線形代数学 D　2023 年度後期

コスキヴィルタ　ジャンステファン

目次

参考書：「線形代数学 C」の講義ノート (webclass)

数学記号一覧

	記号	説明
集合論	id_X	集合 X の恒等写像
	f^{-1}	全単射 $f\colon X \to Y$ の逆写像
	$X \setminus Y$	X から Y を引いた差集合
線形変換・行列	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$	基底 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ に関する線形写像 $f\colon V \to W$ の行列
	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$	基底 $\mathcal{B}$ に関する線形変換 $f\colon V \to V$ の行列
	$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$	基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{C}$ への基底変換行列
	$\det(A)$	行列 A の行列式
	$\det(f)$	ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の行列式
	$\chi_A(X)$	行列 A の固有多項式
	$\chi_f(X)$	ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の固有多項式
	$\mu_A(X)$	行列 A の最小多項式
	$\mu_f(X)$	ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の最小多項式
	f_A	行列 A で定まる線形写像
	$\mathrm{Tr}(A)$	正方行列 A のトレース
	${}^tA$	行列 A の転置行列
	A^*	複素行列 A の随伴行列
	E_n	n 次正方単位行列
	$\mathrm{Ker}(f)$	線形写像 f の核
	$\mathrm{Im}(f)$	線形写像 f の像
	A^{-1}	行列 A の逆行列
	$\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の一般線形群
	$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ を成分とする (m,n) 型行列全体の集合
	$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ を成分とする n 次正方行列全体の集合
	$\mathrm{GL}(V)$	同上
	$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の線形変換 $V \to V$ 全体の集合
	$\mathrm{End}(V)$	同上
	$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正則行列全体のなす群
	$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次対称行列全体の集合
	$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次交代行列全体の集合
ベクトル空間	$\dim_{\mathbb{K}}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の次元
	$\dim(V)$	同上
	$\mathbb{K}[X]$	$\mathbb{K}$ 係数多項式全体のなす環
	$W_1 \oplus W_2$	線形部分空間 W_1, W_2 の直和
	$\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(u_1, \ldots, u_n)$	ベクトル $u_1, \ldots, u_n$ の $\mathbb{K}$-線形結合全体のなす部分空間
	$\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_n)$	同上
	V^*	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の双対空間 (線形写像 $V \to \mathbb{K}$ 全体のなすベクトル空間)
ユークリッド空間・エルミート空間	$V = W_1 \perp W_2$	V が部分空間 W_1 と W_2 の直交直和であることを意味する記号
	$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$	正定値対称行列全体の集合
	$\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$	半正定値対称行列全体の集合

	$\mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$	負定値対称行列全体の集合
	$\mathcal{S}_n^{-}(\mathbb{R})$	半負定値対称行全体の集合
	$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R})$	正定値エルミート行列全体の集合
	$\mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{R})$	半正定値エルミート行列全体の集合
	$\mathcal{H}_n^{--}(\mathbb{R})$	負定値エルミート行列全体の集合
	$\mathcal{H}_n^{-}(\mathbb{R})$	半負定値エルミート行全体の集合
	$\mathrm{U}(V)$	エルミート空間 V のユニタリ群
	$\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$	n 次ユニタリ行列全体のなす群
	$\langle x, y\rangle$	ベクトル x, y の内積
	$\|x\|$	ベクトル x のノルム
	$\| \ \|_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbb{R}^n$ の通常のユークリッドノルム
	$(V, \langle -, -\rangle)$	ユークリッド空間・エルミート空間
	$\mathrm{O}(V)$	ユークリッド空間 V の直交群
	$\mathrm{SO}(V)$	ユークリッド空間 V の特殊直交群 (行列式が 1 である V の等長変換全体の群)
	$\mathrm{GO}(V)$	ユークリッド空間 V の一般直交群
	$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$	n 次直交行列全体の群
	$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$	行列式が 1 である n 次直交行列全体の群
	$\mathrm{GO}_n(\mathbb{R})$	n 次一般直交群
	f^*	ユークリッド空間・エルミート空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の随伴変換
	s_W	ユークリッド空間の線形部分空間 W に関する鏡映変換
	$W^{\perp}$	ユークリッド空間の線形部分空間 W の直交補空間
	$R(\theta)$	$\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする角 θ 回転変換
2 次形式	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$	基底 $\mathcal{B}$ に関する 2 次形式 q の行列
	$\Delta_{\mathcal{B}}(q)$	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ の行列式
	$\Delta_i(A)$	正方行列 A の i 次主小行列式
	$\mathrm{O}(q)$	2 次形式 q の直交群
	$\mathrm{SO}(q)$	2 次形式 q の特殊直交群
	s_W	非退化な 2 次形式を持つベクトル空間の非退化な線形部分空間 W に関する鏡映変換
	$W^{\perp}$	2 次形式を持つベクトル空間の線形部分空間 W の直交部分空間
	$Z(G)$	群 G の中心
	$\mathrm{rank}(q)$	2 次形式 q のランク
	$\eta(q)$	2 次形式 q の指数
	$\mathrm{Rad}(q)$	2 次形式 q の根基
	TIS	完全等方部分空間 (Totally Isotropic Subspace)
	MTIS	極大完全等方部分空間 (Maximal Totally Isotropic Subspace)
	$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$	体拡大 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ のノルム写像
	$\mathbb{U}_{\mathbb{L}}$	$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$ を満たす $x \in \mathbb{L}^*$ 全体のなす群

1　直交群

1.1　定義

$\mathbb{K}$ を可換体とし, V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. V の自己同型全体のなす群を V の一般線形群といい, $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ (または $\mathrm{GL}(V)$) で表す. 同様に, n 次正則行列全体の群を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ で表す.

今, $(V, \langle -, - \rangle)$ を n 次元のユークリッド空間とする. V の直交群を $\mathrm{O}(V)$ とおく. $\mathrm{O}(V)$ の元を V の等長変換という. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ を V の正規直交基底とする. $f \in \mathrm{O}(V)$ ならば, $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ が直交行列である (すなわち, ${}^tAA = E_n$ を満たす). とくに, $\det(A)^2 = 1$ であり, ゆえに $\det(f) = \det(A) = \pm 1$ となる.

$$\mathrm{SO}(V) := \{f \in \mathrm{O}(V) \mid \det(f) = 1\}$$

とおき, 特殊直交群という. 同様に, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ と定義する.

$$\mathrm{GO}(V) := \{f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) \mid \exists \mu(f) \in \mathbb{R}^*,\ \forall x, y \in V,\ \langle f(x), f(y) \rangle = \mu(f) \langle x, y \rangle\}$$

とおき, V の一般直交群という.

命題 1.1

(1) $\mathrm{GO}(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の部分群である.

(2) 写像 $\mu\colon \mathrm{GO}(V) \to \mathbb{R}^*,\ f \mapsto \mu(f)$ は群準同型である.

(3) $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{O}(V)$ かつ $\mathrm{Im}(\mu) = \mathbb{R}_{>0}$ である.

証明

$f, g \in \mathrm{GO}(V)$ とする. 任意の $x, y \in V$ に対し,

$$\begin{aligned}\langle (f \circ g)(x), (f \circ g)(y) \rangle &= \langle f(g(x)), f(g(y)) \rangle \\ &= \mu(f) \langle g(x), g(y) \rangle = \mu(f)\mu(g) \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

である. よって, $f \circ g \in \mathrm{GO}(V)$ であり, $\mu(f \circ g) = \mu(f)\mu(g)$ が成り立つ. また, $x = f(x'),\ y = f(y')$ とおくと, $\langle x, y \rangle = \mu(f) \langle x', y' \rangle$ であるので, $\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y) \rangle = \mu(f)^{-1} \langle x, y \rangle$ が成り立つ. ゆえに $f^{-1} \in \mathrm{GO}(V)$ である. 以上より, $\mathrm{GO}(V)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の部分群である. さらに $\mu\colon \mathrm{GO}(V) \to \mathbb{R}^*$ は群の準同型である. 明らかに, $\mathrm{Ker}(\mu) = \{f \in \mathrm{GO}(V) \mid \mu(f) = 1\} = \mathrm{O}(V)$ である. $x \neq 0$ のとき $\|f(x)\| = \mu(f)\|x\| > 0$ であるので, $\mu(f) > 0$ が成り立つ. また, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}^*$ に対し, $\lambda\,\mathrm{id}_V \in \mathrm{GO}(V)$ かつ $\mu(\lambda\,\mathrm{id}_V) = \lambda^2$ である. ゆえに, $\mathrm{Im}(\mu) = \mathbb{R}_{>0}$ である.

同様に, $\mathrm{GO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \exists \mu \in \mathbb{R}^*,\ {}^tAA = \mu E_n\}$ とおく. $\mathcal{B}$ を正規直交基底とする. $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ で定まる写像は以下の 3 つの同型写像を与える.

$$\begin{gathered}\mathrm{O}(V) \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{SO}(V) \to \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{GO}(V) \to \mathrm{GO}_n(\mathbb{R}).\end{gathered}$$

明らかに, スカラー変換 $\lambda\,\mathrm{id}_V$ が $\mathrm{GO}(V)$ に属する.

補題 1.2　$f \in \mathrm{GO}(V)$ のとき, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0},\ g \in \mathrm{O}(V)$ が存在し $f = \lambda g$ である.

証明

$\mu(f) = \eta$ とおく．命題 1.1 より $\eta > 0$ である．よって，$\eta = \lambda^2$ $(\lambda \in \mathbb{R}_{>0})$ と書ける．このとき，$\mu(\frac{1}{\lambda}f) = \frac{1}{\lambda^2}\mu(f) = 1$ であるので，$g := \frac{1}{\lambda}f \in \mathrm{O}(V)$ である．

$W \subset V$ を線形部分空間とする．$W \perp W^{\perp} = V$ が成り立つ．任意の $x \in W$, $y \in W^{\perp}$ に対し，

$$s_W(x+y) = x - y$$

で定まる線形写像 s_W を W に関する対合変換という (線型代数学 C 定義 1.22 参照).「W に関する対称」ともいう．W が超平面 (すなわち，$\dim(W) = \dim(V) - 1$) のとき，s_W を鏡映という．また，$\dim(W) = \dim(V) - 2$ のとき，s_W を renversement（ランベルスマン）という．W, $W^{\perp}$ はそれぞれ s_W の固有値 1, -1 の固有空間である．とくに，$-s_W = s_{W^{\perp}}$ が成り立つ．また，

$$\det(s_W) = (-1)^{\dim(V)-\dim(W)}$$

が成り立つ．とくに，$s_W \in \mathrm{SO}(V) \iff \dim(V) - \dim(W)$ が偶数である．例えば，鏡映，renversement の行列式はそれぞれ 1, -1 である．任意の $u \in \mathrm{O}(V)$ に対し，

$$u(W^{\perp}) = u(W)^{\perp}$$

が成り立つことに注意する (線形代数学 C 命題 1.24 参照).

補題 1.3　$u \in \mathrm{O}(V)$ のとき $u \circ s_W \circ u^{-1} = s_{u(W)}$ が成り立つ．

証明

$t = u \circ s_W \circ u^{-1}$ とおく．$x \in W$ のとき，$t(u(x)) = u(s_W(x)) = u(x)$ である．一方，$x \in W^{\perp}$ のとき $t(u(x)) = u(s_W(x)) = -u(x)$ である．よって，t は $u(W)$ に関する対合変換 $s_{u(W)}$ と一致する．

群 G の中心とは，G の全ての元と交換するもの全体を集めた部分群のことである (線形代数学 C 定義 4.17 参照)．G の中心を $Z(G)$ と表す．

定理 1.4

(1) $\mathrm{O}(V)$ の中心は $\{\pm \mathrm{id}_V\}$ である．

(2) $\dim(V) \geq 3$ のとき，$Z(\mathrm{SO}(V)) = \begin{cases} \{\pm \mathrm{id}_V\} & (n \text{ が偶数}) \\ \{\mathrm{id}_V\} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$

証明

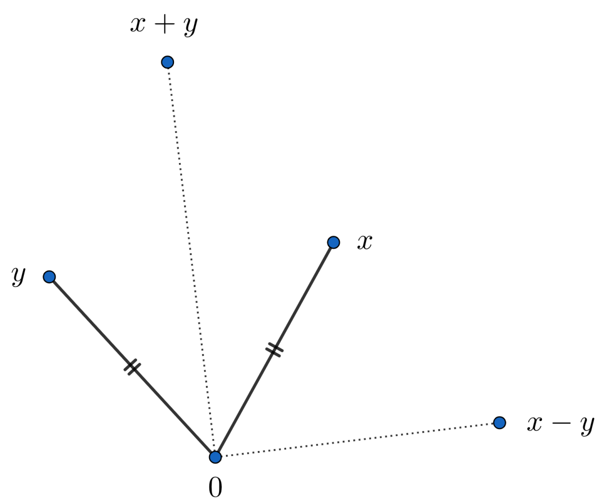
- (1) を示す．明らかに，$\pm \mathrm{id}_V$ が $\mathrm{O}(V)$ の中心に属する．逆に，$u \in Z(\mathrm{O}(V))$ とする．$D \subset V$ を直線とし，D に関する対合変換 s_D を考える．補題 1.3 により $u \circ s_D \circ u^{-1} = s_{u(D)}$ である．仮定より，$u \circ s_D \circ u^{-1} = s_D$ であり，ゆえに $u(D) = D$ が成り立つ．線形代数学 C 補題 4.18 により，u がスカラー変換である．$u = \lambda \mathrm{id}_V$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$ とおくと，$\det(u) = \lambda^{\dim(V)} = \pm 1$ となり，よって $\lambda \in \{\pm 1\}$ である．
- (2) を示す．$u \in Z(\mathrm{SO}(V))$ とする．$H \subset V$ を 2 次元の線形部分空間とし，$W = H^{\perp}$ とおく．このとき，$s_W \in \mathrm{SO}(V)$ であるので，上記の議論より $u(W) = W$ である．また，$u(W^{\perp}) = u(W)^{\perp} = W^{\perp}$ より，$u(H) = H$ が成り立つ．$D \subset V$ を直線とする．$\dim(V) \geq 3$ より，$D = H_1 \cap H_2$ となる平面 $H_1, H_2 \subset V$ がとれる．よって，$u(D) = u(H_1 \cap H_2) = u(H_1) \cap u(H_2) = H_1 \cap H_2 = D$ が成り立つ．ゆえに，u がスカラー変換である．$u = \lambda \mathrm{id}_V$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$ と書くと，$\det(u) = \lambda^{\dim(V)} = 1$ である

ので主張が分かる．

1.2 生成系

$u \in \mathrm{O}(V)$ とする．$W \subset V$ が線形部分空間のとき，$u(W^\perp) = u(W)^\perp$ が成り立つ．とくに，$u(W) = W$ ならば，$u(W^\perp) = W^\perp$ となる．

補題 1.5 $x, y \in V$ $(x \neq y)$ で，$\|x\| = \|y\|$ とする．このとき，$x + y \perp x - y$ である．さらに，超平面 $(x - y)^\perp$ に関する鏡映を s とおくと，$s(x) = y$ が成り立つ．



証明

$$\langle x - y, x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$$

である．また，$s(x - y) = y - x$ かつ $s(x + y) = x + y$ である．よって，$s(x) = \frac{1}{2}(s(x + y) + s(x - y)) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = y$ である．

定理 1.6 $n = \dim(V)$ とおく．任意の $u \in \mathrm{O}(V)$ に対し，$u = s_1 \circ \cdots \circ s_k$ $(k \leq n)$ を満たす鏡映 $s_1, \ldots, s_k$ が存在する．とくに，$\mathrm{O}(V)$ が鏡映によって生成される．

証明

$W_u := \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_V)$ とおき，$d_u := n - \dim(W_u)$ とおく．u が高々 d_u 個の鏡映の合成として表せることを，d_u に関する帰納法により示す．$d_u = 0$ のとき $u = \mathrm{id}_V$ であるので主張が成り立つ．$d_u > 0$ とし，$x \in W_u^\perp$ $(x \neq 0)$ とする．$y = u(x)$ とおく．$u(W_u) = W_u$ より，$u(W_u^\perp) = W_u^\perp$ である．とくに，$y \in W_u^\perp$ が成り立つ．s を超平面 $H := (x - y)^\perp$ に関する鏡映とする．$\|y\| = \|u(x)\| = \|x\|$ であるので，補題 1.5 により $s(x) = y$ が成り立つ．また，$x, y \in W_u^\perp$ より，$x - y \in W_u^\perp$ である．ゆえに，$W_u \subset (x - y)^\perp = H$ となる．$v = s \circ u$ と定義する．$z \in W_u$ のとき，$v(z) = s(u(z)) = s(z) = z$ であるので，$W_u \subset W_v$ がいえる．また，$v(x) = s(y) = x$ である．したがって，$W_u + \mathbb{R}x \subset W_v$ であり，ゆえに $d_v < d_u$ である．帰納法の仮定より，$v = s_1 \circ \cdots \circ s_k$ $(k \leq d_v)$ と書ける．よって，$u = s \circ s_1 \circ \cdots \circ s_k$ となる．$k + 1 \leq d_v + 1 \leq d_u$ であるので，主張が成立する．

次に，$\mathrm{SO}(V)$ の場合を考える．r が renversement ならば，$\det(r) = (-1)^2 = 1$ であるので，r は $\mathrm{SO}(V)$ の元

である．

補題 1.7 $\dim(V) \geq 3$ とする．s_1, s_2 が鏡映のとき，renversement r_1, r_2 が存在し，$s_1 \circ s_2 = r_1 \circ r_2$ である．

証明

- $\dim(V) = 3$ のとき，s が鏡映ならば $-s$ は renversement である．$s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$ と書けるので，主張が分かる．
- 一般の場合には，$H_i = \mathrm{Ker}(s_i - \mathrm{id}_V)$ $(i = 1, 2)$ とおき，W を $H_1 \cap H_2$ に含まれる $n-3$ 次元の線形部分空間とする．$W^\perp$ は 3 次元の線形部分空間である．また，$V = W \oplus W^\perp$ である．$r_i|_W = \mathrm{id}_W$ かつ $r_i|_{W^\perp} = -s_i$ を満たす線形写像 r_i が一意的に存在する．r_i は renversement であり，$s_1 \circ s_2 = r_1 \circ r_2$ が成り立つ．

定理 1.8 $n = \dim(V) \geq 3$ とする．$u \in \mathrm{SO}(V)$ のとき，$u = r_1 \circ \cdots \circ r_k$ $(k \leq n)$ となる renversement $r_1, \ldots, r_k$ が存在する．とくに，$\mathrm{SO}(V)$ は renversement によって生成される．

