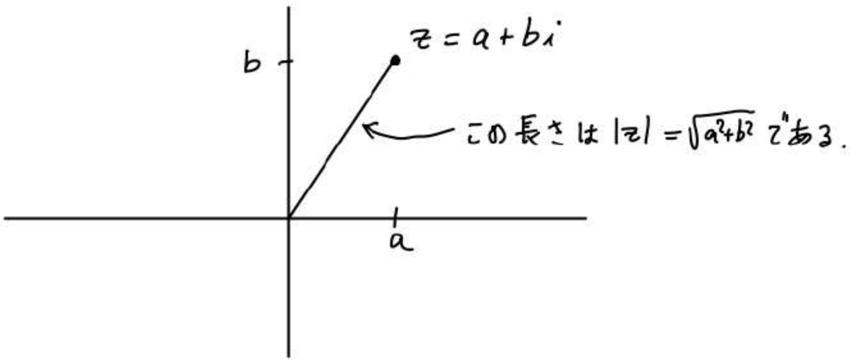
<u>証明</u>：$z=a+bi$，$w=c+di$ とすると，$\bar{z}=a-bi$，$\bar{w}=c-di$ である．よって $\bar{\bar{z}} = a+bi = z$ となる．

また，$\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$

$\bar{z}+\bar{w} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$ ．

最後に $zw = (ac-bd)+(ad+bc)i$ より
$\overline{zw} = (ac-bd)-(ad+bc)i$ である．一方，
$\bar{z}\cdot\bar{w} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)i$ となる．
したがって $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$ が成り立つ．　$\square$

<u>複素数の絶対値</u>：$z = a+bi$ に対して $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ と定義し，z の絶対値という．



<u>定理 2.1.2</u>：複素数 z, w に対して，以下が成り立つ．

(i) $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

(iii) $|zw| = |z| \cdot |w|$

(iv) $zw = 0 \iff z=0$ または $w=0$

<u>証明</u>：

(i) $z=0$ ならば $|z| = \sqrt{0^2+0^2} = 0$．逆に $z = a+bi$ とし，$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 0$ とする．よって $a^2+b^2=0$ となる．ゆえに $a=b=0$ が成り立つ．

(ii) $z = a+bi$ とすると，$\bar{z} = a-bi$ である．よって
$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$ となる．

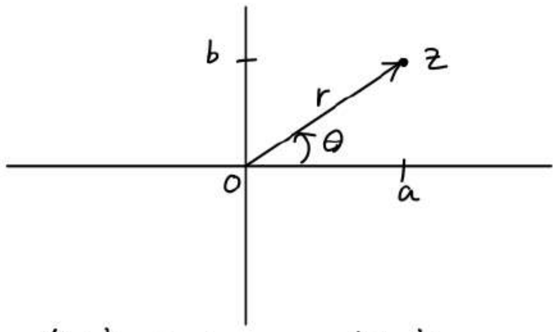
(iii) $|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = zw\bar{z}\bar{w} = (z\bar{z})(w\bar{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2$
絶対値は負でない実数だから，$|zw| = |z| \cdot |w|$ となる．

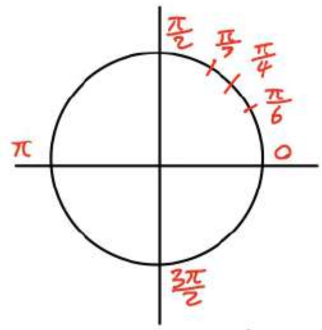
(iv) $zw = 0 \iff |zw| = 0$
$\iff |z|\cdot|w| = 0$
$\iff |z| = 0$ または $|w| = 0$
$\iff z = 0$ または $w = 0$ $\square$

$z \neq 0$ ときに，$z\bar{z} = |z|^2$ より $z\cdot\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = 1$ となる．

よって $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ である．$z = a+bi$ とおくと，$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ である．

偏角：$z = a+bi$ とし，$z \neq 0$ とする．





実軸との角度 θ を z の偏角といい，$\theta = \arg(z)$ で表す．偏角は 2π の整数倍を除いて一意的に定まる．

$r = |z|$, $\theta = \arg(z)$ とおくと $\begin{cases} a = r\cos(\theta) \\ b = r\sin(\theta) \end{cases}$ となる．

よって，0でない任意の複素数 z を

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad r = |z|,\ \theta = \arg(z)$$

と書くことができる．このような表し方をその極形式という．
また，

$r, r' > 0$，$\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ に対して，

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta') \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \end{cases}$$

すなわち $\theta - \theta' = 2\pi k$，$k \in \mathbb{Z}$

<u>定理 2.1.3</u>　z, w を 0 でない複素数とする．

(i) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \equiv \arg\left(\frac{1}{z}\right) \pmod{2\pi}$

(ii) $\arg(zw) \equiv \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}$

<u>証明</u>：(i) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$w = s(\cos\tau + i\sin\tau)$
とすると，

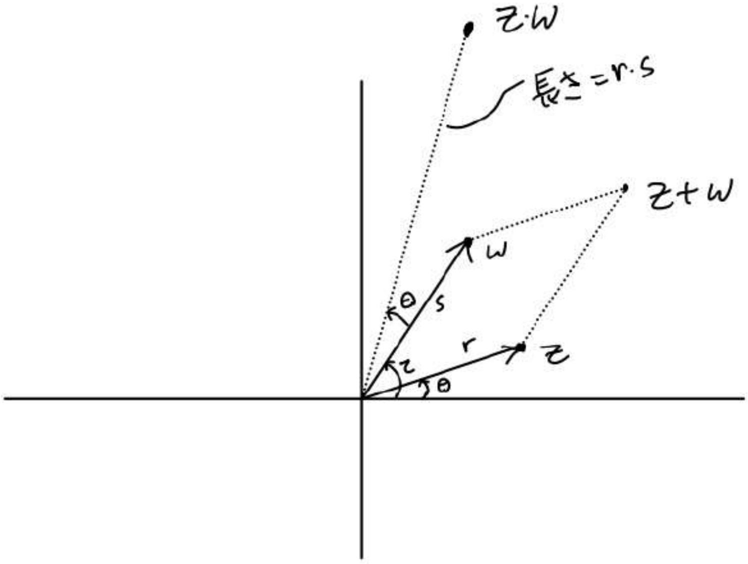
$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$ である．

よって $\arg(\bar{z}) \equiv -\theta \pmod{2\pi}$ である．同様に
$z^{-1} = \frac{1}{r^2}\bar{z}$ より $\arg(z^{-1}) \equiv -\theta \pmod{2\pi}$．

(ii)

$$\begin{aligned} zw &= r \cdot s\left((\cos\theta\cos\tau - \sin\theta\sin\tau) + i(\cos\theta\sin\tau + \sin\theta\cos\tau)\right) \\ &= rs\left(\cos(\theta+\tau) + i\sin(\theta+\tau)\right) \end{aligned}$$

したがって $\arg(zw) \equiv \theta + \tau \pmod{2\pi}$ である． $\square$



§2.2 数ベクトル

- n を自然数とする。n項数ベクトルとは,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (\text{ただし } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

という組のことをいう(厳密に言えば, 上のような組を列ベクトルといい, 横に並べた組 $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ を行ベクトルという)

n 項数ベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^n$ で表す.

