

代数学 C・代数学特論 III 2023 年度前期

レポート 2 (期末レポート)

提出方法：レポートを Webclass で提出して下さい。

提出の際, 写真やスキャンの画質が鮮明かどうかご確認下さい。

提出期限：2023 年 8 月 1 日 (火) 18 時まで。

教員名：コスキヴィルタ・ジャンステファン

問 1. p を素数とし, 対称群 $G = \mathfrak{S}_p$ を考える。

- (1) G の位数 p の元の個数を求めよ。
- (2) G の p シロー部分群の個数を求めよ。
- (3) 上の (2) を用いて $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ であることを示せ (ウィルソンの定理)。

問 2. 以下のそれぞれの群 G に対し, G の自己同型全体を求めよ。

- (1) $G = \mathbb{Z}$
- (2) $G = \mathbb{Q}$
- (3) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- (4) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- (5) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

問 3.

- (1) 非自明な準同型

$$\varphi: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

がちょうど一つ存在することを示せ。

- (2) 以下の表のそれぞれの群に対し, 位数 1, 2, 3, 4, 6, 12 の元の個数を求め、表に記入せよ。但し, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は (1) で定まる準同型 φ に関する半直積とする。また, $\mathfrak{A}_4$ は 4 次の交代群である。

位数	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$\mathfrak{A}_4$	D_6	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
1					
2					
3					
4					
6					
12					