有理等質多様体と代数幾何学

2019年度前期@早稲田大学，首都大学東京（集中講義）

埼玉大学・理工学研究科　渡邉　究[1]

Contents

Date: July 18, 2019.

1. はじめに

図形の「対称性」を数学的に記述しようとすると,「変換群」として群の概念が自然に生じる．同様に，可微分多様体や複素多様体を扱うと「リー群」が，代数多様体を扱うと「群多様体」や「代数群」が自然に現れる．本講義では，代数幾何学の初歩的な話からはじめ，まず代数群の基本的な例を紹介する．その後，グラスマン多様体や旗多様体を紹介し，最終的には印付きディンキン図形による有理等質多様体の分類を述べることを目標とする．学部レベルの線形代数や群論，環論の知識は仮定するが，代数幾何学の知識は仮定しない．また，リー環論の話が出てくるが，それについても適宜講義で補う.

参考文献として以下を挙げておく.

- 代数幾何の基本事項：[9]，[25]
- 線形代数群について：[10]，[25]
- リー環について：[11]，[24]，[25]
- 等質多様体について：[23]，[25]

また，講義では「定理」や「定義」などは英語の省略形を用いて書く.

- Thm＝Theorem（定理）
- Prop＝Proposition（命題）
- Lem＝Lemma（補題）
- Cor＝Corollary（系）
- Rmk または Rem＝Remark（注意）
- Pf＝Proof（証明）
- Def＝Definition（定義）
- e.g.＝Example（例）
- Q ＝Question（問）
- Fact（事実）
- Claim（主張）

代数学にせよ幾何学にせよ（解析については知らない），学部レベルの講義では定義や例を学ぶだけで一学期を終えることが多い．例えば，一般的な群論の講義は，群の定義から始まり正規部分群，剰余群，準同型写像などを経て，準同型定理まで到達するだけでそれなりの時間がかかる．多様体の講義では，多様体を定義した後，接空間や多様体間の写像，それらの臨界点などを学び，微分形式やベクトル場を勉強する．定義のオンパレードで，気付いた時には（もしくは最初から）全く分からない，という経験がある方も多いのではないだろうか.

本講義において，どんな教科書にも書いてあるような定理の証明を延々と行うことはしない．定理の証明は最小限に抑え，初学者向けの教科書には載っていない具体例を考察したり，自分一人では簡単には勉強できない発展的な内容を紹介することに重きを置く．この講義を通じ代数幾何やその周辺の話題に興味を持ち，各自が自分で勉強をしてくれることを願っている．

本稿において，基礎体は複素数体とする．また，可換環とは加法単位元 0 と異なる乗法単位元 1 をもつものとする．

2. アフィン多様体

2.1. アフィン多様体の復習．

定義 2.1. $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\mathbb{A}^n := \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^n$$

を**アフィン** $(n-)$ **空間（affine** $(n-)$**space）**もしくは n **次元アフィン空間（**$n-$**dimensional affine space）**という．特に，$\mathbb{A}^1$ を**アフィン直線 (affine line)**，$\mathbb{A}^2$ を**アフィン平面 (affine plane)** という．また，$\mathbb{A}^n$ の元 $P = (a_1, \cdots, a_n)$ を**点**といい，各 a_i を点 P の**座標**という．

n 変数多項式環を $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) := \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ とかく．$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ と $P := (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ に対し，

$$f(P) := f(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}$$

と定めることにより，多項式 $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{A}^n$ 上の関数とみなすことができる．このとき，多項式環 $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ は $\mathbb{A}^n$ 上の多項式関数全体の集合である．

定義 2.2. 多項式環 $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の部分集合 I に対し，

$$Z(I) := \{P \in \mathbb{A}^n | f(P) = 0 \text{ for all } f \in I\}$$

を I の**零点集合**という．さらに，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の部分集合 V が $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の部分集合 I の零点集合であるとき，V を**代数的集合（algebraic set）**という．

命題 2.3. アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の代数的集合に対し，以下が成り立つ．

(i) $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の部分集合 I の零点集合と I により生成されるイデアルの零点集合は一致する．

(ii) $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の部分集合の族 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，$Z(\cup_\lambda I_\lambda) = \cap_\lambda Z(I_\lambda)$．

(iii) $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の部分集合 I, J に対し，

$$Z(I) \cup Z(J) = Z(\{fg \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) | f \in I, g \in J\}).$$

(iv) $Z(\{0\}) = \mathbb{A}^n, Z(\{1\}) = Z(\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)) = \emptyset$．

証明． [9, I. Proposition 1.1] 参照． ■

例 2.4. $V_1 = Z(x), V_2 = Z(y) \subset \mathbb{A}^2$ はそれぞれ y 軸と x 軸に対応する．さらに，$V_1 \cup V_2 = Z(xy), V_1 \cap V_2 = Z(x, y) = \{\mathbf{0}\}$．

定義 2.5. 可換環 R に対し，R の全てのイデアルが有限生成であるとき，R を**ネター環（Noetherian ring）**という．

定理 2.6 (ヒルベルトの基底定理)**.** 可換環 R がネター環ならば，R 係数 1 変数多項式環 $R[x]$ もネター環である．

証明. [1, Theorem 7.5] 参照. ■

系 2.7. 可換環 R がネター環ならば，R 係数 n 変数多項式環 $R[x_1, \dots, x_n]$ もネター環である．

証明. n に関する帰納法を用いるとヒルベルトの基底定理から従う． ■

系 2.8. アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の任意の代数的集合は有限個の多項式 $f_1, \cdots f_m \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の零点集合として表される．

証明. 体 $\mathbb{C}$ のイデアルは 0 と $\mathbb{C}$ のみなので $\mathbb{C}$ はネター環である．よって系 2.7 により，$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ はネター環である．任意の代数的集合 $Z(I) \subset \mathbb{A}^n (I \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^n))$ に対し，命題 2.3 (i) により $Z(I) = Z(\langle I \rangle)$ が成り立つ．$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ のネター性より，$\langle I \rangle$ は有限生成なので，題意が従う． ■

定義 2.9. 命題 2.3 により，$\mathbb{A}^n$ の代数的集合全体は閉集合の公理を満たす．このようにして定まる $\mathbb{A}^n$ の位相を**ザリスキ位相（Zariski topology）**という．

例 2.10. $\mathbb{A}^1$ の開集合は $\emptyset, \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 \setminus V$（ただし，$V$ は $\mathbb{A}^1$ の有限部分集合）のいずれかである．

証明. $\mathbb{A}^1$ の閉集合が $, \mathbb{A}^1$ もしくは有限集合であることを示せば良い．位相の定義より $\emptyset$ と $\mathbb{A}^1$ が閉集合であることは良い．また，$\mathbb{A}^1$ の有限部分集合 $V = \{a_1, \dots, a_m\}$ に対し，$f(x) := (x - a_1) \dots (x - a_m)$ とおくと，$V = Z(f)$ となるので，V は $\mathbb{A}^1$ の閉集合である．

逆に V を $\mathbb{A}^1$ の閉集合とすると，V はある多項式の零点集合となる：$V = Z(f)$ $(f = f(x) \in \mathbb{C}[x])$．$V$ が空でなければ，代数学の基本定理により $f(x) = a(x - a_1) \dots (x - a_m)$ $(m \geq 1)$ とかける．$a \neq 0$ ならば，$V = \{a_1, \dots, a_m\}$ となり，$a = 0$ ならば，$V = \mathbb{A}^1$ となる．以上により成立する． ■

問 2.11. 以下を示せ．

(i) ザリスキ位相を入れた $\mathbb{A}^n$ の空でない開集合は稠密であることを示せ.[2]
(ii) ザリスキ位相を入れた $\mathbb{A}^n$ はハウスドルフ空間でないことを示せ．

例 2.12. $Z(y - x), Z(x^2 + y^2 - 1), Z(x, y) = \{\mathbf{0}\}$ は $\mathbb{A}^2$ の閉集合である．

定義 2.13. 位相空間 X とその空でない部分集合 V に対し，V の真の閉部分集合 V_1, V_2 が存在して $V = V_1 \cup V_2$ が成り立つとき，V は**可約（reducible）**であるという．また，V が可約でないとき，V は**既約（irreducible）**であるという．

[2] 講義において，次の質問が出た「$\mathbb{A}^n$ の空でないザリスキ位相に関する開集合はユークリッド位相に関して稠密であるか」．これは正しい．実際，$\mathbb{A}^n$ の空でないザリスキ開集合 U に対し，U がユークリッド位相に関して稠密でないとして矛盾を導く．このとき，ある $p \in \mathbb{A}^n \setminus U$ とその点のユークリッド開近傍 O_p が存在し，$O_p \cap U = \emptyset$ となる．すなわち，$O_p \subset \mathbb{A}^n \setminus U$ となる．いま，ある定数でない多項式 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ が存在し，$\mathbb{A}^n \setminus U \subset Z(f)$ となるので，$O_p \subset Z(f)$ である．ユークリッド位相は開球を開基として持つので，$B_\epsilon(p) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid ||z - p|| < \epsilon\} \subset Z(f)$ として良い．これは矛盾である．

例 2.14. $Z(x,y) = Z(x) \cup Z(y)$ より，$Z(x,y)$ は可約である．一方，$Z(x)$ と $Z(y)$ は既約である．

定義 2.15. $\mathbb{A}^n$ の既約閉集合を**アフィン多様体（affine variety）**という．さらに，アフィン多様体の開集合を**準アフィン多様体（quasi-affine variety）**という．

定義 2.16. $\mathbb{A}^n$ の部分集合 V に対し，

$$I(V) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) | f(P) = 0 \text{ for all } P \in V\}$$

を **V のイデアル（ideal of V）**という．

問 2.17. $I(V)$ は $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ のイデアルであることを示せ．

例 2.18. $V = Z(y-x), Z(x^2), Z(x)$ に対し，それらのイデアルはそれぞれ $(y-x), (x), (x)$ となる．

定義 2.19. 可換環 R とそのイデアル I に対し，

$$\sqrt{I} := \{f \in R | f^m \in I \text{ for some } m \in \mathbb{N}\}$$

を **I の根基イデアル（radical ideal of I）**という．一般に，$I \subset \sqrt{I}$ が成り立つ．さらに，$I = \sqrt{I}$ のとき，I を**根基イデアル（radical ideal）**という．

