線形代数学 C　2023 年度前期

コスキヴィルタ　ジャンステファン

目次

数学記号一覧

	記号	説明
集合論	id_X	集合 X の恒等写像
	$f \circ g$	写像 f, g の合成写像
	$f^{-1}(A)$	写像 f による集合 A の逆像
	f^{-1}	全単射 $f\colon X \to Y$ の逆写像
ユークリッド空間	$x \perp y$	ベクトル x と y が直交することを意味する記号
	$\langle x, y \rangle$	ベクトル x, y の内積
	$\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbb{R}^n$ の通常のユークリッド内積
	$\lVert x \rVert$	ベクトル x のノルム
	$d(x, y)$	ベクトル x と y の間の距離
	$d(x, A)$	ベクトル x から部分集合 A への距離
	$(V, \langle -, - \rangle)$	ユークリッド空間
	$\mathrm{O}(V)$	ユークリッド空間 V の直交群
	$\mathrm{SO}(V)$	ユークリッド空間 V の特殊直交群 (行列式が 1 である V の等長変換全体のなす群)
	$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$	n 次直交行列全体の群
	$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$	行列式が 1 である n 次直交行列全体の群
	f^*	ユークリッド空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の随伴変換
	s_W	ユークリッド空間の線形部分空間 W に関する鏡映変換
	p_W	ユークリッド空間の線形部分空間 W への直交射影
	$W^\perp$	ユークリッド空間の線形部分空間 W の直交補空間
線形変換・行列	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$	基底 $\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ に関する線形写像 $f\colon V \to W$ の行列
	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$	基底 $\mathcal{B}$ に関する線形変換 $f\colon V \to V$ の行列
	$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$	基底 $\mathcal{B}$ から基底 $\mathcal{C}$ への基底変換行列
	$\det(A)$	行列 A の行列式
	A^{-1}	行列 A の逆行列
	$\det(f)$	ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の行列式
	$\chi_A(X)$	行列 A の固有多項式
	$\chi_f(X)$	ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の固有多項式
	$\mu_A(X)$	行列 A の最小多項式
	$\mu_f(X)$	ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ の最小多項式
	$\mu_{f,x}(X)$	ベクトル x における線形変換 f の最小多項式
	f_A	行列 A で定まる線形写像
	$\mathrm{Tr}(A)$	正方行列 A のトレース
	${}^tA$	行列 A の転置行列
	E_n	n 次正方単位行列
	$\mathrm{Com}(f)$	線形変換 f の交換団
	$\mathrm{Com}(A)$	行列 A の交換団
	$C(P)$	多項式 P の同伴行列
	$\langle x \rangle_f$	線形変換 f に関しての x で生成される巡回部分空間
	$\mathrm{Ker}(f)$	線形写像 f の核

	$\mathrm{Im}(f)$	線形写像 f の像
	$\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ を成分とする (m,n) 型行列全体の集合
	$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ を成分とする n 次正方行列全体の集合
	$\mathbb{K}[f]$	線形変換 $f\colon V \to V$ に関する多項式と表せる線形変換全体の集合
	$\mathbb{K}[A]$	行列 A に関する行列多項式全体の集合
	$\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の一般線形群
	$\mathrm{GL}(V)$	同上
	$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	可換体 $\mathbb{K}$ の元を成分とする n 次正則行列全体のなす群
	$\mathrm{SL}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の特殊線形群 (行列式が 1 である線形変換全体のなす群)
	$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の線形変換 $V \to V$ 全体の集合
	$\mathrm{End}(V)$	同上
	$V(\lambda)$	λ に対する広義固有空間
	$J_n(\lambda)$	ジョルダンブロック
	$J_{\boldsymbol{d}}(\lambda)$	ジョルダン行列
	$\tau(f,a)$	1 次形式 f 及びベクトル a に関するせん断変換
ベクトル空間	$\dim_{\mathbb{K}}(V)$	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の次元
	$\dim(V)$	同上
	V/W	W による V の商空間
	$V = W_1 \perp W_2$	V が部分空間 W_1 と W_2 の直交直和であることを意味する記号
	$W_1 \oplus W_2$	線形部分空間 W_1, W_2 の直和
	$\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(u_1,\dots,u_n)$	ベクトル $u_1,\dots,u_n$ の $\mathbb{K}$-線形結合全体のなす部分空間
	$\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_n)$	同上
	V^*	$\mathbb{K}$ ベクトル空間 V の双対空間 (線形写像 $V \to \mathbb{K}$ 全体のなすベクトル空間)
	$\mathbb{K}[X]$	$\mathbb{K}$ 係数多項式全体のなす環
	$\mathbb{K}_n[X]$	次数 n 以下の $\mathbb{K}$ 係数多項式全体の集合
群論	$\mathrm{Ker}(f)$	準同型写像 f の核
	$\mathrm{Im}(f)$	準同型写像 f の像
	$Z(G)$	群 G の中心
	$\langle S\rangle$	群の部分集合 S で生成される部分群
	xH	部分群 H による x の左剰余類
	Hx	部分群 H による x の右剰余類
	G/H	部分群 H による G の左剰余類全体の集合 (または剰余群)
	$H\backslash G$	部分群 H による G の右剰余類全体の集合
	$H \triangleleft G$	H が G の正規部分群であることを意味する記号
解析	$\lim$	極限
	$\int_a^b f(t)dt$	関数 f の積分

1　ユークリッド空間

1.1　内積

定義 1.1　V を実ベクトル空間とし，$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ を V 上の対称双線形写像とする．任意の $x \neq 0$ に対し，$\langle x,x\rangle > 0$ が成り立つときに，$\langle -,-\rangle$ が内積であるという．

ここでいう双線形写像が「対称」であるとは，任意の $x,y \in V$ に対し，$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ が成り立つことである．

例 1.2. $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ を連続関数 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 全体のなす実ベクトル空間とする．$f,g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ に対し，

$$\langle f,g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

とおく．$\langle -,-\rangle$ が V 上の内積であることを確認する．明らかに，$\langle -,-\rangle$ は対称双線形写像である．また，$f \neq 0$ ならば，$f(a) \neq 0$ となる $a \in]0,1[$ が存在する．f が連続であるので，$\epsilon > 0$ が存在し，$|x-a| < \epsilon$ のとき $|f(x)| \geq \frac{|f(a)|}{2}$ である．よって，

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt \geq \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \frac{|f(a)|^2}{4} dt \geq \frac{|f(a)|^2\epsilon}{2} > 0.$$

例 1.3. $\mathbb{R}^n$ の通常の内積を定義する．2 つのベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

とおく．明らかに，$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ ならば，$x_1 = \cdots = x_n = 0$ となるので，上の双線形写像 $\langle -,-\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の内積である．この内積は「$\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積」と呼ばれる．$\langle -,-\rangle_{\mathbb{R}^n}$ と表すこともある．

定義 1.4　V が有限次元実ベクトル空間で，V 上の内積 $\langle -,-\rangle$ が与えられているとき，$(V,\langle -,-\rangle)$ をユークリッド空間という．

「ユークリッド空間」という用語は有限次元ベクトル空間の場合に限ることに注意する．V を実ベクトル空間とし，$\langle -,-\rangle$ を V 上の内積とする．$x \in V$ に対し，

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

とおき，x のノルムという．2 つのベクトル $x,y \in V$ に対し，$\langle x,y\rangle = 0$ のとき，x と y が直交するといい，$x \perp y$ と書く．$x,y \in V$ に対し

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

が成り立つ．よって，

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \perp y$$

である．この結果は「ピタゴラスの定理」と呼ばれる．

命題 1.5　任意の $x,y \in V$ に対し，$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ が成り立つ．

証明

任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し, $\|x+\lambda y\|^2 \geq 0$ である．一方,

$$\|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2$$

である．ゆえに, 変数 λ に関する多項式 $\lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|x\|^2$ の判別式が ≤ 0 である．よって, $4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ である．したがって, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ となる．

系 1.6　任意の $x, y \in V$ に対し, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ が成り立つ．

証明

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|^2\|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

である．よって, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ である．

命題 1.7　V をユークリッド空間とする．このとき, 以下の写像は同型写像である．

$$\alpha\colon V \to V^\vee, \quad x \mapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle)$$

証明

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(V^\vee)$ であるので, α が単射であることを示せば十分である．$x \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ とする．このとき, 任意の $y \in V$ に対し, $\langle x, y\rangle = 0$ である．特に, $y = x$ とすれば $\|x\|^2 = 0$ となり, $x = 0$ である．したがって, α が単射である．

1.2　直交補空間

$(V, \langle -, -\rangle)$ をユークリッド空間とし, $W \subset V$ を線形部分空間とする．

$$W^\perp := \{x \in V \mid \text{任意の } y \in W \text{ に対し, } \langle x, y\rangle = 0\}$$

と定義し, W の直交補空間という．明らかに, $W^\perp$ は V の線形部分空間である．

命題 1.8　V をユークリッド空間とし, $W \subset V$ を線形部分空間とする．このとき, $V = W \oplus W^\perp$ である．

証明

- まず, $W \cap W^\perp = \{0\}$ であることを示す．$x \in W \cap W^\perp$ ならば, $\langle x, x\rangle = 0$ となり, ゆえに $x = 0$ である．
- 次に, $\dim(W^\perp) + \dim(W) = \dim(V)$ が成り立つことを示す．同型写像 $\alpha\colon V \to V^\vee, \quad x \mapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle)$ を考える．一次形式 $f\colon V \to \mathbb{R}$ を W に制限することによって, 線形写像 $s\colon V^\vee \to W^\vee$, $f \mapsto f|_W$ が得られる．明らかに s は全射である (W' を V における W の一つの補空間とし, $p\colon V \to W$ を W' に沿った W への射影とする．任意の $g \in W^\vee$ に対し, $s(g \circ p) = g$ である．よって, s は全射である)．合成写像 $s \circ \alpha\colon V \to W^\vee$ を考える．

$$\mathrm{Ker}(s \circ \alpha) = \{x \in V \mid \forall y \in W,\ \langle x, y\rangle = 0\} = W^\perp$$

が成り立つ．線形代数学 B 定理 2.25 より，

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(s \circ \alpha)) + \dim(\mathrm{Im}(s \circ \alpha))$$

である．$s \circ \alpha$ が全射であるので，$\mathrm{Im}(s \circ \alpha) = W^\vee$ である．ゆえに，$\dim(V) = \dim(W^\perp) + \dim(W^\vee)$ となる．$\dim(W^\vee) = \dim(W)$ より，$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$ が成り立つ．以上より，$V = W \oplus W^\perp$ である．

$V = V_1 \oplus V_2$ かつ $V_1 \perp V_2$ のとき，$V = V_1 \perp V_2$ と書き，V が V_1 と V_2 の直交直和であるという．明らかに，$V = V_1 \perp V_2 \iff V_2 = V_1^\perp \iff V_1 = V_2^\perp$ である．

次に，直交射影を定義する．V をユークリッド空間とし，$W \subset V$ を線形部分空間とする．命題 1.8 より $V = W \perp W^\perp$ が成り立つ．$W^\perp$ に沿った W への射影を p_W とおく．つまり，$x \in W$, $y \in W^\perp$ に対し，p_W を以下の式で定義する．

$$p_W(x + y) = x.$$

命題 1.9 $u \in V$ $(u \neq 0)$ とし，$W = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(u)$ とおく．このとき，任意の $x \in V$ に対し，

$$p_W(x) = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u$$
$$p_{W^\perp}(x) = x - \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2} u$$

証明

$h(x) := \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2} u$ とおく．$x \perp u$ のとき，$p_W(x) = 0 = h(x)$ である．また，$x = u$ のとき $p_W(u) = u = h(u)$ である．ゆえに，　線形性より $p_W = h$ が成り立つ．$W \oplus W^\perp = V$ より，$p_W + p_{W^\perp} = \mathrm{id}_V$ である．よって，$p_{W^\perp}(x) = x - \frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2} u$ である．

$x, y \in V$ のとき，$d(x, y) = \|x - y\|$ とおく，写像 $d\colon V \times V \to \mathbb{R}_+$ は V 上の距離である．つまり，$x, y, z \in V$ に対し，

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

部分集合 $A \subset V$ に対し，

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

とおき，x と A の間の距離という．

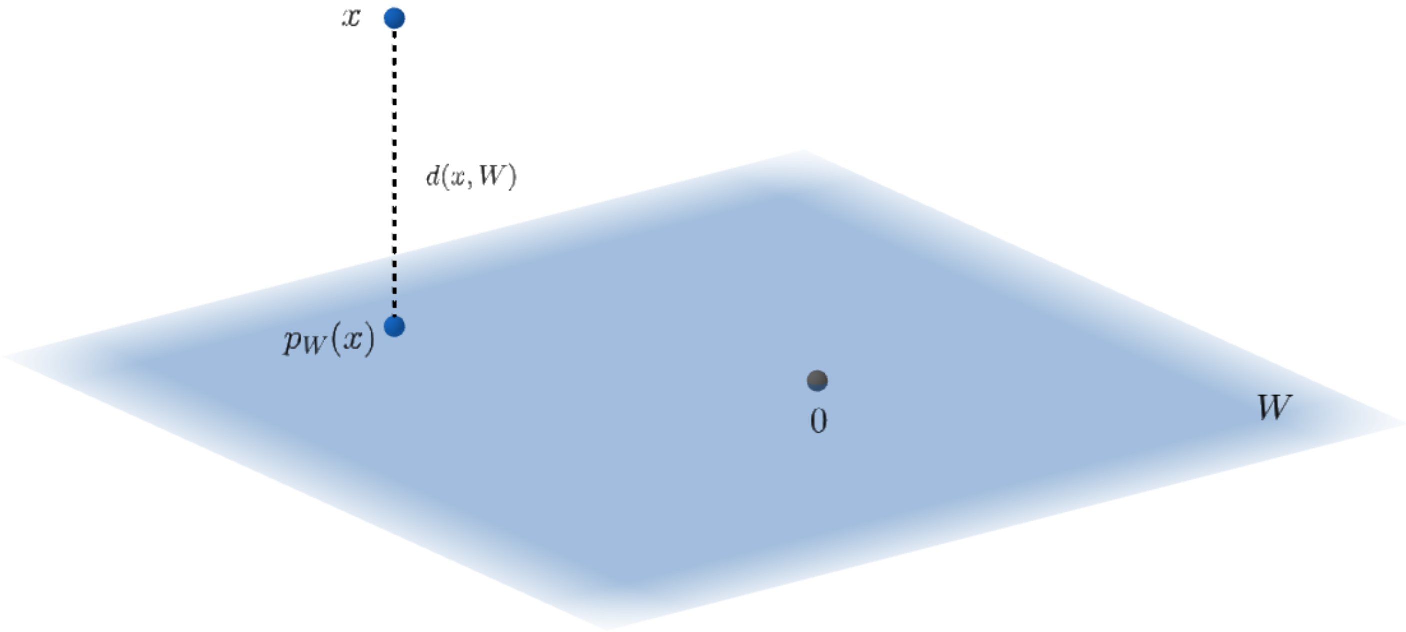
定理 1.10 W を V の線形部分空間とする．$x \in V$ に対し，$d(x, W) = d(x, p_W(x))$ が成り立つ．

証明

$y \in W$ とする．このとき，$y - p_W(x) \in W$ であり，$x - p_W(x) \in W^\perp$ である．ゆえに，ピタゴラスの定理より，

$$\|x - y\|^2 = \|(x - p_W(x)) + (p_W(x) - y)\|^2 = \|x - p_W(x)\|^2 + \|y - p_W(x)\|^2$$

である．ゆえに，$d(x, y) \geq d(x, p_W(x))$ である．主張が従う．



例題 1.1. 関数 $F(a,b)=\int_0^1(t^2-at-b)^2dt$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の最小値を求めよ．

解答： $V=\mathbb{R}_2[X]$ を次数 2 以下の多項式全体のなすベクトル空間とする．$f,g\in V$ に対し，

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

とおくことで，V 上の内積を定義する． $F(a,b)=\|X^2-(aX+b)\|^2$ と書き換えることができる． つまり，$W=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1,X)$ とおくと，$\sqrt{F(a,b)}$ は X^2 から W の元 $aX+b$ までの距離である． 定理 1.10 より，$aX+b=p_W(X^2)$ のとき $F(a,b)$ は最小値をとる．すなわち，

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}}F(a,b)=\|X^2-p_W(X^2)\|^2=\|X^2\|^2-\|p_W(X^2)\|^2$$

である．$p_W(X^2)=uX+v$ $(u,v\in\mathbb{R})$ とおく．このとき，

$$0=\langle X^2-(uX+v),1\rangle=\int_0^1 t^2-(ut+v)dt=\frac{1}{3}-\frac{u}{2}-v$$
$$0=\langle X^2-(uX+v),X\rangle=\int_0^1 t^3-(ut^2+vt)dt=\frac{1}{4}-\frac{u}{3}-\frac{v}{2}$$

ゆえに，$u=1$, $v=-\frac{1}{6}$ である．よって，$p_W(X^2)=X-\frac{1}{6}$ である．以上より，

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}}F(a,b)=\int_0^1 t^4dt-\int_0^1\left(t-\frac{1}{6}\right)^2dt=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{1}{180}.$$

1.3 正規直交基底

定義 1.11 $(V,\langle -,-\rangle)$ をユークリッド空間とし，$\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ を V の基底とする (ただし，$n=\dim_{\mathbb{R}}(V)$ とおく)．$\mathcal{B}$ が正規直交基底であるとは，

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{if}\quad i=j\\ 0 & \text{if}\quad i\neq j.\end{cases}$$

命題 1.12 $(V, \langle -, - \rangle)$ をユークリッド空間とし，$(e_1, \ldots, e_n)$ を正規直交基底とする（ただし，$n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ とおく）．$x \in V$ に対し，

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i$$

が成り立つ．

証明

$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ とする．このとき，

$$\langle e_i, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_i$$

となる．主張が従う．

また，正規直交基底で直交射影を容易に計算できる．

命題 1.13 $(V, \langle -, - \rangle)$ をユークリッド空間とし，$W \subset V$ を線形部分空間とする．$(e_1, \ldots, e_m)$ を W の正規直交基底とする（ただし，$m = \dim_{\mathbb{R}}(W)$ とおく）．$x \in V$ に対し，

$$p_W(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, x \rangle e_i$$

が成り立つ．

証明

$p_W(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ とおく．このとき，$x - p_W(x) \in W^{\perp}$ であるので，$\langle e_i, x - p_W(x) \rangle = 0$，すなわち $\langle e_i, x \rangle = \langle e_i, p_W(x) \rangle$ である．ゆえに，

$$\langle e_i, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_i$$

となる．主張が従う．

1.4 グラム・シュミットの正規直交化法

$(V, \langle -, - \rangle)$ をユークリッド空間とする．$(u_1, \ldots, u_n)$ を V の基底とする．

定理 1.14 以下を満たす正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ が一意的に存在する．

(1) 全ての $r = 1, \ldots, n$ に対し，$\mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_r) = \mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_r)$ である．