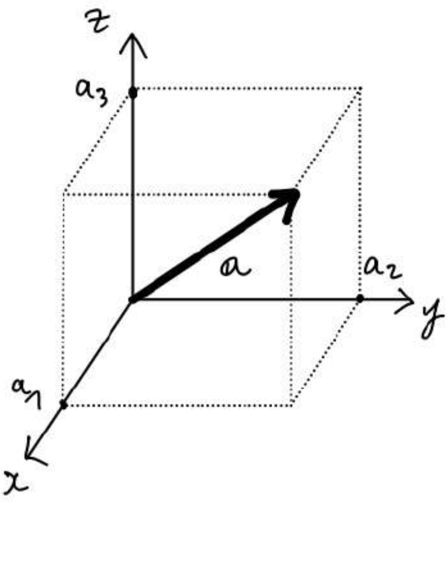
- 記号:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

太文字を用いて表す.

実数 $a_1, \ldots, a_n$ を数ベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分という.

$n=3$



- $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を数ベクトルとする. 全ての $i = 1, \dots, n$ に対して $a_i = b_i$ であるとき, $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ が等しいといい, $\mathbb{a} = \mathbb{b}$ と表す.

§2.3 ベクトルの足し算, スカラー倍

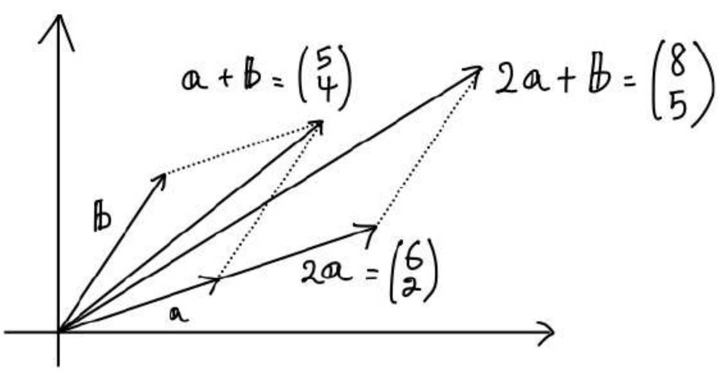
$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を n 項数ベクトルとし, x を実数とする.

このとき, $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の和 $\mathbb{a}+\mathbb{b}$, スカラー倍 $x\mathbb{a}$ をそれぞれ

$$\mathbb{a}+\mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} , \quad x\mathbb{a} = \begin{pmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{pmatrix}$$

によって定義する.

例えば, $n = 2$ とし, $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x = 2$ とする

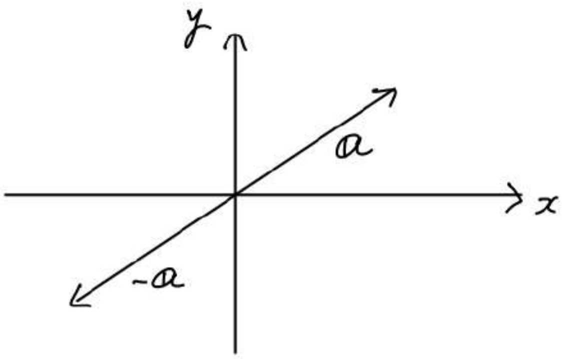


- ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ をゼロベクトルといい, $\mathbb{0}$ で表す.
  任意の数ベクトル $\mathbb{a}$ に対して $\mathbb{a} + \mathbb{0} = \mathbb{a}$ が成り立つ.

- ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して, $\mathbb{a}$ の逆ベクトルを
  $-\mathbb{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ によって定義する. 明かに, 以下が成り立つ:

$$-\mathbb{a} = (-1)\mathbb{a}$$

$$\mathbb{a} + (-\mathbb{a}) = \mathbb{0}$$



- ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ に対して, $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の引き算 $\mathbb{a} - \mathbb{b}$ を

$$\mathbb{a} - \mathbb{b} = \mathbb{a} + (-\mathbb{b})$$

  によって定義する.

• ベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ のユークリッドノルム（または長さ）を

$$\|\mathbb{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

によって定義する．長さが 1 であるベクトルを単位ベクトルという．$\mathbb{a} \neq \mathbb{0}$ のとき，$\mathbb{e} = \dfrac{\mathbb{a}}{\|\mathbb{a}\|}$ は $\mathbb{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである．

定理 2.3.1 $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ をベクトルとし，x, y を実数とすると，以下の性質が成り立つ．

$$x(\mathbb{a} + \mathbb{b}) = x\mathbb{a} + x\mathbb{b} \quad \text{（分配法則 I）}$$

$$(x+y)\mathbb{a} = x\mathbb{a} + y\mathbb{a} \quad \text{（分配法則 II）}$$

$$(xy)\mathbb{a} = x(y\mathbb{a}) \quad \text{（結合法則）}$$

$$1\mathbb{a} = \mathbb{a}$$

§2.3 複素ベクトル

数ベクトルと同様に

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$$

というような組を n項複素ベクトルという. n項複素ベクトル全体の集合を $\mathbb{C}^n$ で表す.

複素ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}$ の和 $\mathbb{a}+\mathbb{b}$, スカラー倍 $x\mathbb{a}$ $(x \in \mathbb{C})$ は実数の場合とまったく同様に定義され, 同じ性質をもつ

例えば,

$$\mathbb{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$ とおくと

$$\mathbb{a} + (1-i)\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

第3章　行列

§3.1 定義

• m, n を自然数とする. $m \cdot n$ 個の数

$$a_{ij} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$$

を以下のように縦と横に並べたものを(m,n)型の行列（あるいは$m \times n$行列）という.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} を行列 A の(i,j)成分という. $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ とも表す.

$$A = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \to \text{第1行} \\ \to \text{第2行} \\ \vdots \\ \to \text{第}m\text{行} \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{第1列} & \text{第2列} & \cdots & \text{第}n\text{列} \end{array} &
\end{array}$$

• $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$ を (m,n) 型の行列とする.

全ての i, j に対して $a_{ij} = b_{ij}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ であるとき, AとBが等しいといい, $A = B$ と書く.

- **零行列**: 全ての成分 a_{ij} $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ が 0 である行列を (m,n) 型の零行列といい, $O_{m,n}$ (あるいは単に O) で表す.

- **正方行列**: $n\times n$ 行列を n 次正方行列という.

成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を対角成分という.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

対角成分

対角成分以外の成分は全て 0 である行列を対角行列という.

例えば, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ は対角行列である.

- **単位行列**: n 次正方行列

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を単位行列という.

クロネッカーの δ 記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad i = j \\ 0 & \text{if} \quad i \neq j \end{cases}$$

によって定義する。単位行列の (i,j) 成分は δ_{ij} であることを注意する。すなわち、$E_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ である。

• 転置行列：A を (m,n) 型行列とし、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ と書く。

このとき、(n,m) 型行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を A の転置行列といい、${}^tA$ で表す。すなわち、${}^tA$ の (i,j) 成分 $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ は A の (j,i) 成分である。

例えば、$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ならば ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

${}^tA = A$ をみたす正方行列 A を対称行列という.