証明

定理 1.6 により，$u = s_1 \circ \cdots \circ s_k$ $(k \leq n)$ となる鏡映 $s_1, \ldots, s_k$ が存在する．$\det(s_i) = -1$ より，k が偶数である．補題 1.7 により，$s_1 \circ \cdots \circ s_k = r_1 \circ \cdots \circ r_k$ を満たす renversement $r_1, \ldots, r_k$ が存在する．

1.3 共役類

群 G の元 x, y が共役であるとは，$y = gxg^{-1}$ を満たす $g \in G$ が存在することをいう．

命題 1.9 W_1, W_2 を V の同次元の線形部分空間とする．このとき，$u(W_1) = W_2$ を満たす $u \in \mathrm{SO}(V)$ が存在する．

証明

$n = \dim(V)$，$k = \dim(W_1) = \dim(W_2)$ とおく．線形代数学 C 定理 1.15 により，W_1 の正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_k)$ が取れる．また，それを V の正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ に延長できる．同様に，W_2 の正規直交基底 $(f_1, \ldots, f_k)$ をとり，V の正規直交基底 $(f_1, \ldots, f_n)$ に延長する．$u(e_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ で定まる線形写像 u を考える．u は明らかに等長変換であり，さらに $u(W_1) = W_2$ を満たす．$\det(u) = 1$ ならば，主張が成り立つ．$\det(u) = -1$ のとき，u の代わりに $u'(e_1) = -f_1$, $u'(e_i) = f_i$ $(2 \leq i \leq n)$ で定まるものを考えれば良い．

命題 1.10 s_1, s_2 を V の対合変換とし，$W_i = \mathrm{Ker}(s_i - \mathrm{id}_V)$ $(i = 1, 2)$ とおく．このとき，

$$s_1 \text{ と } s_2 \text{ が共役である} \iff \dim(V_1) = \dim(V_2).$$

証明

s_1, s_2 が共役であるならばそれぞれの固有空間の次元が一致する．ゆえに，$\dim(V_1) = \dim(V_2)$ である．逆に，$\dim(V_1) = \dim(V_2)$ のとき，命題 1.9 により $V_2 = u(V_1)$ を満たす $u \in \mathrm{SO}(V)$ が存在する．また，

補題 1.3 により $s_1 \circ u^{-1}$ は $u(V_1) = V_2$ に関する鏡映である．ゆえに，$u \circ s_1 \circ u^{-1} = s_2$ である．

1.4 $\dim(V) = 2$ の場合

以下，V を 2 次元のユークリッド空間とする．

定義 1.11 $u \in \mathrm{SO}(V)$ のとき，u を回転という．

命題 1.12 $u \in \mathrm{O}(V)$ とする．$\det(u) = -1$ のとき，u が鏡映である．

証明

u の固有多項式は $\chi_u(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X + \det(u)$ である．χ_u の判別式は $\mathrm{Tr}(u)^2 - 4\det(u) = \mathrm{Tr}(u)^2 + 4 > 0$ である．よって，χ_u は $\mathbb{R}$ で分解する．とくに，u は固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持つ．x を固有値 λ に関する固有ベクトルとすると，$\|u(x)\| = \|x\| = |\lambda|\|x\|$ である．よって，$|\lambda| = 1$ となり，すなわち $\lambda \in \{\pm 1\}$ である．$\det(u) = -1$ より，u の固有値は $\{1, -1\}$ である．とくに，$u(x) = x$ となる $x \neq 0$ が存在する．$D = \mathbb{R}x$ とおくと，$u(D) = D$ かつ $u(D^\perp) = D^\perp$ である．よって，u は D に関する鏡映である．

補題 1.13 ρ を回転，τ を鏡映とすると，

$$\tau \circ \rho \circ \tau^{-1} = \tau \circ \rho \circ \tau = \rho^{-1}$$

が成り立つ．

証明

$\det(\tau \circ \rho) = -1$ より，$u = \tau \circ \rho$ が鏡映である．とくに，$u^2 = \mathrm{id}_V$ である．よって，$\tau \circ \rho \circ \tau \circ \rho = \mathrm{id}_V$ である．主張が従う．

命題 1.14 $\mathrm{SO}(V)$ はアーベル群である．

証明

ρ, ρ' を回転とし，τ を鏡映とする．

$$\begin{aligned} & \tau \circ (\rho \circ \rho') \circ \tau^{-1} = (\rho \circ \rho')^{-1} = \rho'^{-1} \circ \rho^{-1} \\ \text{一方,} \quad & \tau \circ (\rho \circ \rho') \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}) \circ (\tau \circ \rho' \circ \tau^{-1}) = \rho^{-1} \circ \rho'^{-1} \end{aligned}$$

である．よって，$\rho' \circ \rho = \rho \circ \rho'$ である．

同様に，$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ はアーベル群である．$\mathrm{GO}_2(\mathbb{R})$ の元について考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

を $\mathrm{GO}_2(\mathbb{R})$ の行列とする．(e_1, e_2) を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とする．$\langle Ae_1, Ae_2 \rangle = \mu(A)\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ かつ $\|Ae_1\| =$

$\|Ae_2\|$ である．ゆえに，

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

また，このとき $\mu(A) = a^2 + b^2$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\} \\
\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\} \\
\mathrm{GO}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 \neq 0 \right\}
\end{aligned}$$

実数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

とおく．

命題 1.15　写像 $\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\theta \mapsto R(\theta)$ は全射群準同型であり，その核は $2\pi\mathbb{Z}$ である．とくに，写像

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \theta + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto R(\theta)$$

は群同型写像である．

証明

三角関数の公式より

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix}$$

が成り立つ．主張が従う．

$U_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ は $\mathbb{C}^*$ の部分群であり，写像 $\exp\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to U_1$, $\theta + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \exp(i\theta)$ は群同型である．以上より，

$$U_1 \to \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \exp(i\theta) \mapsto R(\theta)$$

も群同型である．

1.5　等長変換の標準形

V をユークリッド空間とし，$u \in \mathrm{O}(V)$ とする．

定理 1.16　このとき, $V = V_+ \perp V_- \perp H_1 \perp \cdots \perp H_r$ と分解できる. 但し, 以下が成り立つ.

(1) $u|_{V_+} = \mathrm{id}_{V_+}$ である

(2) $u|_{V_-} = -\mathrm{id}_{V_-}$ である

(3) H_i は $u(H_i) = H_i$ を満たす 2 次元の線形部分空間である. また, $u|_{H_i}$ は角度 θ_i 回転である (ただし, $\theta_i \notin \pi\mathbb{Z}$ とする).

つまり, 適当な V の正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関する u の行列は以下の形となる.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

さらに, $\theta_1, \ldots, \theta_r$ の順序を除いて行列 (1.1) は一意的に定まる.

証明

$n = \dim(V)$ に関する帰納法により存在性を証明する. $n = 1$ のとき明らかである. $n \geq 2$ とする.

- まず, $u(W) \subset W$ かつ $W \neq 0, V$ を満たす線形部分空間 W が存在する場合を考える. このとき $u(W^\perp) \subset W^\perp$ が成り立つので, 帰納法の仮定より W 及び $W^\perp$ が条件 (1)〜(3) を満たすように分解できる. ゆえに V も同じように分解できる.
- 次に, $u(W) \subset W$ を満たす線形部分空間が $0, V$ に限る場合を考える. このとき, u は単純である (代数学 C 定義 3.19 参照). 代数学 C 定理 3.20 により, f が巡回であり, f の最小多項式 μ_f が $\mathbb{R}[X]$ の既約多項式である. とくに, $\dim(V) \leq 2$ である. $\dim(V) = 1$ のとき, 主張は明らかである. よって, $\dim(V) = 2$ として良い. 単純性より f は固有ベクトルを持たない. ゆえに, f は鏡映でない. ゆえに, f は回転であり, 主張が従う.

最後に, $R(\theta)$ の複素固有値は $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$ である. ゆえに,

注意 1.17. $u \in \mathrm{O}(V)$ とする. 定理 1.16 より $\det(u) = (-1)^{\dim(V_-)}$ である. よって, $u \in \mathrm{SO}(V)$ のとき $\dim(V_-)$ は偶数である. また, $n = \dim(V)$ が奇数で, $u \in \mathrm{SO}(V)$ ならば, $V_+ \neq 0$ が成り立つ. とくに, $u(x) = x$ となる $x \neq 0$ が存在する.

系 1.18　$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ とする. このとき, 直交行列 P が存在し, $A' = {}^tPAP$ が (1.1) の形の行列である.

V を 3 次元のユークリッド空間とし, $u \in \mathrm{SO}(V)$ とする. このとき, $u|_D = \mathrm{id}_D$ となる直線 $D \subset V$ が存在する. また, $W = D^\perp$ とおくと, $u(W) = W$ である. さらに, $u|_W \colon W \to W$ は回転である. したがって, 適当な正規直交基底 $\mathcal{B}$ に関して, u の行列は以下の通りである.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

1.6 自己随伴変換

V をユークリッド空間とする．$f \in \mathrm{End}(V)$ のとき，f の随伴変換 (線形代数学 C 定義 1.32 参照) を f^* とおく．任意の $x, y \in V$ に対し，以下が成り立つ．

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle, \quad x, y \in V.$$

$\mathcal{B}$ を V の正規直交基底とすると，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ である．

命題 1.19 $f \in \mathrm{End}(V)$ とする．$W \subset V$ が線形部分空間で，$f(W) \subset W$ が成り立つならば，

$$f^*(W^\perp) \subset W^\perp$$

が成り立つ．

証明

$x \in W^\perp$ とする．任意の $y \in W$ に対し，$\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ である．$f(W) \subset W$ より $f(y) \in W$ である．よって，$\langle f^*(x), y\rangle = 0$ となり，$f^*(x) \in W^\perp$ である．以上より，$f^*(W^\perp) \subset W^\perp$ が成り立つ．

$f^* = f$ のとき，f が自己随伴変換 (または対称変換) であるという．$f \in \mathrm{End}(V)$ のとき，f の固有多項式を $\chi_f(X)$ とおく．

命題 1.20 f を自己随伴変換とする．このとき，f の全ての固有値が実数である．ゆえに，$\chi_f(X) = (X - a_1)\ldots(X - a_n)$ となる $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在する $(n = \dim_{\mathbb{R}}(V))$.

証明

$\mathcal{B}$ を V の基底とし，$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ とおく．仮定より，A は対称実行列である．$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とする．このとき，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ $(\boldsymbol{x} \neq 0)$ が存在する．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{とおく．}$$

明らかに，${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1} |x_i|^2 \in \mathbb{R}_{>0}$ である．また，

$${}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x} = \lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．両辺に複素共役を適用させ，転置をとると，${}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ となる．よって $\lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$ である．${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} \neq 0$ より，$\lambda = \overline{\lambda}$ となる．ゆえに，f の全ての固有値は実数である．

定理 1.21 $f \in \mathrm{End}(V)$ を自己随伴変換とする．このとき，f は正規直交基底で対角化可能である．つまり，対角行列 D 及び正規直交基底 $\mathcal{B}$ が存在し，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$ が成り立つ．

証明

V の次元に関する帰納法により証明する．$V = 0$ のとき明らかである．$\dim(V) \geq 1$ とする．命題 1.20 より，f が固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ を持つ．$\boldsymbol{x}$ を λ に関する固有ベクトルとする．また，$\|x\| = 1$ と仮定して良い．$W = \mathbb{R}\boldsymbol{x}$ とおく．命題 1.19 より，$f(W^\perp) \subset W^\perp$ である．f の $W^\perp$ への制限を f' とおく．明らかに，f'

は $W^\perp$ の自己随伴変換である．帰納法の仮定より，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f')$ が対角行列であるような $W^\perp$ の正規直交基底 $\mathcal{B}'$ が取れる．このとき，$\mathcal{B} := (\boldsymbol{x}, \mathcal{B}')$ は V の正規直交基底であり，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f') \end{pmatrix}$$

となる．したがって $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ は対角行列である．

系 1.22　$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする．このとき，直交行列 $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ が存在し，

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

1.7　正定置対称行列，負定置対称行列

可換体 $\mathbb{K}$ に対し，$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ の対称行列全体の線形部分空間を $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ で表す．$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ を対称実行列とする．このとき，$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し，

$$\varphi_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$$

とおくと，対称双線型形式

$$\varphi_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

が定まる．実際，$\varphi_A(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = \varphi_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である．

定義 1.23　V を実ベクトル空間とし，$\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ を対称双線型形式とする．

(a) 任意の $x \in V$ $(x \neq 0)$ に対し $\varphi(x, x) > 0$ が成り立つとき，φ が正定値対称行列 (または内積) であるという．

(b) 任意の $x \in V$ $(x \neq 0)$ に対し $\varphi(x, x) < 0$ が成り立つとき，φ が負定値対称行列であるという．

(c) 任意の $x \in V$ に対し $\varphi(x, x) \geq 0$ が成り立つとき，φ が半正定値対称行列であるという．

(d) 任意の $x \in V$ に対し $\varphi(x, x) \leq 0$ が成り立つとき，φ が半負定値対称行列であるという．

定義 1.24　$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする．φ_A が正定値対称行列，負定値対称行列，半正定値対称行列，半負定値対称行列のとき，それぞれ A が正定値対称行列，負定値対称行列，半正定値対称行列，半負定値対称行列であるという．

正定値対称行列，負定値対称行列，半正定値対称行列，半負定値対称行列全体の集合をそれぞれ

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R}),\ \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}),\ \mathcal{S}_n^{-}(\mathbb{R})$$

で表す．

定理 1.25　$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする．以下が同値である．

(i) A が正定値対称行列である．

(ii) A の全ての固有値が > 0 である．

(iii) $A = {}^tBB$ を満たす正則行列 $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在する．

証明

- 「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」を示す．$\lambda \in \mathbb{R}$ を A の固有値とし，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を λ に関する固有ベクトルとする．仮定より，$0 < \varphi_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \lambda {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$ である．${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^n$ の通常内積に関する $\boldsymbol{x}$ のノルムであるので，${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} > 0$ である．ゆえに，$\lambda > 0$ が成り立つ．
- 「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」を示す．系 1.22 より，$PAP^{-1} = D$ となる直交行列 P と対角行列 D が存在する．仮定より，D の対角成分が全て正実数である．ゆえに，対角成分の 2 乗根を取れば，$D = D_1^2$ を満たす対角行列 D_1 が得られる．とくに，$D = {}^tD_1D_1$ である．ゆえに，

  $$A = P^{-1}DP = {}^tP\,{}^tD_1D_1P = {}^t(D_1P)(D_1P)$$

  と書ける．ゆえに，$B = D_1P$ とおけば良い．
- 「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」を示す．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ $(\boldsymbol{x} \neq 0)$ とする．このとき，

  $$\varphi_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tBB\boldsymbol{x} = {}^t(B\boldsymbol{x})(B\boldsymbol{x}) = \|B\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n}^2 \tag{1.2}$$

  B が正則であるので，$B\boldsymbol{x} \neq 0$ である．ゆえに，$\|B\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^n} > 0$ である．

同様の証明で，以下の命題も証明できる．

命題 1.26　$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする．以下が同値である．
(i) A が半正定値対称行列である．
(ii) A の全ての固有値が ≥ 0 である．
(iii) $A = {}^tBB$ を満たす正則行列 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が存在する．

1.8　$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ の内積

(m, n) 型行列全体の実ベクトル空間 $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ を考える．$B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ とし，$A = {}^tBB \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ とおく．明らかに，A が対称行列である．また，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\varphi_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}{}^tBB\boldsymbol{x} = {}^t(B\boldsymbol{x})(B\boldsymbol{x}) = \|B\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m}^2$$

が成り立つ．ゆえに，φ_A は半正定値である．また，B が単射ならば，

$$\begin{aligned} \varphi_A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 &\implies \|B\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m} = 0 \\ &\implies B\boldsymbol{x} = 0 \implies \boldsymbol{x} = 0 \end{aligned}$$

である．ゆえに，このときに φ_A は正定値である．2 つの (m, n) 型実行列 $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ に対し，

$$\gamma(A, B) := \mathrm{Tr}({}^tAB)$$

とおき，双線型形式 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を定める．$\gamma(B, A) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \gamma(A, B)$ であるので，γ は $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ 上の対称双線型形式である．

系 1.27　γ は $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ 上の内積である．

証明

$A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ で，$\gamma(A, A) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$ とする．以上より，$C := {}^tAA$ が半正定値対称行列である．$\mathrm{Tr}(C) = 0$ より，C の全ての固有値が 0 である．系 1.22 により C が対角化可能であるので，$C = 0$ とな

る．よって，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|A\boldsymbol{x}\|_{\mathbb{R}^m}^2 = {}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}{}^tAA\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.3}$$

したがって，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $A\boldsymbol{x} = 0$ であり，ゆえに $A = 0$ である．以上より，γ は正定値である．

証明：(別証明)

$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ の行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対し，簡単な計算より

$$\gamma(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ij}$$

である．よって，$\gamma(A, A) = 0$ ならば $A = 0$ である．

$\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ の場合，γ が通常の $\mathbb{R}^n$ の内積と一致する．

1.9　正規変換

V をユークリッド空間とする．

定義 1.28
(a) $f \in \mathrm{End}(V)$ が $f \circ f^* = f^* \circ f$ を満たすときに，f を正規変換という．
(b) 同様に，$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ が $A{}^tA = {}^tAA$ を満たすときに，A を正規行列という．

例えば，自己随伴変換，交代変換，等長変換はそれぞれ，$f^* = f$, $f^* = -f$, $f^* = f^{-1}$ を満たすので，明らかに正規変換である．

定理 1.29　$f \in \mathrm{End}(V)$ を正規変換とする．$W \subset V$ が線形部分空間で，$f(W) \subset W$ が成り立つとする．このとき，以下が成り立つ．
(1) $f(W^\perp) \subset W^\perp$
(2) $f^*(W) \subset W$
(3) $f^*(W^\perp) \subset W^\perp$
(4) $(f|_W)^* = (f^*)|_W$
(5) $f|_W : W \to W$ は正規変換である．

証明

- (1) を示す．$(e_1, \ldots, e_r)$ を W の正規直交基底とし，$(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ を $W^\perp$ の正規直交基底とする．$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ とおく．$f(W) \subset W$ という仮定より，$A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ は以下の形の行列である．

$$A = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad S \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R}),\ T \in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}),\ U \in \mathrm{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$$

ゆえに，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA = \begin{pmatrix} {}^tS & 0 \\ {}^tT & {}^tU \end{pmatrix}$$