命題 2.20. 以下が成り立つ．

(i) 部分集合 $V_1, V_2 \subset \mathbb{A}^n$ に対し，$I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2)$.
(ii) $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ のイデアル I に対し，$I(Z(I)) = \sqrt{I}$.
(iii) 部分集合 $V \subset \mathbb{A}^n$ に対し，$Z(I(V)) = \overline{V}$．ただし，$\overline{V}$ は V の閉包とする．

証明. [9, I. Proposition 1.2] 参照． ■

定理 2.21. アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の代数的集合と多項式環 $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の根基イデアルは以下の対応により一対一に対応する：

$$\{V \subset \mathbb{A}^n | V \text{ は代数的集合}\} \to \{I \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) | I \text{ は根基イデアル}\}$$
$$V \mapsto I(V)$$
$$Z(I) \leftarrow I$$

さらに，この対応により $\mathbb{A}^n$ のアフィン多様体と $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ の素イデアルは一対一に対応する．

証明. [9, I. Corollary 1.4] 参照． ■

例 2.22. 複素係数 n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ とかく．$A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ は n^2 個の成分 $a_{i,j}$ により一意的に定まる．従って，

$$\mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^{n^2}; (a_{i,j}) \mapsto (a_{1,1}, \cdots, a_{1,n}, a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}, \cdots, a_{n,n})$$

により $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ をアフィン n^2 空間と同一視することができる．同様に，

$$\mathrm{M}(n-r, r; \mathbb{C}) := \{\mathbb{C} \text{ 係数 } (n-r) \times r \text{ 行列全体}\}$$

はアフィン $(n-r)r$ 空間 $\mathbb{A}^{(n-r)r}$ と同一視することができる．

例 2.23. 複素係数 n 次正則行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ とかく．$\mathrm{M}(n,\mathbb{C})=\mathbb{A}^{n^2}$ の座標を $\{x_{i,j}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ と表す．このとき，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\mathbb{A}^{n^2}\setminus Z(\Delta)$ とかくことができる．ただし，$\Delta=\Delta(x_{i,j})\in\mathbb{C}[\mathbb{A}^{n^2}]$ は行列式に対応する多項式

$$\Delta=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{1,\sigma(1)}x_{2,\sigma(2)}\cdots x_{n,\sigma(n)}$$

とする．従って，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は $\mathbb{A}^{n^2}$ の準アフィン多様体である．一方，$\mathbb{A}^1$ の座標を t とおき，

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) &= \{(A,t)\in\mathrm{M}(n,\mathbb{C})\times\mathbb{A}^1 | (\det A)\cdot t=1\}\\ &= Z(\Delta(x_{i,j})\cdot t-1)\subset\mathbb{A}^{n^2+1}\end{aligned}$$

とみなすことにより，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は $\mathbb{A}^{n^2+1}$ のアフィン多様体になる．

例 4.3 において確認するように，上記 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=\mathbb{A}^{n^2}\setminus Z(\Delta)$ と $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})=Z(\Delta(x_{i,j})\cdot t-1)$ は代数群の構造をもち，互いに代数群として同型になる．従って，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ をどちらを用いて定義しても良い．

問 2.24. 上記例において $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の既約性を確認せよ．

代数的集合 $V\subset\mathbb{A}^n$ と $f\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ に対し，V 上の多項式関数

$$f:V\to\mathbb{C};P\mapsto f(P)$$

を考える．$f,g\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ に対し，次の二条件は同値である：

(i) 任意の $P\in V$ に対し $f(P)=g(P)$．
(ii) $f-g\in I(V)$．

このことから，V 上の多項式関数全体は剰余環 $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V)$ と表されることが分かる．

定義 2.25. 代数的集合 $V\subset\mathbb{A}^n$ に対し，$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V)$ を $\mathcal{O}(V)$ と表し，V の**アフィン座標環（affine coordinate ring）**という．

定義 2.26. $V\subset\mathbb{A}^n$，$W\subset\mathbb{A}^m$ を代数的集合，$f:V\to W$ をそれらの間の写像とする．多項式 $f_1,\cdots,f_m\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ が存在して，任意の $P\in V$ に対し，$f(P)=(f_1(P),\cdots,f_m(P))$ が成り立つとき，f を**射（morphism）**という．このとき $f=(f_1,\cdots,f_m)$ とかく．さらに，射 $g:W\to V$ が存在し，$f\circ g=\mathrm{id}_W, g\circ f=\mathrm{id}_V$ が成り立つとき，f は**同型射（isomorpshim）**という．代数的集合 V,W の間に同型射が存在するとき，V と W は**同型（isomorphic）である**といい，$V\cong W$ と表す．

例 2.27. $C_1=Z(y-x^2),C_2:=Z(y^2-x^3)\subset\mathbb{A}^2$ に対し，

$$f_1:\mathbb{A}^1\to C_1;t\mapsto(t,t^2),\ f_2:\mathbb{A}^1\to C_2;t\mapsto(t^2,t^3)$$

を考える．このとき，f_1 は同型射である．一方，f_2 は全単射な射であるが同型射でない．

問 2.28. 上記例の主張を示せ．

代数的集合 $V \subset \mathbb{A}^n$，$W \subset \mathbb{A}^m$ とその間の射 $f = (f_1, \cdots, f_m) : V \to W$ に対し，次の $\mathbb{C}$ 代数準同形写像を考える：

$$f^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^m) = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m] \to \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]; y_i \mapsto f_i(x_1, \cdots, x_n).$$

このとき，任意の $g \in I(W)$ と $P \in V$ に対し，

$$(f^* g)(P) = (g \circ f)(P) = g(f(P)) = 0$$

となるので，$f^*(I(W)) \subset I(V)$ が成り立つ．従って，f^* は座標環の間の $\mathbb{C}$ 代数準同形写像を定める：

$$f^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V).$$

注意 2.29. 可換環 A, B に対し，準同形写像 $A \to B$ が存在するとき，B を A 代数（A-algebra）という．このとき，準同形写像 $A \to B$ により，B を A 加群とみることができることに注意する．B, C がともに A 代数であり，環準同形写像 $h : B \to C$ が A 加群として準同形であるとき，h を A 代数準同形（A-algebra homomorphism）という．

定理 2.30. アフィン空間の代数的集合 V, W に対し，V から W への射と $\mathcal{O}(W)$ から $\mathcal{O}(V)$ への $\mathbb{C}$ 代数準同形写像は以下の対応により一対一に対応する：

$$\mathrm{Mor}(V, W) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(W), \mathcal{O}(V)); f \mapsto f^*.$$

特に，V と W が同型であることと，$\mathcal{O}(W)$ と $\mathcal{O}(V)$ が同型であることは同値である．

証明. [9, I. Proposition 3.5] 参照. ■

例 2.31. 例 2.27 に現れた $C_1 = Z(y - x^2), C_2 := Z(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ について再考する．このとき，

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^1) = \mathbb{C}[t], \mathcal{O}(C_1) = \mathbb{C}[x, y]/(y - x^2) \cong \mathbb{C}[t],$$

$$\mathcal{O}(C_2) = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3) \cong \mathbb{C}[t^2, t^3]$$

に注意する．定理 2.30 を用いると，このことからも，f_1 は同型射であるが，f_2 は同型射でないことが分かる．

定義 2.32. 代数的集合 $V \subset \mathbb{A}^n$，$W \subset \mathbb{A}^m$ に対し，その積集合

$$V \times W \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$$

を V と W の積（**product of V and W**）という．

問 2.33. 上記定義において，以下を示せ．

(i) V と W の積 $V \times W \subset \mathbb{A}^{n+m}$ は代数的集合である．
(ii) $\mathcal{O}(V \times W) \cong \mathcal{O}(V) \otimes \mathcal{O}(W)$．
(iii) X と Y がアフィン多様体であれば $V \times W$ もアフィン多様体である．

2.2. **線形代数群.**

定義 2.34. アフィン代数的集合 G が群構造をもち，二つの写像

$$m : G \times G \to G; (x, y) \mapsto x \cdot y,$$
$$\iota : G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

がアフィン代数的集合の間の射であるとき，G を**アフィン代数群（affine algebraic group）**または**線形代数群（linear algebraic group）**という．

例 2.35. $\mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{A}^{n^2}$ は行列の和に関して群をなす．さらに，

$$m : \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{C}); ((a_{i,j}), (b_{i,j})) \mapsto (a_{i,j} + b_{i,j}),$$
$$\iota : \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{C}); (a_{i,j}) \mapsto (-a_{i,j})$$

はそれぞれ射である．従って，$\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ は線形代数群である．

例 2.36. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ は行列の積に関して群をなす．例 2.23 の記号を用いて

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{(A, t) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{A}^1 | (\mathrm{det} A) \cdot t = 1\} = Z(\Delta(x_{i,j}) \cdot t - 1) \subset \mathbb{A}^{n^2+1}$$

と表す．このとき，

$$m : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}); ((a_{i,j}), s), ((b_{i,j}), t)) \mapsto ((\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}), st)$$
$$\iota : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}); (A = (a_{i,j}), t) \mapsto (A^{-1}, \mathrm{det} A) = (t\tilde{A}, \mathrm{det} A)$$

はそれぞれ射である．ただし，$\tilde{A}$ は A の余因子行列である．従って，$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ は線形代数群である．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ を**一般線形代数群（general linear group）**という．

補題 2.37. 線形代数群 G の閉部分群 H は線形代数群である．

証明. G はあるアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の閉集合である．H は G の閉集合なので，H は $\mathbb{A}^n$ の閉集合，すなわち代数的集合である．さらに，H に対する $m : H \times H \to H$ と $\iota : H \to H$ は G における m と ι の H への制限として得られる．G が線形代数群であることからそれらは多項式写像として表すことができるので，H も線形代数群である． ■