${}^tA = -A$ をみたす正方行列 A を交代行列という.

行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ に対して,

$-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ と定義する.

例えば, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ は対称行列であり,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ は交代行列である.

- 行ベクトル, 列ベクトル:

$1 \times n$ 行列を行ベクトルといい, $m \times 1$ 行列を列ベクトルという.

例: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 行ベクトル　　$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ 列ベクトル

A を $m \times n$ 行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ と書く.

また，Aの第i行を $\mathbb{a}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$ と

書き，Aの第j列を $\mathbb{b}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ と書く．このとき，

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{a}_m \end{pmatrix} = (\mathbb{b}_1\ \mathbb{b}_2\ \cdots\ \mathbb{b}_n)$$ とも表す

場合がある．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ とする．

$\mathbb{a}_1 = (2\ 0)$，$\mathbb{a}_2 = (1\ 3)$，$\mathbb{a}_3 = (5\ 6)$

$\mathbb{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\mathbb{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{a}_1 \\ \mathbb{a}_2 \\ \mathbb{a}_3 \end{pmatrix} = (\mathbb{b}_1\ \mathbb{b}_2)$$

§3.2 行列の演算

- **足し算**: AとBを $m\times n$ 行列とし, $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ とする.

AとBの和 $A+B$ を $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ によって定義する. すなわち,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$ である.

同様に $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ と定義する (引き算).

- **スカラー倍**: $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ を $m\times n$ 行列とし, x を実数 (または複素数) とする. このとき, Aのスカラー倍 xA を $xA=(x\,a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ によって定義する.

例: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $2A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ である.

- **行列の積**:

Aが $m\times n$ 行列, Bが $n\times r$ 行列 のとき, AとBの積 AB が定義できる. そして AB は $m\times r$ 行列になる.
(あるいは $A\times B$)

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}}$ とおく.

$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$ をみたす (i, j) に対して

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}}$$

$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$

とおき, $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}}$ と定義する. AB を A と B の積という.

$$\overset{\longleftarrow\, n \,\longrightarrow}{\begin{pmatrix} \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \cdots \end{pmatrix}} \; n \updownarrow \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ & b_{2j} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & & \cdots \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1+1\times4 & 2\times0+1\times3 & 2\times1+1\times2 \\ (-1)\times1+0\times4 & (-1)\times0+0\times3 & (-1)\times1+0\times2 \\ 3\times1+1\times4 & 3\times0+1\times3 & 3\times1+1\times2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times8+0\times(-1)+4\times2 \\ 3\times8+2\times(-1)+(-1)\times2 \\ 0\times8+1\times(-1)+5\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

足し算の性質: A, B, C を $m\times n$ 行列とする.

$A + B = B + A$ (交換法則)

$(A+B)+C = A+(B+C)$ (結合法則)

$A + \underbrace{O_{m,n}}_{(m,n)\text{型零行列}} = A$

積の性質：　A を $m \times n$ 行列とし，
B を $n \times p$ 行列とし，
C を $p \times r$ 行列とする．このとき，

$A(BC) = (AB)C$　が成り立つ（結合法則）

$AE_n = A$　（E_n : n 次単位行列）

$E_m A = A$

$A\,O_{n,p} = O_{m,p}$

$O_{k,m}\,A = O_{k,n}$

スカラー倍の性質　A を $m \times n$ 行列とし，
B を $n \times r$ 行列とし，
x, y を実数（または複素数）とする．

$x(yA) = (xy)A$

$x(AB) = (xA)B = A(xB)$

$0A = O_{m,n}$

$1A = A$

分配法則

A : $m \times n$ 行列, B, C : $n \times r$ 行列, x : 数

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$x(B+C) = xB + xC$$

同様に, A, B : $m \times n$ 行列, C : $n \times r$ 行列, x : 数

$$(A+B)C = AC + BC$$

A : $m \times n$ 行列, x, y : 数

$$(x+y)A = xA + yA$$

積の結合法則の証明

$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $C=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le r}}$

とおく.

AB の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ である. よって,

$(AB)C$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} = \underline{\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}}$$ である.

BC の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{l=1}^{p} b_{il}c_{lj}$ である. よって

$A(BC)$ の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\\ &= \underline{\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj}}\end{aligned}$$

したがって $(AB)C=A(BC)$ が成り立つ □

§3.3 行列の演算と転置

以下が成り立つ

(i)	${}^t({}^tA) = A$	A : $m\times n$ 行列
(ii)	${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$	A, B : $m\times n$ 行列
(iii)	${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$	A : $m\times n$ 行列 B : $n\times p$ 行列
(iv)	${}^t(xA) = x\,{}^tA$	A : $m\times n$ 行列, x : 数.

(iii) 以外は明らかである.

<u>(iii) の証明</u> : $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ とする.

AB の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad (*)$$

である. ゆえに $(*)$ は ${}^t(AB)$ の (j,i) 成分である.

一方, ${}^tB\,{}^tA$ の (j,i) 成分は

$(b_{ji})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ $(a_{ji})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}}$

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik} = (*)$$

である. よって ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ となる.

§3.4 連立1次方程式の行列

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

を考える.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad \mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ とおくと

上の連立1次方程式を

$$\boxed{A\mathbb{x} = \mathbb{b}}$$

と書きなおすことができる．行列 A を連立1次方程式 (*) の係数行列という．

<u>例</u>：
$$\begin{cases} 2x_1 + \phantom{3x_2 + {}} x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 \phantom{{}+8x_3} = 3 \end{cases}$$

の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 8 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{である．}$$

§3.5 可換な行列

- A, B をそれぞれ $m \times n$ 行列，$n \times m$ 行列とする．
  このとき，AB も BA も定義されている．
  AB は $m \times m$ 行列であり，BA は $n \times n$ 行列である．

- とくに，A, B を n 次正方行列とすると，AB と BA も n 次正方行列である．しかし，一般には $AB = BA$ とは限らない．

- $AB = BA$ のとき，A と B は可換であるという．

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$$

よって，$AB = BA \iff \begin{cases} a+b = a \\ b = b \\ c+d = a+c \\ d = b+d \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases}$$

$$\iff B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$$

- 正方行列 A と自然数 n に対して

$$A^n = \underbrace{A \cdots\cdots A}_{n\text{コ}}$$

とおき，A の n 乗という.

§3.6 正則行列，逆行列

定義 3.6.1 A を n 次正方行列とする.

$$AB = BA = E_n \quad \text{(単位行列)}$$

をみたす n 次正方行列 B が存在するとき，A は正則であるという.

定理 3.6.2 n 次正方行列 A が正則ならば $AB = BA = E_n$ をみたす n 次正方行列 B は一意的に存在する.

証明： $AB = BA = E_n$ かつ $AC = CA = E_n$ (B, C : n 次正方行列) とする. このとき，

$B = BE_n = B(AC) = (BA)C = E_n C = C$ である.