(2) 全ての $r = 1, \ldots, n$ に対し，$\langle e_r, u_r \rangle > 0$ である．

グラム・シュミットの正規直交化法と呼ばれる以下のアルゴリズムで正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ の存在性及び一意性を証明する．

グラム・シュミットの正規直交化法

正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ を帰納法的に作る．$r \geq 1$ に対し，

$$W_r := \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_r)$$

とおく．$e_1 \in \mathrm{Span}(u_1)$ かつ $\langle e_1, u_1\rangle > 0$ を満たす正規ベクトル e_1 は

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

に限る．ゆえに e_1 が一意に定まる．$(e_1, \ldots, e_r)$ $(r \geq 1)$ までが作れたと仮定する．$a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ とし，ベクトル $v_{r+1} = u_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} a_i e_i$ を考える．W_{r+1} における W_r の直交補空間は，ベクトル

$$v_{r+1} = u_{r+1} - p_{W_r}(u_{r+1}) = u_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, u_{r+1}\rangle e_i$$

で生成される．また，$\langle u_{r+1}, v_{r+1}\rangle = \langle v_{r+1} + p_{W_r}(u_r), v_{r+1}\rangle = \langle v_{r+1}, v_{r+1}\rangle > 0$ である．

$$e_{r+1} = \frac{v_{r+1}}{\|v_{r+1}\|}$$

とおく．$(e_1, \ldots, e_{r+1})$ は W_{r+1} の正規直交基底であり，$\langle e_{r+1}, u_{r+1}\rangle > 0$ である．また，この条件を満たすベクトルは e_{r+1} に限る．以上より，正規直交基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ の存在性と一意性が分かる．

例 1.15. $V = \mathbb{R}_2[X]$ とし，$P, Q \in W$ に対し

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

と定義すると，$\langle -, -\rangle$ は V 上の内積である．$\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ とする．$\mathcal{B}$ のグラム・シュミットの正規直交化を行う．

- $\|1\| = \int_0^1 1dt = 1$ であるので，$e_1 = 1$ とおく．
- $\langle X, 1\rangle = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$ であるので，$v_2 = X - \frac{1}{2}$ とおく．

$$\|v_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

  であるので，$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{3}(2X - 1)$ とおく．
- $\langle e_1, X^2\rangle = \frac{1}{3}$，$\langle e_2, X^2\rangle = \frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ である．

$$v_3 = X^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}e_2 - \frac{1}{3}e_1 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

  とおく．

$$\begin{aligned}\|v_3\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt &= \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{8}{6}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\right) dt \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{8}{18} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.\end{aligned}$$

  よって，

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$$

系 1.16 V をユークリッド空間とする．このとき，V が正規直交基底をもつ．

1.5　等長写像

定義 1.17　$(V, \langle -, - \rangle)$ 及び $(V', \langle -, - \rangle')$ を内積を持つ実ベクトル空間とする．それぞれのノルム写像を $\| \ \|$ と $\| \ \|'$ と表す．線形写像 $f\colon V \to V'$ が等長写像であるとは，

$$\|f(x)\|' = \|x\|, \quad x \in V$$

が成り立つことをいう．

補題 1.18　以下が同値である．
(i)　f が等長写像である．
(ii)　任意の $x, y \in V$ に対し，$\langle f(x), f(y) \rangle' = \langle x, y \rangle$ である．

証明

「(ii) $\Longrightarrow$ (i)」は $y = x$ とすれば分かる．逆に，$f\colon V \to V'$ を等長写像とする．

$$\begin{aligned} &\|f(x+y)\|'^2 = \|f(x) + f(y)\|'^2 = \|f(x)\|'^2 + \|f(y)\|'^2 + 2\langle f(x), f(y) \rangle' \\ \text{一方}\quad &\|f(x+y)\|'^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

また，$\|f(x)\|' = \|x\|$, $\|f(y)\|' = \|y\|$ であるので，$\langle f(x), f(y) \rangle' = \langle x, y \rangle$ となる．

定義 1.19　$(V, \langle -, - \rangle)$ の等長変換とは，等長である V の自己同型 $V \to V$ のことである．V の等長変換全体の集合を $\mathrm{O}(V)$ (または $\mathrm{O}_{\mathbb{R}}(V)$) とおく．

命題 1.20　$\mathrm{O}(V)$ は $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V)$ の部分群をなす．すなわち，以下が成り立つ．
(1)　恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は等長変換である．
(2)　$f, g\colon V \to V$ が等長変換ならば，$f \circ g$ も等長変換である．
(3)　$f\colon V \to V$ が等長変換ならば，f^{-1} も等長変換である．

証明

(1) は明らかである．(2) を示す．$x \in v$ に対し，

$$\|(f \circ g)(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\|$$

である．ゆえに，$f \circ g$ が等長変換である．また，$y = f^{-1}(x)$ とおくと，$\|f(y)\| = \|y\|$ であるので，$\|x\| = \|f^{-1}(x)\|$ が成り立つ．ゆえに，f^{-1} が等長変換である．

W を V の線形部分空間とし，$W^{\perp}$ をその補空間とする．$x \in V$ のとき，$x = a + b$ $(a \in W,\ b \in W^{\perp})$ と一意的に表すことができる．x に対し，

$$s_W(x) = a - b$$

とおくことで，写像 $s_W\colon V \to V$ を定義する．明らかに，s_W が V の自己同型である．さらに，s_W が等長変換である．なぜならば，$x = a + b$ $(a \in W,\ b \in W^{\perp})$ のとき，

$$\|s_W(x)\|^2 = \|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a + b\|^2 = \|x\|^2$$

である．

定義 1.21
(a) s_W は「対合」(あるいは「対称変換」) と呼ばれる.
(b) W が超平面 のとき (すなわち, $\dim(W^\perp)=1$ のとき), s_W を鏡映変換という.
(c) $\dim(W^\perp)=2$ のとき, s_W はrenversement(ランベルスマン) (仏語) と呼ばれる.

命題 1.22 $f\colon V\to V$ を線形変換とし, $(e_1,\dots,e_n)$ を V の正規直交基底とする. このとき, f が等長変換であるためには, $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ が V の正規直交基底であることが必要十分である.

証明

f が等長変換ならば,

$$\langle f(e_i),f(e_j)\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$$

となり, ゆえに $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ が正規直交基底である. 逆に, $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ が V の正規直交基底であるとする. $x=\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i$ とすると,

$$\|f(x)\|^2=\|\sum_{i=1}^n\lambda_if(e_i)\|^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\|f(e_i)\|^2=\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\|e_i\|^2=\|x\|^2$$

である. ゆえに f が等長変換である.

命題 1.23 $u\in\mathrm{O}(V)$ とし, $W\subset V$ を線形部分空間とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$u(W^\perp)=u(W)^\perp$$

証明

$x\in W^\perp$, $y\in W$ のとき, $\langle u(x),u(y)\rangle=\langle x,y\rangle=0$ より, $u(x)\in u(W)^\perp$ である. よって, $u(W^\perp)\subset u(W)^\perp$ である. また, $\dim(u(W^\perp))=\dim(W^\perp)=\dim(V)-\dim(W)=\dim(u(W)^\perp)$ が成り立つので, $u(W^\perp)=u(W)^\perp$ となる.

1.6 直交行列

定義 1.24 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ とする. A が直交行列であるとは, ${}^tAA=A\,{}^tA=E_n$ が成り立つことをいう.

言い換えれば, 直交行列とは, 正則行列で, その逆行列が転置行列であるようなものである. 直交行列全体の集合を $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ とおく. $A,B\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ならば, AB と A^{-1} も直交行列である. ゆえに, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群である. $\mathbb{R}^n$ に通常内積 $\langle -,-\rangle$ を入れる. ベクトル

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

に対し,

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i={}^txy$$

である. 明らかに, 標準基底 $(e_1,\dots,e_n)$ は正規直交基底である.

命題 1.25 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ とする．A に対応する $\mathbb{R}^n$ の線形変換 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える．以下が同値である．

(i) A が直交行列である．

(ii) f_A が $(\mathbb{R}^n, \langle -, - \rangle)$ の等長変換である．

(iii) A の列が正規直交基底をなす．

(iv) A の行が正規直交基底をなす．

証明

- 「(ii) $\iff$ (iii)」 は命題 1.22 より分かる．
- 「(i) $\iff$ (ii)」を示す．

$$
\begin{aligned}
f_A \text{ が等長変換である} &\iff \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対し}, \langle f_A x, f_A y \rangle = \langle x, y \rangle \\
&\iff \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対し}, {}^t(Ax)Ay = {}^t xy \\
&\iff \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対し}, {}^t x({}^t AA)y = {}^t xy \\
&\iff \text{任意の } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ に対し}, {}^t x({}^t AA - E_n)y = 0
\end{aligned}
$$

  $x = e_i$, $y = e_j$ とすると, ${}^t x({}^t AA - E_n)y$ は行列 ${}^t AA - E_n$ の (i, j) 成分である．ゆえに, 上の条件は ${}^t AA = E_n$ が成り立つことと同値である．

- 最後に,「(i) $\iff$ (iv)」を示す．

$$
\begin{aligned}
A \text{ が直交行列である} &\iff {}^t A \text{ が直交行列である} \\
&\iff {}^t A \text{ の列が正規直交基底をなす．} \\
&\iff A \text{ の行が正規直交基底をなす．}
\end{aligned}
$$

命題 1.26 $(V, \langle -, - \rangle)$ をユークリッド空間とし, $f\colon V \to V$ を線形変換とする．$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ を V の正規直交基底とする．このとき, 以下が同値である．

(i) f が V の等長変換である．

(ii) $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ が正規直交基底である．

(iii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ が直交行列である．

証明

(i) $\iff$ (ii) は命題 1.22 から分かる．(i) $\iff$ (iii) を示す．$\mathbb{R}^n$ に通常内積を入れる．写像

$$
\gamma\colon \mathbb{R}^n \to V, \quad (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i e_i
$$

は命題 1.22 より等長写像である．$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ とおくと, 以下の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\gamma"] \\
V \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}
$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $y = \gamma(x)$ とすると, $f \circ \gamma = \gamma \circ f_A$ より

$$\begin{aligned} \|f(y)\| = \|y\| &\iff \|\gamma(f_A(x))\| = \|\gamma(x)\| \\ &\iff \|f_A(x)\| = \|x\| \end{aligned}$$

である. ゆえに, f が V の等長変換であることと, f_A が $\mathbb{R}^n$ の等長変換であることは同値である. したがって, 主張が命題 1.25 から従う.

定理 1.27 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする. このとき, 以下の条件を満たす行列 Q, R が一意的に存在する.
(1) $A = QR$ である.
(2) Q は直交行列である.
(3) R は上三角行列で, その対角成分が全て > 0 である.

証明

- Q, R の存在性について考える. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし, $u_i = Ae_i$ と定義する. A が正則であるので, $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である. 明らかに,

  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = A$$

  が成り立つ. 基底 $(u_1, \dots, u_n)$ にグラム・シュミットの正規直交化法を適用させて得た正規直交基底を $\mathcal{D} = (v_1, \dots, v_n)$ とおく. $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ がそれぞれ正規直交基底だから, $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{D}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ は直交行列である. また, 全ての $r = 1, \dots, n$ に対し, $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_r) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ より, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\mathrm{id})$ は上三角行列である. さらに, $\langle u_i, v_i \rangle > 0$ より, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(\mathrm{id})$ の対角成分は > 0 である. 最後に,

  $$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{D}} P_{\mathcal{D}\to\mathcal{C}}$$

  が成り立つので, $Q = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{D}}$, $R = P_{\mathcal{D}\to\mathcal{C}}$ とおけば良い.
- (Q, R) の一意性について考える. (Q', R') が (1)〜(3) を満たすとする. とくに $QR = Q'R'$ であるので, $RR'^{-1} = Q^{-1}Q'$ である. よって, $B := Q^{-1}Q'$ が直交行列であり, 上三角行列である. さらに, B の対角成分が全て > 0 である. B が上三角行列であるので, B^{-1} も上三角行列である. しかし, $B^{-1} = {}^tB$ より, B^{-1} は下三角行列である. ゆえに, B は対角行列である. また, B の列が正規直交基底をなすので, $B = E_n$ であることが分かる. よって, $Q = Q'$, $R = R'$ となる.

定義 1.28 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に対し, 定理 1.27 で与えられた分解 $A = QR$ のことを「A の QR 分解」という.

例題 1.2. 以下の行列の QR 分解を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

解答： まず, A が正則行列であることを確認する. サラスの方法で行列式を計算する.

$$\det(A) = 4 - 6 + 20 - 8 + 5 - 12 = 3$$

ゆえに, $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ である. 次に, A の列 (u_1, u_2, u_3) にグラム・シュミットの正規直交化法を行う.

$$v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定義する．次に，

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}16\\1\\-11\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{42}}\begin{pmatrix}16\\1\\-11\end{pmatrix}$$

$$w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = -\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ から $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$ への基底変換行列は以下の通りである．

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{D}} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{3\sqrt{3}} & \frac{16}{3\sqrt{42}} & \frac{-2}{\sqrt{14}}\\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{14}}\\ \frac{-1}{3\sqrt{3}} & \frac{-11}{3\sqrt{42}} & \frac{-3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

次に，$\mathcal{D}$ から $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ への基底変換行列を求める．以上より

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt{27}v_1\\
u_2 &= \frac{7}{\sqrt{3}}v_1 + \frac{\sqrt{42}}{3}v_2\\
u_3 &= \frac{11}{\sqrt{3}}v_1 - \frac{5}{\sqrt{42}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{14}}v_3
\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，

$$P_{\mathcal{D}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}\sqrt{27} & \frac{7}{\sqrt{3}} & \frac{11}{\sqrt{3}}\\ & \frac{\sqrt{42}}{3} & \frac{-5}{\sqrt{42}}\\ & & \frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

である．したがって，A の QR 分解は以下の通りである．

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 5 & 4 & 6\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{3\sqrt{3}} & \frac{16}{3\sqrt{42}} & \frac{-2}{\sqrt{14}}\\ \frac{5}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{14}}\\ \frac{-1}{3\sqrt{3}} & \frac{-11}{3\sqrt{42}} & \frac{-3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{27} & \frac{7}{\sqrt{3}} & \frac{11}{\sqrt{3}}\\ & \frac{\sqrt{42}}{3} & \frac{-5}{\sqrt{42}}\\ & & \frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}$$

1.7 随伴変換

V をユークリッド空間とし，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ を V の線形変換とする．

補題 1.29 以下を満たす V の線形変換 $f^*\colon V \to V$ が一意に存在する．

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle, \quad x, y \in V.$$

証明

$y \in V$ とする．写像 $u_y\colon V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), y\rangle$ は明らかに線型形式である．命題 1.7 より，$u_y(x) = \langle x, f^*(y)\rangle$ $(x \in V)$ となるようなベクトル $f^*(y)$ が一意的に存在する．最後に，$y \mapsto f^*(y)$ が線形写像であることを示せば良い．$y_1, y_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする．任意の $x \in V$ に対し，

$$\begin{aligned}
\langle x, f^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle &= \langle f(x), \lambda y_1 + y_2\rangle\\
&= \lambda\langle f(x), y_1\rangle + \langle f(x), y_2\rangle\\
&= \lambda\langle x, f^*(y_1)\rangle + \langle x, f^*(y_2)\rangle\\
&= \langle x, \lambda f^*(y_1) + f^*(y_2)\rangle
\end{aligned}$$

である．ゆえに，命題 1.7 より $f^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda f^*(y_1) + f^*(y_2)$ である．

定義 1.30 f^* を f の随伴変換という．

定義 1.31
(a) $f^* = f$ のとき，f が自己随伴 (あるいは対称) であるという．
(b) $f^* = -f$ のとき，f が交代であるという．

命題 1.32 $f\colon V \to V$ を V の線形変換とし，$\mathcal{B}$ を V の正規直交基底とする．$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ とおくと，$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA$ が成り立つ．

証明

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ とおく (ただし，$n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ とする)．写像 $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to V$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i e_i$ は等長写像である．$x = \gamma(u)$, $y = \gamma(v)$ $(u, v \in \mathbb{R}^n)$ とおくと，$f(x) = \gamma(Au)$ である．$\mathbb{R}^n$ の通常の内積を $\langle -, - \rangle_{\mathbb{R}^n}$ とおくと

$$\langle f(x), y \rangle = \langle \gamma(Au), \gamma(v) \rangle = \langle Au, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t(Au)v = {}^tu\,{}^tAv$$

である．一方，$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$ とおくと，$f^*(y) = \gamma(Bv)$ である．よって，

$$\langle x, f^*(y) \rangle = \langle \gamma(u), \gamma(Bv) \rangle = \langle u, Bv \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^tuBv$$

よって，$B = {}^tA$ が成り立つ．

系 1.33 $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ とする．以下が成り立つ．
(1) $f^{**} = f$ である．
(2) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ である．
(3) $(f + g)^* = f^* + g^*$ である．
(4) f が自己同型ならば，$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ である．

証明

転置行列の性質から分かる．

2 線形変換の対角化・三角化

ベクトル空間 V の線形変換とは，線形写像 $V \to V$ のことである．「V の自己準同型」ともいう．

2.1 商ベクトル空間

$\mathbb{K}$ を可換体とする．V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，W を V の線形部分空間とする．ベクトル $x \in V$ に対し，

$$x + W := \{x + w \mid w \in W\}$$

とおき，W による x の剰余類という．とくに，0 の剰余類は W と一致する．W による剰余類全体の集合を V/W とおく．W による一つの剰余類 $\mathcal{C}$ に対し，$\mathcal{C} = x + W$ を満たす $x \in V$ のことを剰余類 $\mathcal{C}$ の代表元という．

$$x + W = y + W \iff x - y \in W$$

が成り立つ．以下は，V/W が自然に $\mathbb{K}$ ベクトル空間の構造を持つことを説明する．$x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\begin{aligned}(x+W)+(y+W) &:= (x+y)+W \\ \lambda(x+W) &:= (\lambda x)+W\end{aligned}$$

とおくことで，V/W に足し算とスカラー倍を入れる．

定理 2.1 上記の演算は well-defined である（すなわち，結果が剰余類の代表元の取り方によらない）．さらに，この演算に関して V/W は W を単位元とする $\mathbb{K}$ ベクトル空間である．