である．f が正規変換より，$A{}^tA = {}^tAA$ が成り立つ．よって，

$$\begin{pmatrix} S\,{}^tS + T\,{}^tT & T\,{}^tU \\ U\,{}^tT & U\,{}^tU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tS\,S & {}^tS\,T \\ {}^tT\,S & {}^tT\,T + {}^tU\,U \end{pmatrix}$$

である．とくに，$S\,{}^tS + T\,{}^tT = {}^tS\,S$ である．A, B が正方行列のとき $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ が成り立つので，

$$\mathrm{Tr}(T\,{}^tT) = \mathrm{Tr}({}^tS\,S) - \mathrm{Tr}(S\,{}^tS) = 0$$

となる．系 1.27 より $T = 0$ である．よって，$f(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$ が成り立つ．

- (2), (3) は (1) と命題 1.19 より従う．
- (4) は (2) より直ちにわかる．
- (5) は (4) より従う．

V をユークリッド空間とする．

$$\mathrm{GO}^{+}(V) = \{f \in \mathrm{GO}(V) \mid \det(f) > 0\}$$

と定義する．同様に，$\mathrm{GO}_n^{+}(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GO}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$ と定める．また，行列式が負の実数であるもの全体の集合は，それぞれ $\mathrm{GO}^{-}(V)$, $\mathrm{GO}_n^{-}(\mathbb{R})$ とおく．

補題 1.30　$A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ とする．A が正規行列であるためには，

$$A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \quad \text{または} \quad A \in \mathrm{GO}_2^{+}(\mathbb{R})$$

が成り立つことは必要十分である．

証明

対称行列は明らかに正規である．また，$A \in \mathrm{GO}_2(\mathbb{R})$ のとき，補題 1.2 により $A = \lambda B$ ($\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $B \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$) と書ける．ゆえに A が正規行列である．逆に，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を正規行列とする．このとき，

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．とくに，$b = \pm c$ である．$b = c$ のとき $A \in S_2(\mathbb{R})$ である．$b = -c$ のとき，$ac - cd = -ac + cd$ となり，ゆえに $ac = cd$ である．$c = 0$ のとき $b = c = 0$ であり，$A \in S_2(\mathbb{R})$ である．$c \neq 0$ ならば，$a = d$ となる．ゆえに，$A \in \mathrm{GO}_2^{+}(\mathbb{R})$ である．

§1.4 より $\mathrm{GO}_2^{-}(\mathbb{R}) \subset S_2(\mathbb{R})$ であることに注意する．ゆえに，$\mathrm{GO}_2(\mathbb{R})$ の全ての行列が正規である．

定理 1.31　V をユークリッド空間とし，$f \in \mathrm{End}(V)$ を正規変換とする．このとき，

$$V = V_1 \perp \cdots \perp V_r \perp W_1 \perp \cdots \perp W_s$$

と分解できる．但し，各 V_i, W_j は以下を満たす．

(1) $\lambda_i \in \mathbb{R}$ が存在し，$f(x) = \lambda_i x \quad (x \in V_i)$．

(2) W_j は 2 次元線形部分空間であり，$f(W_j) = W_j$ かつ $f|_{W_j} \in \mathrm{GO}^{+}(W_j)$ が成り立つ．但し，$f|_{W_j}$ はスカラー変換でない．

証明

次元に関する帰納法により示す．$V=0$ のとき明らかである．$\dim(V)\geq 1$ とする．

- まず，$f(W)\subset W$ かつ $W\neq 0, V$ を満たす線形部分空間が存在する場合を考える．定理 1.29 により $f(W^\perp)\subset W^\perp$ であり，さらに $f|_W$ 及び $f|_{W^\perp}$ はそれぞれ正規変換である．ゆえに，帰納法の仮定より，W, $W^\perp$ は条件 (1), (2) を満たすような分解を持つ．よって，V も同様である．
- 次に，$f(W)\subset W$ となる線形部分空間 W は $0, V$ に限る場合を考える．このとき f は単純である．よって，$\chi_f(X)$ が既約多項式であり，$\dim(V)\leq 2$ である．$\dim(V)=1$ のとき主張が成り立つ．$\dim(V)=2$ のとき，補題 1.30 により $f\in \mathrm{GO}^+(V)$ が成り立つ ($\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ の行列は対角化可能であるので，単純でないことに注意する)．さらに，f はスカラー変換でない．主張が従う．

系 1.32　$A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を正規行列とする．このとき，以下を満たす直交行列 $P\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ が存在する．

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{matrix}} \end{pmatrix}, \qquad (a_i, b_i)\neq (0,0).$$

逆に，上の形の行列は正規行列である．

証明

P の存在は定理 1.31 より直ちに従う．また，補題 1.30 により上の行列のブロックが全て正規行列であるので，行列自体も正規である．

系 1.33　$A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を交代行列とする．このとき，以下を満たす直交行列 $P\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ が存在する．

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

1.10　正定値対称行列の冪根

定理 1.34　$m\in\mathbb{N}$ が自然数で，「$A\in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \implies A^m\in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$」，かつ「$A\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \implies A^m\in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$」が成り立つ．さらに，以下の 2 つの写像は全単射である．

$$F_m\colon \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\longrightarrow \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\quad A\longmapsto A^m$$
$$F_m\colon \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\quad A\longmapsto A^m.$$

証明

- $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ とする．A が対称実行列より $A = PDP^{-1}$ となる直交行列 P と対角行列 D が存在する．さらに，$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ より，D の対角成分が ≥ 0 である．

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1}$$

と書ける．D^m の対角成分が非負実数であるので，$A^m \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ が成り立つ．同様に，$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ のとき，$A^m \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ であることが分かる．
- 次に，$F_m \colon \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ が全射であることを示す．$B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ とする．直交行列 P 及び対角行列 D を用いて $B = PDP^{-1}$ と書ける．D の対角成分を $d_1, \ldots, d_n$ とおく．仮定より $d_i \geq 0$ であるので，$d_i = s_i^m$ となる $s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が (一意的に) 存在する．$s_1, \ldots, s_n$ を対角成分とする対角行列を S とおくと，$S^m = D$ が成り立つ．また，$A = PSP^{-1}$ とおくと，$A^m = (PSP^{-1})^m = PDP^{-1} = B$ である．よって，F_m は全射である．
- より正確なことを証明する：「任意の $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ に対し，$A^m = B$ を満たす $A \in \mathbb{R}[B]$ が存在する」．ただし，$\mathbb{R}[B]$ とは $f(B)$ $(f \in \mathbb{R}[X])$ という形の行列全体の集合である．P, D, S, A を上と同じように定義する．多項式補間により，$f(d_i) = s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす多項式 $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ が取れる．このとき，$f(D) = S$ となり，

$$f(B) = f(PDP^{-1}) = Pf(D)P^{-1} = PSP^{-1} = A$$

が成り立つ．よって，上で作った行列 A は $\mathbb{R}[B]$ に属する．
- 次に，F_m の単射性について考える．$B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ とし，$B = A^m = A'^m$ $(A, A' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$ とする．このとき $A = A'$ を示せば良い．以上より，$A \in \mathbb{R}[B]$ と仮定して良い．$B = A'^m$ より B と A' が交換する．$A = f(B)$ $(f(X) \in \mathbb{R}[X])$ と表せるので，A' と A が交換する．ゆえに，A, A' が同じ基底で対角化可能である (線形代数学 C 命題 2.51 参照)．つまり，正則行列 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在し，$C = QAQ^{-1}$ と $C' = QA'Q^{-1}$ の両方が対角行列である．$A^m = A'^m$ より，$C^m = C'^m$ となる．また，$A, A' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ より，C, C' の対角成分が全て非負実数である．写像 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^m$ が全単射であるので，$C = C'$ がいえる．ゆえに $A = A'$ となる．
- 同様に，F_m は全単射 $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ を誘導する．

例題 1.1. 以下の対称行列の 2 乗根を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

解答：A の固有多項式を計算する．

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & 2 \\ 0 & X-5 & 2 \\ 2 & 2 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-3)(X^2-9X+16) - 4(X-5) \\ &= X^3 - 12X^2 + 39X - 28 \\ &= (X-1)(X^2-11X+28) \\ &= (X-1)(X-4)(X-7) \end{aligned}$$

ゆえに，A の固有値は $1, 4, 7$ である．とくに，$A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ である．次に，A の固有空間を求める．

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\iff\begin{cases}3x_1-2x_3=x_1\\5x_2-2x_3=x_2\\-2x_1-2x_2+4x_3=x_3\end{cases}\iff x_1=2x_2=x_3$$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\iff\begin{cases}3x_1-2x_3=4x_1\\5x_2-2x_3=4x_2\\-2x_1-2x_2+4x_3=4x_3\end{cases}\iff x_1=-x_2=-2x_3$$

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\iff\begin{cases}3x_1-2x_3=7x_1\\5x_2-2x_3=7x_2\\-2x_1-2x_2+4x_3=7x_3\end{cases}\iff 2x_1=x_2=-x_3$$

ゆえに, 以下のベクトルはそれぞれ, 固有値 $1,3,7$ に関する固有ベクトルである.

$$u=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

また, $\|u\|=\|v\|=\|w\|=3$ であるので, $\mathcal{C}=(\frac{u}{3},\frac{v}{3},\frac{w}{3})$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ を標準基底とし,

$$P=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\1&-2&2\\2&-1&-2\end{pmatrix}$$

と定める. このとき, 以下が成り立つ.

$$A=PDP^{-1},\qquad D=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&7\end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$B:=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&\sqrt{7}\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\sqrt{7}+12&2\sqrt{7}-6&-2\sqrt{7}\\2\sqrt{7}-6&4\sqrt{7}+9&-4\sqrt{7}+6\\-2\sqrt{7}&-4\sqrt{7}+6&4\sqrt{7}+6\end{pmatrix}$$

とおくと, $B\in\mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$ かつ $B^2=PDP^{-1}=A$ が成り立つ.

1.11 極分解

定理 1.35 以下の 2 つの写像は全単射である.

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\times\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\quad (S,U)\mapsto SU$$
$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\times\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\quad (S,U)\mapsto US$$

証明

- 上段の写像を α とおき, 下段の写像を β とおくと ${}^t(\beta(S,U))={}^t(US)=S{}^tU=\alpha(S,{}^tU)$ である. ゆえに, α が全単射であることを示せば十分である.
- α が単射であることを示す. $S_1,S_2\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $U_1,U_2\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ で $S_1U_1=S_2U_2=A$ とする. このとき, $i=1,2$ に対し
$$A\,{}^tA=(S_iU_i){}^t(S_iU_i)=S_i(U_i\,{}^tU_i)S_i=S_i^2$$
である. とくに $S_1^2=S_2^2$ である. 定理 1.34 より $S_1=S_2$ となる. また, $S_1U_1=S_2U_2$ より $U_1=U_2$ である.

- 次に, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対し, $A = SU$ となる行列 $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ 及び $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ の存在することを示す. A が正則より, 定理 1.25 より $A\,{}^tA$ は正定値対称行列である. よって, 定理 1.34 より $A\,{}^tA = S^2$ を満たす $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ が存在する. $U = S^{-1}A$ と定義する. このとき,

$$U\,{}^tU = S^{-1}A\,{}^tAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = E_n$$

である. よって, U は直交行列である. $A = SU$ が成り立つので, 主張が示せた.

2 エルミート空間

2.1 エルミート半双線型形式

複素共役を $z \mapsto \overline{z}$ で表す. V を複素ベクトル空間とし, $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ を写像とする.

定義 2.1 φ が以下を満たすときに, エルミート半双線型形式であるという.
(1) 任意の $x \in V$ に対し, 写像 $V \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \varphi(x, y)$ は $\mathbb{C}$ 線形写像である.
(2) 任意の $x, y \in V$ に対し, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ である.

上の条件 (1), (2) が成り立つとき,

$$\varphi(x + \lambda y, z) = \overline{\varphi(z, x + \lambda y)} = \overline{\varphi(z, x) + \lambda\varphi(z, y)} = \varphi(x, z) + \overline{\lambda}\varphi(y, z)$$

である. $\varphi(-, -)$ は第 2 成分に関して半双線形であるという. 任意の $x \in V$ に対し $\overline{\varphi(x, x)} = \varphi(x, x)$ が成り立つので, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ である.

定義 2.2
(a) φ がエルミート内積であるとは, 任意の $x \in V$ $(x \neq 0)$ に対し $\varphi(x, x) > 0$ が成り立つことをいう. また, このとき φ が正定値であるともいう.
(b) 全ての $x \in V$ に対し $\varphi(x, x) \geq 0$ のとき, φ が半正定値であるという.

同様に, 「負定値」, 「半負定値」のエルミート半双線型形式を同様に定義する. エルミート内積は普段, $\langle -, - \rangle$ で表す. V が有限次元複素ベクトル空間で, V 上のエルミート内積 $\langle -, - \rangle$ が与えられているとき, 組 $(V, \langle -, - \rangle)$ はエルミート空間と呼ばれる. このとき, $x \in V$ に対し $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ とおき, x のノルムという. 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ 及び $x \in V$ に対し $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ である. また, 任意の $x, y \in V$ に対し,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) \tag{2.1}$$
$$\|x + iy\|^2 = \langle x + iy, x + iy \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x, y \rangle - i\langle y, x \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Im}(\langle x, y \rangle) \tag{2.2}$$

が成り立つ. とくに, $\langle x, y \rangle = 0$ のとき $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ である (ピタゴラスの定理).

補題 2.3 任意の $x, y \in V$ に対し, 以下が成り立つ.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

証明

$y=0$ のとき明らかであるので, $x \neq 0$ として良い. このとき,

$$z := y - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|^2}x$$

を考える. $\langle x, z\rangle = 0$ である. よって, ピタゴラスの定理により,

$$\|y\|^2 = \|z\|^2 + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^4}\|x\|^2 = \|z\|^2 + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2} \geq \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2}$$

ゆえに, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ である. また, (2.1) により,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

となる. よって, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つ.

例 2.4. $V = \mathbb{C}^n$ とする. $\mathbb{C}^n$ の 2 つの複素ベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対し,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = {}^t\overline{x}y$$

とおくことによって, $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート内積が定まる. ただし, $\overline{x}$ は x の複素共役, すなわち $\overline{x}_i$ を第 i 成分とする複素ベクトルである. この内積を $\mathbb{C}^n$ の通常エルミート内積という.

例 2.5. $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ を閉区間 $[0,1]$ の上で定義されている複素値関数全体の集合とする. V は通常の足し算、スカラー倍に関して複素ベクトル空間である. $f, g \in V$ に対し

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt$$

とおくと, V 上のエルミート内積が定まる. 明らかに, $\langle f, f\rangle \geq 0$ $(f \in V)$ が成り立つ. また, $f \neq 0$ のとき, $f(t_0) \neq 0$ を満たす $t_0 \in]0,1[$ が存在する. 連続性より十分に小さい $\epsilon > 0$ が存在し, 任意の $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ に対し $|f(t)| > \frac{|f(t_0)|}{2}$ である. よって

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 |f(t)|dt \geq 2\epsilon\left(\frac{|f(t_0)|}{2}\right) = \epsilon|f(t_0)| > 0$$

である. ゆえに, $\langle -.-\rangle$ はエルミート内積である.

複素行列 $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ に対し, A の複素共役を $\overline{A}$ とおく. また, $A^* = {}^t\overline{A}$ と定義し, A の随伴行列という. 行列 A, B に対し $(AB)^* = B^*A^*$ が成り立つ.

補題 2.6 $V = \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ とする.

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^*B), \qquad (A, B) \in V$$

は V 上のエルミート内積である.

証明

系 1.27 と同様に, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とおくと

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} \overline{a}_{ij} b_{ij}$$

が成り立つ．このことから, 内積であることは直ちに確認できる．

V をエルミート空間とし, V の双対空間を V^* とおく．すなわち,

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{ 線形写像 }\}$$

である．V^* の元は V 上の一次形式と呼ばれる．$x \in V$ のとき, 写像 $V \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ は一次形式であることに注意する．

補題 2.7　写像

$$\varphi : V \to V^*, \quad x \mapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle) \tag{2.3}$$

は $\mathbb{R}$ 線形同型写像である．

注意 2.8. $\varphi(\lambda x) = \overline{\lambda}\varphi(x)$ が成り立つので, φ が $\mathbb{C}$ 線形写像でないことに注意する．

証明

φ は明らかに $\mathbb{R}$ 線形写像である．$x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ ならば, 任意の $y \in V$ に対し $\langle x, y\rangle = 0$ である．とくに, $\langle x, x\rangle = 0$ となり, ゆえに $x = 0$ である．したがって, φ は単射である．V, V^* が同次元複素ベクトル空間であるので, 実ベクトル空間としても同じ次元である．ゆえに, φ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間の同型写像となる．

2.2　直交性

V をエルミート空間とする．線形部分空間 W に対し,

$$W^\perp = \{y \in V \mid \forall x \in W,\ \langle x, y\rangle = 0\}$$

とおき, W の直交補空間という．$W^\perp$ は V の $\mathbb{C}$ 線形部分空間である．

命題 2.9　以下が成り立つ．

(1) $\dim_{\mathbb{C}}(W^\perp) = \dim_{\mathbb{C}}(V) - \dim_{\mathbb{C}}(W)$ である．

(2) $V = W \oplus W^\perp$ である．

証明

- $f : V \to \mathbb{C}$ が一次形式ならば, $f|_W$ は W 上の一次形式である．ゆえに, $\mathbb{C}$ 線形写像

  $$\alpha_W : V^* \to W^*, \quad f \mapsto f|_W$$

  が得られる．α_W は全射であることは容易に確認できる．よって, $\alpha_W \circ \varphi : V \to W^*$ は全射 $\mathbb{R}$ 線形写像である．明らかに, $W^\perp = \mathrm{Ker}(\alpha_W \circ \varphi)$ が成り立つ．よって, $\dim_{\mathbb{R}}(W^*) = \dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(W^\perp)$ となる．任意の複素ベクトル空間 U に対し, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2\dim_{\mathbb{C}}(U)$ が成り立つ．また, $\dim_{\mathbb{C}}(U^*) = \dim_{\mathbb{C}}(U)$ である．以上より, $\dim_{\mathbb{C}}(W^\perp) = \dim_{\mathbb{C}}(V) - \dim_{\mathbb{C}}(W)$ となる．
- $W \cap W^\perp = \{0\}$ が成り立つので, $V = W \oplus W^\perp$ となす．

V がエルミート空間で, W_1, W_2 を V の線形部分空間とする．任意の $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ に対し $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ が成り立つときに W_1, W_2 が直交するという．このとき, W_1 と W_2 の直和は $W_1 \perp W_2$ とおき, 直交直和という．

定義 2.10　V の基底 $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ が正規直交基底であるとは, 任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対し