$\square$

$AB = BA = E_n$ をみたす n 次正方行列 B を A の逆行列といい，A^{-1} で表す.

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，A が正則かどうかを調べる. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，以下が成り立つ.

$$AB = BA = E_2 \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ c+d & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1/2 \\ d = -1/2 \end{cases}$$

$$\iff B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

よって，A は正則であり，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ である.

定理3.6.3 A, Bをn次正則行列とする．このとき，ABも正則であり，

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ．

証明

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$$

が成り立つ．同様に

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$$

が成り立つ．したがってABは正則であり，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$である． □

定理3.6.4 Aを正則行列とする．このとき，${}^tA$，A^{-1}，A^n（n：自然数）も正則であり

(i) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

が成り立つ．

証明 (i) ${}^tA\,{}^t(A^{-1})$ と ${}^t(A^{-1})\,{}^tA$ を計算する.

${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ が成り立つ.

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ より

${}^tE = E$

同様に

${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tE = E$ が成り立つ.

よって ${}^tA$ は正則であり, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である.

(ii) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ が成り立つので,

A^{-1} は正則であり, $(A^{-1})^{-1} = A$ である.

(iii) A^n は正則行列の積であるので, 正則である.

数学的帰納法によって

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$ を示す.

- $n = 1$ のとき成り立つ.
- $n \geq 2$ を自然数とし, $(A^{n-1})^{-1} = (A^{-1})^{n-1}$ が成り立つと仮定する. このとき,

$A^n = A^{n-1} \cdot A$ であるので

$$(A^n)^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{n-1})^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{-1})^{n-1} = (A^{-1})^n$$

- ゆえに、任意の自然数 n に対して $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ が成り立つ.

$\square$

A を正則行列とする. 負の整数 n に対して

$$A^n = (A^{-n})^{-1}$$

と定義する.

例えば, $A^{-2} = (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

§3.7 行列の分割

$m \times n$ 行列 A を考える. また,

$$\begin{cases} m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r \\ n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s \end{cases}$$

をみたす自然数 $m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_s$ が与えられているとする.

A を以下のように分割できる.

$$
A = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & n_1 & n_2 & \cdots & n_s \\
\hline
m_1 & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\
\hline
m_2 & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
m_r & A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \\
\hline
\end{array}
$$

行列 A_{ij} を A の小行列という. A_{ij} は

(m_i, n_j) 型行列である.

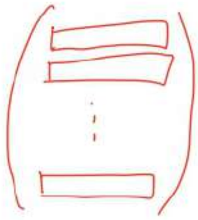
例えば, $A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 5 & 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & 6 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$

$A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$

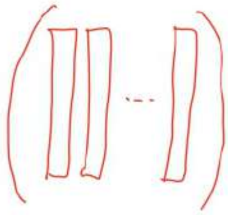
$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$ である.

注意:

- $\begin{cases} m = 1 + \cdots + 1 \\ n = n_1 \end{cases}$ のとき 

  行ベクトルによる分割が得られる.

- $\begin{cases} m = m_1 \\ n = 1 + \cdots + 1 \end{cases}$ のとき 

  列ベクトルによる分割が得られる.

分割と演算

A, B を $m \times n$ 行列とし, A, B を同じ型のブロックに分割する.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

と書く. このとき,

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}$$

$$xA=\begin{pmatrix} xA_{11} & xA_{12} & \cdots & xA_{1s} \\ xA_{21} & xA_{22} & \cdots & xA_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ xA_{r1} & xA_{r2} & \cdots & xA_{rs} \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

分割と積

A が $m\times n$ 行列, B が $n\times p$ 行列とする. また, A, B を以下のように分割する.

$$
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overbrace{\phantom{A_{11}}}^{n_1} & \overbrace{\phantom{A_{12}}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{\phantom{A_{1s}}}^{n_s} \end{array} \\
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
B = \begin{array}{c} n_1 \{ \\ n_2 \{ \\ \vdots \\ n_s \{ \end{array}
\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}
$$

このとき, $1\leq i\leq r$, $1\leq j\leq t$ に対して

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= \sum_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj} \\
&= A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \cdots + A_{is} B_{sj}
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\boxed{AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}}
$$

が成り立つ.

例: A_1, B_1 : n_1 次正方行列

A_2, B_2 : n_2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ * & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ * & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 \\ * & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & * \\ 0 & A_2B_2 \end{pmatrix}$$

例えば

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -5 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 10 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

§3.8 複素行列

複素数を成分とする行列を**複素行列**という。

複素行列 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ に対して、

$$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$ と定義し、

A の**複素共役行列**という。

定理3.8.1 以下が成り立つ。

$$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B} \qquad (A, B:m\times n\text{ 行列})$$

$$\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A} \qquad (A:m\times n\text{ 行列},\ \lambda\in\mathbb{C})$$

$$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B} \qquad (A:m\times n\text{ 行列},\ B:n\times p\text{ 行列})$$

$$\overline{\overline{A}}=A \qquad (A:m\times n\text{ 行列}).$$

複素行列 A に対して

$$A^*={}^t\overline{A}$$

と定義し、**A の随伴行列**という。

定理3.8.2 以下が成り立つ.

$$(A+B)^* = A^*+B^* \quad (A,B: m\times n\text{行列})$$

$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^* \quad (A: m\times n\text{行列}, \lambda\in\mathbb{C})$$

$$(AB)^* = B^*A^* \quad (A: m\times n\text{行列}, B: n\times p\text{行列})$$

$$(A^*)^* = A \quad (A: m\times n\text{行列})$$

Aを正方行列とする. $A^*=A$のとき, Aを

エルミット行列という.

例: Bを$m\times n$行列とする.

$$A = B^*B$$

とおくと, Aはエルミット行列である.

(なぜならば,

$$A^* = (B^*B)^* = B^*(B^*)^* = B^*B = A$$)

第4章　線形写像

n を自然数とする．$\mathbb{R}^n$ を n 項数ベクトル空間という．

定義 4.2.1　写像 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは，以下が成り立つことをいう．

(i) 任意の $a, b \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

(ii) 任意の $a \in \mathbb{R}^n$，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

補題 4.2.2　$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とする．

(i) $f(0) = 0$ である．

(ii) $f(-a) = -f(a)$　$(a \in \mathbb{R}^n)$ である．

証明:

(i) $f(\mathbb{0}) = f(0\,\mathbb{0}) = 0\,f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$

(ii) $f(-\boldsymbol{a}) = f((-1)\boldsymbol{a}) = (-1)f(\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$

$\square$

例: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

は線形写像である. なぜならば,

$$「 f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ 2(x_1+y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_1 - y_2 \\ 2y_1 \end{pmatrix}$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

一方，$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\lambda x_1+2\lambda x_2\\\lambda x_1-\lambda x_2\\2\lambda x_1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\x_1-x_2\\2x_1\end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)$$

$\lrcorner$

定理4.1.3 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ を2つの線形写像とする. このとき, 合成写像 $g\circ f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ も線形写像である.

証明: $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ.