定義 2.38. 線形代数群 G, G' に対し，写像 $f : G \to G'$ が群準同形写像かつ射のとき，f を**線形代数群の射（morphism of linear algebraic groups）**という．さらに，線形代数群の射 $f : G \to G'$ に対し，その逆写像 $g : G' \to G$ が存在し，g が線形代数群の射となるとき，f を**線形代数群の同型射（isomorphism of linear algebraic groups）**という．このとき，G と G' は**線形代数群として同型（isomorphic as linear algebraic groups）**という．

例 2.39. $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \backslash \{0\} = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ を **1 次元トーラス（1-dimensional torus）**という．さらに，正整数 n に対し，

$$\mathrm{T}(n, \mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \right\} \cong (\mathbb{C}^\times)^n$$

を **n 次元トーラス（n-dimensional torus）**という．補題 2.37 により，$\mathrm{T}(n, \mathbb{C})$ は線形代数群である．

例 2.40. 補題 2.37 により，以下の集合はすべて線形代数群である．

(i) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})|\det A=1\}$：**特殊線形群（special linear group）**，

(ii) $\mathrm{O}(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})|A\cdot{}^tA={}^tA\cdot A=E_n\}$：**直交群（orthogonal group）**，

(iii) $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C}):=\mathrm{O}(n,\mathbb{C})\cap\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$：**特殊直交群（special orthogonal group）**，

(iv) $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}(2n,\mathbb{C})|{}^tAJ_nA=J_n\}$：**シンプレクティック群（symplectic group）**．

ただし，E_n は n 次単位行列，J_n は $2n$ 次正方行列 $\begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix}$ とする．これらの線形代数群を**古典群 (classical group)** という．

一般に次が成り立つことが知られている．

定理 2.41. G が線形代数群であることと，G がある $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の閉部分群であることは同値である．

証明. [10, Theorem 8.6] 参照． ■

3. 射影多様体

3.1. 射影多様体の復習．

この章では $S=\mathbb{C}[X_0,\cdots,X_n]$ とする．

定義 3.1. $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ の 2 点 $P=(p_0,\cdots,p_n)$, $Q=(q_0,\cdots,q_n)$ に対し，ある $\lambda\in\mathbb{C}^\times$ が存在し $p_i=\lambda q_i$（$i=0,\cdots,n$）が成り立つとき，$P\sim Q$ と定める．この二項関係 $\sim$ は $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上の同値関係である．同値関係 $\sim$ による $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ の商集合を**射影 ($n-$) 空間（projective ($n-$)space）**または n **次元射影空間（n-dimensional projective space）**という：$\mathbb{P}^n=(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{\mathbf{0}\})/\sim$.

定義から，$\mathbb{P}^n$ は $(n+1)$ 個の複素数の比全体のなす集合である．また，$\mathbb{P}^n$ は $\mathbb{C}$ 線形空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の 1 次元線形部分空間全体のなす集合とみなすこともできる．

定義 3.2. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の元を点という．また，$(p_0,\cdots,p_n)$ を代表元にもつ同値類を $(p_0:\cdots:p_n)$ とかき，その点の**斉次座標（homogeneous coordinate）**という．

定義 3.3. $\mathbb{C}$ 線形空間 V の 1 次元線形部分空間全体のなす集合を $\mathbb{P}_*(V)$ とかき，V の**射影化（projectivization of V）**という．

射影空間 $\mathbb{P}^n$ は $(n+1)$ 個の $\mathbb{A}^n$ を張り合わせてできている．このことを確認しよう．

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n &= \{(p_0:\cdots:p_n)|(p_0,\cdots,p_n)\neq\mathbf{0}\} \\ &= \bigcup_{i=0}^{n}\{(p_0:\cdots:p_n)|p_i\neq 0\}\end{aligned}$$

とかけることに注意する．$D_+(X_i):=\{(p_0:\cdots:p_n)|p_i\neq0\}$ $(i=0,\cdots,n)$ に対し，

$$\varphi_i : D_+(X_i)\to\mathbb{A}^n;(p_0:\cdots:p_n)\mapsto\left(\frac{p_0}{p_i},\ldots,\frac{p_n}{p_i}\right) \tag{1}$$

とおく．ただし，$\left(\dfrac{p_0}{p_i},\ldots,\dfrac{p_n}{p_i}\right)$ は $\dfrac{p_i}{p_i}$ を除く．このとき，$\varphi_i : D_+(X_i) \to \mathbb{A}^n$ は全単射である．さらに，問 3.28 で確認するように，$\varphi_i : D_+(X_i) \to \mathbb{A}^n$ は代数多様体間の同型射である．従って，射影空間 $\mathbb{P}^n$ は $(n+1)$ 個の $\mathbb{A}^n$ を張り合わせとみなせる．

定義 3.4. 多項式環 $S = \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ において，$aX_0^{d_0}X_1^{d_1}\cdots X_n^{d_n}(a \in \mathbb{C}^\times, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ なる形の多項式を**単項式（monomial）**といい，その次数を $d_0 + \cdots + d_n$ と定める．次数 d の単項式の和として表される多項式を **d 次斉次式（homogeneous polynomial of degree d）**という．一般に，多項式 $f \in S$ は $f = \sum_i f_i$（f_i は i 次斉次式）と分解することができる．f_i を f の i 次斉次成分という．f の 0 でない斉次成分の最大次数を f の次数と定める．

問 3.5. 多項式 $f(X_0, \cdots, X_n) \in S$ に対し，f が d 次斉次式であることと，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $f(\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n) = \lambda^d f(X_0, \cdots, X_n)$ が成り立つことは同値であることを示せ．

アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ 上の関数として多項式関数を考えたのと同様に，射影空間上でも「多項式関数」を考えたい．しかし，一般に $P = (p_0 : \cdots : p_n) \in \mathbb{P}^n$ と $f \in S$ に対し，$f(P) := f(p_0, \cdots, p_n)$ と定めようとしても，この値は P の代表元 $(p_0 : \cdots : p_n)$ の取り方に依るため定義することができない．しかし，問 3.5 により f の零点は次のように定義することができる：

定義 3.6. 斉次多項式 $f(X_0, \cdots, X_n) \in S$ と $P = (p_0 : \cdots : p_n)$ に対し，$f(p_0, \cdots, p_n) = 0$ のとき，P を f の**零点（zero）**といい $f(P) = 0$ とかく．問 3.5 によりこの定義は P の代表元の取り方に依らない．さらに，任意の斉次多項式の集合 $T \subset \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ に対し，

$$Z(T) := \{P \in \mathbb{P}^n | f(P) = 0 \text{ for all } f \in T\}$$

を T の**零点集合（zeros of T）**という．射影空間 $\mathbb{P}^n$ の部分集合 V がある斉次多項式の集合 $T \subset \mathbb{C}[X_0, \cdots, X_n]$ の零点集合であるとき，V を**（射影）代数的集合（(projective) algebraic set）**という．

定義 3.7. イデアル $I \subset S$ が斉次多項式の集合 $T \subset S$ により生成されるとき，I を**斉次イデアル（homogeneous ideal）**という．このとき，I の**零点集合（zeros of I）**を $Z(I) := Z(T)$ により定める．

命題 2.3 と同様の命題が射影空間の代数的集合に対して成り立つ．

命題 3.8. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の代数的集合に対し，以下が成り立つ．

(i) S の斉次多項式からなる集合の族 $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し，$Z(\cup_\lambda T_\lambda) = \cap_\lambda Z(T_\lambda)$.

(ii) S の斉次多項式からなる集合 I, J に対し，

$$Z(I) \cup Z(J) = Z(\{fg \in S | f \in I, g \in J\}).$$

(iii) $Z(\{0\}) = \mathbb{P}^n, Z(\{1\}) = Z(S) = \emptyset$.

証明. [9, I. Proposition 2.1] 参照． ■

問 3.9. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の任意の代数的集合は有限個の斉次多項式 $f_1, \cdots f_m \in S$ の零点集合として表すことができることを示せ．

定義 3.10. 命題3.8により，$\mathbb{P}^n$ の代数的集合全体は閉集合の公理を満たす．このようにして定まる $\mathbb{P}^n$ の位相を**ザリスキ位相**（**Zariski topology**）という．

問 3.11. (1) において定義された $\varphi_i : D_+(X_i) \to \mathbb{A}^n$ は同相写像であることを示せ．([9, I. Proposition 2.2] 参照.)

定義 3.12. $\mathbb{P}^n$ の既約閉集合を**射影多様体**（**projective variety**）という．さらに，射影多様体の開集合を**準射影多様体**（**quasi-projective variety**）という．

定義 3.13. $\mathbb{P}^n$ の部分集合 V に対し，

$$I(V) := \langle \{ f \in S | f : \text{斉次多項式}, f(P) = 0 \text{ for all } P \in V \} \rangle$$

を V の**斉次イデアル**（**homogeneous ideal of** V）という．

例 3.14. $I(V)$ は S の斉次イデアルであることを示せ．

定理 3.15. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の代数的集合と多項式環 S の $(X_0, \ldots, X_n)$ 以外の斉次根基イデアルは以下の対応により一対一に対応する：

$$\{ V \subset \mathbb{P}^n | V \text{は代数的集合} \} \to \{ I \subset S | I \text{は} (X_0, \ldots, X_n) \text{以外の斉次根基イデアル} \}$$

$$V \mapsto I(V)$$

$$Z(I) \leftarrow I$$

さらに，この対応により $\mathbb{P}^n$ の射影多様体と S の $(X_0, \ldots, X_n)$ 以外の斉次素イデアルは一対一に対応する．

証明. [9, I. Exercises 2.4] 参照. ■

射影多様体 $V = Z(f_1, \cdots, f_m) \subset \mathbb{P}^n$ に対し，$\mathbb{P}^n$ の被覆 $\mathbb{P}^n = \bigcup D_+(X_i)$ に現れる各 $D_+(X_i)$ と V の共通部分を考える．簡単のため $i = 0$ とすると，

$$\begin{aligned}
& V \cap D_+(X_0) \\
= \ & Z(f_1, \cdots, f_m) \cap D_+(X_0) \\
= \ & \{ P = (p_0 : \cdots : p_n) \mid p_0 \neq 0,\ f_j(P) = 0 \, (j = 1, \cdots, m) \} \\
= \ & \left\{ P = \left(1 : \frac{p_1}{p_0} \cdots : \frac{p_n}{p_0} \right) \mid p_0 \neq 0,\ f_j\left(1, \frac{p_1}{p_0} \cdots, \frac{p_n}{p_0} \right) = 0 \, (j = 1, \cdots, m) \right\}
\end{aligned}$$