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$$

が成り立つことをいう．

例 2.11. $\mathbb{C}^n$ の通常のエルミート内積を考える．このとき, 標準基底が正規直交基底である．

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ を V の正規直交基底とする．$x, y \in V$ とし, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ 及び $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ $(x_i, y_i \in \mathbb{C})$ と書く．このとき,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i y_i$$

が成り立つ．また, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ のとき, $x_i = \langle e_i, x\rangle = \overline{\langle x, e_i\rangle}$ である．

補題 2.12　任意のエルミート空間は正規直交基底を持つ．

証明

次元に関する帰納法により示す．$\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1$ のとき, 明らかである．$\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$ のとき, 0,V とは異なる線形部分空間 $W \subset V$ が存在する．帰納法の仮定より, W 及び $W^{\perp}$ はそれぞれ正規直交基底 $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ をもつ．$V = W \perp W^{\perp}$ であるので, $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ は V の正規直交基底である．

2.3　随伴変換

V をエルミート空間とし, $f\colon V \to V$ を $\mathbb{C}$ 線形変換とする．

命題 2.13　以下を満たす $\mathbb{C}$ 線形変換 $f^*\colon V \to V$ が一意的に存在する．

$$\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle, \quad x, y \in V. \tag{2.4}$$

証明

任意の x に対し, 写像 $\gamma_x\colon V \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x, f(y)\rangle$ は $\mathbb{C}$ 線形写像である．(2.3) の全単射より, $\gamma_x(y) = \langle f^*(x), y\rangle$ $(y \in V)$ となるベクトル $f^*(x) \in V$ が一意的に存在する．最後に, $f^*\colon V \to V$, $x \mapsto f^*(x)$ が $\mathbb{C}$ 線形写像であることを示せば良い．$x_1, x_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする．

$$\begin{aligned}\langle f^*(x_1) + \lambda f^*(x_2), y\rangle &= \langle f^*(x_1), y\rangle + \overline{\lambda}\langle f^*(x_2), y\rangle \\ &= \langle x_1, f(y)\rangle + \overline{\lambda}\langle x_2, f(y)\rangle \\ &= \langle x_1 + \lambda x_2, f(y)\rangle.\end{aligned}$$

が成り立つ．よって, $f^*(x_1) + \lambda f^*(x_2) = f^*(x_1 + \lambda x_2)$ となる．したがって, f^* は線形変換である．

明らかに, $\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ $(x, y \in V)$ も成り立つ．

定義 2.14　命題 2.13 で与えられた f^* を f の随伴変換という．

命題 2.15 $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ を正規直交基底とする．このとき，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^*$$

が成り立つ．

証明

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=(a_{ij})$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)=(b_{ij})$ とおく．全ての i,j に対し，

$$b_{ij}=\langle e_i,f^*(e_j)\rangle=\overline{\langle f^*(e_j),e_i\rangle}=\overline{\langle e_j,f(e_i)\rangle}=\overline{a}_{ji}$$

である．主張が従う．

2.4 ユニタリ変換

V をエルミート空間とし，$f\colon V\to V$ を $\mathbb{C}$ 線形変換とする．

定義 2.16 任意の $x\in V$ に対し $\|f(x)\|=\|x\|$ が成り立つとき，f がユニタリ変換であるという．

f がユニタリ変換ならば，任意の $x,y\in V$ に対し

$$\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle \tag{2.5}$$

が成り立つ．実際，(2.1) と (2.2) を使えば，$\mathrm{Re}(\langle f(x),f(y)\rangle)=\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$ かつ $\mathrm{Im}(\langle f(x),f(y)\rangle)=\mathrm{Im}(\langle x,y\rangle)$ である．ゆえに $\langle f(x),f(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ である．逆に，(2.5) が成り立つとき，$x=y$ とすると $\|f(x)\|=\|x\|$ となり，f がユニタリ変換である．n 次正方複素行列 A がユニタリ行列であるとは，

$$AA^*=A^*A=E_n$$

が成り立つことをいう．A がユニタリ行列ならば，${}^tA$, $\overline{A}$, A^* もそれぞれユニタリである．A,B がユニタリならば，AB もユニタリである．

定義 2.17 V をエルミート空間とする．

(a) V のユニタリ変換全体の集合を $\mathrm{U}(V)$ とおき，V のユニタリ群という．

(b) $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ のユニタリ行列全体の集合を $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ とおき，n 次ユニタリ群という．

補題 2.18 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し，以下が同値である．

(i) A がユニタリ行列である．

(ii) A の列が通常エルミート内積に関して $\mathbb{C}^n$ の正規基底をなす．

(iii) A の行が通常エルミート内積に関して $\mathbb{C}^n$ の正規基底をなす．

(iv) A に対応する線形写像 $f_A\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ は通常内積に関してユニタリ変換である．

証明

- 「(i) $\iff$ (ii)」を示す．$\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ を標準基底とする．行列 $C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し，$e_i^*Ce_j$ は C

の (i,j) 成分に他ならない．ゆえに，

$$\begin{aligned} A\text{ がユニタリ行列である} &\iff A^*A = E_n \\ &\iff \text{全ての } 1 \le i,j \le n \text{ に対し，} e_i^* A^* A e_j = e_i^* e_j \\ &\iff \text{全ての } 1 \le i,j \le n \text{ に対し，} (Ae_i)^*(Ae_j) = \delta_{ij} \\ &\iff A \text{ の列が } \mathbb{C}^n \text{ の正規基底をなす．} \end{aligned}$$

- A ユニタリ $\iff$ ${}^tA$ がユニタリ」より，「(ii) $\iff$ (iii)」が分かる．
- 「(i) $\iff$ (iv)」を示す．

$$\begin{aligned} A\text{ がユニタリ行列である} &\iff A^*A = E_n \\ &\iff \text{全ての } x,y \in \mathbb{C}^n \text{ に対し，} x^*A^*Ay = x^*y \\ &\iff \text{全ての } x,y \in \mathbb{C}^n \text{ に対し，} (Ax)^*(Ay) = x^*y \\ &\iff \text{全ての } x,y \in \mathbb{C}^n \text{ に対し，} \langle f_A(x), f_A(y)\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}^n} \\ &\iff f_A \text{ がユニタリ変換である．} \end{aligned}$$

命題 2.19 V をエルミート空間とする．$\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ を V の正規直交基底とし，$f\colon V \to V$ を $\mathbb{C}$ 線形変換とする．このとき，以下が同値である．

(i) f がユニタリ変換である．

(ii) $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ が V の正規直交基底である

(iii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ がユニタリ行列である．

(iv) $f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{id}_V$

証明

- 「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」を示す．$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ より，$(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ が V の正規直交基底である．
- 「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」は直ちに補題 2.18 から分かる．
- 「(iii) $\Longrightarrow$ (iv)」は $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^*$ から従う．
- 「(iv) $\Longrightarrow$ (i)」を示す．任意の $x,y \in V$ に対し，

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^*(f(y))\rangle = \langle x, y\rangle$$

が成り立つ．よって f はユニタリ変換である．

補題 2.20 $\mathrm{U}(V)$ が $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ の部分群である．同様に，$\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群である．

証明

命題 2.19 により，$\mathrm{U}(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ である．明らかに，$\mathrm{id}_V \in \mathrm{U}(V)$ である．また，$f,g \in \mathrm{U}(V)$ のとき，任意の $x \in V$ に対し

$$\|(g\circ f)(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$$

が成り立つので，$g \circ f \in \mathrm{U}(V)$ である．また，

$$\|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|x\|$$

であり，$f^{-1} \in \mathrm{U}(V)$ である．以上より，$\mathrm{U}(V)$ は $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ の部分群である．$\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ の場合は同様である．

2.5 正規変換

定義 2.21 V がエルミート空間で, $f\colon V\to V$ を $\mathbb{C}$ 線形変換とする.
(a) $f^*=f$ のとき, f がエルミート変換であるという.
(b) $f^*=-f$ のとき, f が歪エルミート変換であるという.
(c) $f^*\circ f=f\circ f^*=\mathrm{id}$ のとき, f がユニタリ変換であるという.
(d) $f^*\circ f=f\circ f^*$ のとき, f が正規変換であるという.

明らかに, エルミート変換, 歪エルミート変換, ユニタリ変換はそれぞれ正規変換である. 同様に, $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が $AA^*=A^*A$ を満たすとき, 正規行列であるという.

注意 2.22. 実行列の場合は, 転置行列と随伴行列は一致することに注意する. ゆえに, 任意の $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対し,

$$\begin{array}{lcl} A \text{ が対称行列} & \Longrightarrow & A \text{ がエルミート行列} \\ A \text{ が交代行列} & \Longrightarrow & A \text{ が歪エルミート行列} \\ A \text{ が直交行列} & \Longrightarrow & A \text{ がユニタリ行列} \end{array}$$

また, A が定義 1.28 の意味で正規行列ならば, A は明らかに複素行列としても正規である.

命題 2.23 $f\in \mathrm{End}(V)$ とする. $W\subset V$ が線形部分空間で, $f(W)\subset W$ が成り立つならば,

$$f^*(W^\perp)\subset W^\perp$$

が成り立つ.

証明

命題 1.19 と同様である.

命題 2.24 V がエルミート空間で, $f\in \mathrm{End}(V)$ を正規変換とする. $W\subset V$ が線形部分空間で, $f(W)\subset W$ が成り立つとする. このとき, 以下が成り立つ.
(1) $f(W^\perp)\subset W^\perp$
(2) $f^*(W)\subset W$
(3) $f^*(W^\perp)\subset W^\perp$
(4) $(f|_W)^*=(f^*)|_W$
(5) $f|_W\colon W\to W$ は正規変換である.

証明

(1) のみ確認する. 他の主張は定理 1.29 の証明と全く同じように証明できる. また, (1) の証明は, 定理 1.29(1) の証明で「転置行列」を「随伴変換」に変更するだけで済む: $(e_1,\dots,e_r)$ を W の正規直交基底とし, $(e_{r+1},\dots,e_n)$ を $W^\perp$ の正規直交基底とする. $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ とおく. $f(W)\subset W$ という仮定より, $A:=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ は以下の形の行列である.

$$A=\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & U \end{pmatrix},\quad S\in \mathrm{M}_r(\mathbb{C}),\ T\in \mathrm{M}_{r,n-r}(\mathbb{C}),\ U\in \mathrm{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{C})$$

ゆえに，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^*A = \begin{pmatrix} {}^*S & 0 \\ {}^*T & {}^*U \end{pmatrix}$$

である．f が正規変換より，$AA^* = A^*A$ が成り立つ．よって，

$$\begin{pmatrix} SS^* + TT^* & TU^* \\ UT^* & UU^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T + U^*U \end{pmatrix}$$

とくに，$SS^* + TT^* = S^*S$ である．ゆえに，$\mathrm{Tr}(TT^*) = \mathrm{Tr}(S^*S) - \mathrm{Tr}(SS^*) = 0$ となる．補題 2.6 により $T = 0$ となる．したがって，$f(W^\perp) \subset W^\perp$ が成り立つ．

次に，正規変換の標準形定理を述べる．

$$\mathrm{U}_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$$

とおく．$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_1(\mathbb{C})$ であることに注意する．

定理 2.25 V を n 次元のエルミート空間とし，$f\colon V \to V$ を正規変換とする．このとき，f は正規直交基底で対角化可能である．つまり，V の正規直交基底 $\mathcal{B}$ 及び複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ が存在し，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

が成り立つ．さらに，

(1) f がエルミート変換である $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ である．

(2) f が歪エルミート変換である $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in i\mathbb{R}$ である．

(3) f がユニタリ変換である $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{U}_1$ である．

証明

帰納法により証明する．$\mathbb{C}$ が代数的閉体であるので，$\chi_f(X)$ が $\mathbb{C}$ で分解する．$\lambda_1 \in \mathbb{C}$ を f の固有値とし，$x \in V$ を λ_1 に関する固有ベクトルとする．また，x が正規ベクトル (すなわち，$\|x\| = 1$) であると仮定して良い．$W = \mathbb{C}x$ とおく．命題 2.24 により $f(W^\perp) \subset W^\perp$ であり，さらに $f|_{W^\perp}$ は正規変換である．帰納法の仮定より，$W^\perp$ の正規直交基底 $\mathcal{B}'$ が存在し，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f')$ が対角行列である．よって，$\mathcal{B} = (x, \mathcal{B}')$ が正規直交基底であり，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ は対角行列である．最後に，上の主張 (1)〜(3) は明らかである．

注意 2.26. 逆に，正規直交基底で対角化可能である線形変換は明らかに正規変換である．

系 2.27 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ を正規行列とする．このとき，$P \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ 及び $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ が存在し，

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

である．また，

(1) A がエルミート行列である $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ である．

(2) A が歪エルミート行列である $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in i\mathbb{R}$ である．

(3) A がユニタリ行列である $\iff \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{U}_1$ である．

例 2.28. $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ とし, 回転行列

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

を考える. $R(\theta)$ は $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ において対角化可能でない. しかし, A はユニタリ行列として $\mathbb{C}^2$ の正規直交基底で対角化可能である. $R(\theta)$ の固有多項式は

$$\begin{aligned}\chi_{R(\theta)}(X) &= X^2 - \mathrm{Tr}(R(\theta))X + \det(R(\theta)) \\ &= X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - \exp(i\theta))(X - \exp(-i\theta))\end{aligned}$$

である. 固有値 $\exp(i\theta)$, $\exp(-i\theta)$ に関する固有空間はそれぞれ, 正規ベクトル

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

によって生成される. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ を標準基底とし, $\mathcal{C} = (u, v)$ と定義する. 明らかに, $\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}^2$ の正規直交基底である.

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

とおくと, $P \in \mathrm{U}_2(\mathbb{C})$ であり,

$$R(\theta) = P\begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{pmatrix}P^{-1}$$

が成り立つ.

2.6 正定値性

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ をエルミート行列とする. $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対し,

$$\varphi_A(x, y) = {}^t\overline{x}Ay$$

とおくと, エルミート半双線型形式 φ_A が定まる. 実際,

$$\overline{\varphi_A(y, x)} = {}^ty\overline{A}\overline{x} = {}^t\overline{x}A^*y = {}^t\overline{x}Ay = \varphi_A(x, y)$$

が成り立つ. A が正定値, 負定値, 半正定値, 半負定値であるとは, それぞれ φ_A がその性質を持つときにいう. 正定値エルミート行列, 負定値エルミート行列, 半正定値エルミート行列, 半負定値エルミート行列全体の集合をそれぞれ,

$$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}),\ \mathcal{H}_n^{--}(\mathbb{C}),\ \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{C}),\ \mathcal{H}_n^{-}(\mathbb{C})$$

で表す. 以下の定理 2.29, 定理 2.30 の証明は, それぞれ定理 1.34, 定理 1.35 と同様であるので省略する.

定理 2.29 $m \in \mathbb{N}$ が自然数で, 「$A \in \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{C}) \implies A^m \in \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{C})$」かつ「$A \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \implies A^m \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$」が成り立つ. さらに, 以下の 2 つの写像は全単射である.

$$\begin{aligned} F_m &\colon \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^m \\ F_m &\colon \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}_n^{+}(\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^m. \end{aligned}$$

定理 2.30 以下の 2 つの写像は全単射である.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad (S, U) \mapsto SU \\ \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \quad (S, U) \mapsto US \end{aligned}$$

$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ に対し, $A = SU$ ($S \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$, $U \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$) という表現は A の極分解と呼ばれる. 例えば, $n = 1$ のとき, 複素数 $z \neq 0$ の極分解は $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) に他ならない.

3　2 次形式

3.1　定義

$\mathbb{K}$ を標数 2 以外の可換体とし, V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. また, 写像 $q\colon V \to \mathbb{K}$ が与えられているとする.

定義 3.1　q が 2 次形式であるとは, 双線型形式 $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ が存在し, 任意の $x \in V$ に対し

$$q(x) = \varphi(x, x)$$

が成り立つことをいう.

双線型形式 φ は q により一意的に定まることに注意する. なぜならば, $x, y \in V$ のとき,

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= q(x) + q(y) + 2\varphi(x,y) \end{aligned}$$

が成り立つ. $\mathbb{K}$ の標数が 2 とは異なるので,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \tag{3.1}$$

となる. このことから, 2 次形式 $q\colon V \to \mathbb{K}$ と双線型形式 $V \times V \to \mathbb{K}$ は一対一で対応している. 特に, 全ての $x \in V$ に対し $q(x) = 0$ ならば, 任意の $x, y \in V$ に対し $\varphi(x,y) = 0$ が成り立つ. $V = \mathbb{K}^n$ で,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と書く. $\mathbb{K}^n$ 上の 2 次形式は以下のように表せる.

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}. \tag{3.2}$$

$1 \le j < i \le n$ のとき $a_{ij} := a_{ji}$ と定義する. a_{ij} を (i,j) 成分とする次対称行列を A とおく. このとき, $q(x) = {}^t x A x$ と表せる. よって, g に対応する双線型形式 $\varphi\colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ は

$$\varphi(x,y) \;=\; {}^t x A y \;=\; \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j \qquad x, y \in \mathbb{K}^n \tag{3.3}$$

である.

例 3.2. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 3x_1x_3 - x_1x_2$ とする. q に対応する双線型形式は

$$\varphi\colon (x,y) \longmapsto {}^t x \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} y$$

である. すなわち, $\varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + \frac{3}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1)$ である.

定義 3.3　V が $\mathbb{K}$ ベクトル空間で, $q, q'\colon V \to \mathbb{K}$ を 2 つの 2 次形式とする. q と q' が同値であるとは, V の自己同型 $\theta\colon V \to V$ が存在し, 任意の $x \in V$ に対し

$$q'(x) = q(\theta(x)) \tag{3.4}$$

が成り立つことをいう. このとき, $q \sim q'$ と書く.