証明

- まず，足し算について考える．$x+W = x'+W$ かつ $y+W = y'+W$ とする．このとき，$x' = x+w_1$, $y' = y+w_2$ となる $w_1, w_2 \in W$ が存在する．ゆえに，$(x'+y')-(x+y) = w_1+w_2 \in W$ となる．ゆえに，足し算は well-defined である．
- スカラー倍について考える．$x+W = x'+W$ のとき，$x' = x+w$ $(w \in W)$ と表せる．ゆえに，$(\lambda x')-(\lambda x) = \lambda w \in W$ となる．
- V/W がベクトル空間であることを確認する．明らかに，V/W の足し算が結合的であり，単位元として $W = 0+W$ を持つ．また，$(x+W)+(-x+W) = (-x+W)+(x+W) = W$ より，$-x+W$ が $x+W$ の逆元である．足し算とスカラー倍が分配法則を満たすのは V の演算の分配法則から直ちに分かる．また，$\lambda(\lambda'(x+W)) = (\lambda\lambda' x)+W = (\lambda\lambda')(x+W)$ である．最後に，$1(x+W) = x+W$ が成り立つ．以上より，V/W はベクトル空間である．

写像 $\pi\colon V \to V/W$, $x \mapsto x+W$ は明らかに全射線形写像である．この写像は V から V/W への自然な射影と呼ばれる．$\mathrm{Ker}(\pi) = W$ が成り立つ．

命題 2.2 V, V' をベクトル空間とし，$f\colon V \to V'$ を線形写像とする．W, W' をそれぞれ V, V' の線形部分空間とし，$f(W) \subset W'$ と仮定する．このとき，$\overline{f}(x+W) = f(x)+W'$ を満たす線形写像 $\overline{f}\colon V/W \to V'/W'$ が一意的に存在する．

証明

$\overline{f}$ の一意性は明らかである．存在性について考える．$x_1+W = x_2+W$ $(x_1, x_2 \in V)$ のとき $f(x_1)+W' = f(x_2)+W'$ であることを示す．$x_2 = x_1+w$ $(w \in W)$ と表すことができる．よって，$f(x_2)-f(x_1) = f(w) \in f(W) \subset W'$ である．ゆえに，$\overline{f}(x+W) = f(x)+W'$ とおくことで，well-defined な写像 $\overline{f}\colon V/W \to V'/W'$ が定まる．また，$\overline{f}$ が線形写像であることは容易に確認できる．

注意 2.3. 自然な射影 $\pi\colon V \to V/W$ 及び $\pi'\colon V' \to V'/W'$ を考える．上の定理の主張を言い換えれば，以下の図式が交換するような写像 $\overline{f}$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V' \arrow[d, "\pi'"] \\ V/W \arrow[r, "\overline{f}"'] & V'/W' \end{tikzcd}$$

但し，「図式が交換する」とは，$\pi' \circ f = \overline{f} \circ \pi$ が成り立つことを意味する．

定理 2.4　$f\colon V \to V'$ を線形写像とする．このとき，同型写像

$$\overline{f}\colon V/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f), \quad x + \operatorname{Ker}(f) \mapsto f(x)$$

が存在する．

証明

命題 2.2 で $W = \operatorname{Ker}(f)$, $W' = \{0\}$ とすれば，$\overline{f}(x + \operatorname{Ker}(f)) = f(x)$ となる線形写像 $\overline{f}\colon V/\operatorname{Ker}(f) \to V'$ が存在することが分かる．明らかに，$\operatorname{Im}(\overline{f}) = \operatorname{Im}(f)$ である．最後に，$\overline{f}$ が単射であることを示す．$x + \operatorname{Ker}(f) \in \operatorname{Ker}(\overline{f})$ とする．このとき，$f(x) = 0$ となるので，$x \in \operatorname{Ker}(f)$ である．ゆえに，$x + \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f)$ である．$\overline{f}$ の核が自明であるので，$\overline{f}$ は単射である．

V を有限次元ベクトル空間とし，$W \subset V$ を線形部分空間とする．$\mathcal{B}_W = (e_1, \ldots, e_r)$ を W の基底とする．$\mathcal{B}_W$ を V の基底 $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ に延長する．$x \in V$ について，$\overline{x} := x + W$ とおく．

命題 2.5　このとき，$\mathcal{B}' = (\overline{e}_{r+1}, \ldots, \overline{e}_n)$ は V/W の基底である．とくに，

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

である．

証明

$x \in V$ とする．$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{K})$ と表せる．よって，

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overline{e}_i = \sum_{i=r+1}^n \lambda_i \overline{e}_i$$

である．よって，$\mathcal{B}'$ は V/W を生成する．また，$\sum_{i=r+1}^n \lambda_i \overline{e}_i = \overline{\sum_{i=r+1}^n \lambda_i e_i} = \overline{0}$ とすると，$\sum_{i=r+1}^n \lambda_i e_i \in W$ である．よって，$\sum_{i=r+1}^n \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^r \eta_j e_j$ $(\eta_j \in \mathbb{K})$ と書くことができる．よって，$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ となり，$\mathcal{B}'$ が線形独立である．以上より，$\mathcal{B}'$ は V/W の基底である．

2.2　固有ベクトル，固有値

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．

定義 2.6

(a) $\boldsymbol{x} \in V$ が固有ベクトルであるとは，$\boldsymbol{x} \neq 0$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ となる $\lambda \in \mathbb{K}$ が存在する．

(b) また，このときに λ が f の固有値であるという．

以下が互いに同値である．

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ が f の固有値である．

(ii) $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V) \neq 0$ である．

定義 2.7　$\lambda \in \mathbb{K}$ を f の固有値とする．線形部分空間 $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ を λ に対応する固有空間という．

定理 2.8　$f\colon V \to V$ を線形変換とし, $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ を互いに異なる f の固有値とする. また, $\boldsymbol{x}_i$ を λ_i に関する固有ベクトルとする. このとき, 族 $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in I}$ は線形独立である.

証明

$\{i_1,\dots,i_n\}\subset I$ とし, $\sum_{j=1}^n a_j\boldsymbol{x}_{i_j}=0$ $(a_j\in\mathbb{K})$ と仮定する. n に関する帰納法によって $a_1=\cdots=a_n=0$ を示す. この等式の両辺に f を適用させると

$$\sum_{j=1}^n a_j\lambda_j\boldsymbol{x}_{i_j}=0$$

となる. よって,

$$\sum_{j=2}^n a_j(\lambda_j-\lambda_1)\boldsymbol{x}_{i_j}=0$$

が成り立つ. $2\le j\le n$ に対し, $\lambda_j-\lambda_1\neq 0$ であるので, 帰納法の仮定より $a_2=\cdots=a_n=0$ となる. また, $a_1=0$ となる. 主張が従う.

例 2.9. $V=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を無限回微分可能関数全体のなす集合とする. 明らかに, V が通常の演算に関して実ベクトル空間をなす. 線形変換

$$\varphi\colon V\to V,\quad g\mapsto g'$$

を考える. 実数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し, $g_\alpha(x)=\exp(\alpha x)$ とおき, 関数 $g_\alpha\in V$ を定める.

$$\varphi(g_\alpha)=g'_\alpha=\alpha g_\alpha$$

が成り立つので, g_α は固有ベクトルであり, その固有値は α である. 定理 2.8 より族 $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ は線形独立である.

定義 2.10　$A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ を n 次正方行列とする. A に対応する $\mathbb{K}^n$ の線形変換を $f_A\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$, $X\mapsto AX$ とおく. f_A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間をそれぞれ A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間という.

例 2.11.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&1\\3&3&2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

とおく. $A\boldsymbol{x}=5\boldsymbol{x}$ が成り立つので, $\boldsymbol{x}$ は A の固有ベクトルであり, 5 は A の固有値である.

2.3　固有多項式

定義 2.12　$A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ に対し,

$$\chi_A(t)=\det(tE_n-A)$$

とおき, A の固有多項式という. つまり, $A=(a_{ij})_{i,j}$ とおくと, A の固有多項式は以下の行列式である.

$$\chi_A(t)=\begin{vmatrix}t-a_{11}&-a_{12}&\dots&-a_{1n}\\-a_{21}&t-a_{22}&\dots&-a_{2n}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\dots&t-a_{nn}\end{vmatrix}.$$

命題 2.13 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とし, $\lambda \in \mathbb{K}$ とする. λ が A の固有値であるための必要十分条件は, λ が固有多項式 $\chi_A(t)$ の根であることである.

但し, 「λ が $\chi_A(t)$ の根である」とは, $\chi_A(\lambda) = 0$ が成り立つことである.

証明

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ が } A \text{ の固有値である} &\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \neq 0 \\
&\iff A - \lambda E_n \text{ が正則でない} \\
&\iff \det(A - \lambda E_n) = 0.
\end{aligned}
$$

例 2.14. 三角行列

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1}
$$

を考える. A の固有多項式は明らかに $\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$ である. 特に, A の固有値は対角成分 $a_{11}, \dots, a_{nn}$ である. 下三角行列の場合は同様である. 特に, 対角行列の固有値は対角成分である.

定義 2.15 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする. A の対角成分の和を A のトレースといい, $\mathrm{Tr}(A)$ と表す. すなわち,

$$
\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.
$$

定理 2.16 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする. 固有多項式 $\chi_A(t)$ は以下の性質を持つ.

(1) $\chi_A(t)$ の係数は $\mathbb{K}$ の元である.

(2) $\chi_A(t)$ は次数 n のモニックな多項式である.

(3) $\chi_A(t)$ の定数項は $(-1)^n \det(A)$ である.

(4) $\chi_A(t)$ の次数 $n-1$ の係数は $-\mathrm{Tr}(A)$ である.

証明

- (1) は明らかである.
- (2) を示す. $A = (a_{ij})_{i,j}$ とおく.

$$
\chi_A(t) = \det(tE_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (t\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)})
$$

  と書ける. $\sigma \neq \mathrm{id}$ に対応する項 $\prod_{i=1}^{n}(t\delta_{i\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)})$ の次数は $\leq n-2$ である. 一方, $\sigma = \mathrm{id}$ に対応する項は $\prod_{i=1}^{n}(t - a_{ii})$ であり, その次数は n である. ゆえに $\chi_A(t)$ の次数は n であり, 最高次の項は t^n である.
- (3) を示す. $\chi_A(t)$ の定数項は $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ である.
- (4) を示す. $\sigma \neq \mathrm{id}$ のとき, $\sigma(i) \neq i$ を満たす $1 \leq i \leq n$ は少なくとも 2 個存在する. よって, 上記の公式では, $\sigma \neq \mathrm{id}$ に対応する項の次数は $\leq n-2$ である. したがって, $\chi_A(t)$ の次数 $n-1$ の項は多項式 $\prod_{i=1}^{n}(t - a_{ii})$ の次数 $n-1$ の項と一致する. ゆえに $\chi_A(t)$ の次数 $n-1$ の係数は $-\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = -\mathrm{Tr}(A)$ である.

例 2.17. 以下の行列を考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は以下の通りである.

$$\chi_A(t) = t^2 - \mathrm{Tr}(A)t + \det(A) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc).$$

命題 2.18 $A, A' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする. A と A' が相似であるならば, $\chi_A(t) = \chi_{A'}(t)$ が成り立つ.

証明

$A' = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ が存在する. このとき, $tE_n - A' = tE_n - PAP^{-1} = tPP^{-1} - PAP^{-1} = P(tE_n - A)P^{-1}$ である. よって, $tE_n - A'$ と $tE_n - A$ が相似である. 特に,

$$\chi_{A'}(t) = \det(tE_n - A') = \det(tE_n - A) = \chi_A(t).$$

系 2.19 $A, A' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ が相似であるならば, 任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し以下が成り立つ.

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値である} \iff \lambda \text{ が } A' \text{ の固有値である.} \tag{2.2}$$

証明

$\chi_A = \chi_{A'}$ より従う.

定理 2.20 任意の $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ に対し,

$$\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$$

が成り立つ.

証明

- まず, B が正則行列である場合を考える. このとき, $BA = B(AB)B^{-1}$ と書け, AB と BA が互いに相似である. 命題 2.18 より $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$ である.
- 一般の場合を考える. $(x_{ij})_{i,j}$ を n^2 個の変数とし, $\mathbb{K}'$ を変数 $(x_{ij})_{i,j}$ に関する有理関数体とする. (i,j) 成分を x_{ij} とする行列を $B(x)$ とおく. $B(x) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}')$ が正則であることを示す. 明らかに, $\det(B(x))$ は変数 $\{x_{ij}\}$ に関する多項式である. また, $x_{ij} = \delta_{ij}$ と代入すると, $\det(B(x)) = \det(E_n) = 1$ となる. よって, $\det(B(x))$ は $\mathbb{K}'$ の元として 0 でない. ゆえに, 以上より, $\mathbb{K}'$ 上の多項式として

  $$\chi_{AB(x)}(t) = \chi_{B(x)A}(t)$$

  が成り立つ. つまり, $\det(tE_n - AB(x)) = \det(tE_n - B(x)A)$ が成り立つ. これは, 変数 $(x_{ij})_{i,j}$ 及び t に関する多項式の間の等式である. この等式において, 変数 $(x_{ij})_{i,j}$ に B の成分 $(b_{ij})_{i,j}$ を代入すると $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$ が得られる.

注意 2.21. 特に, 上の定理より $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ が分かる (この事実は直接に容易な計算でも確認できる).

$f\colon V \to V$ を V の線形変換とし, $f(W) \subset W$ を満たす線形部分空間 W を考える. $\mathcal{B}_W = (e_1, \ldots, e_r)$ を W の基底とし, $\mathcal{B}_W$ を V の基底 $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ に延長する. $f(W) \subset W$ より, $\mathcal{B}$ に関する f の行

列は以下の形になる.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \quad A \in \mathrm{Mat}_r(\mathbb{K}),\ C \in \mathrm{Mat}_{n-r}(\mathbb{K})$$

命題 2.2 より, $\overline{f}(x+W) = f(x)+W$ $(x \in V)$ を満たす線形写像 $\overline{f}\colon V/W \to V/W$ が一意的に存在する. $x \in V$ に対し, $\overline{x} = x + W$ とおくと, $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f(x)}$ が成り立つ. $\mathcal{B}' = (\overline{e}_{r+1}, \ldots, \overline{e}_n)$ とおく. また, $f(W) \subset W$ であるので, f は線形写像 $f|_W\colon W \to W$ を誘導する.

命題 2.22 $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_W}(f|_W) = A$ かつ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\overline{f}) = C$ が成り立つ.

証明

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_W}(f|_W) = A$ は明らかである. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\overline{f})$ について考える. $M = (m_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ とおくと, C の (i,j) 成分は $m_{i+r,j+r}$ である. $f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij}e_i$ である. $r+1 \le j \le n$ のとき,

$$\overline{f}(\overline{e}_j) = \overline{f(e_j)} = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\overline{e}_i = \sum_{i=r+1}^{n} m_{ij}\overline{e}_i$$

である. よって, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\overline{f}) = C$ である.

とくに,

$$\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \det(A)\det(C) = \det(f|_W)\det(\overline{f}) \tag{2.3}$$

である. $f|_W\colon W \to W$ と $\overline{f}\colon V/W \to V/W$ の固有多項式をそれぞれ $\chi_{f,W}(t)$ と $\chi_{\overline{f}}(t)$ とおく. 以上より, 次の命題が分かる.

命題 2.23 $\chi_f(t) = \chi_{f,W}(t) \cdot \chi_{\overline{f}}(t)$ である. とくに, $\chi_{f,W}(t)$ は $\chi_f(t)$ の約数である.

2.4 行列多項式

2.4.1 多項式環の復習

A を可換環とする. A のイデアルとは, 以下を満たす空でない部分集合 $I \subset A$ のことをいう.

(a) 任意の $x, y \in I$ に対し $x + y \in I$ である.

(b) 任意の $a \in A$ 及び $x \in I$ に対し, $ax \in I$ である.

例えば, $x \in A$ に対し,

$$(x) = \{ax \mid a \in A\} \tag{2.4}$$

は A のイデアルであり, x で生成される単項イデアルという.

定義 2.24 A を整域とする. A の全てのイデアルが単項イデアルであるとき, A を単項イデアル整域という.

例 2.25. $\mathbb{Z}$ は単項イデアル整域である. そのイデアルは $n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z})$ である.

定理 2.26 多項式環 $\mathbb{K}[X]$ は単項イデアル整域である.

2 つの多項式 $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ に対し, $Q = aP$ となる $a \in \mathbb{K}^*$ が存在するとき, P と Q が同伴であるという. 「同伴」という関係が同値関係であることは簡単に確認できる.

$$P \text{ と } Q \text{ が同伴である} \iff (P) = (Q)$$

が成り立つ.「$\Longrightarrow$」は明らかである. 逆に, $(P)=(Q)$ ならば $Q=PR$ かつ $P=QS$ となる多項式 $R,S\in\mathbb{K}[X]$ が存在する. ゆえに $P(1-RS)=0$ となる. $\mathbb{K}[X]$ が整域より, $1=RS$ となる. ゆえに $\deg(R)=\deg(S)=0$ であり, P と Q は同伴である.

$P=\sum_{i=0}^m a_iX^i$ $(a_m\neq 0)$ に対し, $Q=\frac{1}{a_m}P$ とおくと Q はモニックな多項式であり, $(P)=(Q)$ が成り立つ. ゆえに, 0 でない任意の $\mathbb{K}[X]$ のイデアルに対し, $I=(P)$ を満たすモニックな多項式 P が一意的に存在する.

定義 2.27 $P\in\mathbb{K}[X]$ $(\deg(P)\geq 1)$ とする.
(a) P が可約であるとは, P_1,P_2 が次数 1 以上の多項式で, $P=P_1P_2$ と書くことができるときにいう.
(b) P が可約でないとき, P が既約であるという.

定理 2.28 任意の多項式 $P\in\mathbb{K}[X]$ $(\deg(P)\geq 1)$ が既約多項式の積で $P=P_1\dots P_r$ と書くことができる. また, $P=Q_1\dots Q_s$ が規約多項式の積としての他の表現ならば, $r=s$ かつ順序を除いて P_i と Q_i は同伴である $(i=1,\dots,r)$.

例 2.29. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ とする. $X^2-1=(X-1)(X+1)=\left(\frac{X+1}{2}\right)(2X-2)$ と書ける.

定義 2.30 $P\in\mathbb{K}[X]$ $(\deg(P)\geq 1)$ とする. $P=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)$ と一次式の積で表せるとき, P が $\mathbb{K}$ で分解するという.

「$\deg(P)\geq 1$ を満たす $\mathbb{K}[X]$ の任意の多項式 P が $\mathbb{K}$ で分解する」ということが成り立つときに, $\mathbb{K}$ が代数的閉体であるという. とくに, このとき次数 1 以上の任意の多項式が $\mathbb{K}$ 内で根を持つ.