となるが，最後の集合は $\varphi_0 : D_+(X_0) \cong \mathbb{A}^n$ なる同一視の下，

$$Z(\{ f_j(1, x_1, \cdots, x_n) \mid j = 1, \cdots, m \}) \subset \mathbb{A}^n$$

に対応する．同様のことが各 i に対していえるので，V はアフィン多様体 $V \cap D_+(X_i)$ による被覆

$$V = \bigcup_{i=0}^{n} (V \cap D_+(X_i))$$

をもつ．以上により，射影多様体 $V \subset \mathbb{P}^n$ は $(n+1)$ 個のアフィン多様体 $V \cap D_+(X_i)$ の張り合わせであることが分かった．

定義 3.16. 位相空間 X の部分集合 V が X の開集合と閉集合の共通部分であるとき，V を**局所閉**（**locally closed**）という．

問 3.17. 位相空間 X の部分集合 V に対し，以下は同値であることを示せ：

(i) V は局所閉である．
(ii) V の任意の点 $x \in V$ に対し，その開近傍 U が存在し $U \cap V$ は（相対位相を入れた）U において閉集合である．
(iii) V は（相対位相を入れた）閉包 $\overline{V}$ において開集合である．

定義 3.18. アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ または射影空間 $\mathbb{P}^n$ の局所閉集合を**代数多様体（algebraic variety）**という．

定義 3.19. 位相空間 X が以下の条件を満たすとき，X は**ネター的（noetherian）**もしくは**ネター位相空間（noetherian topological space）**という：

任意の閉部分集合の降下列 $Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots$ に対し，ある整数 r が存在し $Y_r = Y_{r+1} = \ldots$ が成立．

命題 3.20. ネター的位相空間 X に対し，任意の空でない閉集合 Y は既約閉集合 Y_i の有限和集合 $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ として表される．さらに，$Y_i \not\supset Y_j$ $(i \neq j)$ とすると，$\{Y_i\}$ は一意的に定まる．それらを Y の**既約成分（irreducible component）**という．

証明. [9, Section I, Proposition 1.5] 参照. ■

命題 3.21. 以下が成立する：

(i) ネター的位相空間 X の部分空間は（相対位相に関して）ネター的である．
(ii) $\mathbb{A}^n$ と $\mathbb{P}^n$ はそれぞれネター的である．

証明. [9, Section I, Exercises 1.7 (c), Example 1.4.7, Exercises 2.5] 参照. ■

注意 3.22. 命題3.20，3.21により，アフィン空間または射影空間の閉集合（つまり，代数的集合）は有限個の既約閉集合（つまり，アフィン多様体，もしくは射影多様体）の和集合として表される．従って，定義3.18の意味での代数多様体とは準アフィン多様体もしくは準射影多様体の有限和集合に他ならない．（次の注意3.23により，準アフィン多様体は準射影多様体なので，より強く,「代数多様体」＝「準射影多様体の有限和集合」である.）

注意 3.23. 射影閉包を介して，アフィン多様体，準アフィン多様体，射影多様体は全て準射影多様体となることが分かる．従って，準射影多様体を代数多様体の定義としても良い．定義3.18における代数多様体の定義は古典的な定義であり，現代ではより広い対象を代数多様体と呼ぶ．例えば，Weilは"an integral separated scheme of finite type over an algebraically closed field"を抽象（代数）多様体と定義した（[9, Section II.4, P. 105] 参照）．一般に完備かつ非射影的な抽象多様体の存在が知られている．このノートでは定義3.18を代数多様体の定義として採用する．

3.2. 正則関数と射.

定義 3.24. $V \subset \mathbb{A}^n$ を局所閉集合，$f : V \to \mathbb{C}$ を関数とする．f が次の条件を満たすとき，**f は $P \in V$ で正則 (regular at P)** という：

P の開近傍 $U \subset V$ と $g, h \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ が存在し，h は U 上で零点を持たず，U 上 $f = g/h$ が成り立つ．

f が V 上のすべての点で正則なとき，**f は V 上正則 (regular on V)** という．

定義 3.25. $V \subset \mathbb{P}^n$ を局所閉集合，$f : V \to \mathbb{C}$ を関数とする．f が次の条件を満たすとき，f **は** $P \in V$ **で正則 (regular at** P**)** という：
P の開近傍 $U \subset V$ と次数の等しい斉次多項式 $g, h \in S = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ が存在し，h は U 上で零点を持たず，U 上 $f = g/h$ が成り立つ．
　f が V 上のすべての点で正則なとき，f **は** V **上正則 (regular on** V**)** という．

定義 3.26. V, W を代数多様体，$\varphi : V \to W$ を連続写像とする．任意の開集合 $U \subset W$ と任意の正則関数 $f : U \to \mathbb{C}$ に対し，$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ が正則であるとき，φ を**射（morphism）**という．さらに，射 $\psi : W \to V$ が存在し，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V, \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ が成り立つとき，φ は**同型射（isomorpshim）**という．代数多様体 V, W の間に同型射が存在するとき，V と W は**同型（isomorphic）である**といい，$V \cong W$ と表す．

問 3.27. V, W がアフィン代数的集合のとき，定義 3.26 は第 1 章で定義した定義 2.26 と同値であることを示せ．（ [9, I. Lemma 3.6] 参照）

問 3.28. (1) において定義された $\varphi_i : D_+(X_i) \to \mathbb{A}^n$ は同型射であることを示せ．（ [9, I. Proposition 3.3] 参照）

問 3.29. 代数多様体の射の合成は射となることを示せ．

定義 3.30. V を代数多様体とする．V 上の正則関数全体の集合を $\mathcal{O}(V)$ とかく．

　$\mathcal{O}(V)$ は通常の関数の和と積により可換環をなす．また，$\mathbb{C}$ 加群の構造も持つので，$\mathcal{O}(V)$ は $\mathbb{C}$ 代数である．

命題 3.31. アフィン多様体 V に対し，定義 2.25 と定義 3.30 の $\mathcal{O}(V)$ は $\mathbb{C}$ 代数として同型である．

証明. [9, Theorem 3.2] 参照． ■

定義 3.32. 代数多様体 V, W に対し，その積集合

$$V \times W$$

を V と W **の積（product of** V **and** W**）**という．

問 3.33. 上記定義において，以下を示せ．

(i) V と W が共に射影多様体ならば $V \times W$ も射影多様体である．
(ii) V と W が準射影多様体なら $V \times W$ も準射影多様体である．

4. 代数群と等質多様体

定義 4.1. 代数多様体 G が群構造をもち，二つの写像

$$m : G \times G \to G; (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

$$\iota : G \to G; x \mapsto x^{-1}$$

が代数多様体の間の射であるとき，G を**代数群（algebraic group）**または**群多様体（group variety）**という．

定義 4.2. 代数群 G, G' に対し，写像 $f : G \to G'$ が群準同形写像かつ代数多様体の射のとき，f を**代数群の射**（**morphism of algebraic groups**）という．さらに，代数群の射 $f : G \to G'$ に対し，その逆写像 $g : G' \to G$ が存在し，g が代数群の射となるとき，f を**代数群の同型射**（**isomorphism of algebraic groups**）という．このとき，G と G' は**代数群として同型**（**isomorphic as algebraic groups**）という．

例 4.3. 例 2.23 において，一般線形群を $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{A}^{n^2} \setminus Z(\Delta)$ と $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = Z(\Delta(x_{i,j}) \cdot t - 1)$ と二通りの定義を与えた．これらは互いに代数群として同型である．このことを確認しよう．いま，$G := \mathbb{A}^{n^2} \setminus Z(\Delta) \subset \mathbb{A}^{n^2}, G' := Z(\Delta(x_{i,j}) \cdot t - 1) \subset \mathbb{A}^{n^2+1}$ とおく．このとき，

$$f : G' \to G; (A, t) \mapsto A,\ g : G \to G'; A \mapsto (A, (\det A)^{-1})$$

を考える．f が代数群の射であることは明らか．$\mathcal{O}(G) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n^2})_\Delta$ となることに注意すると，g も代数群の射であることが分かる．（ただし，整域 R と $s \in R$ に対し，R_s は R の s による局所化とする．）f, g は互いに逆写像なので，f は代数群の同型射である．（[9, I. Lemma 4.2] 参照）．

例 4.4. 線形代数群は代数群である．

定義 4.5. 代数群 A が射影多様体であるとき，A を**アーベル多様体**（**Abelian variety**）という．特に，1 次元アーベル多様体を**楕円曲線**（**elliptic curve**）という．

注意 4.6. アーベル多様体はアーベル群であることが知られている．g 次元のアーベル多様体はリーマンの条件を満たす階数 $2g$ の格子 Λ による g 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^g$ の商空間 $\mathbb{C}^g/\Lambda$ として記述される．

注意 4.7. アーベル多様体については [15] が標準的な教科書として知られている．ただし，[15] を読むためには，[9] 程度の知識は必要である．一方，数論の観点から楕円曲線について学びたい者には [22] を推薦する．代数幾何学の基礎知識は仮定されていないため，学部生でも読みやすい．さらに発展的なテキストとして [21] を挙げておく．

代数群に関して，以下の結果が知られている．

定理 4.8 ([2, 5, 19])**.** 代数群 G に対し以下の三条件を満たす部分群 N が一意的に存在する：

(i) N は G の正規部分群.
(ii) N は連結線形代数群.
(iii) 商多様体 G/N が存在し，G/N はアーベル多様体.