-
$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= g(f(\mathbf{a}+\mathbf{b}))\\
&= g(f(\mathbf{a})+f(\mathbf{b})) && \because f\text{が線形写像.}\\
&= g(f(\mathbf{a}))+g(f(\mathbf{b})) && \because g\text{が線形写像}\\
&= (g\circ f)(\mathbf{a})+(g\circ f)(\mathbf{b})
\end{aligned}
$$

- 同様に

$$
\begin{aligned}
(g\circ f)(\lambda\mathbf{a}) = g(f(\lambda\mathbf{a})) = g(\lambda f(\mathbf{a})) &= \lambda g(f(\mathbf{a}))\\
&= \lambda(g\circ f)(\mathbf{a}).
\end{aligned}
$$

以上より $g\circ f$ は線形写像である.

□

§4.2 線形写像の行列表現

行列で定義された線形写像

A を $m \times n$ 行列とし，次の写像を考える．

$$
\begin{aligned}
f_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\
x &\longmapsto Ax
\end{aligned}
$$

補題 4.2.1 f_A は線形写像である．

証明：$x, y \in \mathbb{R}^n$，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

- $f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay$
  $= f_A(x) + f_A(y)$.
- $f_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda f_A(x)$ □

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$ となる．

したがって，f_A は以下の写像である

$$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

標準基底

$\mathbb{R}^n$の 次のベクトル $e_1, e_2, \dots, e_n$ を 考える.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

つまり, e_j の 第j成分は 1 で, 他の成分は全て 0 である.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ を $\mathbb{R}^n$の標準基底 という.

線形写像の表現行列

線形写像 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が与えられているとする.

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ を $\mathbb{R}^n$の標準基底とし, ベクトル

$f(e_1), \dots, f(e_n)$ を考える. 各 $j = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$$f(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ と表す.

列ベクトル $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ を順に並べることによって,

$m \times n$ 行列 A が定まる. すなわち

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

A を $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列という.

補題 4.2.2 $f = f_A$ である. すなわち,

全ての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(x) = Ax$$ が成り立つ.

証明: $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を考えて, $f(\boldsymbol{x})$ を計算する. まず

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

と書く.

よって,

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j}$$

である.

したがって,

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} f(x_j \boldsymbol{e}_j) && (\because f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{e}_j) && (\because f(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda f(\boldsymbol{a})) \\
&= \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

以上より，$f(\mathbb{x}) = f_A(\mathbb{x})$ である．

よって，$f = f_A$ となる $\square$

補題 4.2.3 A, B を $m \times n$ 行列とする．
$f_A = f_B$ ならば，$A = B$ である．

証明：$(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \cdots, \mathbb{e}_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．$f_A = f_B$ より，$f_A(\mathbb{e}_j) = f_B(\mathbb{e}_j)$ である．よって，すべての $j = 1, \cdots, n$ に対して

$$A\mathbb{e}_j = B\mathbb{e}_j$$

となり，A と B の第 j 列が一致する．
したがって $A = B$ となる． $\square$

定理 4.2.3 線形写像 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ と $m \times n$ 行列は一対一で対応している.

つまり, 以下の対応は一対一対応である

$$
\left\{ m \times n \text{ 行列} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{線形写像} \\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{array} \right\}
$$

$$
A \longmapsto f_A
$$

$$
f \text{の表現行列} \longleftarrow\!\!\!\mid f
$$

例:

$$
\begin{aligned}
f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 5x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} x \quad \text{と書ける.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} = A$$

したがって, f は線形写像であり, f に対応する行列は A である.

<u>注意</u>　$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし, f に対応する行列を

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{と書く.}$$

また, $(e_1, \cdots, e_n)$ と $(e'_1, \cdots, e'_m)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底とする. このとき,

$$\boxed{f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i}$$

§4.3 線形写像の合成

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ を

線形写像とし，その合成写像

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

を考える．f と g に対応する行列をそれぞれ

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$ とおく．

<u>定理 4.3.1</u>　$g \circ f$ に対応する行列を C

とおくと，

$$C = BA$$

が成り立つ．

<u>証明</u>　$C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ と書く．

$\mathbb{R}^n$の 標準基底を $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ とし

$\mathbb{R}^m$の ________ $(e'_1, e'_2, \cdots, e'_m)$ とし

$\mathbb{R}^p$の ________ $(e''_1, e''_2, \cdots, e''_p)$ とする.

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(e_j) &= g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} e'_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, g(e'_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \sum_{i=1}^{p} b_{ik} e''_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}\right) e''_i
\end{aligned}
$$

一方, $(g \circ f)(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_{ij} e''_i$ である.

ゆえに

$$
c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}
$$

となり, すなわち $C = BA$ が成り立つ. $\square$

補題 4.3.2　$id_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の恒等写像とする. $id_{\mathbb{R}^n}$ に対応する行列は n 次単位行列 E である.

証明: $id_{\mathbb{R}^n}(x) = x = Ex$ より従う.

□

定義 4.3.3: 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が全単射であるとき, f を同型写像という.

補題 4.3.4　$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を同型写像とする. このとき, f の逆写像 $f^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ も同型写像である.

証明: f^{-1} は明らかに全単射であるので、
f^{-1} が線形写像であることを示せば十分である.
$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(f^{-1}(\mathbb{a}+\mathbb{b})) &= \mathbb{a}+\mathbb{b} \\
&= f(f^{-1}(\mathbb{a})) + f(f^{-1}(\mathbb{b})) \\
&= f(f^{-1}(\mathbb{a}) + f^{-1}(\mathbb{b}))
\end{aligned}
$$

となる. f が単射より,

$$f^{-1}(\mathbb{a}+\mathbb{b}) = f^{-1}(\mathbb{a}) + f^{-1}(\mathbb{b}) \quad \text{となる.}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
f(f^{-1}(\lambda \mathbb{a})) = \lambda \mathbb{a} &= \lambda f(f^{-1}(\mathbb{a})) \\
&= f(\lambda f^{-1}(\mathbb{a}))
\end{aligned}
$$

よって $f^{-1}(\lambda \mathbb{a}) = \lambda f^{-1}(\mathbb{a})$ となる.

以上より f^{-1} は線形写像である $\square$

定理 4.3.5 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線形写像とし，f に対応する行列を A とおく．
このとき，

$$f\text{が同型写像} \iff A\text{が正則行列}$$

また，f が同型写像ならば，f^{-1} に対応する行列は A^{-1} である．

証明 f が同型写像であるとし，f^{-1} に対応する行列を B とおく．

$$f \circ f^{-1} = id \quad , f^{-1} \circ f = id \quad \text{より}$$

$AB = E$ ，$BA = E$ が成り立つ．よって，A が正則行列であり，$B = A^{-1}$ である．
逆に，A が正則であるとする．A^{-1} に対応する線形写像を $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とおく．

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ より $f \circ g = g \circ f = id$

となる. したがって, f は同型写像である $\square$

第5章　置換

§5.1 定義

nを自然数とする. 写像

$$\sigma : \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \{1,2,\dots,n\}$$

が全単射であるとき, σを $\{1,2,\dots,n\}$の置換という.

