

線形代数学 D

レポート 2 (期末レポート)

教員名：コスキヴィルタ ジャンステファン

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。

提出期限：2024 年 2 月 11 日 (日) 18 時まで。

問 1. $q(A) = \text{Tr}(A^2)$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$) で定まる写像 $q: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。

- (1) q は $M_n(\mathbb{R})$ 上の 2 次形式であることを示せ。
- (2) 実対称行列全体の集合、実交代行列全体の集合をそれぞれ $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ とおく。

$$M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

であることを示せ。

- (3) q の符号を求めよ。

問 2. 以下の実 2 次形式にガウスの方法を適用せよ。それぞれの 2 次形式のランクと、(非退化の場合は) その符号を求めよ。

- (1) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- (2) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - ax_1^2$, $a \in \mathbb{R}$
- (3) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4$
- (4) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$

問 3. 以下の実対称行列が正定値であるかどうかを判定せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

問 4. \mathbb{R}^4 上の実 2 次形式

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 5x_4^2 + 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_4$$

の MTIS を一つ求めよ。