定理 2.31: (代数学の基本定理) 複素数体 $\mathbb{C}$ は代数的閉体である.

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ とし, $P(X)=aX^2+bX+c$ $(a\neq 0)$ とする. このとき,

$$P \text{ が } \mathbb{R} \text{ で分解する} \iff \Delta=b^2-4ac\geq 0 \tag{2.5}$$

実際, 判別式が ≥ 0 のとき,

$$aX^2+bX+c=\left(X-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \tag{2.6}$$

と一次式に分解できる. $\Delta<0$ のとき P は実数の根を持たないので, $\mathbb{R}$ 上既約である. $\mathbb{R}[X]$ の既約多項式は, 次数 1 の多項式と $\Delta<0$ を満たす次数 2 の多項式に限る.

2.4.2 行列の最小多項式

V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f\in\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ を V の線形変換とする. 非不整数 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, f^k を次のように定義する. $k=0$ のとき $f^0=\mathrm{id}_V$ と約束し, $k\geq 1$ のとき $f^k:=f^{k-1}\circ f$ と帰納法的に定める. つまり,

$$f^k=f\circ\cdots\circ f \quad (k\text{ 個}) \tag{2.7}$$

である. また, $\mathbb{K}[X]$ の多項式 $P(X)=\sum_{i=1}^m a_iX^i$ について

$$P(f):=\sum_{i=1}^m a_if^i \tag{2.8}$$

とおく. 同様に, n 次正方行列 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ について $P(A)=\sum_{i=1}^m a_iA^i$ とおく. 明らかに, 多項式 P_1,P_2 に対し, 以下が成り立つ.

$$(P_1+P_2)(f)=P_1(f)+P_2(f) \tag{2.9}$$
$$(P_1P_2)(f)=P_1(f)\circ P_2(f). \tag{2.10}$$

特に, 線形変換 $P_1(f)$ と $P_2(f)$ は交換する (つまり, $P_1(f)\circ P_2(f) = P_2(f)\circ P_1(f)$ が成り立つ). 同様に行列 A の場合も $(P_1+P_2)(A) = P_1(A)+P_2(A)$, $(P_1P_2)(A) = P_1(A)P_2(A) = P_2(A)P_1(A)$ が成り立つ. さらに, $P \in \mathbb{K}[X]$ に対し, $P({}^tA) = {}^tP(A)$ が成り立つ.

$$\mathbb{K}[f] = \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$
$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

と定義する. 以上より, $\mathbb{K}[f]$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ の $\mathbb{K}$ 部分代数である (つまり, 足し算, 合成, スカラー倍に関して閉じている). 同様に, $\mathbb{K}[A]$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ の $\mathbb{K}$ 部分代数である.

補題 2.32 $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ とする. このとき,

$$I_f := \{P(X) \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0\} \tag{2.11}$$

は $\mathbb{K}[X]$ のイデアルである. また, V が有限次元ベクトル空間のとき, I_f は零イデアルでない. 同様に, n 次正方行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ に対し, $P(A) = 0$ を満たす多項式 $P \in \mathbb{K}[X]$ 全体の集合を I_A とおくと, I_A は $\mathbb{K}[X]$ のイデアルであり, さらに $I_A \neq 0$ である.

証明

0 多項式は明らかに I_f に属する. $P_1, P_2 \in I_f$ とする. このとき,

$$(P_1+P_2)(f) = P_1(f)+P_2(f) = 0 \tag{2.12}$$

よって, $P_1+P_2 \in I_f$ である. また, $P \in I_f$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ のとき,

$$(QP)(f) = Q(f)\circ P(f) = Q(f)\circ 0 = 0 \tag{2.13}$$

となる. ゆえに, $QP \in I_f$ となる. 以上より, I_f は $\mathbb{K}[X]$ のイデアルである. V が有限次元のとき, $I_f \neq 0$ であることをを示す. k このとき, $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ も有限次元ベクトル空間である ($\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ とおくと, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)) = n^2$ である). 特に, 族 $(\mathrm{id}_V, f, f^2, f^3, \dots)$ は一次従属である. ゆえに, $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ が存在し,

$$a_0\,\mathrm{id}_V + a_1 f + \cdots + a_m f^m = 0 \tag{2.14}$$

が成り立つ (ただし, a_i の少なくとも一つが 0 でない). $P(X) = \sum_{i=0}^m a_i X^i$ とおくと, $P(f) = 0$ となり, すなわち $P(X) \in I_f$ である. $P \neq 0$ であるので主張が分かる.

よって, 有限次元ベクトル空間 V の線形変換 $f\colon V \to V$ について, $I_f = (\mu_f)$ を満たすモニックな多項式 $\mu_f \in \mathbb{K}[X]$ が一意的に存在する. 同様に, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ に対し, $I_A = (\mu_A)$ となるモニックな多項式 $\mu_A \in \mathbb{K}[X]$ が一意的に存在する.

定義 2.33 μ_f を f の最小多項式という. 同様に, μ_A を A の最小多項式という.

注意 2.34. 任意の多項式 $P \in \mathbb{K}[X]$ に対し,

$$P(f) = 0 \iff P \in I_f \iff \mu_f \mid P. \tag{2.15}$$

補題 2.35 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする. このとき, $\mu_A = \mu_{{}^tA}$ が成り立つ.

証明

任意の $P \in \mathbb{K}[X]$ に対し，$P({}^tA) = {}^tP(A)$ である．とくに，$P(A) = 0 \iff P({}^tA) = 0$ が成り立つので，$I_A = I_{{}^tA}$ である．よって，$\mu_A = \mu_{{}^tA}$ である．

2.4.3 交換団

定義 2.36 V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ を V の線形変換とする．

$$\mathrm{Com}(f) = \{g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

とおき，f の交換団という．同様に行列 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ の交換団 $\mathrm{Com}(A)$ は $AB = BA$ を満たす行列 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 全体の集合として定義する．

明らかに，$\mathbb{K}[f] \subset \mathrm{Com}(f)$ が成り立つ．$g_1, g_2 \in \mathrm{Com}(f)$ のとき，$g_1 + g_2$ 及び $g_1 \circ g_2$ が $\mathrm{Com}(f)$ に属する．ゆえに，$\mathrm{Com}(f)$ は $\mathbb{K}[f]$ を含む $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ の $\mathbb{K}$ 部分代数である．f と g が交換するとき，任意の多項式 $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ に対し，$P(f)$ と $Q(g)$ が交換する．

命題 2.37 $g \in \mathrm{Com}(f)$ とし，$P \in \mathbb{K}[X]$ とする．$W := \mathrm{Ker}(P(f))$ とおくと，$g(W) \subset W$ が成り立つ．

証明

$x \in W$ とする．$P(f)(g(x)) = (P(f) \circ g)(x) = (g \circ P(f))(x) = g(P(f)(x)) = g(0) = 0$ である．ゆえに，$g(x) \in W$ である．

定義 2.38 V, V' を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$，$f' \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V')$ とする．(V, f) と (V', f') が相似であるとは，$f' \circ g = g \circ f$ を満たす同型写像 $g \colon V \to V'$ が存在することをいう．このとき，$(V, f) \sim (V', f')$ と表す．

例 2.39. $V = V' = \mathbb{K}^n$ とし，$A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ とする．また，A, B に対応する $\mathbb{K}^n$ の線形変換をそれぞれ f_A, f_B とする．このとき，A と B が相似である $\iff$ $(\mathbb{K}^n, f_A)$ と $(\mathbb{K}^n, f_B)$ が相似である．このとき，$A \sim B$ と表すことにしよう．

$g \colon V \to V'$ が線形写像で，$f' \circ g = g \circ f$ とする．自然数 k に関する帰納法によって，$f'^k \circ g = g \circ f^k$ が成り立つことを示す．$k = 1$ のとき成り立つ．また，$f'^k \circ g = g \circ f^k$ とすると，

$$f'^{k+1} \circ g = f' \circ (f'^k \circ g) = f' \circ (g \circ f^k) = (f' \circ g) \circ f^k = (g \circ f) \circ f^k = g \circ f^{k+1}$$

となる．よって，$f'^k \circ g = g \circ f^k$ $(k \geq 1)$ が成り立つ．したがって，任意の多項式 $P \in \mathbb{K}[X]$ に対し，分配法則より，

$$P(f') \circ g = g \circ P(f) \tag{2.16}$$

が成り立つ．ゆえに，g が同型写像のとき，

$$P(g \circ f \circ g^{-1}) = g \circ P(f) \circ g^{-1} \tag{2.17}$$

である．同様に，$P(X) \in \mathbb{K}[X]$，$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$，$Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ で

$$P(QAQ^{-1}) = QP(A)Q^{-1} \tag{2.18}$$

が成り立つ．

命題 2.40 $(V, f) \sim (V', f')$ のとき, 以下が成り立つ.

(1) $P \in \mathbb{K}[X]$ に対し, $(V, P(f)) \sim (V', P(f'))$ である.

(2) $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ で, $W = \mathrm{Ker}(P(f))$, $W' = \mathrm{Ker}(P(f'))$ とおくと, $(W, Q(f)) \sim (W', Q(f'))$ である.

証明

- (1) は直ちに (2.16) より従う.
- (2) を示す. $Q(f) \in \mathrm{Com}(P(f))$ であるので, W, W' はそれぞれ f, f' に関して閉じている. $f' \circ g = g \circ f$ を満たす同型写像 $g\colon V \to V'$ が存在する. このとき, $P(f') \circ g = g \circ P(f)$ であるので, $g(W) \subset W'$ が成り立つ. 実際, $x \in W$ ならば, $P(f')(g(x)) = g(P(f)(x)) = g(0) = 0$ となり, ゆえに $g(x) \in W'$ である. 同様に, $f' \circ g = g \circ f$ より, $g^{-1} \circ f' = f \circ g^{-1}$ である. よって, $g^{-1}(W') \subset W$ であり, ゆえに $W' \subset g(W)$ となる. したがって, $g(W) = W'$ である. よって, g が 同型写像 $g\colon W \to W'$ を引き起こす. したがって, $(W, f) \sim (W', f')$ である. (1) より, $(W, Q(f)) \sim (W', Q(f'))$ も成り立つ.

2.5 対角化

定義 2.41 V をベクトル空間とし, $f\colon V \to V$ を線形変換とする. f が対角化可能であるとは, f の固有ベクトルからなる V の基底が存在するときにいう. 同様に, n 次正方行列 A 対角化可能であるとは, A の固有ベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底が存在することをいう.

命題 2.42 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする. このとき, 以下が互いに同値である.

(i) A が対角化可能である.

(ii) A が対角行列と相似である.

(iii) A に対応する線形変換 $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ が対角化可能である.

証明

- (i) と (iii) は明らかに同値である.
- 「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」を示す. $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ を A の固有ベクトルからなる $\mathbb{K}^n$ の基底とする. $A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ $(1 \le i \le n)$ となる $\lambda_i \in \mathbb{K}$ が存在する. $\mathcal{B}$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とする. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ とおくと,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)P = P^{-1}AP \tag{2.19}$$

が成り立つ. 一方,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

- 「(ii) $\Longrightarrow$ (i)」を示す. n 次対角行列 D と n 次正則行列 P で $A = PDP^{-1}$ と仮定する. D の対角成分を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とおく. $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ を $\mathbb{K}^n$ の標準基底とし, $\boldsymbol{u}_i = P\boldsymbol{e}_i$ とおく. 明らかに, $\mathcal{C} = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ は $\mathbb{K}^n$ の基底をなす. また,

$$A\boldsymbol{u}_i = PDP^{-1}P\boldsymbol{e}_i = PD\boldsymbol{e}_i = P(\lambda_i \boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{u}_i. \tag{2.21}$$

よって, A は対角化可能である.

V を n 次元のベクトル空間とし, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ とする. $\mathbb{K}$ に属する f の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ とおく. また, λ_i

に対応する固有空間を $W_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i E_n)$ とおく．定理 2.8 より，$W_1, \ldots, W_k$ は直和となる．とくに，それらで生成される線形部分空間は

$$\mathrm{Span}(W_1, \ldots, W_k) = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

と分解される．とくに，その次元は $\sum_{i=1}^{k} \dim(W_i)$ である．とくに，

$$\sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{K}} W_i \leq n \tag{2.22}$$

が成り立つ．

命題 2.43　以下が同値である．

(i) f が対角化可能である．

(ii) $\sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) = n$ である．

証明

f が対角化可能である $\iff V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i \iff \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i) = n$ である．

例 2.44. 以下の行列を考える．

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

明らかに，B の固有多項式は $\chi_B(X) = (X-2)^3$ である．よって，B の唯一の固有値は 2 である．固有値 2 に対応する固有空間 $W_2 = \mathrm{Ker}(A - 2E_3)$ の次元は 1 であるので，命題 2.43 より B は対角化可能でない．

系 2.45　f が相異なる n 個の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ を持つならば，f が対角化可能である．

証明

全ての $i = 1, \ldots, n$ に対し，$\dim(W_i) \geq 1$ である．よって $\sum_{i=1}^{n} \dim(W_i) \geq n$ である．(2.22) より，$\sum_{i=1}^{n} \dim(W_i) = n$ である．

例 2.46. 以下の行列を考える．

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

まず，A の固有多項式を求める．

$$\begin{aligned}
\chi_A(t) &= \begin{vmatrix} t & -2 & 1 \\ -3 & t+2 & 0 \\ 2 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -2 & 1 \\ -3 & t+2 & 0 \\ 2-t(t-1) & 2t-4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & t+2 \\ 2-t(t-1) & 2t-4 \end{vmatrix} \\
&= -8t + 8 + t(t-1)(t+2) \\
&= (t-1)(t^2 + 2t - 8) \\
&= (t-1)(t-2)(t+4)
\end{aligned}$$

よって，A の固有値は $1, 2, -4$ である．したがって，A が対角化可能である．以下は，固有値 $1, 2, -4$ の固有ベクトルを求める．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \iff \begin{cases} 2x_2-x_3=x_1 \\ 3x_1-2x_2=x_2 \\ -2x_1+2x_2+x_3=x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases}$$

$$A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x} \iff \begin{cases} 2x_2-x_3=2x_1 \\ 3x_1-2x_2=2x_2 \\ -2x_1+2x_2+x_3=2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-4x_2=0 \end{cases}$$

$$A\boldsymbol{x}=-4\boldsymbol{x} \iff \begin{cases} 2x_2-x_3=-4x_1 \\ 3x_1-2x_2=-4x_2 \\ -2x_1+2x_2+x_3=-4x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+2x_2=0 \\ -2x_1+2x_2+5x_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

よって, $\boldsymbol{x}:=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}:=\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}:=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$ はそれぞれ固有値 $1,2,-4$ の固有ベクトルである. A で定まる線形変換 $f_A\colon \mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^3$ を考える. 以上より, $\mathcal{B}'=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ に関する f_A の行列は

$$D:=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_A)=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-4\end{pmatrix}$$

である. $\mathcal{B}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3)$ を標準基底とする.

$$P:=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

とおくと, 基底変換の公式より $A=PDP^{-1}$ が成り立つ.

例題 2.1. 以下の行列が対角化可能かどうかを判定せよ.

$$A=\begin{pmatrix}-1&7&-9\\3&-5&9\\3&-7&11\end{pmatrix}$$

解答: A の固有多項式を計算する.

$$\begin{aligned}\chi_A(X)=\begin{vmatrix}X+1&-7&9\\-3&X+5&-9\\-3&7&X-11\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}X+1&-7&9\\0&X-2&2-X\\-3&7&X-11\end{vmatrix}\\&=(X+1)(X-2)\begin{vmatrix}1&-1\\7&X-11\end{vmatrix}-3(X-2)\begin{vmatrix}-7&9\\1&-1\end{vmatrix}\\&=(X+1)(X-2)(X-4)+6(X-2)\\&=(X-2)(X^2-3X+2)=(X-2)^2(X-1)\end{aligned}$$

よって, A の固有値は $1,2$ である. また,

$$A-2E_3=\begin{pmatrix}-3&7&-9\\3&-7&9\\3&-7&9\end{pmatrix}$$

であるので, $\mathrm{Im}(A-2E_3)=\mathrm{Span}(-e_1+e_2+e_3)$ が成り立つ. よって, $\dim(\mathrm{Ker}(A-2E_3))=2$ である. $\dim(\mathrm{Ker}(A-E_3))\geq 1$ であるので, $\dim(\mathrm{Ker}(A-2E_3))+\dim(\mathrm{Ker}(A-E_3))=3$ となる. ゆえに A が対角化可能である.

補題 2.47 V を $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を V の線形変換とする．また，$P, Q \in \mathbb{K}[X]$ で，$\gcd(P, Q) = 1$ とする．このとき，

$$\mathrm{Ker}((PQ)(f)) = \mathrm{Ker}(P(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(f))$$

が成り立つ．

証明

$\gcd(P, Q) = 1$ より，$1 = AP + BQ$ を満たす $A, B \in \mathbb{K}[X]$ が存在する．ゆえに，$\mathrm{id}_V = A(f) \circ P(f) + B(f) \circ Q(f)$ である．

- $\mathrm{Ker}(P(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q(f)) = \{0\}$ を示す．$x \in \mathrm{Ker}(P(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q(f))$ とする．このとき，$x = \mathrm{id}_V(x) = (A(f) \circ P(f) + B(f) \circ Q(f))(x) = 0$ となる．
- $\mathrm{Ker}((PQ)(f)) = \mathrm{Ker}(P(f)) + \mathrm{Ker}(Q(f))$ を示す．明らかに，$\mathrm{Ker}(P(f))$ と $\mathrm{Ker}(Q(f)$ が $\mathrm{Ker}((PQ)(f))$ に含まれる．逆に，$x \in \mathrm{Ker}((PQ)(f))$ とする．

  $$x = (A(f) \circ P(f))(x) + (B(f) \circ Q(f))(x)$$

  と表せる．$y = (A(f) \circ P(f))(x)$，$z = (B(f) \circ Q(f))(x)$ とおく．$Q(f)(y) = A(f) \circ (P(f) \circ Q(f))(x) = 0$ より，$y \in \mathrm{Ker}(Q(f))$ である．同様に，$z \in \mathrm{Ker}(P(f))$ である．主張が従う．

定理 2.48 V を有限次元ベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を線形変換とする．以下が同値である．

(i) f が対角化可能である．

(ii) $\mathbb{K}$ で分解する多項式 $P \in \mathbb{K}[X]$ で，その全ての根が単根であるものが存在し，$P(f) = 0$ が成り立つ．

(iii) μ_f が $\mathbb{K}$ で分解し，その全ての根が単根である．

証明

- 「(i)$\Longrightarrow$ (ii)」を示す．$\mathcal{B}$ を V の基底とし，$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ が対角行列であるとする．D の対角成分を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ と書く．$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ のうち，相異なるものを $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r}$ とおく．また，$P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_{i_k})$ と定義する．明らかに，P が $\mathbb{K}$ で分解し，その全ての根が単根である．簡単な計算より，$P(D) = 0$ が成り立つ．ゆえに，$P(f) = 0$ となる．
- 「(ii)$\Longrightarrow$ (iii)」を示す．$P(f) = 0$ より μ_f が P の約数である．ゆえに，P が $\mathbb{K}$ で分解するので，μ_f も $\mathbb{K}$ で分解する．さらに，その全ての根が単根である，
- 「(iii)$\Longrightarrow$ (i)」を示す．$\mu_f(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$ とする (ただし，$\lambda_i \in \mathbb{K}$ が相異なるとする)．$i \neq j$ のとき，$X - \lambda_i$ と $X - \lambda_j$ が互いに素である．補題 2.47 より，

  $$V = \mathrm{Ker}(\mu_f(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i E_n)$$

  が成り立つ．ゆえに，f は対角化可能である．

系 2.49 $f\colon V \to V$ を対角化可能な線形変換とする．W が線形部分空間で，$f(W) \subset W$ であるとする．このとき，$f|_W\colon W \to W$ は対角化可能である．

証明

定理 2.48 より, μ_f が $\mathbb{K}$ で分解し, その全ての根が単根である. 明らかに, $\mu_f(f|_W) = 0$ である. ゆえに定理 2.48 より $f|_W$ が対角化可能である.