注意 4.9. 上記定理は 1953 年に C. Chevalley によりアナウンスされた．証明のアイデアはアナウンスされたが，実際に論文として出版されたのは 1960 年 [5] であり，その証明中には 53 年以降の結果が引用されている．Chevalley の論文が出版される前に，I. Barsotti により証明が与えられた [2]．Barsotti の証明は同じアイデアに基づいているようだが， 読むのが困難なようである．現在では 1956 年に出版された M. Rosenlicht による証明 [19] が古典的証明の中では一般的なようである．現在では [6, 4, 14] など現代的な証明も知られている．上記歴史は [14] に詳しい記述がある．

定義 4.10. G を代数群，X を代数多様体とする．以下の二つの条件を満たす射

$$G \times X \to X; (g, x) \mapsto g \cdot x$$

が存在するとき，G **は（代数的に）**X **に作用する**（G **acts (algebraically) on** X）という：

(i) 任意の $x \in X$ に対し，$1_G \cdot x = x$.
(ii) 任意の $g_1, g_2 \in G, x \in X$ に対し，$(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.

また，このとき X **を** G **多様体 (**G**-variety)** という．

注意 4.11. 代数群 G が代数多様体 X に作用するとき，写像

$$G \to \mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ は同型射 }\}; g \to (x \mapsto g \cdot x)$$

が存在する．$g \in G$ の像を再び $g \in \mathrm{Aut}(X)$ とかく．自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ の幾何学的構造については，例えば [13] を参照せよ．

定義 4.12. 代数群 G が代数多様体 X に作用していると仮定する．任意の $x, y \in X$ に対しある $g \in G$ が存在し $y = g \cdot x$ となるとき，G の X への作用は**推移的 (transitive)** という．既約代数多様体 X がある代数群 G の推移的作用をもつとき，X は G **等質多様体**（G**-homogeneous variety**）または簡単に**等質多様体**（**homogeneous variety**）という．

注意 4.13. X が G 等質多様体であるなら，任意の $x, y \in X$ に対し $y = g \cdot x$ を満たす $g \in G$ が存在する．注意 4.11 により，$g \in \mathrm{Aut}(X)$ とみなすことができる．自己同型射 g により，x の開近傍 U は y の開近傍 $g(U)$ に同型である．従って，X は点 x, y の「周り」で同型である．その意味で，いたるところ「同じ性質」を持っている．

例 4.14. 既約代数群 G は G 等質多様体である．

例 4.15. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ は $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ 等質多様体である．実際，

$$\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n; (A, [\boldsymbol{x}]) \mapsto [A\boldsymbol{x}]$$

により $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ は $\mathbb{P}^n$ に作用する．ただし，ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し，$[\boldsymbol{x}] := (x_0 : \cdots : x_n)$ とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} = {}^t(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対し，$\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$ が線形独立になるようにとる．これらを用いて

$$A := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}) \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$$

とおくと，$[A^t(1, 0, \cdots, 0)] = [\boldsymbol{x}]$ となる．従って，$\mathbb{P}^n$ は $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ 等質多様体である．$\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n}$ を適当にとることにより，$\mathbb{P}^n$ は $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ 等質多様体であることも簡単に分かる．

問 4.16. $\mathbb{P}^n$ は $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$ 等質多様体であることを示せ．

5. グラスマン多様体

5.1. 外積代数. まず，外積代数の復習から始める：

定義 5.1. 環 A と A 加群 M, N に対し，写像 $f : M^r := M \times \ldots \times M \to N$ が次の条件を満たすとき，f を r **重線形** (r**-linear**) という：任意の $x_j, x'_j \in M$ $(j = 1, \ldots, r), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し，

$$f(x_1, \ldots, \alpha x_i + \beta x'_i, \ldots, x_r) = \alpha f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_r) + \beta f(x_1, \ldots, x'_i, \ldots, x_r).$$

さらに，r 重線形写像 $f : M^r \to N$ が次の条件を満たすとき，f を**交代的** (**alternating**) という：ある $i \neq j$ に対し $x_i = x_j$ ならば $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$.

命題 5.2. 環 A と A 加群 M, N に対し，以下の条件を満たす A 加群 $\wedge^r M$ と r 重線形写像 $f_0 : M^r \to \wedge^r M$ が同型の差を除いて一意的に存在する：
任意の交代的 r 重線形写像 $f : M^r \to N$ に対し，$f = g \circ f_0$ となる
加群準同形写像 $g : \wedge^r M \to N$ が一意的に存在する.

証明. M のテンソル積 $M^{\otimes r}$ を部分加群

$$\langle \{x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_r \mid x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\} \rangle$$

で剰余したものを $\wedge^r M$ とすれば良い. ■

定義 5.3. 定義 5.2 に現れる A 加群 $\wedge^r M$ を M の r **次外積** (r**-th exterior power**) という．また，$f_0(x_1, \ldots, x_r)$ を $x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ とかく.

命題 5.4. M が階数 n の自由 A 加群とする．$\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ をその基底とすると，$\wedge^r M$ は $\{\boldsymbol{e_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e_{i_r}} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$ を基底とする自由加群である.

問 5.5. 上記命題を示せ.

例 5.6. 4 次元複素ベクトル空間 $V = \mathbb{C}\boldsymbol{e_1} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_2} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_3} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_4}$ に対し，

$$\wedge^2 V = \mathbb{C}\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_3} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_4} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_3} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_4} \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{e_3} \wedge \boldsymbol{e_4}$$

となり，$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_4}, \boldsymbol{e_3} \wedge \boldsymbol{e_4}$ は線形独立である．また，交代性より，例えば，$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_1}$ が成り立つ.

5.2. グラスマン多様体. この節では $V = \mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$，$r \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq r \leq n-1)$ とする.

定義 5.7. 複素線形空間 V の r 次元線形部分空間をパラメータ付けする集合

$$G(r, V) := \{[W] \mid W \text{ は } V \text{ の } r \text{ 次元線形部分空間}\}$$

を**グラスマン多様体**（**Grassmann variety, Grassmaniann**）という.

注意 5.8. $G(1, V) = \{\mathbb{C}^n \text{の } 1 \text{ 次元線形部分空間}\} = \mathbb{P}^{n-1}$ である．従って，グラスマン多様体は射影空間の一般化とみなせる.

グラスマン多様体の参考文献として [8, Lecture 6] を挙げておく.

定義 5.9. グラスマン多様体 $G(r, V)$ 上の点 $[W] \in G(r, V)$ に対し，W の基底 $\{\boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_r}\}$ を固定する．このとき，W に対し基底の外積 $[\boldsymbol{w_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w_r}] \in \mathbb{P}_*(\wedge^r V)$ を対応させることにより写像

$$p : G(r, V) \to \mathbb{P}_*(\wedge^r V) = \mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}; W = \langle \boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r} \rangle \mapsto [\boldsymbol{w_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w_r}]$$

を得る．以下の命題でみるように，この写像は W の基底の取り方に依らず，かつ，単射となる．この写像を**プリュッカー埋め込み（Plücker embedding）**という．

命題 5.10 ([8, pp. 63-64] 参照)**.** グラスマン多様体 $G(r, V)$ とプリュッカー埋め込み p に対し，以下が成り立つ．

(i) p は W の基底の取り方に依らない．

(ii) p は単射である．

証明. (i) $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\}, \{\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r}\}$ をそれぞれ V の r 次元線形部分空間 W の基底とする．このとき，基底 $\{\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r}\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\}$ への基底の変換行列を $P = (p_{ij}) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ とすると，

$$(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}) = (\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r})P$$

が成り立つ．すなわち，$\boldsymbol{v_j} = \sum_{i=1}^r p_{ij}\boldsymbol{w_i}$ となる．すると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_r} &= (p_{11}\boldsymbol{w_1} + p_{21}\boldsymbol{w_2} + \ldots + p_{r1}\boldsymbol{w_r}) \wedge \ldots \wedge (p_{1r}\boldsymbol{w_1} + p_{2r}\boldsymbol{w_2} + \ldots + p_{rr}\boldsymbol{w_r}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) p_{1\sigma(1)} \ldots p_{r\sigma(r)} \boldsymbol{w_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w_r} \\ &= (\det P)\boldsymbol{w_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w_r}. \end{aligned}$$

よって，$[\boldsymbol{w_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w_r}] = [\boldsymbol{v_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_r}] \in \mathbb{P}_*(\wedge^r V)$ となる．

(ii) r 次元線形部分空間 $W \subset V$ の基底 $\{\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r}\}$ を固定する．$\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{w_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w_r} \in \wedge^r V$ に対し，$\Gamma_{\boldsymbol{\omega}} := \mathrm{Ker}\ (V \to \wedge^{r+1} V; \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega})$ と定める．すると，簡単にわかるように，$\Gamma_{\boldsymbol{\omega}} = W$ となる．よって，p は単射となる． ■

次に，$p(G(r, V)) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}$ が射影多様体であることを確認するために，幾つか準備をする．

定義 5.11. $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_r}$ $(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r} \in V)$ なる形にかける $\boldsymbol{\omega} \in \wedge^r V$ を**全分解可能（totally decomposable）**という．

命題 5.12. $\boldsymbol{\omega} \in \wedge^r V, \boldsymbol{v} \in V$ に対し，以下は同値である：

(i) $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\varphi}$ $(\boldsymbol{\varphi} \in \wedge^{r-1} V)$ とかける．

(ii) $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} = 0$.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) は明らか．よって逆を示す．$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} = 0$ を仮定する．基底の延長により $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$ を V の基底として良い．このとき，命題 5.4 により，

$$\{\boldsymbol{v_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n\}$$

は $\wedge^r V$ の基底をなす．よって，$a_{i_1, i_2, \ldots, i_r} \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_r} \boldsymbol{v_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}}$$

とかける．$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} = 0$ より，

$$\sum_{1<i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\boldsymbol{v_1} \wedge \boldsymbol{v_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}} = 0$$

となる．従って，$a_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = 0$ $(1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n)$ となる．すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\boldsymbol{v_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}} \\ &= \sum_{i_1=1<i_2<\ldots<i_r\le n} a_{1,i_2,\ldots,i_r}\boldsymbol{v_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}} \\ &= v \wedge \left(\sum_{1<i_2<\ldots<i_r\le n} a_{1,i_2,\ldots,i_r}\boldsymbol{v_{i_2}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}}\right)\end{aligned}$$

となり主張が示された． ■

定義 5.13. $\boldsymbol{\omega} \in \wedge^r V$ に対し，線形写像

$$\varphi(\boldsymbol{\omega}) : V \to \wedge^{r+1}V; \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{\omega}$$

が定まる．$\Gamma_{\boldsymbol{\omega}} := \mathrm{Ker}\varphi(\boldsymbol{\omega})$ とおく．

命題 5.14. $\boldsymbol{\omega} \in \wedge^r V$ に対し，以下は同値である：

(i) $\boldsymbol{\omega}$ は全分解可能である．

(ii) $\dim \Gamma_{\boldsymbol{\omega}} = r$.