$\sigma(1) = i_1$, $\sigma(2) = i_2$, $\dots$, $\sigma(n) = i_n$　と書くと,

$$\boxed{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{と表す.}}$$

行列ではない!

σが全単射だから, $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1,2,\dots,n\}$ である.

例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の6個は $\{1,2,3\}$ の全ての置換である.

注意：置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ は写像

$j \mapsto i_j \quad (j=1,\cdots,n)$ を表す.

$\cdots \begin{matrix} j \\ i_j \end{matrix} \cdots$ の並べ方を変えても, 写像として同じものになる. 例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

$\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換全体のなす集合を $\mathfrak{S}_n$ と表す.

$\{1, \cdots, n\}$ の置換の総数は

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

置換の積：

$\tau : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$
$\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$
を2つの$\{1, 2, \cdots, n\}$の置換とする.

τとσの合成写像

$$\tau \circ \sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$$

はまた全単射だから，$\tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$である.

$\tau \circ \sigma$をτとσの積といい，単に$\tau\sigma$で表す.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} , \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

とする. また，τの上段を$i_1, i_2, \cdots, i_n$に並びかえたときの下段が$r_1, r_2, \cdots, r_n$となったとする. つまり

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

$$\boxed{\begin{aligned}\tau\sigma &= \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}\end{aligned}}$$

<u>例えば</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とする．このとき $\tau = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ だから

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

他の計算方法：

$$\begin{cases} \tau(\sigma(1)) = \tau(4) = 4 \\ \tau(\sigma(2)) = \tau(1) = 3 \\ \tau(\sigma(3)) = \tau(2) = 1 \\ \tau(\sigma(4)) = \tau(3) = 2 \end{cases}$$ より $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

同様に

$$\begin{cases} \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 2 \\ \sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 4 \\ \sigma(\tau(3)) = \sigma(2) = 1 \\ \sigma(\tau(4)) = \sigma(4) = 3 \end{cases}$$ より $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- 単位置換（または恒等置換）とは，置換

$$\boxed{\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}}$$ である．

写像としては，恒等写像 $id : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ である．

• 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対して，

$$\boxed{\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}}$$ と定め，

σ の逆置換という．写像として σ^{-1} は σ の逆写像 $\{1, \ldots, n\} \xrightarrow{\sigma^{-1}} \{1, \ldots, n\}$ である．

例：$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ならば

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$ が成り立つ．

定理 5.1.1

(1) 結合法則：任意の $\sigma, \tau, \rho \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$(\rho\tau)\sigma = \rho(\tau\sigma)$$

(2) 単位元の存在：任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$$

(3) 逆元の存在：任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$$

一般的に，集合 G に演算が与えられているとする.

上の(1),(2),(3)が成り立つときに，G を群という.

$\mathfrak{S}_n$ は群であり，対称群または置換群という.

定理 5.1.2 Gを群とし，$a, b, c \in G$とする．

(1) $ac = bc \Rightarrow a = b$

(2) $ca = cb \Rightarrow a = b$

(3) $a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = b$

証明：

(1) $ac = bc$ より $(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$ である．
結合法則を用いて，$a(cc^{-1}) = b(cc^{-1})$ となる．
Gの単位元をeと書くと $ae = be$ となり，
すなわち $a = b$．

(2) は同様に示せる．

(3) $a^{-1} = b^{-1}$ より $e = aa^{-1} = ab^{-1}$ となる．よって

$$b = eb = (ab^{-1})b = a(b^{-1}b) = ae = a$$

結合法則

□

系 5.1.3 Gを群とし，$c \in G$とする．写像

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{f_1} & G \\ x & \longmapsto & cx \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{f_2} & G \\ x & \longmapsto & xc \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{f_3} & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

はそれぞれ全単射である．

証明：定理5.1.2より f_1, f_2, f_3 はそれぞれ単射である．

f_1が全射であることを示す．$y \in G$とし，$x = c^{-1}y$とおく．

$$f_1(x) = cx = c(c^{-1}y) = (cc^{-1})y = ey = y$$

よって，f_1は全射である．

f_2の場合も同様に議論できる．

f_3が全射であることを示す. $y \in G$とし, $x = y^{-1}$ とおく.

$$f_3(x) = x^{-1} = (y^{-1})^{-1} = y$$

よって f_3 は全射である.

以上より f_1, f_2, f_3 はそれぞれ全単射である □

§5.2 巡回置換と互換

$i_1, i_2, \cdots, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を互いに異なるものとする $(m \geq 2)$

置換 σ を以下のように定める.

$$\begin{cases} \sigma(i_1) = i_2 \\ \sigma(i_2) = i_3 \\ \quad \vdots \\ \sigma(i_{m-1}) = i_m \\ \sigma(i_m) = i_1 \\ i \notin \{i_1, \cdots, i_m\} \text{ に対して } \sigma(i) = i \end{cases}$$

σ を巡回置換といい,

$\sigma = (i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_m)$ と書く.

<u>例</u>:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 5 \arrow[lll, bend left] & 3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

よって σ は巡回置換であり,

$$\sigma = (1\ 4\ 2\ 5) = (4\ 2\ 5\ 1) = (2\ 5\ 1\ 4)$$
$$= (5\ 1\ 4\ 2)$$ が成り立つ.

<u>命題 5.2.1</u> 巡回置換 $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_m) \in \mathfrak{S}_n$ に対し,以下が成り立つ.

(1) $\sigma^{-1} = (i_m\ i_{m-1}\ \cdots\ i_2\ i_1)$

(2) $\sigma^m = id$ (恒等置換)

(3) $\tau \in \mathfrak{S}_n$ に対し,

$$\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \cdots\ \tau(i_m))$$

証明：

(1) $\tau = (i_m\ i_{m-1}\ \cdots\ i_1)$ とおき，$\tau\sigma$ を計算する．

$i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$ ならば $\tau(\sigma(i)) = \tau(i) = i$ である．

$$\begin{cases} \tau(\sigma(i_1)) = \tau(i_2) = i_1 \\ \tau(\sigma(i_2)) = \tau(i_3) = i_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \tau(\sigma(i_m)) = \tau(i_1) = i_m \end{cases}$$

したがって $\tau\sigma = \varepsilon$ となり，ゆえに $\tau = \sigma^{-1}$ が成り立つ．

(2) 整数 n に対して $n = d + mk$ $(1 \leq d \leq m,\ k \in \mathbb{Z})$ のとき，$i_n = i_d$ とおく（例えば $i_0 = i_m = i_{2m}$，$i_1 = i_{m+1} = i_{2m+1}$ $\cdots$）．こうすると

$$\sigma(i_k) = i_{k+1} \quad \text{である．}$$

よって $\sigma^m(i_k) = i_{k+m} = i_k$ である．よって $\sigma^m = \varepsilon$ である．

(3) $\gamma = \tau\sigma\tau^{-1}$ とおく．

$$\begin{aligned} \gamma(\tau(i_k)) &= \tau\sigma\tau^{-1}(\tau(i_k)) \\ &= \tau\sigma(i_k) \\ &= \tau(i_{k+1}) \end{aligned}$$

また，$j \notin \{\tau(i_1), \cdots, \tau(i_m)\}$ とすると，
$\tau^{-1}(j) \notin \{i_1, \cdots, i_m\}$ となる．よって

$$\gamma(j) = \tau\sigma(\tau^{-1}(j)) = \tau(\tau^{-1}(j)) = j$$

したがって，$\gamma = (\tau(i_1)\ \tau(i_2)\ \cdots\ \tau(i_m))$ である．

□

巡回置換 $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots i_m)$ に対して

$$S(\sigma) = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$$ と定める．

定義 5.2.2　巡回置換 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ が互いに素であるとは，以下が成り立つときにいう．

$i \neq j$ ならば，$S(\sigma_i) \cap S(\sigma_j) = \emptyset$．

例えば，巡回置換 $(1\ 3)$，$(2\ 4\ 7)$，$(5\ 6)$ は互いに素である．

巡回置換 $(1\,2\,5)$, $(3\,7)$, $(2\,4\,8)$
は互いに素でない.