命題 2.50 $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ が対角化可能であるとする. また, f, g が交換する (すなわち $f \circ g = g \circ f$) とする. このとき, f と g が同じ基底において対角化である. つまり, V の基底 $\mathcal{B}$ が存在し, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ 及び $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ の両方が対角行列である.

証明

f の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ と書く (ただし, λ_i は相異なるとする). f が対角化可能であるので, $V = \bigoplus_{i=1}^k \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)$ が成り立つ. また, f, g が交換するので, $W_i = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)$ とおくと, 命題 2.37 より $g(W_i) \subset W_i$ である. 系 2.49 より, $g|_{W_i}$ が対角化可能である. ゆえに, W_i の適当な基底 $\mathcal{B}_i$ に関して $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(g|_{W_i})$ は対角行列である. 一方, 明らかに $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f|_{W_i}) = \lambda_i E_{k_i}$ (ただし $k_i = \dim(W_i)$) である. よって, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$ とおけば良い.

2.6 三角化

定義 2.51 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ を n 次正方行列とする. A が三角化可能であるとは, 上三角行列 A' が存在し A と A' が相似であることをいう.

命題 2.52 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ を n 次正方行列とする. 以下は互いに同値である.

(i) A は三角化可能である.

(ii) A の固有多項式 χ_A が $\mathbb{K}$ で分解する.

証明

- 「(i)$\Longrightarrow$(ii)」を示す. A が三角化可能ならば, $A = PA'P^{-1}$ を満たす上三角行列 $A' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ と正則行列 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ が存在する.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

とおく (ただし, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ である). 命題 2.18 より $\chi_A(X) = \chi_{A'}(X) = \prod_{i=1}^n X - \lambda_i$ となる.

- 「(ii)$\Longrightarrow$(i)」を n に関する帰納法によって示す. $n = 1$ のとき明らかである. $n > 1$ とする. χ_A が $\mathbb{K}$ で分解するとし, $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ と書く ($\lambda_i \in \mathbb{K}$). とくに, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の固有値である. よって, $Au_1 = \lambda_1 u_1$ となるベクトル $u_1 \in \mathbb{K}^n$ ($u_1 \neq \mathbf{0}$) が存在する. 適当なベクトル $u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ が存在し, $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ が $\mathbb{K}^n$ の基底である. $f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ を A に対応する線形変換とする. $\mathcal{C}$ に関する f_A の行列は以下の形である.

$$B := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{2.25}$$

ただし, C は $n-1$ 次正方行列である. A と B は相似であるので, B が三角化可能であることを示せば良い. また,

$$\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X - \lambda_1)\chi_C(X) \tag{2.26}$$

より, $\chi_C(X) = \prod_{i=2}^{n}(X - \lambda_i)$ が成り立つ. 特に, C の固有多項式が $\mathbb{K}$ で分解する. 帰納法の仮定より, $n-1$ 次正方正則行列 P が存在し, PCP^{-1} が上三角行列である.

$$P' = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{2.27}$$

とおくと, $P'BP'^{-1}$ は以下の形になる.

$$P'BP'^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & PCP^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{2.28}$$

よって, $P'BP'^{-1}$ は上三角行列となり, 主張が従う.

系 2.53 任意の複素行列は三角化可能である. すなわち, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ のとき, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在し, PAP^{-1} が上三角行列である.

証明

定理 2.31 より $\chi_A(X)$ が一次式の積に分解されるので, 主張は命題 2.52 から従う.

同様に, $\mathbb{K}$ が代数的平体のとき, $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ の全ての行列は三角化である.

2.7 位相

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合を考える. $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に複素位相を入れ, 位相空間とみなす. この位相に関しては, 複素行列の列が収束するためには, 成分ごとに収束することが必要十分である. つまり, $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ $(k \geq 1)$ が複素行列の列で

$$\text{列 } (A^{(k)})_k \text{ が収束する} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{全ての } i, j \text{ に対し, 列 } (a_{ij}^{(k)})_k \text{ が収束する.}$$

X を距離空間とし, $Y \subset X$ を部分集合とする. Y が X において稠密であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ を満たす Y の点列 $x_k \in Y$ が存在することをいう. Y が稠密のとき, 次が成り立つ. $f, g \colon X \to X'$ を距離空間 X' への連続関数とする. 任意の $y \in Y$ に対し $f(y) = g(y)$ が成り立つとする. このとき, 全ての $x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ が成り立つ. なぜならば, $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ $(x_k \in Y)$ とすると,

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x). \tag{2.29}$$

D_n を $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ の対角化可能な行列全体の集合とする.

命題 2.54 D_n は $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ において稠密である.

証明

$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ とする．A が三角化であるので，$A = PBP^{-1}$ となる上三角化行列 B 及び正則行列 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在する．$\lim_{k\to\infty} B^{(k)} = B$ を満たす D_n の点列を作る．$k \geq 1$ に対し，

$$B^{(k)} = B + \begin{pmatrix} 1/k & & & \\ & 2/k & & \\ & & \ddots & \\ & & & n/k \end{pmatrix}$$

とおく．明らかに，k を十分大きくすれば，$B^{(k)}$ の対角成分は全て相異なる．よって，適当な $N \geq 1$ が存在し，$k \geq N$ のとき $B^{(k)}$ は相異なる n 個の固有値を持つ．系 2.45 より，$k \geq N$ のとき $B^{(k)}$ は対角化可能である．明らかに $B^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} B$ である．したがって，$A^{(k)} = PB^{(k)}P^{-1}$ とおくと，$A^{(k)}$ が対角化可能であり，$A^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} PBP^{-1} = A$ が成り立つ．

2.8 ケイリー・ハミルトンの定理

定理 2.55: (ケイリー・ハミルトンの定理) $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする．このとき，$\chi_A(A) = 0$ が成り立つ．

証明

$\mathbb{K}$ が $\mathbb{C}$ の部分体である場合のみ考える．このとき，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とすれば良い．まず，A が対角化可能である場合を考える．このとき，$A = QDQ^{-1}$ となる対角行列 $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ 及び正則行列 $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ が存在する．

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

とおく．$\chi_D(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ である．簡単な計算より $\chi_D(D) = 0$ であることが確認できる．命題 2.18 より $\chi_A(X) = \chi_D(X)$ であるので，

$$\chi_A(A) = \chi_D(A) = \chi_D(QDQ^{-1}) = Q(\chi_D(D))Q^{-1} = 0 \tag{2.30}$$

が成り立つ．ただし，$\chi_D(QDQ^{-1}) = Q(\chi_D(D))Q^{-1}$ は (2.18) より従う．$1 \leq i, j \leq n$ に対し，関数 $f_{ij} \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $A \mapsto \chi_A(A)_{ij}$ を考える．明らかに，f_{ij} が多項式関数であるので，連続である．また，A が対角化可能ならば，上の (2.30) より $f_{ij}(A) = 0$ である．命題 2.54 と (2.29) の議論より，全ての $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し $f_{ij}(A) = 0$ である．よって，全ての $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し $\chi_A(A) = 0$ が成り立つ．

注意 2.56. 一般的な体 $\mathbb{K}$ の場合を考える．$A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする．まず，$(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ を n^2 個の変数とし，$\mathbb{L} = \mathbb{Q}((x_{ij})_{i,j})$ とする (すなわち，$\mathbb{L}$ は変数 $x = \{x_{ij}\}_{i,j}$ に関する有理関数体である)．また，x_{ij} を (i,j) 成分とする $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$ の行列を $M(x)$ とおく．$\mathbb{C}$ が非可算集合だから，$\mathbb{C}$ の $\mathbb{Q}$ 上の超越次数が無限である．ゆえに，可換体の埋め込み $\mathbb{K} \to \mathbb{C}$ が存在する．$\mathbb{C}$ の部分体の場合は主張が既に証明されているので，$\chi_{M(x)}(M(x)) = 0$ がいえる．この等式の両辺は $\mathbb{Z}[(x_{ij})_{i,j}]$ の元を成分とする行列である．変数 x_{ij} に成分 a_{ij} を代入すると，$M(x) = A$ となり，ゆえに $\chi_A(A) = 0$ が成り立つ．

ケイリーハミルトンの定理より $\mu_A \mid \chi_A$ が成り立つ．また，V が有限次元ベクトル空間で，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ のとき $\chi_f(f) = 0$ である．同様に，$\mu_f \mid \chi_f$ が成り立つ．

定理 2.57　$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする．以下が同値である．

(i) A が三角化可能である．

(ii) χ_A が $\mathbb{K}$ で分解する．

(iii) μ_A が $\mathbb{K}$ で分解する．

(iv) $\mathbb{K}$ で分解する多項式 $h \in \mathbb{K}[X]$ が存在し，$h(A) = 0$ が成り立つ．

証明

- 「(i)$\Longleftrightarrow$ (ii)」は命題 2.52 から従う．
- 「(ii)$\Longrightarrow$ (iii)」：χ_A が $\mathbb{K}$ で分解するとする．μ_A は χ_A の約数であるので，$\mathbb{K}$ で分解する．
- 「(iii)$\Longrightarrow$ (iv)」は明らかである．
- 「(iv)$\Longrightarrow$ (ii)」を n に関する帰納法によって証明する．h が $\mathbb{K}$ で分解する多項式で，$h(A) = 0$ とする．$h(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$ $(a_i \in \mathbb{K})$ と書ける．仮定より $\prod_{i=1}^{k}(A - a_i E_n) = 0$ である．とくに，$A - a_i E_n$ のいずれかが正則行列でない．a_i を入れ替えて $A - a_1 E_n$ が正則でないとして良い．このとき，$\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ $(\boldsymbol{u} \neq 0)$ が存在し，$A\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}$ である．$W = \mathbb{K}\boldsymbol{u}$ とおく．A で定まる $\mathbb{K}^n$ の線形変換を $f = f_A$ とおく．$f(W) \subset W$ より，命題 2.2 より f が $\mathbb{K}^n/W$ の線形変換 $\overline{f}$ を誘導する．$h(f) = 0$ より $h(\overline{f}) = 0$ である．帰納法の仮定より，$\chi_{\overline{f}}$ が $\mathbb{K}$ で分解する．$\chi_f = \chi_{f,W} \times \chi_{\overline{f}} = (X - a_1) \times \chi_{\overline{f}}$ が成り立つので，$\chi_f = \chi_A$ も $\mathbb{K}$ で分解する．

系 2.58　V が有限次元ベクトル空間で，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ とする．任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し，

$$\mu_f(\lambda) = 0 \iff \chi_f(\lambda) = 0$$

が成り立つ．

証明

ケイリー・ハミルトンの定理より $\mu_f \mid \chi_f$ であるので，「$\Longrightarrow$」が成り立つ．逆に，$\chi_f(\lambda) = 0$ とし，$W = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ とおく．$f|_W = \lambda\,\mathrm{id}_W$ であるので，$0 = \mu_f(f|_W) = \mu_f(\lambda)\,\mathrm{id}_W$ である．よって，$\mu_f(\lambda) = 0$ である．

2.9　広義固有空間

V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$f \colon V \to V$ を線形変換とする．

定義 2.59　$\lambda \in \mathbb{K}$ を f の固有値とする．このとき，線形部分空間

$$V(\lambda) := \bigcap_{k \geq 1} \mathrm{Ker}((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^k)$$

を固有値 λ に対する広義固有空間という．$x \in V(\lambda)$ $(x \neq 0)$ のとき，x を広義固有ベクトルという．

明らかに，$f(V(\lambda)) \subset V(\lambda)$ である．λ を χ_f の根とし，その重複度を m とおく．すなわち，$\chi_f(X) = (X - \lambda)^m Q(X)$ かつ $Q(\lambda) \neq 0$ と書けるとする．

補題 2.60　このとき, 以下が成り立つ.

(1) $V(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m$ である.

(2) $\dim(V(\lambda)) = m$ である.

証明

- 多項式 $P(X) := (X-\lambda)^m$ と $Q(X)$ が互いに素であるので, $W_1 := \mathrm{Ker}((f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^m)$, $W_2 := \mathrm{Ker}(Q(f))$ とおくと補題 2.47 より $V = \mathrm{Ker}(\chi_f(f)) = W_1 \oplus W_2$ である. 明らかに, $W_1 \subset V(\lambda)$ である. 逆に, $y \in V(\lambda)$ とし, $y = y_1 + y_2$ $(y_1 \in W_1,\ y_2 \in W_2)$ と書く. $W_1 \subset V(\lambda)$ より, $y_2 = y - y_1 \in V(\lambda)$ となる. ゆえに, $k \geq 1$ が存在し, $y_2 \in \mathrm{Ker}((f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^k)$ である. $(X-\lambda)^k$ と $Q(X)$ が互いに素であるので, 補題 2.47 より $\mathrm{Ker}((f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^k) \cap \mathrm{Ker}(Q(f)) = 0$ である. よって, $y_2 = 0$ となり, $y \in W_1$ である.
- 以上より, $V = W_1 \oplus W_2$ $(W_1 = V(\lambda),\ W_2 = \mathrm{Ker}(Q(f))$ である. 命題 2.37 より, $f(W_1) \subset W_1$ かつ $f(W_2) \subset W_2$ である. $f|_{W_i} \colon W_i \to W_i$ の固有多項式を $\chi_{f,i}$ とおく. このとき, $\chi_f = \chi_{f,1}\chi_{f,2}$ が成り立つ. 定理 2.57 より $f|_{W_1}$ が三角化可能である. $f|_{W_1}$ の唯一の固有値が λ であるので, $\chi_{f,1} = (X-\lambda)^r$ $(r = \dim(W_1))$ となる. $f|_{W_2}$ の最小多項式は Q の約数である. $Q(\lambda) \neq 0$ より, λ が $f|_{W_2}$ の最小多項式の根でない. 系 2.58 より, $\chi_{f,2}(\lambda) \neq 0$ である. ゆえに, $m = r = \dim(W_1)$ かつ $\chi_{f,2} = Q$ である.

系 2.61　$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{r_i}$ となる相異なる $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ が存在することを仮定する. このとき, 以下が成り立つ.

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V(\lambda_i), \qquad V(\lambda_i) = \mathrm{Ker}((f-\lambda_i)^{r_i}).$$

3　有理標準形・ジョルダン標準形

3.1　同伴行列

$\mathbb{K}$ を可換体とする. $P(X)$ を $\mathbb{K}[X]$ の次数 n のモニックな多項式とし,

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

とおく. このとき,

$$C(P) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$$

とおき, P の同伴行列という.

補題 3.1　$\chi_{C(P)} = P$ である.