証明. $\boldsymbol{\omega} = 0$ のときは明らかなので，$\boldsymbol{\omega} \neq 0$ として良い．

(i) ⇒ (ii) $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{v_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_r}$ $(\boldsymbol{v_i} \in V)$ とする．$\boldsymbol{\omega} \neq 0$ なので，$\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ は線形独立である．ここで，$W := \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\rangle$ とおくと，$\dim W = r$ となり，$\Gamma_{\boldsymbol{\omega}} = W$ となる．

(ii) ⇒ (i) $\dim \Gamma_{\boldsymbol{\omega}} = r$ とする．$\Gamma_{\boldsymbol{\omega}} = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\rangle$ とすると，$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v_i} = 0$ $(1 \le i \le r)$ となる．

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} a_{i_1,i_2,\ldots,i_r}\boldsymbol{v_{i_1}} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_{i_r}}$$

とおくと，$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v_i} = 0$ $(1 \le i \le r)$ より，$\{i_1, \ldots, i_r\} \neq \{1, 2, \ldots, r\}$ ならば $a_{i_1,i_2,\ldots,i_r} = 0$ となる．よって，$\boldsymbol{\omega} = a_{1,2,\ldots,r}\boldsymbol{v_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v_r}$ となる． ■

系 5.15. $\boldsymbol{\omega} \in \wedge^r V$ に対し，以下は同値である：

(i) $\boldsymbol{\omega}$ は全分解可能である．

(ii) $\mathrm{rank}\ \varphi(\boldsymbol{\omega}) \le n - r$.

証明. 先の命題 5.14 により，$\mathrm{rank}\ \varphi(\boldsymbol{\omega}) \ge n - r$ となることを示せば良い．そこで，$\mathrm{rank}\ \varphi(\boldsymbol{\omega}) < n - r$ と仮定し，矛盾を導く．このとき，$r < \dim \Gamma_{\boldsymbol{\omega}}$ となる．すると，命題 5.14 の (ii) ⇒ (i) の証明と同様の議論により，$\boldsymbol{\omega} = 0$ となることを示せる．よって矛盾． ■

命題 5.16 ([8, p. 64] 参照)**.** グラスマン多様体 $G(r, V)$ とプリュッカー埋め込み p に対し，$p(G(r, V)) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}$ は射影代数的集合である．

証明.

$$\varphi : \wedge^r V \to \mathrm{Hom}(V, \wedge^{r+1} V); \boldsymbol{\omega} \mapsto \varphi(\boldsymbol{\omega})$$

は線形写像である．$\mathrm{Hom}(V, \wedge^{r+1}V)$ の元 $\varphi(\boldsymbol{\omega})$ を $n \times \binom{n}{r+1}$ 行列とみることができる．このとき，行列 $\varphi(\boldsymbol{\omega})$ の各成分は $\boldsymbol{\omega}$ の関数となる．φ の線形性により，それらの関数は次数 1 の斉次式である．系 5.15 により，$[\boldsymbol{\omega}] \in p(G(r, V))$ となるのは $\mathrm{rank}\, \varphi(\boldsymbol{\omega}) \leq n - r$ が成り立つことと同値である．一方，行列の一般論により，$\mathrm{rank}\, \varphi(\boldsymbol{\omega}) \leq n - r$ となるのは行列 $\varphi(\boldsymbol{\omega})$ の任意の $(n - r + 1)$ 次小行列式が 0 となることと同値である．よって，それら小行列式の零点集合としてグラスマン多様体は定まる． ■

よって，グラスマン多様体は $p(G(r, V))$ と同一視することにより射影代数的集合の構造が入る．さらに等質性と既約性について考察する：

命題 5.17. グラスマン多様体 $G(r, V)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 等質多様体である．

証明. 写像

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times G(r, V) \to G(r, V); (A, [W]) \mapsto [A(W)]$$

により $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ は $G(r, V)$ に作用する．ただし，$A(W)$ は A の定める V 上の線形変換による線形部分空間 W の像である．$\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ を V の標準基底とする．W の基底 $\{\boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_r}\}$ に対し，$\boldsymbol{w_{r+1}}, \cdots, \boldsymbol{w_n} \in V$ を $\boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_n}$ が線形独立になるようにとる．これらを用いて

$$A := (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w_n}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

とおくと，$A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{w_i}\ (i = 1, \cdots, r)$ より

$$A \cdot [\langle \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_r} \rangle] = [\langle A\boldsymbol{e_1}, \cdots, A\boldsymbol{e_r} \rangle] = [\langle \boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_r} \rangle] = [W]$$

となる．従って，$G(r, V)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の推移的作用をもつ．$\boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_n}$ を適当にとることにより，$G(r, V)$ は $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の推移的作用をもつことも簡単に分かる．また，固定された $[W_0] \in G(r, V)$ に対し，軌道写像 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to G(r, V); A \mapsto A(W_0)$ は全射である．$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ は既約多様体であり，以下の問いにあるように代数多様体の間の射による既約集合の像は再び既約なので，$G(r, V)$ は既約である．命題 5.16 と合わせて，グラスマン多様体 $G(r, V)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 等質多様体であることが分かる． ■

問 5.18. 位相空間の間の連続写像 $f : X \to Y$ と X の既約部分集合 Z に対し，$f(Z)$ は既約であることを示せ．

ここで以下に用いる記号を定義する：

- $I_{r,n} := \{\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{Z}^r \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\}$,
- r 次元線形部分空間 $W = \langle \boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r} \rangle \subset V = \mathbb{C}^n$ に対し，$\boldsymbol{w_i} = {}^t(a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in \mathbb{C}^n$ とかく．このとき，

$$M_W := (\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_r}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix},$$

$$M_{W,\boldsymbol{i}} := (M_W \text{ の } i_1, \ldots, i_r \text{ 行からなる } r \text{ 次行列})$$

- $\mathbb{C}^n$ の標準基底を e_i $(i=1,\dots,n)$ とする．また，$\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_r)\in I_{r,n}$ に対し，$\boldsymbol{e_i}:=\boldsymbol{e_{i_1}}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{e_{i_r}}$ とおくと，$\wedge^r V=\bigoplus_{\boldsymbol{i}\in I_{r,n}}\mathbb{C}\boldsymbol{e_i}$ とかける．これにより，

$$\mathbb{P}_*(\wedge^r V)\cong\mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1};\overline{\sum_{\boldsymbol{i}\in I_{r,n}}a_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e_i}}\mapsto(\dots:a_{\boldsymbol{i}}:\dots)$$

を得る．

命題 5.19 ([8, p. 64] 参照)**.** プリュッカー埋め込み $p:G(r,V)\to\mathbb{P}_*(\wedge^r V)\cong\mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}$ は次のようにかける：

$$p:G(r,V)\to\mathbb{P}_*(\wedge^r V)\cong\mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1};[W]\mapsto(\dots:\det M_{W,\boldsymbol{i}}:\dots)_{\boldsymbol{i}\in I_{r,n}}$$

証明. r 次元線形部分空間 $W=\langle\boldsymbol{w_1},\dots,\boldsymbol{w_r}\rangle\subset V=\mathbb{C}^n$ に対し，

$$\boldsymbol{w_1}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{w_r}=(a_{11}\boldsymbol{e_1}+\dots+a_{n1}\boldsymbol{e_n})\wedge\dots\wedge(a_{1r}\boldsymbol{e_1}+\dots+a_{nr}\boldsymbol{e_n})$$

となるが，$\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,\dots,i_r)$ に対し，右辺に現れる $\boldsymbol{e_i}$ 成分は

$$(a_{i_11}\boldsymbol{e_{i_1}}+\dots+a_{i_r1}\boldsymbol{e_{i_r}})\wedge\dots\wedge(a_{i_1r}\boldsymbol{e_{i_1}}+\dots+a_{i_rr}\boldsymbol{e_{i_r}})$$

のみから得られる．また，これは次と等しい：

$$\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{i_1\sigma(1)}\dots a_{i_r\sigma(r)}e_{\boldsymbol{i}}$$

以上により，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w_1}\wedge\dots\wedge\boldsymbol{w_r}&=\sum_{\boldsymbol{i}\in I_{r,n}}\sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{i_1\sigma(1)}\dots a_{i_r\sigma(r)}e_{\boldsymbol{i}}\\&=\sum_{\boldsymbol{i}\in I_{r,n}}\det M_{W,\boldsymbol{i}}e_{\boldsymbol{i}}\end{aligned}$$

■

$\boldsymbol{i}_0=(1,2,\dots,r)$ に対し，

$$D_+(X_{\boldsymbol{i}_0}):=\{(\dots:p_{\boldsymbol{i}}:\dots)_{\boldsymbol{i}\in I_{r,n}}\in\mathbb{P}^{\binom{n}{r}-1}\mid p_{\boldsymbol{i}_0}\neq0\}$$

とおくと，$D_+(X_{\boldsymbol{i}_0})\cong\mathbb{A}^{\binom{n}{r}-1}$ である．このとき，

$$G(r,V)\cap D_+(X_{\boldsymbol{i}_0})=\{[W]\in G(r,V)\mid\det M_{W,\boldsymbol{i}_0}\neq0\}$$

となる．ここで，

$$M_W:=(\boldsymbol{w_1},\cdots,\boldsymbol{w_r})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1r}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nr}\end{pmatrix}$$

に対し，

$$M_{W,\boldsymbol{i}_0} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix}$$

である．基底の変換行列を考えることにより，次が成り立つことに注意しよう：

補題 5.20. V の r 次元線形部分空間 $W = \langle \boldsymbol{w_1}, \dots, \boldsymbol{w_r} \rangle, W' = \langle \boldsymbol{w_1}', \dots, \boldsymbol{w_r}' \rangle$ に対し，以下は同値である：

(i) $[W] = [W'] \in G(r, V)$.

