

線形代数学 D

レポート 1 (中間レポート)

教員名：コスキヴィルタ ジャンステファン

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。

提出期限：2023 年 11 月 29 日 (水) 18 時まで。

問 1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ を正定値対称実行列とする。 A の対角成分が正実数であることを示せ。

問 2. \mathbb{R}^3 に通常の内積を入れる。

(1) $6x + 3y - 2z = 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ で定まる平面に関する鏡映変換の (標準基底に関する) 行列を求めよ。

(2) $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を \mathbb{R}^3 の標準基底とする。直線

$$D = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を軸とする回転変換で、 $r(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ を満たすものを考える。 $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$ を求めよ。

問 3. 以下の行列を考える。

$$A := \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\alpha := \sqrt[3]{3}$ とおく。 α を用いて $B^3 = A$ を満たす 3 次の実対称行列 B を一つ求めよ。

問 4 と問 5 は任意です (正確に解答できた場合は加点となります).

問 4 (任意). 自然数 $n \geq 2$ に対し,

$$A_n := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & 1 & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

とおく.

- (1) A_n が直交行列であることを示せ.
- (2) A_n の標準形を求めよ. 但し, 「標準形」とは, 講義ノート定理 1.16 が与えるものとする (すなわち, $1, -1, R(\theta)$ ($\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$) を対角ブロックとする行列のことである).

問 5 (任意).

- (1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ を正規行列とする. $A^* = f(A)$ を満たす多項式 $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ が存在することを示せ.
- (2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ を正規行列とする. このとき, ${}^t A = g(A)$ となる $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ が存在することを示せ.