V 上の 2 次形式全体の集合を $\mathcal{Q}(V)$ とおく．$q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ のとき, $\lambda q_1 + q_2$ も 2 次形式であるので, $\mathcal{Q}(V)$ は自然に $\mathbb{K}$ ベクトル空間である．$\sim$ は $\mathcal{Q}(V)$ 上の同値関係である．q, q' が 2 次形式で, (3.4) が成り立つとき, q, q' に対応する双線型形式 $\varphi, \varphi' \colon V \times V \to \mathbb{K}$ は

$$\varphi'(x, y) = \varphi(\theta(x), \theta(y)) \tag{3.5}$$

を満たす．実際, これは (3.1) より直ちに確認できる．

命題 3.4 q, q' を $\mathbb{K}^n$ 上の 2 次形式とし, それらに対応する対称行列をそれぞれ A, A' とおく．このとき,

$$q \sim q' \iff \text{正則行列 } P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ が存在し, } A' = {}^tPAP \text{ が成り立つ.}$$

証明

$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ とし, 写像 $\theta \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Px$ を考える．

$$\begin{aligned} q'(x) = q(\theta(x)) &\iff {}^txA'x = {}^t(Px)A(Px) \\ &\iff {}^txA'x = {}^tx({}^tPAP)x \end{aligned}$$

ゆえに, $q' = q \circ \theta \iff A' = {}^tPAP$ である．

今, V を n 次元ベクトル空間とし, $q \colon V \to \mathbb{K}$ を 2 次形式とする．q に対応する双線型形式を $\varphi \colon V \times V \to \mathbb{K}$ とおく．$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ を V の基底とする．このとき,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) := (\varphi(u_i, u_j))_{i,j} \ \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

とおき, $\mathcal{B}$ に関する q の行列という．ベクトル $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ 及び $y = \sum_{i=1}^n y_i u_i$ $(x_i, y_i \in \mathbb{K})$ に対し,

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ の行列式を $\Delta_{\mathcal{B}}(q)$ とおき, $\mathcal{B}$ に関する q の判別式 (または行列式) という．

補題 3.5 $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ 及び $\mathcal{B}' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ を V の 2 つの基底とし, $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ を $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変換行列とする．このとき,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) P.$$

証明

$x, y \in V$ とし, x, y の $\mathcal{B}$ に関する座標をそれぞれ $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ とおく．また, x, y の $\mathcal{B}'$ に関する座標をそれぞれ $(x'_1, \ldots, x'_n)$, $(y'_1, \ldots, y'_n)$ とおく．このとき,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \ldots & x'_n \end{pmatrix} {}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) P \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

ゆえに, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) P$ である．

系 3.6　$\Delta_{\mathcal{B}'}(q) = \Delta_{\mathcal{B}}(q) \times a^2$ を満たす $a \in \mathbb{K}^*$ が存在する．

証明

補題 3.5 より $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tP\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)P$ である．よって，$a = \det(P)$ とおけば良い．

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し，x の符号を

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x > 0 \\ -1 & \text{if} \quad x < 0 \\ 0 & \text{if} \quad x = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

と定義する．

系 3.7　$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．このとき，$\Delta_{\mathcal{B}}(q)$ の符号は基底 $\mathcal{B}$ の取り方によらない．

$q \colon V \to \mathbb{K}$ を 2 次形式とし，φ を q に対応する双線型形式とする．また，$W_1, W_2 \subset V$ を 2 つの線形部分空間とする．任意の $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ に対し

$$\varphi(x_1, x_2) = 0$$

が成り立つとき，W_1 と W_2 が直交するという．W_1, W_2 が直交し，$V = W_1 \oplus W_2$ を満たすときに，$V = W_1 \perp W_2$ と書く．このとき，$\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_r)$, $\mathcal{B}_2 = (v_1, \ldots, v_s)$ がそれぞれ W_1, W_2 の基底であるならば，$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$ は V の基底である．q の W_1, W_2 への制限をそれぞれ q_1, q_2 とおく．$\mathcal{B}$ に関する q の行列は以下の通りになる．

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(q_1) & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(q_2) \end{array}\right) \tag{3.7}$$

とくに，$\Delta_{\mathcal{B}}(q) = \Delta_{\mathcal{B}_1}(q_1)\Delta_{\mathcal{B}_2}(q_2)$ が成り立つ．

3.2　非退化な 2 次形式

V を有限次ベクトル空間とし，$q \colon V \to \mathbb{K}$ を 2 次形式とする．q に対応する双線型形式を $\varphi \colon V \times V \to \mathbb{K}$ とおく．$W \subset V$ を線形部分空間とする．このとき

$$W^{\perp} := \{x \in V \mid \forall y \in W,\ \varphi(x, y) = 0\}$$

とおき，W の直交部分空間という．V 自身の直交部分空間 $V^{\perp}$ を q の根基という．q の根基は $\mathrm{Rad}(q)$ と書くこともある．

$$\mathrm{rank}(q) = \dim(V) - \dim(V^{\perp})$$

とおき，q の階数という．

定義 3.8　$V^{\perp} = \{0\}$ のとき，V が非退化であるという．

V の双対空間を V^* とおく．$x \in V$ に対し，写像 $y \mapsto \varphi(x, y)$ を φ_x とおく．明らかに，写像 $\alpha \colon V \to V^*$, $x \mapsto \varphi_x$ は線形写像である．

命題 3.9 以下が同値である.

(i) V が非退化である.

(ii) 写像 $\alpha\colon V\to V^*,\ x\mapsto\varphi_x$ が同型である.

(iii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ は正則行列である.

証明

- (i) $\iff$ (ii) を示す. $x\in V$ に対し,

$$\begin{aligned} x\in V^{\perp} &\iff \text{任意の } y\in V \text{ に対し } \varphi(x,y)=0 \\ &\iff \varphi_x=0. \end{aligned}$$

  よって, $\mathrm{Ker}(\alpha)=V^{\perp}$ である. $\dim_{\mathbb{K}}(V)=\dim_{\mathbb{K}}(V^*)$ より, α が同型写像であることと $\mathrm{Ker}(\alpha)=0$ であることは同値である. ゆえに, (i) $\iff$ (ii) が成り立つ.

- (ii) $\iff$ (iii) を示す. $\mathcal{B}=(u_1,\dots,u_n)$ を V の基底とし, $\mathcal{B}^*$ を $\mathcal{B}$ の双対基底とする. このとき,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\alpha)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$$

  が成り立つ. ゆえに, α が同型である $\iff$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ が正則である.

V をベクトル空間とし, $q\colon V\to\mathbb{K}$ を 2 次形式とする. 線形部分空間 $W\subset V$ に対し, q の W への制限を

$$q|_W\colon W\to\mathbb{K}$$

とおく. $(W,q|_W)$ が非退化であるとき, W が V の非退化部分空間であるという. 明らかに,

$$W \text{ が非退化} \iff W\cap W^{\perp}=\{0\}.$$

補題 3.10 $W\subset V$ が線形部分空間で, $V=W\oplus V^{\perp}$ とする. このとき, W が非退化である. さらに, $W^{\perp}=V^{\perp}$ かつ $V=W\perp V^{\perp}$ が成り立つ.

証明

- $W^{\perp}=V^{\perp}$ を示す. 明らかに, $V^{\perp}\subset W^{\perp}$ である. 逆に, $x\in W^{\perp}$ のとき, x が $V^{\perp}$ 及び W と直交するので, x が V 全体と直交する. ゆえに, $x\in V^{\perp}$ である.
- $W\cap W^{\perp}=W\cap V^{\perp}=0$ より, W は非退化部分空間である.

ゆえに, $\mathrm{rank}(q)=\dim(W)$ である. また, $\mathcal{B}$ が V の基底ならば, $\mathrm{rank}(q)=\mathrm{rank}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q))$ が成り立つ.

命題 3.11 q を V 上の非退化な 2 次形式とし, W を V の線形部分空間とする.

(1) $\dim(W^{\perp})=\dim(V)-\dim(W)$ である.

(2) $(W^{\perp})^{\perp}=W$ である.

証明

- $f\colon V\to\mathbb{K}$ が一次形式のとき, f の W への制限 $f|_W\colon W\to\mathbb{K}$ は W 上の一次形式である. また, $f\mapsto f|_W$ で定まる写像

$$\gamma\colon V^*\to W^*$$

  は線形写像である. γ が全射であることは容易に示される. 合成写像 $\gamma\circ\alpha\colon V\to W^*$ を考える.

$\gamma \circ \alpha$ は全射であり, その核は

$$\mathrm{Ker}(\gamma \circ \alpha) = \{x \in V \mid \forall y \in W,\ \varphi(x, y) = 0\} = W^{\perp}$$

である. $\dim(W^*) = \dim(W)$ であるので, $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$ が成り立つ.

- 明らかに, $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である. また,

$$\dim((W^{\perp})^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W^{\perp}) = \dim(V) - (\dim(V) - \dim(W)) = \dim(W)$$

より, $(W^{\perp})^{\perp} = W$ が成り立つ.

系 3.12 q が V 上の非退化な 2 次形式で, $W \subset V$ を非退化な線形部分空間とする. このとき, $V = W \perp W^{\perp}$ である.

証明

W が非退化より, $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ である. また, 命題 3.11 より $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$ が成り立つ. 主張が従う.

補題 3.13 q を V 上の 2 次形式とする.
(1) $V = W_1 \perp W_2$ とする. このとき, q が非退化 $\Longleftrightarrow W_1, W_2$ が非退化
(2) q が非退化で, $W \subset V$ を線形部分空間とする. このとき, $W \subset V$ が非退化 $\Longrightarrow W^{\perp}$ が非退化

証明

(1) は (3.7) より直ちに従う. q が非退化で, $W \subset V$ が非退化な線形部分空間のとき, $V = W \perp W^{\perp}$ である. (1) より $W^{\perp}$ は非退化である.

定理 3.14 q を V 上の 2 次形式とし, $r := \mathrm{rank}(q)$ とおく. このとき,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad c_i \in \mathbb{K}^* \tag{3.8}$$

となる V の基底 $\mathcal{B}$ が存在する. このとき, $\mathcal{B}$ を直交基底という.

証明

V の次元に関する帰納法により示す. W を $V^{\perp}$ の補空間とする. 補題 3.10 により $V = W \perp V^{\perp}$ であり, W が非退化である. ゆえに, V が非退化である場合を考えれば十分である. このとき, $q(u_1) \neq 0$ を満たすベクトル $u_1 \in V$ が存在する. 明らかに $U := \mathbb{K}u_1$ は非退化部分空間である. よって, 系 3.12 より $V = U \perp U^{\perp}$ と書ける. 帰納法の仮定より, $U^{\perp}$ の適当な基底 $\mathcal{B}' = (u_2, \ldots, u_n)$ が存在し, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q|_{U^{\perp}})$ が対角行列である. よって, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ とおくと, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ は対角行列である.

$\mathbb{K}$ の任意の元が 2 乗根を持つ場合を考える. 例えば, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ はこの性質を持つ. $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ が V の基底で, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ が上の行列 (3.8) であるとする. $1 \leq i \leq r$ に対し, 仮定より $c_i = a_i^2$ $(a_i \in \mathbb{K}^*)$ と書ける.

$e'_i := \frac{1}{a_i}e_i$ とおき, 基底 $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ を考える. このとき,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって, 以下の系が示せた.

系 3.15 $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x^2$ が全射であるとする. このとき, 任意の $q, q' \in \mathcal{Q}(V)$ に対し,

$$q \sim q' \iff \mathrm{rank}(q) = \mathrm{rank}(q').$$

3.3 等方ベクトル

定義 3.16 q を V 上の 2 次形式とし, $x \in V \setminus \{0\}$ とする. $q(x) = 0$ のとき, x を等方ベクトルという.

例 3.17. $V = \mathbb{Q}^2$ で,

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$$

を考える. $\sqrt{2}$ が無理数であるので, $x_1^2 - 2x_2^2 = 0$ となる $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}^*$ が存在しない. ゆえに, q が非等方的である. しかし, $V = \mathbb{R}^2$ の場合は,

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$ 等方ベクトルである.

定義 3.18 $W \subset V$ を線形部分空間とする.
(a) 等方ベクトル $x \in W \setminus \{0\}$ が存在するとき, W が等方的であるという.
(b) $q|_W = 0$ のとき, W が完全等方的であるという.
(c) W 内に等方ベクトルが存在しないときに, W を非等方部分空間という.

W が完全等方であるならば, (3.1) により 任意の $x, y \in W$ に対し $\varphi(x, y) = 0$ である. ゆえに,

$$W \text{ が完全等方} \iff W \subset W^\perp.$$

定義 3.19 $q\colon V \to \mathbb{K}$ を 2 次形式とする.

$$\eta(q) := \max\{\dim(W) \mid W \subset V \text{ 完全等方的 }\}$$

とおき, q の指数という.

補題 3.20 V が非退化であるとし, $W \subset V$ を完全等方的部分空間とする. このとき,

$$\dim(W) \le \frac{\dim(V)}{2}$$

である. ゆえに, $\eta(q) \le \frac{\dim(V)}{2}$ である.

証明

V が非退化であるので, $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$ である. また, W が完全等方的であるので, $W \subset W^\perp$ である. ゆえに, $\dim(W) \le \dim(V) - \dim(W)$ となり, すなわち $\dim(W) \le \frac{\dim(V)}{2}$ が成り立つ.

3.4 双曲平面

定義 3.21 V が 2 次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間で，$q\colon V \to \mathbb{K}$ を 2 次形式とする．q に対応する双線型形式を φ とおく．V が双曲平面であるとは，

$$\varphi(e_1, e_2) = 1, \quad q(e_1) = q(e_2) = 0$$

を満たす基底 $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ が存在することをいう．言い換えれば，$\mathcal{B}$ は以下を満たす．

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また，このとき $\mathcal{B}$ は双曲基底と呼ばれる．

双曲基底は $\Delta_{\mathcal{B}}(q) = -1$ を満たす．とくに，$\Delta_{\mathcal{B}}(q) \neq 0$ より (V, q) は非退化である．$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{K})$ のとき，

$$q(x) = 2x_1 x_2$$

が成り立つ．また，$e_1' = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $e_2' = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ と定義すると，

$$\varphi(e_1', e_2') = \frac{1}{4}(\varphi(e_2, e_1) - \varphi(e_1, e_2)) = 0$$

である．また，$q(e_1') = 1$, $q(e_2') = -1$ である．ゆえに，$\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ とおくと，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

命題 3.22 V を 2 次元ベクトル空間とし，q を V 上の 2 次形式とする．このとき，以下が同値である．

(i) (V, q) が双曲平面である．

(ii) q が非退化 かつ 等方的である．

(iii) $q(e_1) = 0$ かつ $\varphi(e_1, e_2) \neq 0$ を満たす V の基底 (e_1, e_2) が存在する．

(iv) $\Delta_{\mathcal{B}}(q) = -a^2$ を満たす V の基底 $\mathcal{B}$ 及び $a \in \mathbb{K}^*$ が存在する．

証明

- 「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」はすでに知っている．
- 「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」を示す．$e_1 \in V \setminus \{0\}$ を等方ベクトルとする．q が非退化であるので，$e_2 \notin (\mathbb{K}x)^\perp$ が取れる．このとき，e_1, e_2 は共線でないので，$\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(e_1, e_2) = V$ となる．
- 「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」を示す．e_1 が等方ベクトルで，$\varphi(e_1, e_2) \neq 0$ とする．$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ とおくと，

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & t \end{pmatrix}, \qquad s \neq 0$$

  である．$\mathcal{B}$ と $(e_1, \frac{1}{s}e_2)$ を入れ替えて，$s = 1$ として良い．$t = 0$ ならば，(e_1, e_2) は双曲基底である．$t \neq 0$ の場合を考える．$\lambda \in \mathbb{K}$ で，$e_2' = \lambda e_1 + e_2$ とおく．$\varphi(e_1, e_2') = 1$ である．また，$q(e_2') = t + 2\lambda$ である．よって，$\lambda = -\frac{t}{2}$ とおけば (e_1, e_2') は双曲基底である．
- 「(i) $\Longrightarrow$ (iii)」：$\mathcal{B}$ を双曲基底とすれば良い．
- 「(iv) $\Longrightarrow$ (ii)」を示す．$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ が基底で，$\Delta_{\mathcal{B}}(q) = -a^2$ とする．基底 $(\frac{1}{a}e_1, e_2)$ を考えて，

$\Delta_{\mathcal{B}}(q) = -1$ として良い．このとき，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \qquad rt - s^2 = -1$$

と書ける．$r = 0$ ならば，e_1 は等方ベクトルであり，主張が従う．$r \neq 0$ のとき，$x = \lambda e_1 + e_2$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ とおくと，

$$q(x) = r\lambda^2 + 2s\lambda + t$$

となる．この多項式の判別式は $4s^2 - 4rt = 4$ である．ゆえに，

$$\lambda = \frac{-s \pm 1}{r}$$

とおくと $q(x) = r\lambda^2 + 2s\lambda + t = 0$ である．よって，等方ベクトルが存在する．$\Delta_{\mathcal{B}}(q) \neq 0$ より，q は非退化である．

注意 3.23. (V, q) が双曲平面ならば，V はちょうど 2 つの等方直線を持つ．実際，$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ が双曲基底で，$q(x_1e_1 + x_2e_2) = 2x_1x_2$ である．ゆえに，等方直線は $\mathbb{K}e_1$ と $\mathbb{K}e_2$ に限る．

3.5 双曲空間

V をベクトル空間とし，q を V 上の 2 次形式とする．

定義 3.24 $V = H_1 \perp \cdots \perp H_k$ となる双曲平面 $H_1, \ldots, H_k$ が存在するとき，V を双曲空間という．

(x_i, y_i) を H_i の双曲基底とする．このとき，$W = \mathrm{Span}(x_1, \ldots, x_k)$ は完全等方部分空間である．また，$\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k)$ とおくと，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0_k & E_k \\ E_k & 0_k \end{pmatrix}$$

が成り立つ．とくに，q の指数 (定義 3.19 参照) は $k = \frac{\dim(V)}{2}$ である．

命題 3.25 q を V 上の非退化な 2 次形式とし，$W \subset V$ を線形部分空間とする．$W_0 = \mathrm{Rad}(q|_W) = W \cap W^{\perp}$ とおく．W' を W における W_0 の補空間とする．また，$(e_1, \ldots, e_k)$ を W_0 の基底とする．このとき，以下を満たすベクトル $x_1, \ldots, x_k \in V$ が存在する．