証明

帰納法によって示す．第 1 行に関する展開させて計算する．

$$\chi_{C(P)} = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & a_2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix} + a_0$$
$$= X(X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_2 X + a_1) + a_0 = P.$$

3.2 巡回部分空間

V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ を V の線形変換とする．$x \in V$ に対し，

$$\langle x \rangle_f = \mathrm{Span}(x, f(x), f^2(x), \dots)$$

とおき，x で生成される巡回部分空間という．以下の集合を考える．

$$I_x := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}.$$

明らかに，I_x は $\mathbb{K}[X]$ のイデアルである．ゆえに，$I_x = (\mu_{f,x})$ を満たすモニックな多項式 $\mu_{f,x}$ が一意的に存在する．明らかに $\mu_f \in I_x$ であるので，$\mu_{f,x} \mid \mu_f$ である．

補題 3.2 $\deg(\mu_{f,x}) = m$ とおく．このとき，$(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ が $\langle x \rangle_f$ の基底である．とくに，$\dim(\langle x \rangle_f) = \deg(\mu_{f,x})$ である．

証明

$\mu_{f,x} = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0$ とおく．よって，$f^m(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i(x)$ である．帰納法によって，$k \geq 0$ に対し $f^k(x) \in \mathrm{Span}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ であることを示す．$k = 0$ のとき明らかである．$k \geq 1$ で $f^k(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i f^i(x)$ $(b_i \in \mathbb{K})$ とする．

$$f^{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i f^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{m-2} b_i f^{i+1}(x) - b_{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i(x)\right)$$

となり，$f^{k+1}(x) \in \mathrm{Span}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ である．よって，$\langle x \rangle_f = \mathrm{Span}(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ である．次に，$(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ が線形独立であることを示す．$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(x) = 0$ ならば，多項式 $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i X^i$ が I_x に属するので，$\mu_{f,x}$ の倍数である．$\deg(\mu_{f,x}) = m$ より，$\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$ となる．以上より，$(x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ が $\langle x \rangle_f$ の基底である．

$W := \langle x \rangle_f$ とおくと，$f(W) \subset W$ が成り立つ．よって，f の制限 $f|_W : W \to W$ を考えることができる．

補題 3.3 $m = \deg(\mu_{f,x})$ で，$\mathcal{B}_x = (x, f(x), \dots, f^{m-1}(x))$ とおくと

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(f|_W) = C(\mu_{f,x}) \tag{3.1}$$

が成り立つ．

証明

$\mu_{f,x} = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0$ とおくと，$f^m(x) = -\sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i(x)$ である．主張が従う．

$f|_W : W \to W$ の最小多項式, 固有多項式をそれぞれ $\mu_{f,W}$, $\chi_{f,W}$ とおく．

補題 3.4 $\mu_{f,W} = \chi_{f,W} = \mu_{f,x}$ が成り立つ．

証明

任意の $P \in \mathbb{K}[X]$ に対し，

$$P(f)(x) = 0 \iff P(f|_W) = 0$$

が成り立つ．「$\Longleftarrow$」は明らかである．逆に，$P(f)(x) = 0$ ならば，全ての $r \geq 0$ に対し，$P(f)(f^r(x)) = f^r(P(f)(x)) = 0$ となる．よって，$P(f)|_W = P(f|_W) = 0$ である．以上より，$\mu_{f,x} = \mu_{f,W}$ である．最後に，補題 3.3 と補題 3.1 より，$\chi_{f,W} = \chi_{C(\mu_{f,x})} = \mu_{f,x}$ である．

補題 3.4 を用いたケイリー・ハミルトンの定理の別証明を説明する．

系 3.5: (ケイリー・ハミルトンの定理) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ のとき，$\chi_f(f) = 0$ が成り立つ．

証明

任意の $x \in V$ に対し，$\chi_f(f)x = 0$ であることを示せばよい．つまり，$\mu_{f,x} \mid \chi_f$ であることを示せば十分である．$W = \langle x \rangle_f$ とおくと，補題 3.4 より $\mu_{f,x} = \chi_{f,W}$ である．命題 2.23 より，$\chi_{f,W} \mid \chi_f$ である．ゆえに，$\mu_{f,x} \mid \chi_f$ である．

3.3 巡回的な線形変換

定義 3.6 $f : V \to V$ を線形変換とする．$V = \langle x \rangle_f$ となるベクトル $x \in V$ が存在するとき，f が巡回的であるという．

補題 3.7 $f : V \to V$ を線形変換とする．$x \in V$ とし，$\mu_{f,x} = P$ とおく．このとき，任意の $Q \in \mathbb{K}[X]$ に対し，$y = Q(f)(x)$ とおくと

$$\mu_{f,y} = \frac{P}{\gcd(P, Q)} \qquad \text{が成り立つ．}$$

証明

$R = \frac{P}{\gcd(P,Q)}$, $S = \frac{Q}{\gcd(P,Q)}$ と定義する．明らかに，$SP = RQ$ より $R(f)(y) = R(f)(Q(f)(x)) = S(f)(P(f)(x)) = 0$ である．よって，$\mu_{f,y}$ は R の約数である．また，$\mu_{f,y}(f)(y) = 0$ より，$\mu_{f,y}(f)(Q(f)(x)) = (\mu_{f,y}Q)(f)(x) = 0$ である．ゆえに，$P \mid \mu_{f,y}Q$ となり，よって $R \mid \mu_{f,y}S$ である．R と S が互いに素であるので，$R \mid \mu_{f,y}$ となる．以上より，$\mu_{f,y} = R$ が成り立つ．

補題 3.8 $x, y \in V$ で，$P = \mu_{f,x}$, $Q = \mu_{f,y}$ とおく．P, Q が互いに素であるならば，$\mu_{f,x+y} = PQ$ である．

証明

明らかに, $PQ(f)(x+y)=PQ(f)(x)+PQ(f)(y)=0$ である．よって, $\mu_{f,x+y}$ が PQ の約数である．一方, $Q(f)(y)=0$ より

$$(\mu_{f,x+y}Q)(f)(x)=(\mu_{f,x+y}Q)(f)(x+y)=0$$

である．したがって, $P\mid\mu_{f,x+y}Q$ である．P と Q が互いに素だから, $P\mid\mu_{f,x+y}$ となる．同様の議論で $Q\mid\mu_{f,x+y}$ がいえる．$\gcd(P,Q)=1$ より, $PQ\mid\mu_{f,x+y}$ となる．以上より $\mu_{f,x+y}=PQ$ である．

補題 3.9 $f\colon V\to V$ を線形変換とする．$\mu_f=\mu_{f,x}$ を満たす $x\in V$ が存在する．

証明

$\mu_f=P_1^{r_1}\dots P_k^{r_k}$ $(k\geq 1,\ r_i\geq 1)$ を μ_f の $\mathbb{K}[X]$ における素因数分解とする．補題 3.8 より, 全ての $i=1,\dots,k$ に対し $\mu_{f,x_i}=P_i^{r_i}$ を満たす元 x_i が存在することを示せば十分である．多項式

$$Q_i:=\frac{\mu_f}{P_i},\qquad R_i:=\frac{\mu_f}{P_i^{r_i}}$$

を考える．$Q_i(f)\neq 0$ であるので, $Q_i(f)(y_i)\neq 0$ となる $y_i\in V$ が取れる．$x_i:=R_i(f)(y_i)$ と定める．$P_i^{r_i}(f)(x_i)=(P_i^{r_i}R_i)(f)(x_i)=\mu_f(f)(x_i)=0$ である．一方,

$$P_i^{r_i-1}(f)(x_i)=(P_i^{r_i-1}R_i)(f)(y_i)=Q_i(f)(x_i)\neq 0$$

である．ゆえに, $\mu_{f,x_i}=P_i^{r_i}$ である．主張が従う．

命題 3.10 $n=\dim_{\mathbb{K}}(V)$ とおく．以下が同値である．

(i) f が巡回的である．すなわち, $V=\langle x\rangle_f$ となる $x\in V$ が存在する．

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=C(P)$ となる V の基底 $\mathcal{B}$ 及び次数 n のモニックな多項式 $P\in\mathbb{K}[X]$ が存在する．

(iii) $x\in V$ が存在し, $(x,f(x),\dots,f^{n-1}(x))$ が V の基底をなす．

(iv) $\mu_f=\chi_f$ である．

(v) $\deg(\mu_f)=n$.

証明

- 「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」 は補題 3.3 より従う．
- 「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=C(P)$ とする．但し, $\mathcal{B}=(u_1,\dots,u_n)$ が V の基底であり, $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0$ $(a_i\in\mathbb{K})$ である．このとき, $f(u_1)=u_2, f^2(u_1)=u_3,\dots,f^{n-1}(u_1)=u_n$ であるので, $\mathcal{B}=(u_1,f(u_1),\dots,f^{n-1}(u_1))$ となる．
- 「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」は明らかである．
- 「(i) $\Longrightarrow$ (iv)」は補題 3.4 より従う．
- 「(iv) $\Longrightarrow$ (v)」は明らかである．
- 「(v) $\Longrightarrow$ (iii)」: 補題 3.9 より $\mu_f=\mu_{f,x}$ となる $x\in V$ が取れる．このとき, $\dim(\langle x\rangle_f)=\deg(\mu_{f,x})=\deg(\mu_f)=n$ より, $V=\langle x\rangle_f$ となる．

定理 3.11 V を n 次元ベクトル空間とし，$f\colon V\to V$ を V の線形変換とする．このとき，V が以下のように分解できる．

$$V=\langle x_1\rangle_f\oplus\cdots\oplus\langle x_r\rangle_f,\qquad x_i\neq 0\text{ かつ }\mu_{f,x_{i+1}}\mid\mu_{f,x_i}.$$

さらに，$V=\langle y_1\rangle_f\oplus\cdots\oplus\langle y_s\rangle_f$ $(y_i\neq 0)$ かつ $\mu_{f,y_{i+1}}\mid\mu_{f,y_i}$ を満たす他の分解であるならば，$r=s$ かつ $\mu_{f,x_i}=\mu_{f,y_i}$ が成り立つ．

証明

- 分解の存在性を示す．V の次元に関する帰納法によって証明する．$V=0$ のとき明らかである．$\dim(V)\geq 1$ とする．補題 3.9 より $\mu_f=\mu_{f,x_1}$ を満たす $x_1\in V$ が存在する．$W_1:=\langle x_1\rangle_f$ とおく．明らかに，$f(W_1)\subset W_1$ である．商空間 $\overline{V}=V/W_1$ を考える．命題 2.2 より f は $\overline{V}$ の線形変換 $\overline{f}\colon x+W\mapsto f(x)+W$ を誘導する．$x\in V$ に対し，自然か射影 $V\to\overline{V}$ による $\overline{V}$ における x の像を $\overline{x}$ で表すことにしよう (ゆえに，$\overline{f}(\overline{x})=\overline{f(x)}$ である)．帰納法の仮定を商空間 $\overline{V}=V/W_1$ に適用させる ($\dim(\overline{V})<\dim(V)$ であることに注意する)．よって，$\overline{V}=\overline{W}_2\oplus\cdots\oplus\overline{W}_r$ かつ $\overline{W}_i=\langle\overline{x}_i\rangle_{\overline{f}}$ となる $x_i\in V$ が取れる．ただし，多項式 $P_i:=\mu_{\overline{f},\overline{x}_i}$ が $P_{i+1}\mid P_i$ を満たす．以下の 2 つの条件を満たす元 $y_i\in V$ が存在することを示す．
  (i) $\overline{x}_i=\overline{y}_i$ である．
  (ii) $\mu_{f,y_i}=\mu_{\overline{f},\overline{x}_i}$
  $\mu_{f,x_i}(f)(x_i)=0$ より，$\mu_{f,x_i}(\overline{f})(\overline{x}_i)=0$ である．ゆえに，$P_i=\mu_{\overline{f},\overline{x}_i}$ が μ_{f,x_i} の約数である．また，$P_i\mid\mu_{\overline{f}}\mid\mu_f$ であるので，$\mu_f=Q_iP_i$ と書ける (とくに，$Q_i\in\mathbb{K}[X]$ はモニックな多項式である)．$\overline{W}_i$ において $\overline{P_i(f)(x_i)}=P_i(\overline{f})(\overline{x}_i)=0$ であるので，$P_i(f)(x_i)\in W$ となる．よって，$P_i(f)(x_i)=R_i(f)(x_1)$ $(2\leq i\leq r)$ となる $R_i\in\mathbb{K}[X]$ が存在する．このとき，$Q_iR_i(f)(x_1)=Q_iP_i(f)(x_i)=\mu_f(f)(x_i)=0$ である．$\mu_{f,x_1}=\mu_f$ より，$\mu_f\mid Q_iR_i$ となり，すなわち $P_i\mid R_i$ であり，$R_i=P_iS_i$ と表せる．ゆえに，$P_i(f)(x_i)=R_i(f)(x_1)=P_iS_i(f)(x_1)$ となり，$P_i(f)(x_i-S_i(f)(x_1))=0$ となる．$y_i=x_i-S_i(f)(x_1)$ と定義する．$S_i(f)(x_1)\in W$ より，$\overline{x}_i=\overline{y}_i$ である．また，$P_i(f)(y_i)=0$ より $\mu_{f,y_i}\mid P_i$ である．逆に，$\mu_{f,y_i}(f)(y_i)=0$ より $\mu_{f,y_i}(\overline{f})(\overline{y}_i)=0$ である．$\overline{y}_i=\overline{x}_i$ だから，$\mu_{f,y_i}(\overline{f})(\overline{x}_i)=0$ である．ゆえに，$P_i=\mu_{\overline{f},\overline{x}_i}$ が μ_{f,y_i} の約数である．以上より，$\mu_{f,y_i}=\mu_{\overline{f},\overline{x}_i}$ となり，y_i は条件 (i), (ii) を満たしている．
  次に，$W_i:=\langle y_i\rangle_f$ とおく．$\overline{V}=\bigoplus_{i=2}^r\overline{W}_i$ より任意の $x\in V$ に対し，$\overline{x}=\sum_{i=2}^n T_i(f)(\overline{y}_i)$ $(T_i\in\mathbb{K}[X])$ と書ける．よって，$z=x-\sum_{i=2}^n T_i(f)(y_i)$ とおくと $\overline{z}=\overline{0}$ である．ゆえに $z\in W_1$ である．したがって，$x=z+\sum_{i=2}^n T_i(f)(y_i)$ が $W_1+W_2+\cdots+W_r$ に属する．よって，$V=W_1+W_2+\cdots+W_r$ が成り立つ．また，全ての $2\leq i\leq r$ に対し $\dim(W_i)=\deg(\mu_{f,y_i})=\deg(\mu_{\overline{f},\overline{x}_i})=\dim(\overline{W}_i)$ である．したがって，$\sum_{i=1}^r\dim(W_i)=\dim(V)$ が成り立つ．線形写像
  $$W_1\times\cdots\times W_r\longrightarrow V,\quad (z_1,\ldots,z_r)\mapsto\sum_{i=1}^r z_i$$
  は同次元のベクトル空間の間の全射であるので，同型写像となる．ゆえに，$V=\bigoplus_{i=1}^r W_i$ となる．$P_1=\mu_f=\mu_{f,x_1}$ とおく．$\mu_{f,y_2}\mid\mu_f$ より，$P_2\mid P_1$ である．また $2\leq i\leq r-1$ のとき $P_{i+1}\mid P_i$ である．
- V の次元に関する帰納法によって $P_1,\ldots,P_r$ の一意性を示す．$\dim(V)=1$ のとき明らかである．$\dim(V)>1$ とする．定理の条件を満たす他の分解 $V=\langle y_1\rangle_f\oplus\cdots\oplus\langle y_s\rangle_f$ を考える．ただし，$y_i\neq 0$ かつ $\mu_{f,y_{i+1}}\mid\mu_{f,y_i}$ とする．$1\leq i\leq s$ に対し，$Q_i:=\mu_{f,y_i}$ とおく．$i>r$ のとき，$P_i:=1$ とおき，

$i > s$ のとき $Q_i := 1$ とおく．全ての $i \geq 1$ に対し，$P_i = Q_i$ であることを示す．$W'_i := \langle y_i \rangle_f$ とおく $(1 \leq i \leq s)$.

$\widetilde{V} := P_r(f)(V)$ とおく．明らかに，$f(\widetilde{V}) \subset \widetilde{V}$ であるので，f が線形変換 $f\colon \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ を誘導する．以下の線形部分空間を考える．

$$\widetilde{W_i} := P_r(f)(W_i)$$
$$\widetilde{W'_i} := P_r(f)(W'_i)$$

W_i, W'_i が f に関して閉じているので $\widetilde{W_i} \subset W_i$ かつ $\widetilde{W'_i} \subset W'_i$ である．$\widetilde{x_i} := P_r(f)(x_i)$, $\widetilde{y_i} := P_r(f)(y_i)$ とおく．$W_i = \langle x_i \rangle_f$ より，$\widetilde{W_i} = \langle \widetilde{x_i} \rangle_f$ である．同様に，$\widetilde{W'_i} = \langle \widetilde{y_i} \rangle_f$ である．また，補題 3.7 より，

$$\mu_{f,\widetilde{x}_i} = \frac{P_i}{\gcd(P_i, P_r)} = \frac{P_i}{P_r}$$
$$\mu_{f,\widetilde{x}'_i} = \frac{Q_i}{\gcd(Q_i, P_r)}$$

明らかに，

$$\widetilde{V} = \bigoplus_{i=1}^{r} \widetilde{W_i} = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{W'_i}$$

である．0 でない任意の多項式 A, B, C に対し，$A \mid B$ ならば，$\frac{A}{\gcd(A,C)} \mid \frac{B}{\gcd(B,C)}$ である．ゆえに，$\frac{Q_{i+1}}{\gcd(Q_{i+1},P_r)}$ が $\frac{Q_i}{\gcd(Q_i,P_r)}$ の約数である．帰納法の仮定より，全ての $1 \leq i \leq r$ に対し，

$$\frac{P_i}{P_r} = \frac{Q_i}{\gcd(Q_i, P_r)}$$

である．とくに，$Q_i \mid P_i$ が成り立つ．同様に，W_i と W'_i の役割を交換し，同じ議論で全ての $1 \leq i \leq s$ に対し，$P_i \mid Q_i$ が成り立つことが言える．$r \leq s$ と仮定して良い．以上より，全ての $1 \leq i \leq r$ に対し $P_i = Q_i$ である．ゆえに，$1 \leq i \leq r$ に対し $\dim(W_i) = \deg(P_i) = \deg(Q_i) = \dim(W'_i)$ である．よって，$\dim(V) = \sum_{i=1}^{r} \dim(W_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim(W'_i)$ となる．したがって，$r = s$ が成り立つ．

定理 3.12 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ を n 次正方行列とする．$P_{i+1} \mid P_i$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ を満たすモニックな多項式 $P_1, \ldots, P_r$ の列が存在し，A が以下の行列と相似である．

$$C(P_1, \ldots, P_r) := \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

また，$P_1, \ldots, P_r$ が一意的に定まる．

証明

$V = \mathbb{K}^n$ とし，f を A で定まる $\mathbb{K}^n$ の線形変換とする．定理 3.11 より，$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$ と書ける．但し，$W_i = \langle x_i \rangle_f$ かつ $\mu_{f,x_{i+1}} \mid \mu_{f,x_i}$ である $(1 \leq i \leq r-1)$．f が W_i の線形変換 $f_i\colon W_i \to W_i$ を誘導する．命題 3.10 より，W_i の適当な基底 $\mathcal{B}_i$ に関して $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f_i) = C(P_i)$ $(P_i = \mu_{f,x_i})$ である．よって，$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$ とすると $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = C(P_1, \ldots, P_r)$ である．また，$P_1, \ldots, P_r$ の一意性は定理 3.11 から従う．

定義 3.13　定理 3.12 によって得られた行列 $C(P_1,\dots,P_r)$ は A の有理標準形と呼ばれる．また，多項式 $P_1,\dots,P_r$ を A の単因子という．

補題 3.14　$A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とし，$C(P_1,\dots,P_r)$ を A の有理標準形とする (但し，$P_1,\dots,P_r\in\mathbb{K}[X]$ がモニックな多項式で，$P_{i+1}\mid P_i$ とする)．このとき，

$$\chi_A = P_1\dots P_r$$
$$\mu_A = P_1.$$

証明

$\chi_{C(P_i)} = P_i$ より $\chi_A = P_1\dots P_r$ となる．$P_i \mid P_1$ より，$P_1(C(P_i)) = 0$ である．よって $P_1(A) = 0$ であり，ゆえに $\mu_A \mid P_1$ となる．一方，$\mu_A \mid \mu_{C(P_1)} = P_1$ である．ゆえに，$\mu_A = P_1$ である．

例 3.15. 以下の行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -9 \\ 3 & -5 & 9 \\ 3 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

例題 2.1 より，$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$ であり，かつ A が対角化可能である．ゆえに $\mu_A(X) = (X-1)(X-2)$ である．ゆえに，A の単因子は $P_1 = (X-1)(X-2) = X^2-3X+2$, $P_2 = (X-2)$ である．よって，A の有理標準形は以下の行列である．

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & \\ & C(P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \\ 1 & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

3.5　応用

系 3.16　$A, B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする．A と B が互いに相似であるための必要十分条件は，それぞれの有理標準形が一致することである．

