

線形代数学 A

レポート 2 (期末レポート)

提出方法: レポートを Webclass で提出して下さい.

提出の際, 写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい.

提出期限: 2022 年 8 月 5 日 (金) 18 時まで.

教員名: コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. 以下の置換を互換の積で分解せよ.

$$(1) \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(3) \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (但し, } n \geq 2 \text{ は自然数である).}$$

問 2. 以下の写像が線形写像であるかどうかを判定せよ. また, 線形写像である場合は, 対応する行列を求めよ.

$$(1) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_3 - 2, x_1 + 3, x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 1).$$

$$(2) f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \sum_{i=1}^n x_i).$$

$$(3) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2, x_1x_2 - 3x_3^2).$$

$$(4) f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \text{ (但し, } \sigma = (1 \ 2 \ \dots \ n) \in \mathfrak{S}_n).$$

問 3. A を n 次正方複素行列とし, $A^2 = -E$ が成り立つとする. 任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, $A + \lambda E$ が正則行列であることを示せ.

問 4. ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して, 写像 $f_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を以下のように定める.

$$f_{\mathbf{v}}: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

- (1) $f_{\mathbf{v}}$ が線形写像であることを示せ. また, $f_{\mathbf{v}}$ に対応する行列 $M_{\mathbf{v}}$ を求めよ.
- (2) $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して, $f_{\mathbf{u}} = f_{\mathbf{v}}$ ならば, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ が成り立つことを示せ.
- (3) $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して, $f_{\mathbf{w}} = f_{\mathbf{u}} \circ f_{\mathbf{v}}$ を満たすベクトル $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ が一意的に存在することを示せ. ベクトル $\mathbf{w}$ を $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ と表す.
- (4) 任意のベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して, $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ が成り立つことを示せ.
- (5) 演算 $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ が結合法則を満たすことを証明せよ. また, 単位元 ε が存在することを示せ (ε が単位元であるとは, 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し $B(\varepsilon, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \varepsilon) = \mathbf{v}$ であることをいう).

問 5. $\mathfrak{S}_n$ の置換 σ, τ が共役であるとは, 置換 $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ が存在し, $\sigma = \gamma\tau\gamma^{-1}$ であることをいう. また, 巡回置換 $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r)$ の長さとは, 自然数 r のことである.

- (1) 置換 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ が以下のように互いに素な巡回置換の積に分解されているとする.

$$\sigma = c_1 \cdots c_m, \quad \tau = c'_1 \cdots c'_p.$$

次が成り立つことを示せ. σ と τ が共役であるための必要十分条件は, 「 $m = p$ かつ順序を除いて, 巡回置換 $c_1, \dots, c_m$ の長さ $c'_1, \dots, c'_m$ の長さが一致する」である.

- (2) 以下の置換が互いに共役であるかどうかを判定せよ.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 5 & 6 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 8 & 6 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問 6. X を集合とし, X の元の個数を n と書く. X の元に添字を付けて, それらを $x_1, x_2, \dots, x_n$ と表す. また, $f: X \rightarrow X$ を全単射とする.

- (1) $\mathfrak{S}_n$ の置換で, $f(x_i) = x_{\sigma(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす σ がただ一つ存在することを示せ.
- (2) $\text{sgn}(\sigma)$ が $x_1, \dots, x_n$ の添字の付け方に依らないことを証明せよ.
定義: $\text{sgn}(f) = \text{sgn}(\sigma)$ とおき, f の符号という.
- (3) $X = \mathfrak{S}_4$ とする. $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対して, 全単射 $f_{\tau}: X \rightarrow X$ を $f_{\tau}(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$ によって定義する. 全ての $\tau \in \mathfrak{S}_4$ に対して $\text{sgn}(f_{\tau})$ を求めよ.
- (4) $X = \{0, 1, 2, \dots, 2022\}$ とする. $k \in X$ に対して, $2k$ を 2023 で割った余りを $f(k)$ と書く. 全単射 $f: X \rightarrow X$ の符号を求めよ.