(ii) ある $g \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ が存在し，$M_W \cdot g = M_{W'}$ が成り立つ．

$\det M_{W,\boldsymbol{i}_0} \neq 0$ より $\operatorname{rank} M_{W,\boldsymbol{i}_0} = r$ となるので，列基本変形により $M_{W,\boldsymbol{i}_0}$ は単位行列 E_r になる．列基本変形は右から基本行列を有限回かけることによって得られるので，ある $g \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ が存在して $M_{W,\boldsymbol{i}_0} g = E_r$ となる．従って，W の基底 $\{\boldsymbol{w_1}, \cdots, \boldsymbol{w_r}\}$ を取り換えて，

$$M_W = \begin{pmatrix} E_r \\ A \end{pmatrix}$$

とできる．ただし，$A \in \mathrm{M}(n-r, r; \mathbb{C})$ とする．従って，

$$G(r, V) \cap D_+(X_{\boldsymbol{i}_0}) \cong \mathrm{M}(n-r, r; \mathbb{C}) \cong \mathbb{A}^{(n-r)r}$$

$$M_W = \begin{pmatrix} E_r \\ A \end{pmatrix} \mapsto A = (a_{ij}) \mapsto (\cdots : a_{ij} : \cdots)$$

なる同型を得る．以上により，グラスマン多様体 $G(r, V)$ は $\mathbb{A}^{(n-r)r}$ と同型な開集合 U を含む．

ここで少し一般論に戻り，二つの定義を思い出そう．

定義 5.21. 位相空間 X に対し，

$$\dim X := \sup\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n, Z_i \text{ は } X \text{ の既約閉集合 }\}$$

を X の**次元（dimension of X）**という．

例 5.22. $\dim \mathbb{A}^n = n, \dim \mathbb{P}^n = n$ が成り立つ．それぞれ，[9, I. Proposition 1.9], [9, I. Exercises 2.7 (a)] を参照．

命題 5.23. 既約代数多様体 X とその空でない開集合 U に対し，$\dim X = \dim U$ が成り立つ．

証明. [9, I. Exercises 2.7 (b)] 参照． ■

定義 5.24. X, Y を既約代数多様体とする．$U \cong V$ を満たす空でない開集合 $U \subset X$ と $V \subset Y$ が存在するとき，X と Y は**双有理同値（birationally equivalent）**もしくは**双有理（birational）**という．特に，X が $\mathbb{P}^n$ と双有理同値なとき，X は**有理的（rational）**ないし**有理多様体（rational variety）**という．

問 5.25. 既約代数多様体に対して双有理同値は同値関係であることを示せ．

先ほどの考察から，グラスマン多様体 $G(r, V)$ は $\mathbb{A}^{(n-r)r}$ と同型な開集合 U を含む．従って，次が分かった：

命題 5.26. グラスマン多様体 $G(r, V)$ は $(n-r)r$ 次元有理多様体である．

以上をまとめて次が分かった．

定理 5.27. グラスマン多様体 $G(r, V)$ は $(n-r)r$ 次元射影有理等質多様体である．

5.3. **旗多様体.** この節では $V = \mathbb{C}^n\,(n \geq 2)$，$r_i \in \mathbb{Z}\,(r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_s < r_{s+1} = n)$ とする．$\mathbb{C}^n$ の標準基底を $\boldsymbol{e_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ とし，$E_i := \langle \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_i} \rangle$ とおく．

定義 5.28. 複素線形空間 V に対し，

$$F(r_1, \ldots, r_s, V) := \{([V_1], \ldots, [V_s]) \in G(r_1, V) \times \ldots \times G(r_s, V) \mid V_1 \subset \ldots \subset V_s \subset V\}$$

を旗多様体（**flag variety**）という．

命題 5.29. 旗多様体 $F(r_1, \ldots, r_s, V)$ は射影代数的集合である．

証明. [25, 定理 11.3] を参照． ■

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の $F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V)$ への作用を

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \times F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V) \to F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V)$$
$$(A, ([V_1], \ldots, [V_s])) \mapsto ([A(V_1)], \ldots, [A(V_s)])$$

により定める．このとき，以下が成り立つ：

命題 5.30. $F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V)$ は $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 等質多様体である．

証明. 任意の $([V_1], \ldots, [V_s]) \in F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V)$ に対し，$A(E_{r_i}) = V_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ となる $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ が存在することを示せば良い．

まず，$V_i = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_i}} \rangle$ $(i = 1, \ldots, s)$ を満たす $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_s}} \in V_s$ をとる．さらに，基底を延長することにより，$\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \in V$ が $V = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ を満たすように取ることができる．$A := (\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$ とおくと $\det A \neq 0$ となる．$\boldsymbol{v_n}$ を $\dfrac{1}{\det A}\boldsymbol{v_n}$ で置き換えることにより $\det A = 1$ として良い．構成から $A\boldsymbol{e_i} = \boldsymbol{v_i}$ となるので，

$$A(E_{r_i}) = A\langle \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_{r_i}} \rangle = \langle A\boldsymbol{e_1}, \ldots, A\boldsymbol{e_{r_i}} \rangle = \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_i}} \rangle = V_i$$

となり，$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の $F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V)$ への作用は推移的であることが分かる．さらに，$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ は既約なので，軌道写像を考えることにより，$F(r_1, r_2, \ldots, r_s, V)$ の既約性も従う． ■

任意の $\{r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_t}\} \subset \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ $(t < s, i_1 < \ldots < i_t)$ に対し，自然な全射

$$\pi^{\{r_1, \ldots, r_s\}}_{\{r_{i_1}, \ldots, r_{i_t}\}} : F(r_1, \ldots, r_s, V) \to F(r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_t}, V)$$
$$([V_1], [V_2], \ldots, [V_s]) \mapsto ([V_{i_1}], [V_{i_2}], \ldots, [V_{i_t}])$$

が存在する．この写像はグラスマン多様体の積の射影の制限として得られるので，代数多様体の射である．特にここでは

$$\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}} : F(r_1,\ldots,r_s,V) \to F(r_2,\ldots,r_s,V)$$
$$([V_1],[V_2],\ldots,[V_s]) \mapsto ([V_2],\ldots,[V_s])$$

を考える．固定された任意の $([V_2^0],\ldots,[V_s^0]) \in F(r_2,\ldots,r_s,V)$ に対して，その点におけるファイバーは

$$\begin{aligned}\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}^{-1}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}}(([V_2^0],\ldots,[V_s^0])) &= \{([V_1],[V_2^0],\ldots,[V_s^0]) \mid V_1 \subset V_2^0 : r_1 \text{ 次元部分空間}\} \\ &\cong G(r_1,V_2^0)\end{aligned}$$

となる．幾何学の言葉で述べると，$\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}}$ は $G(r_1,V_2^0)$ ファイブレーションである．より強く，以下が成り立つ：

命題 5.31. $\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}} : F(r_1,\ldots,r_s,V) \to F(r_2,\ldots,r_s,V)$ は $G(r_1,V_2^0)$ をファイバーとしてもつ（ザリスキ位相に関して）局所自明な射である．すなわち，任意の $F(r_2,\ldots,r_s,V)$ の点に対し，その開近傍 U が存在し，$\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}^{-1}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}}(U) \cong G(r_1,V_2^0) \times U$ が成り立つ．さらに，$\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}}$ の $\pi^{\{r_1,\ldots,r_s\}^{-1}}_{\{r_2,\ldots,r_s\}}(U)$ への制限は第二射影 $G(r_1,V_2^0) \times U \to U$ により与えられる．

問 5.32. 上記命題を示せ．

上記命題から直ちに次が従う．

系 5.33. $F(r_1,\ldots,r_s,V)$ と $G(r_1,\mathbb{C}^{r_2}) \times F(r_2,\ldots,r_s,V)$ は双有理同値である．

以下のような射の列を考える：

$$F(r_1,r_2,r_3\ldots,r_s,V) \to F(r_2,r_3\ldots,r_s,V) \to \ldots \to F(r_s,V) = G(r_s,V)$$

この列の各射に対し系 5.33 を繰り返し適用することにより，$F(r_1,r_2,r_3\ldots,r_s,V)$ は $G(r_1,\mathbb{C}^{r_2}) \times G(r_2,\mathbb{C}^{r_3}) \times \ldots \times G(r_s,\mathbb{C}^n)$ と双有理同値であることが分かる．さらに，定理 5.27 によりグラスマン多様体は有理的なので，それらの積 $G(r_1,\mathbb{C}^{r_2}) \times G(r_2,\mathbb{C}^{r_3}) \times \ldots \times G(r_s,\mathbb{C}^n)$ も有理的である[3]．以上をまとめて，次を得る：

命題 5.34. 旗多様体 $F(r_1,r_2,r_3\ldots,r_s,V)$ は $\sum_{i=1}^s r_i(r_{i+1}-r_i)$ 次元射影有理等質多様体である．

最後に，$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ の作用の観点から $F(r_1,\ldots,r_s,V)$ の構造を考える．まず，用語の復習から始める．

定義 5.35. 群 G が集合 X に作用すると仮定する．このとき，点 $x \in X$ に対し，

$$Gx := \mathrm{Orbit}_G(x) := \{gx | g \in G\}$$

[3]有理多様体 X,Y の積 $X \times Y$ は再び有理的である．実際，X,Y が有理的であれば，開集合 $U_X \subset X, U_Y \subset Y$ が存在し，U_X, U_Y はそれぞれ開集合 $V_X \subset \mathbb{A}^N, V_Y \subset \mathbb{A}^M$ と同形である．このとき，$X \times Y$ の開集合 $U_X \times U_Y$ は $\mathbb{A}^{N+M} \cong \mathbb{A}^N \times A^M$ の開集合 $V_X \times V_Y$ と同形なので，題意が従う

を x の**軌道（orbit of x）**といい，写像 $\varphi_x : G \to Gx; g \mapsto gx$ を**軌道写像（orbit map）**という．また，

$$\mathrm{Stab}_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$$

を G の作用に対する x の**固定化群（stabilizer）**という．

注意 5.36. 上記定義の仮定のもと，軌道写像を介し $G/\mathrm{Stab}_G(x)$ と G 軌道 Gx の元は 1 対 1 に対応することに注意する．ただし，$\mathrm{Stab}_G(x)$ は一般に G の正規部分群ではない．$G/\mathrm{Stab}_G(x)$ は G における $\mathrm{Stab}_G(x)$ の左剰余類全体の集合である．