補題 5.2.3 σ と τ が互いに素な巡回置換
ならば
$$\sigma\tau = \tau\sigma$$
が成り立つ.

証明: σ と τ が互いに素であるので,
$i \in S(\sigma)$ ならば $i \notin S(\tau)$. また, $i \in S(\sigma)$ ならば
$\sigma(i) \in S(\sigma)$ となるので, $\sigma(i) \notin S(\tau)$ である. よって
$$\begin{cases} \sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(i) \\ \tau\sigma(i) = \tau(\sigma(i)) = \sigma(i) \end{cases}$$
同様に, $i \in S(\tau)$ のとき $\sigma\tau(i) = \tau\sigma(i)$ が分かる.

最後に，$i \notin S(\sigma)$ かつ $i \notin S(\tau)$ のとき

$$\begin{cases} \sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma(i) = i \\ \tau\sigma(i) = \tau(\sigma(i)) = \tau(i) = i \end{cases}$$

以上より $\sigma\tau = \tau\sigma$ が成り立つ．　□

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とし，$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．部分集合

$$O(i) = \{ \sigma^d(i) \mid d \in \mathbb{Z} \}$$

を σ による i の軌道という．

$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{補題 5.2.4}}\quad i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ とする．} \\ j \notin O(i) \text{ ならば} \\ \qquad O(j) \cap O(i) = \emptyset \text{ である．}\end{array}}$

<u>証明</u>: $k \in O(j) \cap O(i)$ を仮定する．

よって，$k = \sigma^a(j) = \sigma^b(i)$ となる $a, b \in \mathbb{Z}$

が存在する．

よって $\sigma^a(j) = \sigma^a(\sigma^{b-a}(i))$ となる. σ^a が単射だから $j = \sigma^{b-a}(i)$ であり, ゆえに $j \in O(i)$ となり, 矛盾する. したがって $O(j) \cap O(i) = \phi$ である

□

定理 5.2.5 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする. $\{1, 2, \ldots, n\}$ は σ による軌道に分割される. つまり $O(i_1), \ldots, O(i_k)$ を互いに異なる, σ による全ての軌道とすると,

$$\{1, 2, \ldots, n\} = O(i_1) \sqcup O(i_2) \sqcup \cdots \sqcup O(i_k)$$

(共通部分をもたない和集合)

証明:

$i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, 明らかに $i \in O(i)$ であるので $i \in O(i) = O(i_k)$ をみたす i_k が存在する.

また，補題 5.2.4 より

$$r \neq s \implies O(i_r) \cap O(i_s) = \emptyset \quad \text{である.}$$

したがって，$\{1, \dots, n\}$ は軌道に分割される □

例: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ とする.

$O(1) = \{1, 4, 2\}$

$O(3) = \{3, 5, 7, 6\}$.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ をとり,
i が次々とどう移っていくかを見る.

$$i = \sigma^0(i) \xrightarrow{\sigma} \sigma(i) \xrightarrow{\sigma} \sigma^2(i) \xrightarrow{\sigma} \sigma^3(i) \xrightarrow{\sigma} \cdots$$

明らかに, $\sigma^k(i) = \sigma^j(i)$ かつ $j < k$ となる j, k
が存在する.

$$m_i = \min \{ k \geq 1 \mid \exists j < k,\ \sigma^k(i) = \sigma^j(i) \}$$

最小のもの

と定義する.

補題 5.2.6

(1) $\sigma^{m_i}(i) = i$ である

(2) $O(i) = \{ i, \sigma(i), \dots, \sigma^{m_i - 1}(i) \}$.

証明 (1) $\sigma^{m_i}(i) = \sigma^j(i)$ をみたす $j < m_i$
が存在する. $j = 0$ を示す. $j \geq 1$ ならば,

$\sigma^{m_i}(i) = \sigma^{j}(i)$ より

$\sigma^{m_i - j}(i) = i$ かつ $0 < m_i - j < m$

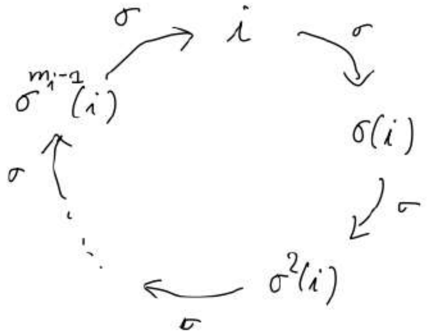
となり, m_i の最小性に矛盾する.

<u>したがって $j = 0$ となる.</u>

(2) $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $n = j + km_i$ (但し, $0 \leq j \leq m_i - 1$) と表せる. よって,

$$\sigma^{n}(i) = \sigma^{j+km_i}(i) = \sigma^{j}(\underbrace{\sigma^{km_i}(i)}_{=i}) = \sigma^{j}(i)$$

よって $O(i) = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{m_i-1}(i)\}$ となる □



$\sigma(i) = i$ のとき, i が σ の固定点という. そのとき, $O(i) = \{i\}$ である.

定理 5.2.7 任意の置換は互いに素な巡回置換の積として表される．さらに，この表し方は積の順序を除いて一意的である．

証明: 定理 5.2.5 より $\{1, 2, \ldots, n\}$ は σ による軌道に分割される．

$$\{1, 2, \ldots, n\} = O(i_1) \sqcup O(i_2) \sqcup \cdots \sqcup O(i_k)$$

$i_1, i_2, \ldots, i_k$ の中で，固定点でないものが $i_1, \ldots, i_d$ $(d \leq k)$ であるとして良い．$j \in \{1, \ldots, k\}$ に対し巡回置換

$$\tau_j = \left(i \quad \sigma(i_j) \quad \cdots \quad \sigma^{m_{i_j}-1}(i_j)\right)$$

を考える．補題 5.2.6 (1) より

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$$

が成り立つ．

軌道による分割が一意的だから，上の表し方も
(積の順序を除いて)一意的である． □

<u>例</u>　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 7 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 6 \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

$5 \circlearrowleft$

よって，$\sigma = (1\ 2\ 4\ 7)(3\ 9\ 8\ 6)$
$\quad = (3\ 9\ 8\ 6)(1\ 2\ 4\ 7)$ が成り立つ．

定義 5.2.8　2文字 i, j の巡回置換 $(i\ j)$ を**互換**という．また，$(i\ \ i+1)$ の形の互換を**隣接互換**という．

定理 5.2.9 巡回置換 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_m)$ は以下のように $m-1$ 個の互換の積で表すことができる.

$$(i_1\ i_2\ \cdots\ i_m) = (i_1\ i_m)(i_1\ i_{m-1})\cdots(i_1\ i_2)$$

証明: 明らかである. □

例:

$$(3\ 2\ 5\ 4\ 1) = (3\ 1)(3\ 4)(3\ 5)(3\ 2)$$

定理 5.2.10 任意の置換は互換の積で表すことができる.