(1) 各 $i = 1, \ldots k$ に対し，$P_i = \mathrm{Span}(e_i, x_i)$ は双曲平面である．

(2) $W', P_1, \ldots, P_k$ のどの 2 つも直交する．

証明

- $k = \dim(W_0)$ に関する帰納法によって示す．まず，$k = 1$ の場合を考える．$W' \subsetneq W$ より，$W^{\perp} \subsetneq W'^{\perp}$ である．$x_1 \in W'^{\perp} \setminus W^{\perp}$ とし，$P_1 = \mathrm{Span}(e_1, x_1)$ とおく．$W = W' \oplus W_0$ かつ $x_1 \in W'^{\perp} \setminus W^{\perp}$ より，$x_1 \notin W_0^{\perp}$ である．ゆえに，$\varphi(e_1, x_1) \neq 0$ である．e_1 が等方ベクトルであるので，P_1 は双曲平面である．また，$e_1, x_1 \in W'^{\perp}$ より P_1 と W' が直交する．
- 次に，$k \geq 2$ とする．$U := \mathrm{Span}(e_2, \ldots, e_k) \perp W'$ と定義する．$U \subsetneq W$ より，$W^{\perp} \subsetneq U^{\perp}$ である．$x_1 \in U^{\perp} \setminus W^{\perp}$ とし，$P_1 = \mathrm{Span}(e_1, x_1)$ とおく．$W = U \oplus \mathbb{K}e_1$ かつ $x_1 \in U^{\perp} \setminus W^{\perp}$ より，$\varphi(e_1, x_1) \neq 0$ が成り立つ．ゆえに，P_1 は双曲平面である．また，P_1 と U が直交する．

$$W_1 := U \perp P_1 = \mathrm{Span}(e_2, \ldots, e_k) \perp W' \perp P_1$$

とおく．W_1 の根基 $\mathrm{Rad}(q|_{W_1})$ について考える．明らかに，$e_2, \ldots, e_k \in W_1^{\perp}$ であるので，$\mathrm{Span}(e_2, \ldots, e_k) \subset \mathrm{Rad}(q|_{W_1})$ である．また，補題 3.10 により，W' が非退化である．一方，P_1 が非退化であるので，$W' \perp P_1$ も非退化である．ゆえに，$\mathrm{Rad}(q|_{W_1}) = \mathrm{Span}(e_2, \ldots, e_k)$ が成り立つ．$W_1' := W' \perp P_1$ とおくと，$W_1 = \mathrm{Rad}(q|_{W_1}) \perp W_1'$ が成り立つ．帰納法の仮定を W_1 に適用できる．ゆえに，ベクトル $x_2, \ldots, x_k \in V$ が存在し，以下が成り立つ．

(1) $P_i = \mathrm{Span}(e_i, x_i)$ が双曲平面である $(i = 2, \ldots, k)$．

(2) $W_1', P_2, \ldots, P_k$ どの 2 つも直交する．

よって，ベクトル $(x_1, \ldots, x_k)$ が条件を満たす．

系 3.26 q を V 上の非退化な 2 次形式とし，$W \subset V$ を完全等方部分空間とする．以下を満たす線形部分空間 H が存在する．

(1) H が双曲空間である．

(2) $W \subset H$ である．

(3) $\dim(H) = 2\dim(W)$ である．

証明

$(e_1, \ldots, e_k)$ を W の基底とする．命題 3.25 で $W_0 = W$, $W' = \{0\}$ とすれば，互いに直交する双曲平面 $P_1, \ldots, P_k$ $(P_i = \mathrm{Span}(e_i, x_i))$ が存在する．$H = P_1 \perp \cdots \perp P_k$ とおけば良い．

系 3.27 q を V 上の非退化な 2 次形式とする．このとき，

$$V \text{ が等曲空間} \iff \dim(V) = 2\eta(q).$$

証明

「$\Longrightarrow$」は既に知っている．逆に，$W \subset V$ が完全等方的部分空間で，$\dim(V) = 2\dim(W)$ とする．系 3.26 により，$\dim(H) = 2\dim(W)$ を満たす双曲空間 H が存在する．よって，$H = V$ となり，V が双曲空間である．

4 等長変換，2 次形式の直交群

4.1 等長写像

V_1, V_2 を 2 つの $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，q_1, q_2 をそれぞれ V_1, V_2 上の 2 次形式とする．また，$f\colon V_1 \to V_2$ を $\mathbb{K}$ 線形写像とする．

定義 4.1 f が等長写像であるとは，任意の $x \in V_1$ に対し $q_2(f(x)) = q_1(x)$ が成り立つことをいう．

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$q\colon V \to \mathbb{K}$ を 2 次形式とする．このとき，等長写像 $f\colon V \to V$ のことを V の等長変換という．q を V 上の非退化な 2 次形式とし，W を V の非退化部分空間とする．このとき，$V = W \perp W^{\perp}$ と書ける．任意の $x \in V$ に対し，$x = a + b$ $(a \in W, b \in W^{\perp})$ と一意的に表すことができる．

$$s_W(x) = a - b$$

とおくことによって，線形写像 $s_W\colon V \to V$ が定まる．a, b が直交するので，

$$q(s_w(x)) = q(a) + q(-b) = q(a) + q(b) = q(x)$$

が成り立つ．ゆえに，s_W は V の等長変換である．s_W を W に関する対合変換という．ユークリッド空間とは違って，V の任意の線形部分空間に関する対合変換が定義されているとは限らない．W が非退化部分空間の場合のみ対合変換 s_W が定義されていることに注意する．実際，s_W を定義するには $V = W \perp W^{\perp}$ が成り立つことが必要である．

定義 4.2　q を V 上の非退化な 2 次形式とする．等長変換 $f\colon V \to V$ 全体のなす集合を $\mathrm{O}(q)$ とおき，q の直交群という．

補題 4.3　$\mathrm{O}(q)$ は一般線形群 $\mathrm{GL}(V)$ の部分群である．

証明

- まず，$f \in \mathrm{O}(q)$ のとき f が全単射であることを示す．$x \in V$ で $f(x) = 0$ とすると，任意の $y \in V$ に対し，
$$\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = 0$$
となる．V が非退化であるので，$x = 0$ となる．ゆえに，$f \in \mathrm{GL}(V)$ が成り立つ．
- $f, g \in \mathrm{O}(V)$ とする．このとき，
$$q((f \circ g)(x)) = q(f(g(x))) = q(g(x)) = q(x)$$
となる．よって，$f \circ g \in \mathrm{O}(q)$ である．また，
$$q(f^{-1}(x)) = q(f(f^{-1}(x))) = q(x)$$
より，$f^{-1} \in \mathrm{O}(q)$ である．以上より $\mathrm{O}(q)$ は $\mathrm{GL}(V)$ の部分群である．

4.2　Witt の定理

q を V 上の非退化な 2 次形式とし，$W \subset V$ を線形部分空間とする．また，等長写像 $\alpha\colon W \to V$ が与えられているとする．つまり，任意の $x \in W$ に対し，$q(\alpha(x)) = q(x)$ である．

定理 4.4　このとき，α が V の等長変換 $u\colon V \to V$ に延長できる．つまり，$u \in \mathrm{O}(q)$ が存在し，$u(x) = \alpha(x)$ $(x \in W)$ である．

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed, "u \text{ が存在する}"] & \\
\cup & \\
W \arrow[r, "\alpha"'] & V
\end{tikzcd}$$

(1) まず，W が非退化である場合を考える．$\dim(W)$ に関する帰納法により証明する．$\dim(W) = 1$ のとき，$W = \mathbb{K}x$ $(x \in V \setminus \{0\})$ と書ける．$y = \alpha(x)$，$W' = \mathbb{K}y$ と定義する．α が等長変換であるので，$q(x) = q(y) \neq 0$ である．以下の補題を示す．

補題 4.5 q を V 上の非退化な 2 次形式とする．$x, y \in V$ で，$q(x) = q(y) \neq 0$ のとき，以下が成り立つ．

- $x+y$, $x-y$ が直交する．
- $x+y$, $x-y$ の少なくとも一方が等方ベクトルでない．
- $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ で $z = x + \varepsilon y$ が等方的でないとする．このとき，$H = (\mathbb{K}z)^{\perp}$ とおくと $s_H(x) = -\varepsilon y$ が成り立つ．

証明：(補題 4.5 の証明)

$\varphi(x+y, x-y) = q(x) - q(y) = 0$ より，$x+y$ と $x-y$ が直交する．また，$\mathcal{B} = (x+y, x-y)$ は $W = \mathrm{Span}(x, y)$ の基底をなす．

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q|_W) = \begin{pmatrix} q(x+y) & 0 \\ 0 & q(x-y) \end{pmatrix}$$

である．$q|_W \neq 0$ より，$q(x+y) \neq 0$ または $q(x-y) \neq 0$ である．

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ で $z = x + \varepsilon y$ が非等方ベクトル (すなわち，$q(z) \neq 0$) であるとする．$H = (\mathbb{K}z)^{\perp}$ とおくと，$V = H \perp \mathbb{K}z$ が成り立つ．$x+y$, $x-y$ が直交するので，$x - \epsilon y \in H$ である．よって，

$$s_H(x) = s_H\left(\frac{1}{2}(x-\epsilon y)\right) + s_H\left(\frac{1}{2}(x+\epsilon y)\right) = \frac{1}{2}(x-\epsilon y) - \frac{1}{2}(x+\epsilon y) = -\epsilon y.$$

定理 4.4 の証明に戻る．x と $y = \alpha(x)$ が $q(x) = q(y) \neq 0$ を満たすので，補題 4.5 により $s_H(x) = \pm y$ を満たす線形部分空間 H が存在する．$u = \mp s_H$ とおくと，$u(x) = y$ が成り立つ．$W = \mathbb{K}x$ より $u|_W = \alpha$ である．ゆえに，$\dim(W) = 1$ かつ W が非退化の場合に定理 4.4 の主張が示せた．

(2) 次に，$\dim(W) \geq 2$ とする．$W = W_1 \perp W_2$ ($\dim(W_1) \geq 1$, $\dim(W_2) \geq 1$) を満たす線形部分空間 W_1, W_2 が取れる (実際，定理 3.14 により W の直交基底 $(e_1, \ldots, e_r)$ が存在する．$W_1 = \mathbb{K}e_1$, $W_2 = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(e_2, \ldots, e_r)$ とおけば良い)．W が非退化より，W_1, W_2 も非退化である (補題 3.13(1) 参照)．α の W_1 への制限 $\alpha\colon W_1 \to V$ を考える．帰納法の仮定より，$u|_{W_1} = \alpha|_{W_1}$ を満たす $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．写像 $\alpha'\colon W \to V$ を $\alpha' = u^{-1} \circ \alpha$ によって定義する．明らかに，$\alpha'|_{W_1} = \mathrm{id}_{W_1}$ である．$u'|_W = \alpha'$ を満たす $u' \in \mathrm{O}(q)$ が存在することを示せば良い．なぜならば，このとき $(u \circ u')|_W = \alpha$ となり，主張が従う．ゆえに，α と α' を入れ替えて，$\alpha|_{W_1} = \mathrm{id}_{W_1}$ として良い．このとき，任意の $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ に対し，$\varphi(x_1, \alpha(x_2)) = \varphi(\alpha(x_1), \alpha(x_2)) = \varphi(x_1, x_2) = 0$ である．ゆえに，$\alpha(W_2) \subset W_1^{\perp}$ が成り立つ．等長写像 $\alpha\colon W_2 \to W_1^{\perp}$, $x \mapsto \alpha(x)$ を考える．W_1 が非退化より，$W_1^{\perp}$ も非退化である (補題 3.13(2) 参照)．帰納法の仮定より $u_1 \in \mathrm{O}(W_1^{\perp})$ が存在し，$u_1|_{W_2} = \alpha|_{W_2}$ が成り立つ．$u|_W = \alpha$ を満たす $u \in \mathrm{O}(V)$ を以下のように作る．まず，W_1 が非退化であるので，$V = W_1 \perp W_1^{\perp}$ であることに注意する．$x \in W_1$, $y \in W_1^{\perp}$ に対し，

$$u(x+y) = x + u_1(y)$$

とおくことで，等長写像 $u\colon V \to V$ を定める．$u|_{W_1} = \mathrm{id}_{W_1}$ および $u|_{W_1^{\perp}}$ が等長写像であるので，u も同様である．また，$x \in W_1$ のとき $u(x) = x = \alpha(x)$ であり，$x \in W_2$ のとき $u(x) = u_1(x) = \alpha(x)$ である．したがって，$u|_W = \alpha$ が成り立つ．以上より，W が非退化部分空間の場合に，定理 4.4 が示せた．

(3) 最後に，W が退化である場合を考える．$W_0 = \mathrm{Rad}(q|_W)$ とおき，W' を W における W_0 の補空間とする．$(e_1, \ldots, e_k)$ を W_0 の基底とし，$x_1, \ldots, x_k \in V$ を命題 3.25 で与えられたものとする．つまり，$P_i = \mathrm{Span}(e_i, x_i)$ は双曲平面であり，$W', P_1, \ldots, P_k$ のどの 2 つも直交する．

$$U_1 := W' \perp P_1 \perp \cdots \perp P_k$$

とおくと，$W \subset U_1$ であり，さらに U_1 は非退化部分空間である．同様に，α が等長写像なので，$\alpha(W) = \alpha(W_0) \perp \alpha(W')$ である．また，$\alpha(W_0)$ が $\alpha(W)$ の根基である．$(\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_n))$ は $\alpha(W_0)$ の基底である．命題 3.25 により，適当なベクトル $x'_1, \ldots, x'_k \in V$ が存在し，$P'_i = \mathrm{Span}(\alpha(e_i), x'_i)$ は双曲平面である．さらに，$\alpha(W), P'_1, \ldots, P'_n$ のどの 2 つも直交する．

$$U_2 := \alpha(W') \perp P'_1 \perp \cdots \perp P'_k$$

とおく．P_i, P'_i が双曲平面であるので，等長写像 $\alpha_i\colon P_i \to P'_i$ が取れる．

$$\beta\colon U_1 \to U_2, \qquad (x', x_1, \ldots, x_k) \mapsto (\alpha(x'), \alpha_1(x_1), \ldots, \alpha_k(x_k))$$

と定めると，$\beta\colon U_1 \to U_2$ は等長写像となる．U_1 が非退化であるので，上の (1), (2) により β が V の等長変換 $u \in \mathrm{O}(q)$ に延長できる．

4.3 Witt の定理の応用

q を V 上の非退化な 2 次形式とする．

系 4.6 $W, W' \subset V$ を 2 つの線形部分空間とする．以下が同値である．

(i) $(W, q|_W)$ と $(W', q|_{W'})$ が等長である．すなわち，全単射である等長写像 $u\colon W \to W'$ が存在する．

(ii) $W' = u(W)$ となる $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．

証明

「(ii) $\Longrightarrow$ (i)」は明らかである．逆に，$(W, q|_W)$ と $(W', q|_{W'})$ が等長であるとし，$\alpha\colon W \to W'$ を全単射等長写像とする．定理 4.4 より，$\alpha = u|_W$ となる $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．α が全単射より，$u(W) = \alpha(W) = W'$ である．

定義 4.7 W を V の線形部分空間とする．

(a) $q|_W = 0$ のとき，W を完全等方部分空間 (Totally Isotropic Subspace, 略 TIS) という．

(b) W が完全等方部分空間であり，さらに $W \subsetneq W'$ を満たす完全等方部分空間 W' が存在しないとき，W を極大完全等方部分空間 (Maximal Totally Isotropic Subspace, 略 MTIS) という．

命題 4.8

(1) W が TIS ならば，W を含む MTIS が存在する．

(2) 全ての MTIS が同じ次元を持つ．

証明

(1) は明らかである．W, W' を MTIS とする．$\dim(W) \leq \dim(W')$ として良い．$W_1 \subset W'$ かつ $\dim(W_1) = \dim(W)$ を満たす線形部分空間 W_1 をとる．$q|_{W_1} = 0$ かつ $q|_W = 0$ より，$(W, q|_W)$ と $(W_1, q|_{W_1})$ は明らかに等長である．系 4.6 により，$W = u(W_1)$ を満たす $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．W' が TIS より，$u(W')$ も TIS である．$W = u(W_1) \subset u(W')$ であるので，W の極大性より $W = u(W')$ が成り立つ．とくに，$\dim(W) = \dim(W')$ である．

V の全ての MTIS の共通次元は q の指数 (定義 3.19 参照) に他ならない．

命題 4.9 W, W' が V の線形部分空間で，W と W' が等長ならば，$W^\perp$ と $W'^\perp$ も等長である．

証明

$\alpha\colon W \to W'$ を全単射等長写像とする．定理 4.4 により，$u|_W = \alpha$ を満たす $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．$u(W) = W'$ より，$u(W^\perp) = u(W)^\perp = W'^\perp$ である．よって，$W^\perp$ と $W'^\perp$ が等長である．

定理 4.10　V の線形部分空間で，双曲空間 H および 非等方的空間 G が存在し

$$V = H \perp G$$

と表せる．また，$\dim(H) = 2\nu(q)$ が成り立つ．さらに，$V = H' \perp G'$ (H'：双曲空間，G'：非等方的) が同様の分解であるならば，$u(H) = H'$ かつ $u(G) = G'$ を満たす $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．

証明

- W を V の MTIS とする．系 3.26 により，$W \subset H$ かつ $\dim(H) = 2\dim(W)$ を満たす双曲空間 H が存在する．H が非退化より，$V = H \perp H^\perp$ となる．また，W が MTIS であるので，$H^\perp$ の中に等方ベクトルが存在しない．よって，$G = H^\perp$ とおけば良い．
- 次に，$V = H \perp G$ (H：双曲空間，G：非等方的) のとき，$\dim(H) = 2\nu(q)$ が成り立つことを示す．$W \subset H$ を H の MTIS とする．H が双曲空間なので，$\dim(H) = 2\dim(W)$ である．ゆえに，W が V の MTIS であることを示せば良い．
  $W \oplus G \subset W^\perp$ である．
  $$\begin{aligned}\dim(W \oplus G) &= \dim(W) + \dim(G) = \dim(W) + (\dim(V) - \dim(H)) \\ &= \dim(V) - \dim(W) = \dim(W^\perp)\end{aligned}$$
  である．よって，$W \oplus G = W^\perp$ が成り立つ．$x \in W^\perp$ で，$x = y + z$ ($y \in W$, $z \in G$) とする．このとき，$q(x) = q(y) + q(z) = q(z)$ である．G が非等方であるので，$z \neq 0$ のとき $q(z) \neq 0$ である．ゆえに，W が V の MTIS である．したがって，$\dim(H) = 2\dim(W) = 2\nu(q)$ が成り立つ．
- $V = H' \perp G'$ (H'：双曲空間，G'：非等方的) とする．以上より，$\dim(H) = \dim(H') = 2\nu(q)$ である．H, H' が同次元の双曲空間であるので，互いに等長である．ゆえに，$u(H) = H'$ を満たす $u \in \mathrm{O}(q)$ が存在する．$G = H^\perp$, $G' = H'^\perp$ より，$u(G) = G'$ である．

4.4　実 2 次形式

以下，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．整数 $r, s \geq 0$ に対し，

$$E_{r,s} := \begin{pmatrix} E_r & \\ & -E_s \end{pmatrix}$$

と定義する．V を n 次元実ベクトル空間とし，$q\colon V \to \mathbb{R}$ を非退化な 2 次形式とする．

定理 4.11

(1) V の基底 $\mathcal{B}$ が存在し，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = E_{r,s} = \begin{pmatrix} E_r & \\ & -E_s \end{pmatrix}, \qquad r + s = n.$$