証明

有理標準形の一意性より従う．

命題 3.17　A と ${}^tA$ は相似である．

証明

定理 3.12 より，$A = C(P)$ の場合に帰着できる．このとき，$\mu_{{}^tA} = \mu_A = \chi_A = \chi_{{}^tA}$ となるので，命題 3.10 より ${}^tA$ は巡回行列である．ゆえに，${}^tA \sim C(P)$ である．

命題 3.18　$\mathbb{L}/\mathbb{K}$ を体拡大とし，$A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ とする．A, B が $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$ の行列として相似ならば，$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ においても相似である．

証明

$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ の行列として考えた A, B の有理標準形をそれぞれ $A' = C(P_1, \ldots, P_r)$, $B' = C(Q_1, \ldots, Q_s)$ とおく．但し，$P_i, Q_i \in \mathbb{K}[X]$ がモニックな多項式であり，$P_{i+1} \mid P_i$ かつ $Q_{i+1} \mid Q_i$ である．有理標準形の一意性より，$\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$ の行列として考えた A, B の有理標準形もそれぞれ A', B' である．仮定より A, B が $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$ において相似であるので，$A' = B'$ となる．ゆえに A と B が $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ においても相似である．

定義 3.19 V を有限次元ベクトル空間とし，$f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ とする．f が単純であるとは，$f(W) \subset W$ を満たす線形部分空間 W が 0 と V に限るときにいう．

定理 3.20 以下が同値である．

(i) f が単純である．

(ii) f が巡回であり，かつ μ_f が $\mathbb{K}[X]$ の既約多項式である．

(iii) χ_f が $\mathbb{K}[X]$ の既約多項式である．

証明

- 「(i) $\Longrightarrow$ (ii)」を示す．$V \neq 0$ として良い．$x \in V$ $(x \neq 0)$．$W = \langle x \rangle_f$ は $f(W) \subset W$ を満たすので，$W = V$ である．よって，f は巡回である．$\mu_f \mid PQ$ $(P, Q \in \mathbb{K}[X])$ とする．このとき，$P(f) \circ Q(f) = 0$ である．よって，$W_1 = \mathrm{Ker}(P(f))$, $W_2 = \mathrm{Ker}(Q(f))$ のいずれかが 0 とは異なる．$W_1 \neq 0$ と仮定して良い．このとき，$f(W_1) \subset W_1$ であるので，$W_1 = V$ が成り立つ．よって，$P(f) = 0$ であり，$\mu_f \mid P$ である．以上より，μ_f が既約多項式である．
- 「(ii) $\Longrightarrow$ (iii)」：f が巡回であるので $\chi_f = \mu_f$ である．
- 「(iii) $\Longrightarrow$ (i)」を示す．$W \neq 0$ が V の線形部分空間で，$f(W) \subset W$ ならば，命題 2.23 より，$f|_W$ の固有多項式 $\chi_{f,W}$ は χ_f の約数である．χ_f が既約であるので，$\chi_{f,W} = \chi_f$ となる．とくに，$\dim(W) = \deg(\chi_{f,W}) = \deg(\chi_f) = \dim(V)$ となり，ゆえに $W = V$ である．よって，V は単純である．

3.6 ジョルダン行列

$\lambda \in \mathbb{K}$ とする．以下の形の行列をジョルダンブロックという．

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$$

また，$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_k)$ を $d_i \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$ を満たす自然数の組とする．このとき，

$$J_{\mathbf{d}}(\lambda) := \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_k}(\lambda) \end{pmatrix}$$

と定義する．

例 3.21. $\mathbf{d} = (2, 1)$ のとき，

$$J_{\mathbf{d}}(\lambda) := \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & \\ & J_1(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

命題 3.22　行列 $A = J_n(\lambda)$ について，以下が成り立つ．

(1) $\chi_A = (X-\lambda)^n$

(2) $\mu_A = \chi_A$

(3) A が行列 $C(\chi_A)$ と相似である．

証明

A の固有多項式は明らかに $(X-\lambda)^n$ である．よって，A の最小多項式は $\mu_A = (X-\lambda)^r$ $(1 \leq r \leq n)$ である．${}^t(A-\lambda E_n) = C(X^n)$ と書けるので，$A-\lambda E_n$ の最小多項式は X^n である．したがって，$r=n$ となり，$\mu_A = (X-\lambda)^n = \chi_A$ となる．命題 3.10 より，A は同伴行列 $C(\chi_A)$ と相似である．

系 3.23　$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)$ とする（但し，$d_i \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k$ である）．$P_i = (X-\lambda)^{d_i}$ $(\lambda \in \mathbb{K})$ とおくと，$J_{\mathbf{d}}(\lambda)$ の有理標準形は以下の通りである．

$$\begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_k) \end{pmatrix}$$

証明

$d_i \geq d_{i+1}$ より $P_{i+1} \mid P_i$ である．主張が従う．

定理 3.24　$A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ で，χ_A が $\mathbb{K}$ で分解するとし，その根を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ とおく（但し，λ_i は相異なるとする）．このとき，A が以下のような行列と相似である．

$$B := \begin{pmatrix} J_{\mathbf{d}^{(1)}}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mathbf{d}^{(k)}}(\lambda_k) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

但し，$\mathbf{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, \dots, d_{m_i}^{(i)})$ は $d_1^{(i)} \geq \cdots \geq d_{m_i}^{(i)}$ を満たす．さらに，上記の行列 B はブロック行列 $J_{\mathbf{d}^{(i)}}(\lambda_i)$ の順序を除いて一意的に存在する．

証明

- 存在性を示す：$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{r_i}$ と書くことができる．系 2.61 より，

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(A-\lambda_i E_n)^{r_i}$$

である．$W_i = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i E_n)^{r_i}$ とおく．$f|_{W_i}$ の固有多項式は $(X-\lambda_i)^{r_i}$ である．ゆえに，$f|_{W_i}$ の単因子を $(P_1, \dots, P_{m_i})$ とおくと，$P_j(X) = (X-\lambda_i)^{d_j^i}$ となる $d_1^{(i)} \geq \cdots \geq d_{m_i}^{(i)}$ が存在する．よって，行列 B の存在性が分かる．
- 一意性を示す：$i = 1, \dots, k$ に対し，$d_1^{(i)} \geq \cdots \geq d_{m_i}^{(i)}$ を満たす自然数が与えられているとする．また，$i = 1, \dots, k'$ に対し，$d_1'^{(i)} \geq \cdots \geq d'^{(i)}_{m'_i}$ を満たす自然数が与えられているとする．

$\mathbf{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, \dots d_{m_i}^{(i)})$, $\mathbf{d'}^{(i)} = (d_1'^{(i)}, \dots d_{m_i'}'^{(i)})$ とおく．また，

$$\begin{pmatrix} J_{\mathbf{d}^{(1)}}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mathbf{d}^{(k)}}(\lambda_k) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} J_{\mathbf{d'}^{(1)}}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\mathbf{d'}^{(k)}}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

とする．命題 2.40 より，$J_{\mathbf{d}^{(j)}}(\lambda_j) \sim J_{\mathbf{d'}^{(j)}}(\lambda_j)$ が成り立つ．ゆえに，$J_{\mathbf{d}^{(j)}}(\lambda_j)$ と $J_{\mathbf{d'}^{(j)}}(\lambda_j)$ の有理標準形が一致する．系 3.23 より，$m_j = m_j'$ かつ

$$(d_1^{(j)}, \dots, d_{m_j}^{(j)}) = (d_1^{(j)}, \dots, d_{m_j}^{(j)})$$

となる．よって，行列 B が一意的である．

定義 3.25　定理 3.24 によって得られる行列 (3.2) を A のジョルダン標準形という．

例題 3.1. 以下の行列のジョルダン標準形を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & 10 & -7 & -5 \\ 7 & -15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

解答：A の固有多項式を計算する．

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-6 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & X-2 & 2 & 2 \\ 3 & -10 & X+7 & 5 \\ -7 & 15 & -11 & X-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-6 & 5 & X-8 & X-6 \\ -2 & X-2 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & X+10 & 8 \\ -7 & 15 & -18 & X-14 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} 5 & X-8 & X-6 \\ -10 & X+10 & 8 \\ 15 & -18 & X-14 \end{vmatrix} + (X-2)\begin{vmatrix} X-6 & X-8 & X-6 \\ 3 & X+10 & 8 \\ -7 & -18 & X-14 \end{vmatrix} \\
&= 10\begin{vmatrix} 1 & X-8 & X-6 \\ 0 & 3X-6 & 2X-4 \\ 0 & -3X+6 & -2X+4 \end{vmatrix} + (X-2)\begin{vmatrix} X-6 & X-8 & X-6 \\ 3 & X+10 & 8 \\ -1 & 2X+2 & X+2 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)\begin{vmatrix} 0 & 2X^2-9X-20 & X^2-3X-18 \\ 0 & 7X+16 & 3X+14 \\ -1 & 2X+2 & X+2 \end{vmatrix} \\
&= -(X-2)\begin{vmatrix} 2X^2-9X-20 & X^2-3X-18 \\ 7X+16 & 3X+14 \end{vmatrix} = -(X-2)\begin{vmatrix} X^2-2X & X^2-4 \\ 4X+2 & 3X+14 \end{vmatrix} \\
&= -(X-2)^2\begin{vmatrix} X & X+2 \\ 4X+2 & 3X+14 \end{vmatrix} = -(X-2)^2\begin{vmatrix} X & 2 \\ 2 & -X+4 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X^2-4X+4) \\
&= (X-2)^4
\end{aligned}$$

よって，A の唯一の固有値は 2 である．ゆえに，A のジョルダン標準形は以下のいずれかである．

$$J_{(1,1,1,1)}(2) = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \quad J_{(2,1,1)}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \quad J_{(2,2)}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix},$$

$$J_{(3,1)}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \quad J_4(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$(A-2E_4)^2$ を計算する.

$$(A-2E_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 10 & -9 & -5 \\ 7 & -15 & 11 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. よって, $\mu_A = (X-2)^2$ である. 従って, A のジョルダン標準形は $J_{(2,2)}(2)$ または $J_{(2,1,1)}(2)$ である. また, 明らかに $\mathrm{rank}(A-2E_n) \neq 1$ である. ゆえに, A のジョルダン標準形は $J_{(2,1,1)}(2)$ でない. 以上より, $A \sim J_{(2,2)}(2)$ が成り立つ.

3.7 ジョルダン・シェヴァレ分解

V を有限次元 $\mathbb{K}$ ベクトル空間とし, $f\colon V \to V$ を線形変換とする.

定理 3.26 χ_f が $\mathbb{K}$ で分解するとする.

(1) このとき, 以下の 3 つの条件を満たす V の線形変換 g, h が一意的に存在する.

- (i) g は対角化可能であり, h は冪零である.
- (ii) $f = g + h$ である.
- (iii) $g \circ h = h \circ g$ である.

(2) さらに, (1) で与えられた線形変換 h, g は $h, g \in \mathbb{K}[f]$ を満たす.

証明

- g, h の存在性を示す. $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{r_i}$ とする. ただし, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ が相異なるとする. $W_i := \mathrm{Ker}((f-\lambda_i \mathrm{id}_V)^{r_i})$ とおく. 全ての $i = 1, \ldots, r$ に対し $g|_{W_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{W_i}$ で定まる線形変換 $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ を考える. また, $h = f - g$ とおく. 明らかに, g が対角化可能である. また, $(h|_{W_i})^{r_i} = 0$ であるので, h は冪零である. 最後に, $f(W_i) \subset W_i$ かつ $g(W_i) \subset W_i$ より, $h(W_i) \subset W_i$ である. 明らかに $g|_{W_i}$ と $h|_{W_i}$ が交換する. ゆえに, $g \circ h = h \circ g$ である.
- 次に, 上の g, h が $\mathbb{K}[f]$ に属することを示す. 中国の剰余定理より,

$$P(X) \equiv \lambda_i \pmod{(X-\lambda_i)^{r_i}}, \quad i = 1, \ldots, k$$

  を満たす $P \in \mathbb{K}[X]$ が存在する. ゆえに, $R_i(X) \in \mathbb{K}[X]$ が存在し, $P(X) = \lambda_i + R_i(X)(X-\lambda_i)^{r_i}$ である. $f|_{W_i}$ が多項式 $(X-\lambda_i)^{r_i}$ によって零化されるので, $P(f|_{W_i}) = \lambda_i \mathrm{id}_{W_i} = g|_{W_i}$ となる. ゆえに, $P(f) = g$ が成り立つ. 同様に, $h = f - g = f - P(f)$ より, $h \in \mathbb{K}[f]$ である.
- g, h の一意性を示す. (g', h') を条件 (i),(ii),(iii) を満たすものとする. とくに, $f = g' + h'$ と $g' \circ h' = h' \circ g'$ より, f, g', h' が交換する. また, $g + h = g' + h'$ より $g - g' = h' - h$ である. $g, h \in \mathbb{K}[f]$ より, g, h, g', h' が全て交換する. g, g' が互いに交換するような対角化可能な線形変換であるので, 命題 2.50 より g, g' が同じ基底 $\mathcal{B}$ で対角化可能である. ゆえに, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g-g') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g')$ も対角行列である. また, h, h' が互いに交換するような冪零線形変換であるので $h - h'$ も冪零である. 実際, $h^m = h'^m = 0$ $(m \geq 1)$ とすると,

$$(h-h')^{2m} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2m}{i} (-1)^i h^i h'^{2m-i} = 0$$

  である. 対角化可能な冪零行列は零行列に限るので, $g - g' = 0$, $h' - h = 0$ となる. ゆえに, 分解の一意性が示せた.

例題 3.2. 以下の行列のジョルダン・シェヴァレ分解を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & -3 \\ -10 & 21 & 9 \end{pmatrix}$$

解答： まず, A の固有多項式を計算する.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X+2 & -3 & -1 \\ -3 & X+7 & 3 \\ 10 & -21 & X-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & -3 & -1 \\ 3X+3 & X-2 & 0 \\ X^2-7X-8 & -3X+6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3X+3 & X-2 \\ X^2-7X-8 & -3X+6 \end{vmatrix} = -(X-2)\begin{vmatrix} 3X+3 & 1 \\ X^2-7X-8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)(X^2+2X+1) = (X-2)(X+1)^2.$$

ゆえに, A の固有値は $\{-1, 2\}$ である. 明らかに $\mathrm{rank}(A+E_3) > 1$ であるので, A のジョルダン標準形は

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

である. 次に, A の広義固有空間を求める.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2x_1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 2x_2 \\ -10x_1 + 21x_2 + 9x_3 = 2x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -3x_2. \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -x_1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -x_2 \\ -10x_1 + 21x_2 + 9x_3 = -x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

また,

$$(A+E_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \\ -10 & 21 & 10 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & -18 & -9 \\ -27 & 54 & 27 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}((A+E_3)^2) \iff \begin{cases} 9x_1 - 18x_2 - 9x_3 = 0 \\ -27x_1 + 54x_2 + 27x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

よって, $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと, $v \in \mathrm{Ker}((A+E_3)^2)$ かつ $v \notin \mathrm{Ker}(A+E_3)$ である. また,

$$u := (A+E_3)(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき, (u, v) は固有値 -1 の広義固有空間の基底であり, w は固有値 2 の固有空間である. また, $Av = u - v$ である. ゆえに, $\mathcal{C} = (u, v, w)$ とおくと, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = B$ が成り立つ (ただし, f_A は A に対応する $\mathbb{K}^3$ の線形変換である). $\mathcal{B}$ を $\mathbb{K}^3$ の標準基底とする. このとき,

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

で $A = PBP^{-1}$ が成り立つ．ゆえに,

$$A = PBP^{-1} = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^{-1} + P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -3 \\ -9 & 18 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって, A のジョルダン・シェヴァレ分解は以下の通りである．

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -3 \\ -9 & 18 & 8 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = D + N.$$

例 3.27. 以下の行列のジョルダン・シェヴァレ分解を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

注意！ A が以下のように分解できる．

$$A = D' + N' \qquad D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, D' は対角化可能, N' は冪零であるが, D' と N' は交換しない．ゆえに, 上の分解は A のジョルダン・シェヴァレ分解でない．A が 2 個の固有値を持つので, 対角化可能である．ゆえに, A のジョルダン・シェヴァレ分解は単に

$$A = D + N\ , \quad D = A\ ,\ N = 0$$

である．

4 線形群

4.1 群論の復習

G を群とする．G の単位元を e で表す．G の元 x, y の演算を $x \cdot y$ または xy と表す．

定義 4.1 $H \subset G$ を部分集合とする．H が部分群であるとは, 以下が成り立つことをいう．

(a) $e \in H$ である．

(b) $x, y \in H$ ならば, $xy \in H$ である．

(c) $x \in H$ ならば, $x^{-1} \in H$ である．

注意 4.2. H が部分群になるためには,「$e \in H$ かつ任意の $x, y \in H$ に対し $xy^{-1} \in H$」が成り立つことが必要十分である．

命題 4.3 G を群とし, $S \subset G$ を空でない部分集合とする．S を含む G の部分群のうちに最小のものが存在する．それを $\langle S\rangle$ とおくと, 以下が成り立つ．

$$\langle S\rangle = \{s_1^{k_1} \ldots s_m^{k_m} \mid s_i \in S,\ k_i \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.1}$$

証明

上記の集合 (4.1) が部分群であることを示す．$S \neq \emptyset$ より $\langle S \rangle \neq \emptyset$ である．また，$x, y \in \langle S \rangle$ とし，$x = s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m}$, $y = t_1^{r_1} \dots t_d^{r_d}$ $(s_i, t_i \in S,\ k_i, r_i \in \mathbb{Z})$ とする．このとき，

$$xy^{-1} = s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m} t_d^{-r_d} \dots t_1^{-r_1}$$

となる．とくに $xy^{-1} \in \langle S \rangle$ である．したがって，$\langle S \rangle$ は部分群である．H が部分群で，$S \subset H$ とする．このとき，任意の $s_1, \dots, s_m \in S$ 及び $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$ に対し $s_1^{k_1} \dots s_m^{k_m} \in H$ である．よって，$\langle S \rangle \subset H$ となる．ゆえに，$\langle S \rangle$ は S を含む部分群のうちに最小のものである．

定義 4.4　$G = \langle S \rangle$ のとき，S が G の生成系であるという．

定義 4.5　G, G' を群とし，$f \colon G \to G'$ を写像とする．f が群準同型であるとは，任意の $x, y \in G$ に対し

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

が成り立つことをいう．

例 4.6.