証明: 定理 5.2.7, 5.2.9 に従う. □

例: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 7 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 2 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 9 \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}$$

よって　$\sigma = (1\ 3\ 7)(2\ 6\ 5\ 8\ 4\ 9)$

$$\sigma = (1\ 7)(1\ 3)(2\ 9)(2\ 4)(2\ 8)(2\ 5)(2\ 6)$$

定理 5.2.11 任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は隣接互換 $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n)$ の積として表すことができる.

証明: 定理5.2.10より σ が互換 $(i\ j)$, $i<j$ の場合を考えれば十分である.

$$\begin{aligned}
(i\ j) &= (j-1\ j)(i\ j-1)(j-1\ j) \\
(i\ j-1) &= (j-2\ j-1)(i\ j-2)(j-2\ j-1) \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
(i\ i+2) &= (i+1\ i+2)(i\ i+1)(i+1\ i+2)
\end{aligned}$$

より $(i\ j)$ は $2(j-1)+1$ 個の隣接互換の積として表せる. $\square$

§5.3 置換の符号

定義 5.3.1 σ を置換とし，σ が m 個の互換の積で表せるとする．このとき，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$

とおき，σ の**符号**という．

注意：σ を互換の積として表す方法は1通りではない

例：$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2) = (1\,2)(1\,3)$

$$\sigma = (1\,2)\underbrace{(2\,3)(1\,2)(2\,3)}_{(1\,3)}$$

置換の符号が矛盾なく定義されていることを確認するためには,

$$\sigma = t_1 \cdots t_r = t'_1 \cdots t'_s \quad (t_i, t'_i : \text{互換})$$

ならば $(-1)^r = (-1)^s$ であり, すなわち r と s の偶奇性が一致する.

を示せば良い. (*)

(*) の証明:

n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式 $P(x_1, \ldots, x_n)$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, 以下のように多項式 σP を定義する.

$$\sigma P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

例: $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2 x_3^4 + x_1 x_2 x_3$ とし, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき,

$$\sigma P(x_1, x_2, x_3) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$
$$= P(x_3, x_1, x_2)$$
$$= x_3^3 + x_1 x_2^4 + x_3 x_1 x_2.$$

補題 5.3.2 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ ならば

$$\tau(\sigma P) = (\tau\sigma) P$$

証明: $Q = \sigma P$ とする.

つまり $Q(x_1, \cdots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ である.

$$\tau Q(x_1, \cdots, x_n) = Q(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(n)})$$
$$= P(x_{\tau\sigma(1)}, \cdots, x_{\tau\sigma(n)})$$

よって $\tau(\sigma P) = (\tau\sigma) P$ である. $\square$

定義5.3.3 n 変数 $x_1, \dots, x_n$ に関する多項式

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

を差積という.

例えば, $n = 4$ のとき

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \times (x_3 - x_4).$$

である.

補題 5.3.4　$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が互換ならば

$$\sigma \Delta = -\Delta$$

証明：$\sigma = (i\ j)$，$i < j$ とする

$\Delta =$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(x_1 - x_2) & \cdots & (x_1 - x_i) & \cdots & (x_1 - x_{j-1}) & (x_1 - x_j) & (x_1 - x_{j+1}) & \cdots & (x_1 - x_n) \\
 & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 & & (x_{i-1} - x_i) & \cdots & (x_{i-1} - x_{j-1}) & (x_{i-1} - x_j) & (x_{i-1} - x_{j+1}) & \cdots & (x_{i-1} - x_n) \\
 & & & (x_i - x_{i+1}) \cdots & (x_i - x_{j-1}) & (x_i - x_j) & (x_i - x_{j+1}) & \cdots & (x_i - x_n) \\
 & & & & & (x_{i+1} - x_j) & (x_{i+1} - x_j) & \cdots & (x_{i+1} - x_n) \\
 & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & (x_{j-1} - x_j) & (x_{j-1} - x_{j+1}) & \cdots & (x_{j-1} - x_n) \\
 & & & & & & (x_j - x_{j+1}) & \cdots & (x_j - x_n) \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & (x_{n-1} - x_n)
\end{array}$$

σ

−1倍

−1倍

σ

$$(x_i - x_j) \xrightarrow{\sigma} x_j - x_i$$

Δ と比べて, $\sigma\Delta$ では

- の個所は互いに移り合う
- の個所は互いに移り合う.
- の個所は(-1)倍で移り合う. 積全体では符号は変わらない.
- の個所は(-1)倍になる.

したがって, $\sigma\Delta = -\Delta$ が成り立つ. □

定理 5.3.5 σを置換とし, 互換の積としての表し方が2つ与えられているとする. つまり,

$$\sigma = t_1 t_2 \cdots t_r = t'_1 t'_2 \cdots t'_s \quad (t_i, t'_i : \text{互換})$$

とする. このとき $(-1)^s = (-1)^r$ である.

証明：

$$\sigma\Delta = (t_1 \cdots t_r)\Delta = (t_1 \cdots t_{r-1})(t_r\Delta)$$
$$= -(t_1 \cdots t_{r-1})\Delta$$
$$\vdots$$
$$= (-1)^r\Delta$$

同様に $\sigma\Delta = (t_1' \cdots t_s')\Delta = (-1)^s\Delta$

したがって $(-1)^r = (-1)^s$ である $\square$

定理 5.3.5 より置換の符号は矛盾なく定義されている.

定義 5.3.6 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して,
$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ のとき**偶置換**といい, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ のとき**奇置換**という.

定理 5.3.7 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ について

(1) $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\sigma)$

(2) $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$ (ε : 恒等置換)

(3) $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$

証明 (1) $\sigma = t_1 \cdots t_r$, $\tau = t'_1 \cdots t'_s$ (t_i, t'_i : 互換) とする. このとき $\tau\sigma = t'_1 \cdots t'_s t_1 \cdots t_r$ より $\mathrm{sgn}(\tau\sigma) = (-1)^{s+t} = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma)$

(2) ε は 0 個の互換の積であるので, $\mathrm{sgn}(\varepsilon) = (-1)^0 = -1$

(3) $\sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$ が成り立つので, (1) と (2) より

$\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$. よって $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$

である. □

定理 5.3.8 巡回置換 $\sigma = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_m)$ について

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-1}$$ が成り立つ.

証明: $\sigma = (i_1\ i_m)(i_1\ i_{m-1}) \cdots (i_1\ i_2)$ より

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-1}$ となる. □