(2) 整数 (r, s) が基底 $\mathcal{B}$ の取り方に依らない．

(3) $\nu(q) = \min\{r, s\}$ が成り立つ．但し，$\nu(q)$ は q の指数である．

証明

- (1) を示す．定理 3.14 により V の基底 $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ が存在し，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ が対角行列である．その対角成分を $a_1,\dots,a_n$ とおく．e_i の順序を変えて，$a_1,\dots,a_r$ が正実数，$a_{r+1},\dots,a_n$ が負実数であるとして良い．$1\le i\le r$ のとき $a_i=b_i^2$，$r+1\le i\le n$ のとき $a_i=-b_i^2$ となるような実数 b_i が取れる．$e'_i=\frac{1}{b_i}e_i$ とおくと基底 $(e'_1,\dots,e'_n)$ が (1) の条件を満たす．
- (3) を示す．$\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ を V の基底とし，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)=E_{r,s}$ とする．まず，$s\le r$ の場合を考える．このとき，$\mathcal{B}'\colon(e_{r-s+1},\dots,e_{2n})$ とおき，部分空間 $H=\mathrm{Span}(e_{r-s+1},\dots,e_{2n})$ を考える．

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q|_H)=\begin{pmatrix}E_s & \\ & -E_s\end{pmatrix}.$$

ゆえに，H は $2s$ 次元の双曲空間である．また，$G=\mathrm{Span}(e_1,\dots,e_{r-s})$ とおくと，$q|_G$ の行列は単位行列であるので，2 次形式 $q|_G$ 正定値である．とくに G は非等方的である．定理 4.10 により，$\nu(q)=s$ が成り立つ．同様に，$r\le s$ のとき，$H=\mathrm{Span}(e_1,\dots,e_{2r})$，$G=\mathrm{Span}(e_{2r+1},\dots,e_n)$ とおくと，H は双曲空間であり，G は負定値である．とくに，G は非等方的である．定理 4.10 により，$\nu(q)=r$ が成り立つ．$\nu(q)=\min\{r,s\}$ であることが示せた．
- 最後に，(2) を示す．$r,s,r',s'\ge 0$ を $r+s=r'+s'=n$ を満たす整数とし，$E_{r,s}$ と $E_{r',s'}$ で定まる $\mathbb{R}^n$ 上の 2 次形式をそれぞれ q,q' とおく．「$q\sim q' \implies (r,s)=(r',s')$」を示せば良い．$q\sim q'$ のとき，明らかに $\nu(q)=\nu(q')$ である．ゆえに，(3) により $\{r,s\}=\min\{r',s'\}$ が成り立つ．よって，$(r',s')=(r,s)$ または $(r',s')=(s,r)$ のどちらかが成り立つ．(3) の証明により $r>s$ の場合に，双曲空間 H 及び正定値部分空間 G が存在し，$V=H\perp G$ である．一方，$r<s$ の場合は，G が負定値部分空間である．定理 4.10 が与える分解 $V=H\perp G$ が一意的であるので，$r>s\iff r'>s'$ が成り立つ．よって，$(r',s')=(r,s)$ である．

定義 4.12 組 (r,s) を q の符号という．

定理 4.11 により，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} q\text{ が正定値である} &\iff (r,s)=(n,0)\\ q\text{ が負定値である} &\iff (r,s)=(0,n).\end{aligned}$$

系 4.13 $V=V_1\perp V_2$ とする．V_i の符号を (r_i,s_i) $(i=1,2)$ とおくと，V の符号は (r_1+r_2,s_1+s_2) である．

証明

$n_i=r_i+s_i$ とおく．$\mathcal{B}_i=(e_1^{(i)},\dots,e_{n_i}^{(i)})$ を V_i の基底とし，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(q|_{V_i})=E_{r_i,s_i}$ とする．

$$\mathcal{B}=(e_1^{(1)},\dots,e_{r_1}^{(1)},e_1^{(2)},\dots,e_{r_2}^{(2)},e_{r_1+1}^{(1)},\dots,e_{n_1}^{(1)},e_{r_2+1}^{(2)},\dots,e_{n_2}^{(2)})$$

とおくと，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)=E_{r_1+r_2,s_1+s_2}$ が成り立つ．

定理 4.14 $q\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を 2 次形式とする．このとき，

$$q(x)=\sum_{i=1}^n c_i(f_i(x))^2 \tag{4.1}$$

となる線形独立な 1 次形式 $(f_1,\dots,f_n)$ が存在する．

系 4.15 定理 4.14 の記号をそのまま用いる．以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{rank}(q) = |\{1 \leq i \leq n \mid c_i \neq 0\}|$.

(2) $\mathrm{rank}(q) = n$ とし，q の符号を (r, s) とおく (但し，$r + s = n$ である)．このとき，

$$r = |\{1 \leq i \leq n \mid c_i > 0\}|, \qquad s = |\{1 \leq i \leq n \mid c_i < 0\}|.$$

証明：(系 4.15 の証明)

仮定より $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ が線形独立であるので，$\mathcal{C}$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底である．$\mathcal{C} = \mathcal{B}^*$ となる $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ が取れる．双対基底の定義より，$f_i(u_j) = \delta_{ij}$ である $(1 \leq i, j \leq n)$．$x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ $(y_i \in \mathbb{R})$ とおくと，$f_i(x) = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ である．よって，

$$q(x) = \sum_{i=1}^n c_i (f_i(x))^2 = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$$

したがって，

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

である．(1), (2) は直ちに従う．

次に，定理 4.14 をガウスの方法で証明する．定理の内容自体は簡単に定理 3.14 より分かる．しかし，実数 c_i 及び 1 次形式 $f_i(x)$ を求めるには，ガウスの方法は役に立つ．とくに，このアルゴリズムを用いて実 2 次形式の符号を計算できる．

ガウスの方法： $x = (x_1, \ldots, x_n)$ とおく．$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を用いて

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

と表せる．

■**Case 1： $a_{ii} \neq 0$ を満たす a_{ii} が存在する場合：** $i = 1$ として良い (一般の場合は同様に議論する)．また，$a_{11} = a$ とおく．このとき，変数 $x_2, \ldots, x_n$ に関する 1 次形式 B 及び 2 次形式 C を用いて

$$q(x) = a x_1^2 + x_1 B(x_2, \ldots, x_n) + C(x_2, \ldots, x_n)$$

と書ける．以下のように変形できる．

$$q(x) = a\left(x_1 + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{4a}\right)$$

よって，

$$c_1 := a$$
$$f_1(x) := x_1 + \frac{B(x_2, \ldots, x_n)}{2a}$$

とおくと，$q(x) = c_1(f_1(x))^2 + q'(x')$ と表すことができる．但し，$q'(x') = C(x') - \frac{B(x')^2}{4a}$ は変数 $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ に関する 2 次形式である．そして，アルゴリズムを $q'(x')$ に適用し，再び繰り返す．

■Case 2：**各 i に対し $a_{ii}=0$ である場合：** $q\neq 0$ として良い．このとき，$a_{ij}\neq 0$ となる $i<j$ が存在する．以下，$(i,j)=(1,2)$ とする（一般の場合は同様に議論できる）．$a_{12}=a$ とおく．変数 $x'=(x_3,\dots,x_n)$ に関する 1 次形式 B, C 及び 2 次形式 D を用いて

$$q(x)=ax_1x_2+x_1B(x_3,\dots,x_n)+x_2C(x_3,\dots,x_n)+D(x_3,\dots,x_n)$$

と書ける．この式を以下のように変形できる．

$$q(x)=a\left(x_1+\frac{C}{a}\right)\left(x_2+\frac{B}{a}\right)+\left(D-\frac{BC}{a}\right).$$

実数 u,v に対し $uv=\frac{1}{4}\left((u+v)^2-(u-v)^2\right)$ と書けるので，

$$q(x)=\frac{a}{4}\left(x_1+x_2+\frac{B+C}{a}\right)^2-\frac{a}{4}\left(x_1-x_2+\frac{C-B}{a}\right)^2+\left(D-\frac{BC}{a}\right)$$

である．ゆえに，

$$\begin{aligned} c_1&:=\frac{a}{4} & f_1(x)&:=x_1+x_2+\frac{B(x_3,\dots,x_n)+C(x_3,\dots,x_n)}{a}\\ c_2&:=-\frac{a}{4} & f_2(x)&:=x_1-x_2+\frac{C(x_3,\dots,x_n)-B(x_3,\dots,x_n)}{a}\end{aligned}$$

とおくと，$q(x)=c_1(f_1(x))^2-c_2(f_2(x))^2+q'(x')$ と表すことができる．但し，$q'(x')=D(x')-\frac{B(x')C(x')}{a}$ は変数 $x'=(x_3,\dots,x_n)$ に関する 2 次形式である．そして，アルゴリズムを $q'(x')$ に適用し，再び繰り返す．

例題 4.1. 以下の $\mathbb{R}^3$ 上の 2 次形式のランク，符号を求めよ．

$$q(x)=x_1^2-x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$$

解答：ガウスの方法で q を変形する．

$$\begin{aligned} q(x)&=x_1^2+2x_1x_2-x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3\\ &=(x_1+x_2)^2-2x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3\\ &=(x_1+x_2)^2-2(x_2^2-2x_2x_3)+3x_3^2\\ &=(x_1+x_2)^2-2(x_2-x_3)^2+5x_3^2.\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{rank}(q)=3$ であり，q の符号は $(2,1)$ である．

V を有限次元実ベクトル空間とし，q を V 上の非退化な 2 次形式とする．W を V の線形部分空間とし，$\mathcal{B}_W$ を W の基底とする．

$$\varepsilon(W):=\mathrm{sgn}(\Delta_{\mathcal{B}_W}(q|_W))\in\{-1,0,1\}$$

と定義する．但し，符号関数 sgn は (3.6) で定義された．系 3.7 により，$\varepsilon(W)$ は W の基底 $\mathcal{B}_W$ の取り方によらない．(V,q) が正定値ならば，任意の線形部分空間 W に対し $q|_W$ も正定値である．とくに，このとき任意の線形部分空間 $W\neq 0$ に対し $\varepsilon(W)=1$ が成り立つ．

補題 4.16 $W_1\subset\cdots\subset W_n=V$ を V の線形部分空間の列とし，各 $i=1,\dots,n$ に対し，$\dim(W_i)=i$ かつ $\epsilon(W_i)=1$ とする．このとき，(V,q) が正定値である．

証明

次元に関する帰納法によって証明する．$n=1$ のときに明らかである．$\dim(V)\geq 2$ とする．仮定より $\varepsilon(V)=1$ であるので，とくに V は非退化である．また，帰納法の仮定より，$W=W_{n-1}$ が正定値である．

W が非退化であるので, $V = W \perp W^\perp$ と分解できる. W が V の超平面であるので, $W^\perp = \mathbb{R}a$ $(a \neq 0)$ と書ける. $1 = \varepsilon(V) = \varepsilon(W)\,\mathrm{sgn}(q(a)) = \mathrm{sgn}(q(a))$ であるので, $q(a) > 0$ が成り立つ. 系 4.13 により, q は正定値である.

$A = (a_{ij})_{i,j}$ を n 次正方行列とする. $1 \leq i \leq n$ に対し, A の i 次主小行列式を以下のように定義する.

$$\Delta_i(A) := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

定理 4.17 $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ を対称行列とする. このとき,

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \Delta_1(A), \dots, \Delta_n(A) \text{ が正実数である.}$$

証明

A で定まる 2 次形式 $q(x) = {}^t xAx$ を考える. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ を標準基底とすると, 定義より $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = A$ である. 各 $1 \leq i \leq n$ に対し $W_i = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_i)$ とおく.

- 「$\Longrightarrow$」を示す. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ のとき q は正定値である. よって, 全ての線形部分空間 W に対し $\epsilon(W) = 1$ である. とくに, $\epsilon(W_i) = 1$ であり, ゆえに $\Delta_i(A) > 0$ である.
- 「$\Longleftarrow$」を示す. 仮定より, $\epsilon(W_i) = 1$ が成り立つ. 補題 4.16 により, q が正定値である.

例 4.18. 以下の対称行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A の主小行列式は

$$\Delta_1(A) = 1, \quad \Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_3(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 30 + 12 + 12 - 20 - 24 - 9 = 1$$

ゆえに, A は正定値である.

4.5 直交群の中心

q を V 上の非退化な 2 次形式とする. V の次元を n とおく.

補題 4.19 $W \subset V$ を非退化な線形部分空間とする. W に関する対合変換を s_W とおく. このとき, 任意の $u \in \mathrm{O}(q)$ に対し

$$u \circ s_W \circ u^{-1} = s_{u(W)}$$

が成り立つ.

証明

$t = u \circ s_W \circ u^{-1}$ と定義する. $u(W^\perp) = u(W)^\perp$ より, $V = u(W) \perp u(W^\perp)$ である. 任意の $x \in W$ に対し, $t(u(x)) = u(s_W(x)) = u(x)$ である. $x \in W^\perp$ のとき, $t(u(x)) = u(s_W(x)) = u(-x) = -u(x)$ である. ゆえに, $t = s_{u(W)}$ が成り立つ.

補題 4.20 $n \geq 3$ とする．$D \subset V$ を等方的直線とする（つまり，$D = \mathbb{K}x$ かつ $q(x) = 0$ である）．このとき，2 つの双曲平面 P_1, P_2 が存在し，$D = P_1 \cap P_2$ が成り立つ．

証明

$x \in D$ $(x \neq 0)$ を等方ベクトルとする．V が非退化より，$y \notin D^{\perp}$ が取れる．このとき， 命題 3.22 により $P_1 = \mathrm{Span}(x, y)$ は双曲平面である．$n \geq 3$ という仮定より，$\dim(D^{\perp}) = n - 1 \geq 2$ である．よって，$z \in D^{\perp}$, $z \notin D$ が取れる．このとき，

$$\varphi(x, y + z) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z) = \varphi(x, y) \neq 0$$

である．ゆえに，$P_2 = \mathrm{Span}(x, y + z)$ は双曲平面である．明らかに，$P_1 \cap P_2 = D$ である．

定理 4.21 $n \geq 3$ のとき，$\mathrm{O}(q)$ の中心は $\{\pm \mathrm{id}_V\}$ に限る．

証明

u を $\mathrm{O}(q)$ の中心の元とする．V の全ての直線 D に対し，$u(D) = D$ が成り立つことを示す．W は非退化部分空間ならば，$s_W = u \circ s_W \circ u^{-1} = s_{u(W)}$ である．よって，$u(W) = W$ が成り立つ．よって，D が非退化の場合に $u(D) = D$ である．また，D が等方的直線である場合に，補題 4.20 により双曲平面 P_1, P_2 を用いて $D = P_1 \cap P_2$ と書ける．双曲平面は常に非退化であるので，以上より $u(W_1) = W_1$ かつ $u(W_2) = W_2$ である．よって，$u(D) = D$ となる．したがって，V の全ての直線 D に対し，$u(D) = D$ が成り立つ．線形代数学 C 補題 4.21 により，u はスカラー変換であり，すなわち $u = \lambda \,\mathrm{id}_V$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$ と書ける．x を非等方ベクトルとすると，$q(x) = q(u(x)) = q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ となり，ゆえに $\lambda = \pm 1$ である．よって，$Z(\mathrm{O}(q)) = \{\pm \mathrm{id}_V\}$ が成り立つ．

次に，$\mathrm{SO}(q)$ の中心について調べる．

補題 4.22 $n \geq 3$ とする．このとき，$D \subset V$ が非等方的直線ならば，$D = P_1 \cap P_2$ を満たす非退化な平面 P_1, P_2 が存在する．

証明

$D = \mathbb{K}x$ $(x \neq 0)$ とおく．仮定より $\dim(D^{\perp}) = n - 1 \geq 2$ である．$(e_1, \ldots, e_{n-1})$ を $D^{\perp}$ の直交基底とする（定理 3.14 参照）．D が非退化より，$D^{\perp}$ も非退化であり，ゆえに $q(e_i) \neq 0$ である．このとき，$P_1 := \mathrm{Span}(x, e_1)$, $P_2 := \mathrm{Span}(x, e_2)$ とおく．$P_i = D \perp \mathbb{K}e_i$ より，P_i は非退化である．明らかに，$P_1 \cap P_2 = D$ が成り立つ．

定理 4.23 $n \geq 3$ のとき $\mathrm{SO}(q)$ の中心は以下の通りである．

$$Z(\mathrm{SO}(q)) = \begin{cases} \{\mathrm{id}_V\} & n \text{ が奇数} \\ \{\pm \mathrm{id}_V\} & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

証明

$u \in Z(\mathrm{SO}(q))$ とする．P を V の非退化平面とすると，$\det(s_{P^{\perp}}) = 1$ であり，すなわち $s_{P^{\perp}} \in \mathrm{SO}(q)$ である．$u \in Z(\mathrm{SO}(q))$ より $s_{P^{\perp}} = u \circ s_{P^{\perp}} \circ u^{-1} = s_{u(P^{\perp})}$ である．よって，$u(P^{\perp}) = P^{\perp}$ となる．両辺の

直交部分空間を取れば, $u(P)=P$ となる.
次に, 任意の直線 $D\subset V$ に対し $u(D)=D$ を示す. $D\subset V$ が直線ならば, $D=P_1\cap P_2$ を満たす非退化平面 P_1, P_2 が存在する. 実際, D が等方的直線のときに補題 4.20 から, D が非等方的直線のときは補題 4.22 から分かる. したがって, $u(D)=u(P_1)\cap u(P_2)=P_1\cap P_2=D$ となる. ゆえに, u はスカラー変換であり, ゆえに $u\in\{\pm\mathrm{id}_V\}$ となる. n が奇数のとき, $-\mathrm{id}_V\notin\mathrm{SO}(q)$ であるので $\mathrm{SO}(q)$ の中心は自明である.

4.6 $\dim(V)=2$ の場合

今, V を 2 次元ベクトル空間とし, q を V 上の非退化な 2 次形式とする.

定理 4.24
(1) $u\in\mathrm{O}(q)$ とする. $\det(u)=-1$ のとき, u は鏡映変換である. とくに, $u^2=\mathrm{id}_V$ である.
(2) $u\in\mathrm{SO}(q)$ のとき, $u=\tau_1\circ\tau_2$ となる 2 つの鏡映 τ_1, τ_2 が存在する.
(3) $u\in\mathrm{SO}(q)$ とし, τ を鏡映変換とする. このとき, $\tau\circ u\circ\tau=u^{-1}$ である.
(4) $\mathrm{SO}(q)$ がアーベル群である.