- 写像 $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ は $(\mathbb{R}, +)$ から $(\mathbb{R}^*, \times)$ への群準同型である．
- $\det \colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ は群準同型である．

$f \colon G \to G'$ を群準同型とする．このとき，

(1) $H \subset G$ が部分群ならば，$f(H)$ は G' の部分群である．

(2) $H' \subset G'$ が部分群ならば，$f^{-1}(H') = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$ は G の部分群である．

定義 4.7　$f \colon G \to G'$ を群準同型とする．G, G' の単位元をそれぞれ e, e' とおく．

(a) $\mathrm{Ker}(f) := \{x \in G \mid f(x) = e'\}$ とおき，f の核という．

(b) $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) \mid x \in G\}$ とおき，f の核という．

$\mathrm{Ker}(f)$ は G の部分群であり，$\mathrm{Im}(f)$ は G' の部分群である．

定義 4.8

(a) 群準同型 $f \colon G \to G'$ が全単射であるとき，f を群同型という．

(b) 群同型 $G \to G$ のことを G の自己同型という．

$f \colon G \to G'$ を群同型とする．このとき，$f^{-1} \colon G' \to G$ も群同型である．

定義 4.9　G を群とし，H を G の部分群とする．$x \in G$ に対し，

$$xH := \{xh \mid h \in H\}$$
$$Hx := \{hx \mid h \in H\}.$$

とおき，それぞれ x の左剰余類，右剰余類という．H による左剰余類全体の集合，右剰余類全体の集合をそれぞれ G/H, $H\backslash G$ と表す．

$x, x' \in G$ に対し，以下が同値である．

(i) $xH = x'H$

(ii) $x \in x'H$

(iii) $x' \in xH$

(iv) $xH \cap x'H \neq \emptyset$

定義 4.10 G/H が有限集合のとき, H を有限指数の部分群という. このとき, G/H の元の個数を G における H の指数といい, $[G : H]$ と表す.

定義 4.11 $H \subset G$ を部分群とする. H が正規部分群であるとは, 以下の同値な条件を満たすときにいう.

(i) 任意の $g \in G, h \in H$ に対し $ghg^{-1} \in H$ である.

(ii) 任意の $g \in G$ に対し, $gHg^{-1} = H$ である. ただし, $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ とおく.

(iii) 任意の $g \in G$ に対し, $gH = Hg$ である.

このとき, $H \triangleleft G$ と表す.

$\{e\}$ と G は常に正規部分群である.

$f\colon G \to G'$ を群準同型とする. $H' \subset G'$ が G' の正規部分群ならば, $H := f^{-1}(H')$ は G の正規部分群である. とくに, $\mathrm{Ker}(f)$ は G の正規部分群である. H が G の正規部分群のとき, 左剰余類全体の集合 G/H に群になる. 実際, $g, g' \in G$ に対し,

$$(gH)(g'H) := (gg')H \tag{4.2}$$

とおくことで, G/H に演算を入れる. この演算が well-defined である (すなわち, 剰余類の代表元によらない) ことと, G/H が群をなすことは容易に確認できる. G/H を H による G の商群という. 写像 $\pi\colon G \to G/H$, $g \mapsto gH$ は全射準同型であり, 「自然な射影」と呼ばれる. $\mathrm{Ker}(\pi) = H$ が成り立つ.

定理 4.12: (準同型定理) $f\colon G \to G'$ を群準同型とする. このとき, 写像

$$\widetilde{f}\colon G/\operatorname{Ker}(f) \to \operatorname{Im}(f), \quad x\operatorname{Ker}(f) \mapsto f(x)$$

は well-defined であり, 群の同型写像である.

4.2 一般線形群, 特殊線形群

V を有限次元の $\mathbb{K}$ ベクトル空間とする. 全単射である線形写像 $V \to V$ のことを「V の自己同型写像」という. V の自己同型写像全体の集合を $\mathrm{GL}(V)$ または $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ とおく. 明らかに, 写像の合成 $(f, g) \mapsto f \circ g$ に関して $\mathrm{GL}(V)$ は群をなす. $\mathrm{GL}(V)$ を V の一般線形群という. また,

$$\mathrm{SL}(V) = \{u \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(u) = 1\}.$$

とおき, V の特殊線形群という. W を V の超平面 (すなわち, $\dim(W) = \dim(V) - 1$ を満たす線形部分空間) とする. 以下, $u \neq \mathrm{id}_V$ で, $u|_W = \mathrm{id}_W$ を満たす V の自己同型 $u \in \mathrm{GL}(V)$ について考える. このような自己同型は「拡大写像」と「せん断変換」に分けられている. $D := \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_V)$ とおく. 仮定より, D は V の直線である (すなわち $\dim(D) = 1$ である).

■拡大写像 以下の同値な条件を満たすとき, u が超平面 W と直線 D に関する拡大写像という.

(i) $\det(u) \neq 1$ である.

(ii) u が対角化可能である.

(iii) $D \not\subset W$ である.

(iv) V の適当な基底が存在し, 以下が成り立つ.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 1.$$

証明

「(ii) $\Longleftrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i)」および「(iv) $\Longrightarrow$ (iii)」は明らかである. (i) が成り立つならば, u が 1 とは異なる固有値 λ を持つ. ゆえに, $V = W \oplus \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ となり, (iv) が成り立つ. 最後に, (iii) のとき $V = W \oplus D$ となる. 明らかに $u(D) \subset D$ かつ $\dim(D) = 1$ であるので, (ii) が成り立つ.

■せん断変換　以下の同値な条件を満たすとき, u が超平面 W と直線 D に関するせん断変換という.

(i) $\det(u) = 1$ である.

(ii) u が対角化可能でない.

(iii) $D \subset W$ である.

(iv) V の適当な基底が存在し, 以下が成り立つ.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

証明

以上より, (i)〜(iii) は互いに同値である. 「(iv) $\Longrightarrow$ (i)」は明らかである. 最後に, $y \in D$ $(y \neq 0)$ とし, $y = u(z) - z$ を満たす $z \in V$ をとる. $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ を W の基底で, $u_{n-1} = y$ を満たすものとする. $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_{n-1}, z)$ とおけば (iv) が成り立つ.

$f \in V^*$ $(f \neq 0)$ および $a \in \mathrm{Ker}(f)$ $(a \neq 0)$ のとき, 線形写像 $\tau(f, a)$ を

$$\tau(f, a) \colon x \mapsto x + f(x)a$$

によって定義する. 明らかに $\tau(f, 0) = \mathrm{id}_V$ である. $a \neq 0$ のとき $\tau(f, a)$ は超平面 $\mathrm{Ker}(f)$ と直線 $\mathbb{K}a$ に関するせん断変換である. 逆に, u がせん断変換ならば $u = \tau(f, a)$ を満たす $f \in V^*$ および $a \in \mathrm{Ker}(f)$ $(a \neq 0)$ が存在する.

補題 4.13　$a, b \in \mathrm{Ker}(f)$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) $\tau(f, a) \circ \tau(f, b) = \tau(f, a + b)$ である.

(2) $\tau(f, a)^{-1} = \tau(f, -a)$ である.

証明

$x \in V$ とすると, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\tau(f, a) \circ \tau(f, b))(x) &= \tau(f, a)(x + f(x)b) = \tau(f, a)(x) + f(x)\tau(f, a)(b) \\ &= x + f(x)a + f(x)(b + f(b)a) = x + f(x)(a + b) = \tau(f, a + b)(x). \end{aligned}$$

$b = -a$ とおけば (2) が分かる.

補題 4.14 $u \in \mathrm{End}(V)$ $(u \neq \mathrm{id})$ とし, $D \subset V$ を直線とする. また, u が 以下の条件を満たすとする.

(1) $u|_D = \mathrm{id}_D$ である.

(2) u で定まる写像 $\overline{u}\colon V/D \to V/D$ が恒等写像である.

このとき, u が超平面 $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ と直線 D に関するせん断変換である.

証明

$W = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_V)$ とおく. 仮定より任意の $x \in V$ に対し $u(x) - x \in D$ であるので, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_V) = D$ である. ゆえに, W は V の超平面である. (2.3) より $\det(u) = \det(u|_D)\det(\overline{u}) = 1$ であるので, u は超平面 W と直線 D に関するせん断変換である.

定義 4.15 G を群とし, $x, y \in G$ とする. x, y が共役でるとは, $y = gxg^{-1}$ となる $g \in G$ が存在することをいう. また, x と共役である元全体の集合を x の共役類という.

命題 4.16 τ を超平面 W と直線 D に関するせん断変換とする.

(1) 任意の $u \in \mathrm{GL}(V)$ に対し, $u\tau u^{-1}$ は超平面 $u(W)$ と直線 $u(D)$ に関するせん断変換である.

(2) $f \in V^*$, $(f \neq 0)$ および $a \in \mathrm{Ker}(f)$ のとき, 以下が成り立つ.

$$u \circ \tau(f, a) \circ u^{-1} = \tau(f \circ u^{-1}, u(a)).$$

(3) せん断変換のどの 2 つも $\mathrm{GL}(V)$ において共役である.

(4) $\dim(V) \geq 3$ のとき, せん断変換のどの 2 つも $\mathrm{SL}(V)$ において共役である.

証明

$$\begin{aligned}(u \circ \tau(f, a) \circ u^{-1})(x) =& u(\tau(f, a)(u^{-1}(x))) = u(x + f(u^{-1}(x))a) \\ =& u(x) + f(u^{-1}(x))u(a) = \tau(f \circ u^{-1}, u(a))(x)\end{aligned}$$

より, $u \circ \tau(f, a) \circ u^{-1} = \tau(f \circ u^{-1}, u(a))$ である. また, $\mathrm{Ker}(f \circ u^{-1}) = u(W)$ であるので, (1) が成り立つ. (3) はせん断変換の特徴付け (iv) より従う. 最後に, (4) を示す. τ_1, τ_2 をせん断変換とする. (3) より, $\tau_2 = u \circ \tau_1 \circ u^{-1}$ を満たす $u \in \mathrm{GL}(V)$ が存在する. $\lambda = \det(u)$ とおく. $\det(v) = \lambda^{-1}$ かつ $\tau_1 = v \circ \tau_1 \circ v^{-1}$ を満たす $v \in \mathrm{GL}(V)$ が存在することを示せば良い. なぜならば, このとき $\tau_2 = (u \circ v) \circ \tau_1 \circ (u \circ v)^{-1}$ となり, 主張が分かる. 適当な V の基底 $\mathcal{B}$ を取れば,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau_1) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とできる. このとき,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & \lambda^{-1} & \\ & & & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

とすれば良い.

今, $\dim(V)=2$ とし, V のせん断変換について考える. このとき, 任意のせん断変換 τ は適当な基底 $\mathcal{B}$ に関して

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\tau)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad a\in\mathbb{K}^*$$

と表せる. $a,a'\in\mathbb{K}$ で,

$$T=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad T'=\begin{pmatrix}1 & a'\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおく. T,T' が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ において共役かどうかを調べる. $T'=ATA^{-1}$ $(A\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ ならば, $A(\mathrm{Ker}(T-E_2))=\mathrm{Ker}(T'-E_2)$ となる. よって,

$$A=\begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}$$

という形の行列である. よって,

$$\begin{pmatrix}1 & a'\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r & s\\ 0 & r^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^{-1} & -s\\ 0 & r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & ar^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

以上より, T と T' が $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ において共役である $\Longleftrightarrow$ a'/a が $\mathbb{K}^*$ において平方である. 例えば, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ のとき, T と T' が共役であることと, $a/a'>0$ であることは同値である.

4.3 中心

定義 4.17 G を群とする. このとき,

$$Z(G)=\{g\in G\mid \text{任意の } h\in G \text{ に対し, } gh=hg\}$$

とおき, G の中心という.

群 $\mathrm{GL}(V)$ の中心について考える. $u\in Z(\mathrm{GL}(V))$ とする. また, τ を超平面 W と直線 D に関するせん断変換とする. $\tau=u\circ\tau\circ u^{-1}$ であるので, 命題 4.16 より $u(W)=W$ かつ $u(D)=D$ である.

補題 4.18 $u\in\mathrm{GL}(V)$ とする. 任意の直線 D に対し $u(D)=D$ であるならば, u がスカラー変換である.

証明

任意の $x\in V$ $(x\neq 0)$ に対し, $u(x)=\lambda_x x$ となる $\lambda_x\in\mathbb{K}$ が存在する. 全ての $x,y\in V$ $(x,y\neq 0)$ に対し $\lambda_x=\lambda_y$ を示せば良い. (x,y) が一次従属であるとき, $y=\mu x$ $(\mu\in\mathbb{K}^*)$ と書ける. よって, $\lambda_y y=u(y)=\mu u(x)=\mu\lambda_x x=\lambda_x y$ となり, ゆえに $\lambda_x=\lambda_y$ である. (x,y) が線形独立であるとする. $u(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)$ である. 一方,

$$u(x+y)=u(x)+u(y)=\lambda_x x+\lambda_y y$$

である. (x,y) が線形独立より, $\lambda_x=\lambda_{x+y}=\lambda_y$ である.

$\mu_n(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ に属する 1 の n 乗根全体の集合とする. すなわち, $\mu_n(\mathbb{K})=\{\lambda\in\mathbb{K}\mid\lambda^n=1\}$ とおく.

定理 4.19 $\dim_{\mathbb{K}}(V)=n$ とおく．以下が成り立つ．

$$Z(\mathrm{GL}(V))=\{\lambda\,\mathrm{id}_V \mid \lambda\in\mathbb{K}^*\}$$
$$Z(\mathrm{SL}(V))=\{\lambda\,\mathrm{id}_V \mid \lambda\in\mu_n(\mathbb{K})\}$$

証明

- $u\in Z(\mathrm{GL}(V))$ とする．補題 4.18 より u がスカラー変換である．逆に，スカラー変換は明らかに $\mathrm{GL}(V)$ の中心に属する．
- $u\in Z(\mathrm{SL}(V))$ とする．せん断変換が $\mathrm{SL}(V)$ に属するので，上記と同様に u がスカラー変換であることがいえる．よって，$u=\lambda\,\mathrm{id}_V$ $(\lambda\in\mathbb{K}^*)$ と表せる．また，$\det(u)=\lambda^n$ より，$\lambda\in\mu_n(\mathbb{K})$ である．

4.4 生成系

定理 4.20 $\mathrm{SL}(V)$ がせん断変換によって生成される．

補題 4.21 $\dim_{\mathbb{K}}(V)\geq 2$ とする．$x,y\in V$ $(x,y\neq 0)$ に対し，以下が成り立つ．
(i) x,y が線形独立のとき，$\tau(x)=y$ を満たす V のせん断変換 τ が存在する．
(ii) x,y が線形従属のとき，$(\tau_1\circ\tau_2)(x)=y$ となるせん断変換 τ_1, τ_2 が存在する．

証明

- x,y が線形独立であるとする．このとき，$f(x)=1$ かつ $f(y-x)=0$ を満たす線型形式 $f\in V^*$ が存在する．$\tau=\tau(f,y-x)$ とおくと，$\tau(x)=x+(y-x)=y$ である．
- x,y が従属であるとする．$\dim_{\mathbb{K}}(V)\geq 2$ より，$z\notin\mathbb{K}x$ を満たす元 z が取れる．以上より，$\tau_2(x)=z$, $\tau_1(z)=y$ を満たすせん断変換 τ_1, τ_2 が存在する．よって，$(\tau_1\circ\tau_2)(x)=y$ である．

証明：(定理 4.20 の証明)

$u\in\mathrm{SL}(V)$ とする．u がせん断変換の合成として表せることを示せば良い．$x\in V$ $(x\neq 0)$ とする．補題 4.21 より，せん断変換の合成で表せるもので，$s(u(x))=x$ を満たす s が存在する．u と $s\circ u$ を入れ替えて $u(x)=x$ として良い．$D=\mathbb{K}x$ とおく．$u(D)=D$ であるので，命題 2.2 より線形写像 $\overline{u}\colon V/D\to V/D$ が誘導される．(2.3) より，

$$1=\det(u)=\det(u|_D)\det(\overline{u})=\det(\overline{u})$$

が成り立つ．ゆえに，$\overline{u}\in\mathrm{SL}(V/D)$ である．帰納法の仮定より，$\overline{u}=\overline{\tau}_1\circ\cdots\circ\overline{\tau}_r$ と書くことができる．但し，V/D 上の一次形式 $\overline{f}_i$ 及び $\overline{a}_i\in\mathrm{Ker}(\overline{f}_i)$ を用いて $\overline{\tau}_i=\tau(\overline{f}_i,\overline{a}_i)$ である．自然な射影 $\pi\colon V\to V/D$, $a\mapsto\overline{a}$ を考える．各 i に対し，$f_i=\overline{f}_i\circ\pi$ と定義する．また，$\pi(a_i)=\overline{a}_i$ を満たす $a_i\in V$ をとる．このとき，$f_i(a_i)=\overline{f}_i(\overline{a}_i)=0$ となり，$a_i\in\mathrm{Ker}(f_i)$ である．せん断変換 $\tau(f_i,a_i)$ を τ_i とおき，$v=\tau_1\circ\cdots\circ\tau_r$ と定める．各 i に対し $D=\mathrm{Ker}(\pi)\subset\mathrm{Ker}(f_i)$ であるので，$\tau_i|_D=\mathrm{id}_D$ である．また，任意の $x\in V$ に対し，$\tau_i(x)=x+f_i(x)a_i$ より，

$$\pi(\tau_i(x))=\pi(x)+f_i(x)\overline{a}_i=\pi(x)+\overline{f}_i(\pi(x))\overline{a}_i=\overline{\tau}_i(\pi(x)).$$

ゆえに，$\pi\circ\tau_i=\overline{\tau}_i\circ\pi$ である．したがって，

$$\pi\circ v=\pi\circ(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_r)=(\overline{\tau}_1\circ\cdots\circ\overline{\tau}_r)\circ\pi=\overline{u}\circ\pi=\pi\circ u$$

である．よって, $w := u \circ v^{-1}$ とおくと, $\pi \circ w = \pi$ である．$u|_D = v|_D = \mathrm{id}_D$ であるので, $w|_D = \mathrm{id}_D$. また, w によって誘導される線形写像 $\overline{w}\colon V/D \to V/D$ は恒等写像である．補題 4.14 より, w がせん断変換または id_V である．いずれの場合, $u = w \circ v$ がせん断変換の合成として表せる．

系 4.22 $\mathrm{GL}(V)$ がせん断変換と拡大写像によって生成される．

証明

$u \in \mathrm{GL}(V)$ とし, $\lambda = \det(u)$ とおく．v を λ 倍の拡大写像とする．このとき, $\det(u \circ v^{-1}) = 1$ であるので, $u \circ v^{-1} \in \mathrm{SL}(V)$ となる．定理 4.20 より, $u \circ v^{-1}$ がせん断変換の合成 $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ と表せる．ゆえに, $u = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r \circ v$ となり, 主張が従う．