証明

- (1) を示す. $x\in V$ $(x\neq 0)$ を非等方的ベクトルとする. u が等長変換であるので, $u(x)$ も非等方的である. $q(u(x))=q(x)$ が成り立つので, 補題 4.5 により, $u(x)=\pm\tau(x)$ を満たす鏡映変換 τ が存在する. $n=2$ より, $-\tau$ も鏡映変換であることに注意する. よって, $u(x)=s(x)$ となる鏡映変換 s が存在する. $t=s^{-1}\circ u$ とおくと $t\in\mathrm{SO}(q)$ であり, $t(x)=x$ が成り立つ. とくに, x は固有値 1 に関する t の固有ベクトルである. $\det(t)=1$ より, t の 2 つ目の固有値も 1 である. $D=\mathbb{K}x$ とおくと $u(D)=D$ である. ゆえに, $u(D^\perp)=D^\perp$ が成り立つ. $y\in D^\perp$ $(y\neq 0)$ とすると, y が t の固有ベクトルでるので $t(y)=y$ となる. $V=D\perp D^\perp$ より, $t=\mathrm{id}_V$ である. よって, $u=s$ となり, u は鏡映変換である.
- (2) を示す. τ を鏡映変換とすると $u=\tau\circ(\tau\circ u)$ と書ける. $\det(\tau\circ u)=-1$ より, $\tau\circ u$ は鏡映変換である. ゆえに, $\tau_1=\tau$, $\tau_2=\tau\circ u$ とおけば良い.
- (3) を示す. $\tau\circ u$ は鏡映変換であるので, (1) より $(\tau\circ u)^2=\mathrm{id}_V$ である. ゆえに $\tau\circ u\circ\tau=u^{-1}$ が成り立つ.
- (4) を示す. (3) より, $u_1,u_2\in\mathrm{SO}(q)$ に対し $\tau\circ(u_1\circ u_2)\circ\tau=(\tau\circ u_1\circ\tau)\circ(\tau\circ u_2\circ\tau)$ である. よって $(u_1\circ u_2)^{-1}=u_1^{-1}\circ u_2^{-1}$ となる. したがって, $u_1\circ u_2=u_2\circ u_1$ が成り立つ.

定義 4.25 $\mathbb{L}$ が可換体で, $\mathbb{K}\subset\mathbb{L}$ を部分集合とする. $\mathbb{K}$ が $\mathbb{L}$ の部分体であるとは, 以下が成り立つことをいう.
(i) $0,1\in\mathbb{K}$
(ii) $x,y\in\mathbb{K}\implies x-y\in\mathbb{K}$
(iii) $x,y\in\mathbb{K}\implies xy\in\mathbb{K}$
(iv) $x\in\mathbb{K},\ x\neq 0\implies \frac{1}{x}\in\mathbb{K}$.

例えば, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の部分体であり, $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ の部分体である. $\mathbb{K}\subset\mathbb{L}$ のとき, $\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$ の体拡大といい, $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ と書く.

例 4.26. 以下の集合を考える.
$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}):=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}.$$

$\sqrt{3}$ が無理数だから, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ は $(1, \sqrt{3})$ を基底とする $\mathbb{Q}$ ベクトル空間である．$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ が $\mathbb{R}$ の部分体であることを確認する．定義 4.25 の (i), (ii) は明らかに成り立つ．(iii) について考える．$x = a + b\sqrt{3}$, $y = c + d\sqrt{3}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$ とすると,

$$xy = (a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

となり, $xy \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ である．最後に, (iv) について考える．$x = a + b\sqrt{3}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ で $x \neq 0$ とする．このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a - b\sqrt{3}}{(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3})} = \frac{a - b\sqrt{3}}{a^2 - 3b^2} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}$$

である．但し, $a^2 - 3b^2 \neq 0$ であることに注意する．ゆえに, $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ である．

$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体拡大とする．このとき, $\mathbb{L}$ を $\mathbb{K}$ ベクトル空間と見ることができる．$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ とおき, 体拡大 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ の次数という．例えば, $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ である．同様に, $(1, \sqrt{3})$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ の基底であるので, $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$ である．$x \in \mathbb{L}$ のとき, 写像

$$m_x \colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}, \quad y \mapsto xy$$

は明らかに $\mathbb{K}$ 線形である (実は, m_x は $\mathbb{L}$ 線形写像でもある). m_x を $\mathbb{K}$ ベクトル空間 $\mathbb{L}$ の自己準同型として考え, その行列式を $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) := \det(m_x)$ とおく．$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$ を x のノルムという．$x \neq 0$ のとき m_x が全単射であるので, $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) \neq 0$ である．$m_{xx'} = m_x \circ m_{x'}$ $(x, x' \in \mathbb{L})$ が成り立つので, $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(xx') = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x')$ が成り立つ．よって, 写像

$$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} \colon \mathbb{L}^* \to \mathbb{K}^*, \quad x \mapsto N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$$

は群準同型である．$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$ の核を

$$\mathrm{U}_{\mathbb{L}} := \{x \in \mathbb{L}^* \mid N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) = 1\} \tag{4.2}$$

とおく．とくに, $\mathrm{U}_{\mathbb{L}}$ は $\mathbb{L}^*$ の部分群である．

例 4.27. 例えば, $d \in \mathbb{K}$ とし, $d = x^2$ となる $x \in \mathbb{K}$ が存在しないとする．このとき, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt{d})$ は $\mathbb{K}$ の 2 次拡大であり, $\mathcal{B} = (1, \sqrt{d})$ は $\mathbb{L}$ の基底をなす．$x \in \mathbb{L}$ とし, $x = a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in \mathbb{K})$ と書く．

$$m_x(1) = x = a + b\sqrt{d}$$
$$m_x(\sqrt{d}) = x\sqrt{d} = bd + a\sqrt{d}$$

である．ゆえに,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(m_x) = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}$$

である．ゆえに, $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) = a^2 - db^2$. 例えば,

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}}(a + b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2 \qquad (a, b \in \mathbb{Q})$$
$$N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(a + bi) = a^2 + b^2 \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

である．同様に, $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ が 2 次拡大ならば, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt{d})$ となる $d \in \mathbb{K}^*$ が存在する．但し, $d = x^2$ となる $x \in \mathbb{K}^*$ が存在しない.

命題 4.28 V を 2 次元ベクトル空間とし, q を V 上の非退化 2 次形式とする．$\mathcal{B}$ を V の基底とする．

(1) V が双曲平面ならば, $\mathrm{SO}(q) \simeq \mathbb{K}^*$ である．

(2) そうでなければ, $d = \Delta_{\mathcal{B}}(q)$ とおくと $-d = x^2$ となる $x \in \mathbb{K}^*$ が存在しない．また, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt{-d})$ で以下が成り立つ．

$$\mathrm{SO}(q) \simeq \mathrm{U}_{\mathbb{L}} = \{x \in \mathbb{L}^* \mid N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) = 1\} = \{a + b\sqrt{-d} \mid a^2 + db^2 = 1\}.$$

注意 4.29. $\mathcal{B}'$ が V の他の基底であるならば, $d' := \Delta_{\mathcal{B}'}(q) = \Delta_{\mathcal{B}}(q) \times a^2$ となる $a \in \mathbb{K}^*$ が存在する (系 3.6 参照). ゆえに, $\mathbb{K}(\sqrt{-d}) = \mathbb{K}(a\sqrt{-d}) = \mathbb{K}(\sqrt{-d})$ である. ゆえに, $\mathbb{K}$ の拡大体 $\mathbb{L}$ は基底 $\mathcal{B}$ の取り方に依らない.

証明

- V が双曲平面であるとする. このとき, V の基底 $\mathcal{B}$ が存在し,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. ゆえに,

$$\mathrm{O}(q) \simeq \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \mid {}^tAJA = J\}$$

となる. $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ で ${}^tAJA = J$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$$

とおくと,

$${}^tAJA = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma \\ \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \end{pmatrix}$$

である. ゆえに $\alpha\gamma = \beta\delta = 0$ である. $\gamma = 0$ のとき, $\alpha\delta = 1$, $\beta = 0$ となる. $\alpha = 0$ のとき, $\beta\gamma = 1$, $\delta = 0$ となる. よって, A は以下の形の行列である.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

である. 前者の場合は $\det(A) = 1$ である. 後者の場合は $\det(A) = -1$ である. したがって,

$$\mathrm{SO}(q) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{K}^* \right\}$$

である. この群は明らかに $\mathbb{K}^*$ と同型である.

- 次に, V が双曲平面でない場合を考える. 命題 3.22 により, V が非等方的である. $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ を直交基底とし, $\mathcal{B}$ に関する q の行列を

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad a, d \in \mathbb{K}^*$$

とおく. $\mathrm{O}(q) = \mathrm{O}(\lambda q)$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$ であるので, q と $\frac{q}{a}$ を入れ替えて, $a = 1$ として良い. このとき, $\Delta_{\mathcal{B}}(q) = d$ である. V が双曲平面でないので, 命題 3.22 により, $-d = x^2$ を満たす $x \in \mathbb{K}$ が存在しない. ゆえに, $\mathbb{L} := \mathbb{K}(\sqrt{-d})$ は $\mathbb{K}$ の 2 次拡大である.
次に, (4.2) で定まる群 $\mathrm{U}_{\mathbb{L}}$ を考え, 準同型

$$\mathrm{U}_{\mathbb{L}} \to \mathrm{SO}(q)$$

をつくる. 写像

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{L}, && (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2\sqrt{-d} \\ \gamma_2 &\colon \mathbb{K}^2 \to V, && (x_1, x_2) \mapsto x_1u_1 + x_2u_2 \end{aligned}$$

は $\mathbb{K}$ ベクトル空間の同型写像である. よって, $\gamma\colon \mathbb{L} \to V$, $\gamma := \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}$ も同型写像である. $x = x_1 + x_2\sqrt{-d} \in \mathbb{L}$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{K})$ に対し,

$$q(\gamma(x)) = q(x_1u_1 + x_2u_2) = x_1^2 + dx_2^2 = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$$

である. このことから $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\colon \mathbb{L} \to \mathbb{K}$ が $\mathbb{L}$ 上の 2 次形式であることが分かる. また, $\gamma\colon \mathbb{L} \to V$ は等長写像である. ゆえに,

$$\psi\colon\ \mathrm{O}(q) \to \mathrm{O}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}), \quad u \mapsto \gamma^{-1} \circ u \circ \gamma \tag{4.3}$$

は群同型である．$z \in \mathrm{U}_{\mathbb{L}}$ に対し，写像 $\mathbb{L} \to \mathbb{L}$, $x \mapsto zx$ を m_z とおく．任意の $x \in \mathrm{U}_{\mathbb{L}}$ に対し，

$$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(m_z(x)) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(zx) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(z)N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$$

が成り立つ．よって，$m_z \in \mathrm{O}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})$ である．また，$m_{zz'} = m_z \circ m_{z'}$ より，$m\colon z \mapsto m_z$ は群準同型

$$m\colon \mathrm{U}_{\mathbb{L}} \to \mathrm{O}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})$$

である．m は明らかに単射である．また，m_z は固有ベクトルを持たないので，$\mathbb{L}$ の鏡映変換でない．ゆえに，$m_z \in \mathrm{SO}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})$ が成り立つ．最後に，$m\colon \mathrm{U}_{\mathbb{L}} \to \mathrm{SO}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})$ が全射であることを示す．$\rho \in \mathrm{SO}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})$ とし，$\lambda := \rho(1)$ とおく．$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\lambda) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\rho(1)) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(1) = 1$ より，$\lambda \in \mathrm{U}_{\mathbb{L}}$ である．$\theta := m_\lambda^{-1} \circ \rho$ とおくと，$\theta(1) = m_\lambda^{-1}(\lambda) = 1$ となる．ゆえに，$\theta|_D = \mathrm{id}\,|_D$ となう非等方的直線 D が存在する．よって，$\theta(D^\perp) = D^\perp$ が成り立つ．また，$\theta \in \mathrm{SO}(N)$ より，$\theta|_{D^\perp} = \mathrm{id}\,|_{D^\perp}$ である．$\mathbb{L} = D \perp D^\perp$ より，$\theta = \mathrm{id}_{\mathbb{L}}$ となる．ゆえに $\rho = m_\lambda$ である．したがった，m は全単射である．以上より，$\psi^{-1} \circ m$ は群同型 $\mathrm{U}_{\mathbb{L}} \to \mathrm{O}(q)$ である．

4.7 生成系

V を有限次元ベクトル空間とし，q を V 上の非退化な 2 次形式とする．

定理 4.30　$\mathrm{O}(q)$ は鏡映変換によって生成される．

証明

次元に関する帰納法により証明する．$\dim(V) = 1$ のとき明らかである．$\dim(V) \geq 2$ とし，$u \in \mathrm{O}(q)$ とする．

(1) **$u(x) = x$ となる非等方ベクトルが存在する場合を考える：** このとき，$H = (\mathbb{K}x)^\perp$ とおくと，$u(H) = H$ が成り立つ．帰納法の仮定より，$u|_H$ が鏡映変換の積で表すことができる．すなわち，

$$u|_H = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$$

を満たす H の鏡映変換 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ が存在する．x が非等方的であるので，$V = \mathbb{K}x \perp H$ が成り立つ．各 i に対し，$\sigma_i|_{\mathbb{K}x} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}x}$ かつ $\sigma_i|_H = \tau_i$ を満たす線形写像 σ_i が一意的に存在する．また，σ_i は鏡映変換である．$u = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$ が成り立つので，主張が従う．

(2) **一般の場合を考える：** $x \in V \setminus \{0\}$ を非等方ベクトルとする．$y = u(x)$ とおくと，$q(y) = q(u(x)) = q(x)$ であるので，補題 4.5 により $x + y$ と $x - y$ が直交する．さらに，適当な $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ で $x + \varepsilon y$ が非等方ベクトルである．また，$H = (x + \varepsilon y)^\perp$ とおくと，$s_H(x) = -\varepsilon y$ が成り立つ (s_H が鏡映変換だから，$s_H(y) = -\varepsilon x$ も成り立つ)．$W = (\mathbb{K}x)^\perp$ とおくと，$s_W(x) = -x$ が成り立つ．

$$v = \begin{cases} s_H \circ u & \text{if} \quad \varepsilon = -1 \\ s_W \circ s_H \circ u & \text{if} \quad \varepsilon = 1 \end{cases}$$

と定義する．いずれの場合も，$v(x) = x$ が成り立つ．(1) の場合より v が鏡映変換の積で表すことができる．$u = s_H \circ v$ または $u = s_H \circ s_W \circ v$ であるので，u も鏡映変換の積となる．

次に，$\mathrm{SO}(V)$ の生成系について考える．

補題 4.31 s_1, s_2 を 2 つの鏡映変換とする．このとき，$s_1 \circ s_2 = r_1 \circ r_2$ を満たす renversement r_1, r_2 が存在する．

証明

$n = 2$ の場合に「鏡映変換」と「renversement」が一致するので，明らかである．$n = 3$ の場合は，S_1, s_2 が鏡映変換ならば，$-s_1$, $-s_2$ が renversement となる．$s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$ と書けるので，主張が成り立つ．次に，$n \geq 4$ とする．

$$H_i := \mathrm{Ker}(s_i - \mathrm{id}_V)$$

とおく．s_i が鏡映変換であるので，H_i は非退化な超平面である．$s_1 = s_2$ の場合に $s_1 \circ s_2 = \mathrm{id}_V$ であるので，主張が明らかである．ゆえに，$s_1 \neq s_2$ として良い．このとき，$H_1 \neq H_2$ である．よって，$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ が成り立つ．H_i が非退化であるので，$V = H_i \perp (H_i)^\perp$ と表せる．$(H_i)^\perp$ は直線であるので，$(H_i)^\perp = \mathbb{K}x_i$ $(x_i \neq 0)$ と書ける．また，H_i が非退化より，$(H_i)^\perp$ も非退化である．ゆえに，x_i が非等方ベクトルである．仮定より，x_1, x_2 は共線でない．
$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ より，$\dim((H_1 \cap H_2)^\perp) = 2$ が成り立つ．明らかに $x_1, x_2 \in (H_1 \cap H_2)^\perp$ であるので，$(H_1 \cap H_2)^\perp = \mathrm{Span}(x_1, x_2)$ が成り立つ．線形部分空間 W に対し，$q|_W$ の根基を $\mathrm{Rad}(W)$ とおく（つまり，$\mathrm{Rad}(W) = W \cap W^\perp$ である）．命題 3.11(2) により $(W^\perp)^\perp = W$ であるので，$\mathrm{Rad}(W) = \mathrm{Rad}(W^\perp)$ が成り立つ．よって，

$$\mathrm{Rad}(H_1 \cap H_2) = \mathrm{Rad}((H_1 \cap H_2)^\perp) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Span}(x_1, x_2))$$

が成り立つ．x_1, x_2 が非等方ベクトルであるので，$q|_{\mathrm{Span}(x_1,x_2)} \neq 0$ である．よって，$\mathrm{Rad}(H_1 \cap H_2) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Span}(x_1, x_2))$ の次元は ≤ 1 である．W を $H_1 \cap H_2$ における $\mathrm{Rad}(H_1 \cap H_2)$ の補空間とする．補題 3.10 により，W が非退化である．また，$\dim(W) \geq n - 3$ である．$H_1 \cap H_2$ の中に $n - 3$ 次元の非退化な線形部分空間 W' がとれる（実際，$\dim(W) = n - 3$ のとき，$W' = W$ とおけば良い．$\dim(W) = n - 2$ のとき，$v_1, \ldots, v_{n-2}$ を W の直交基底とし，$W' = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_{n-3})$ とおけば良い）．W' が非退化であるので，$V = W' \perp W'^\perp$ が成り立つ．$W' \subset H_1 \cap H_2$ より，$s_1|_{W'} = s_2|_{W'} = \mathrm{id}_{W'}$ である．$(s_1 \circ s_2)|_{W'^\perp} = r_1 \circ r_2$ となる $W'^\perp$ の renversement r_1, r_2 が存在する．$r_i|_{W'} = \mathrm{id}_{W'}$ かつ $r_i|_{W'^\perp} = -s_i|_{W'}$ を満たす線形変換 r_1, r_2 が一意的に存在する．$\dim(W'^\perp) = 3$ より r_1, r_2 は renversement である．明らかに $s_1 \circ s_2 = r_1 \circ r_2$ が成り立つ．

定理 4.32 $n \geq 3$ のとき，$\mathrm{SO}(q)$ は renversement によって生成される．

証明

$\sigma \in \mathrm{SO}(q)$ とする．定理 4.30 により，$\sigma = s_1 \circ \cdots \circ s_r$ となる鏡映変換 $s_1, \ldots, s_r$ が存在する．$\det(\sigma) = 1$ より，r は偶数である．補題 4.31 により，σ は renversement の積で表すことができる．