補題 5.37. $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})}([E_{r_1}], [E_{r_2}], \ldots, [E_{r_s}])$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1s} \\ O & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2s} \\ O & O & A_{33} & \ldots & A_{3s} \\ O & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \ldots & O & A_{ss} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \mid A_{ij} \in \mathrm{M}(r_i - r_{i-1}, r_j - r_{j-1}, \mathbb{C}) \right\}$$

証明. 上記形に区分けされた行列が固定化群に含まれることは明らか．逆に，$A = (\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}) \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})}([E_{r_1}], [E_{r_2}], \ldots, [E_{r_s}])$ とする．

$$\begin{aligned} A([E_{r_1}], [E_{r_2}], \ldots, [E_{r_s}]) &= ([A(E_{r_1})], [A(E_{r_2})], \ldots, [A(E_{r_s})]) \\ &= ([\langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_1}} \rangle], [\langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_2}} \rangle], \ldots, [\langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_s}} \rangle]) \end{aligned}$$

となるが，定義より，$A([E_{r_1}], [E_{r_2}], \ldots, [E_{r_s}]) = ([E_{r_1}], [E_{r_2}], \ldots, [E_{r_s}])$ なので，

$$(\langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_1}} \rangle, \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_2}} \rangle \ldots, \langle \boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_s}} \rangle) = ([E_{r_1}], [E_{r_2}], \ldots, [E_{r_s}])$$

すなわち，$\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{r_i}}$ は $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_{r_i}}$ によって張られる． ■

今まで示したことをまとめると次を得る：

定理 5.38. 旗多様体 $F(r_1, r_2, r_3 \ldots, r_s, V)$ は $\sum_{i=1}^{s} r_i(r_{i+1} - r_i)$ 次元有理射影多様体である．さらに，$F(r_1, r_2, r_3 \ldots, r_s, V)$ の点は $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})/P$ の元と一対一に対応する．ただし，

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1s} \\ O & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2s} \\ O & O & A_{33} & \ldots & A_{3s} \\ O & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \ldots & O & A_{ss} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \mid A_{ij} \in \mathrm{M}(r_i - r_{i-1}, r_j - r_{j-1}, \mathbb{C}) \right\}$$

とする．

上記定理において $F(r_1, r_2, r_3 \ldots, r_s, V)$ は $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})/P$ と集合として対応があることを示したが，より強く代数多様体として同型となる．そのことを論じるためには，群作用による商多様体の概念を導入する必要がある．以下，幾何学的商の定義と関連する定理を確認する．

X を代数多様体，G を X に代数的に作用する代数群とする．このとき，

$$G \times \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X); (g, f) \mapsto (x \mapsto f(g^{-1} \cdot x))$$

により，G は $\mathcal{O}(X)$ に作用する．G 不変な正則関数全体の集合

$$\mathcal{O}(X)^G := \{f \in \mathcal{O}(X) \mid g \cdot f = f \ (\forall g \in G)\}$$

は $\mathbb{C}$ 代数となることに注意する．

定義 5.39. Y を代数多様体，$\pi : X \to Y$ を射とする．多様体と射の組み (Y, π) が以下の条件を満たすとき，組み (Y, π)（もしくは単に Y）を X の G による**幾何学的商（geometric quotient）**という：

(i) π は全射であり，π の任意のファイバーは G 軌道である．
(ii) 集合 $U \subset Y$ に対し，U が Y の開集合であることと $\pi^{-1}(U)$ が X の開集合であることは同値である．
(iii) 任意の開集合 $U \subset Y$ に対し，π^* は同型 $\mathcal{O}(U) \cong \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^G$ を引き起こす．

線形代数群とその閉部分群に対して幾何学的商が存在する：

定理 5.40. 線形代数群 G とその閉部分群 H に対し，左剰余類全体のなす集合 G/H に以下の条件を満たす G 多様体の構造が一意的に定まる：

(i) $\pi : G \to G/H; g \mapsto gH$ は射である．
(ii) 集合 $U \subset G/H$ に対し，U が G/H の開集合であることと $\pi^{-1}(U)$ が G の開集合であることは同値である．
(iii) 任意の開集合 $U \subset G/H$ に対し，π^* は同型 $\mathcal{O}(U) \cong \mathcal{O}(\pi^{-1}(U))^H$ を引き起こす．

さらに，G/H は非特異代数多様体である．

証明. [25, 5.1 章], [10, Chapter 12] 参照. ■

例 5.41. 一般に，代数群 G と G 多様体 X に対し，その幾何学的商は存在しない．例えば以下のような例がある：

(i) $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{C}$ に作用するが，その幾何学的商は存在しない．
(ii) $\mathbb{C}^\times$ を $\mathbb{C}^2$ にスカラー倍により作用させる．このとき，$\mathbb{C}^\times$ による $\mathbb{C}^2$ の幾何学的商は存在しない．

証明. (i) $\mathbb{C}$ における $\mathbb{C}^\times$ 軌道は原点 $\{0\}$ とそれ以外の点全体 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ である．従って，幾何学的商が存在するならそれは 2 点集合となる．しかし，$\mathbb{C}$ の既約性により，$\mathbb{C}$ から 2 点集合への射は存在しない．

(ii) $\mathbb{C}^\times$ による $\mathbb{C}^2$ の幾何学的商が存在すると仮定し，それを $\pi : \mathbb{C}^2 \to V$ とかく．$\mathbb{C}^2$ における $\mathbb{C}^\times$ 軌道は $\ell_{\boldsymbol{v}} := \{c\boldsymbol{v} \mid c \in \mathbb{C}^*\}$ $(\boldsymbol{v} \neq 0)$ と原点 $\{\mathbf{0}\}$ からなる．ただし，$\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}'$ なる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在するときかつそのときに限り $\ell_{\boldsymbol{v}} = \ell_{\boldsymbol{v}'}$ となる．いま，

$$\pi(\ell_{\boldsymbol{v}} \cup \{\mathbf{0}\}) = \pi(\,\overline{\ell_{\boldsymbol{v}}}\,) \subset \overline{\pi(\ell_{\boldsymbol{v}})}$$

となるが，定義 5.39 の (i) の条件により，$\pi(\ell_{\boldsymbol{v}})$ は 1 点である．従って，

$$\pi(\ell_{\boldsymbol{v}} \cup \{\mathbf{0}\}) = \{\pi(\mathbf{0})\}$$

となる．すなわち，π は定値写像となる．しかし，それは定義 5.39 の (i) の条件に反する． ■

命題 5.42. $x \in X$ の軌道 Gx は X の局所閉集合である．すなわち，Gx は代数多様体である．特に，もし G が既約ならば Gx は既約代数多様体である．

証明. [25, 補題 4.25], [10, Proposition 8.3] 参照. ■

命題 5.43. $x \in X$ の軌道 Gx は G の $\mathrm{Stab}_G(x)$ による幾何学的商である：$Gx \cong G/\mathrm{Stab}_G(x)$.

証明. [25, 5.1 章], [10, Chapter 12] 参照. ■

これにより，旗多様体は $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ の商として記述されることが分かった：

定理 5.44. 定理 5.38 の記号のもと，旗多様体 $F(r_1, r_2, r_3 \dots, r_s, V)$ は幾何学的商 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})/P$ と同型である．

本講義の目的は射影等質多様体の分類を述べることである．A. Borel と R. Remmert により，以下の等質多様体の構造定理が知られている：

定理 5.45 ([3]). 任意の射影等質多様体はアーベル多様体と射影有理等質多様体の積と同型である．さらに，任意の射影有理等質多様体は半単純連結線形代数群 G の閉部分群 P による幾何学的商 G/P と同型である．

この定理を認め，以下では半単純連結線形代数群 G の閉部分群 P による幾何学的商 G/P として得られる等質多様体の分類を目標とする．

注意 5.46. 上記定理 5.45 は Borel と Remmert によりコンパクト等質ケーラー多様体の場合に示された．現代的な証明は例えば [4, Theorem 1.3.1] にある．また，正標数の代数閉体上定義された代数多様体の場合は [20] において扱われている．

6. リー代数

6.1. リー代数の定義と例.

定義 6.1. $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ と写像 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; (x, y) \mapsto [x, y]$ が以下の三つの条件を満たすとき，$\mathfrak{g}$ を**リー代数（リー環，Lie algebra）**，$[\ ,\ ]$ を**括弧積（bracket）**と呼ぶ：

(i) 写像 $[\ ,\ ]$ は双線形である．
(ii) 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対し，$[x, x] = 0$ が成り立つ．
(iii) **ヤコビの恒等式 (ヤコビ律，Jacobi identity)** が成り立つ：

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

定義 6.2. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その部分集合 $\mathfrak{h}$ が以下の二つの条件を満たすとき，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の**部分リー代数（Lie subalgebra）**と呼ぶ：

(i) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である．
(ii) 任意の $x, y \in \mathfrak{h}$ に対し，$[x, y] \in \mathfrak{h}$ が成り立つ．

定義から明らかに部分リー代数はリー代数である．リー代数 $\mathfrak{g}$ の線形空間としての次元をリー代数 $\mathfrak{g}$ の次元と呼び，$\dim \mathfrak{g}$ と書く．

例 6.3. 線形空間 V に対し，$[x,y] := 0$ $(x,y \in V)$ とおくと，V はリー代数となる．任意の $x,y \in \mathfrak{g}$ に対し $[x,y]=0$ を満たすリー代数 $\mathfrak{g}$ を**可換リー代数**もしくは**自明なリー代数**と呼ぶ．

問 6.4. 1 次元リー代数は可換であることを示せ．

定義 6.5. リー代数の間の写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が以下の二つの条件を満たすとき，f を**準同形写像（homomorphism）**と呼ぶ：

(i) f は線形写像である．
(ii) 任意の $x,y \in \mathfrak{g}_1$ に対し，$f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ が成り立つ．

特に，準同形写像 f が全単射であるとき**同形写像（isomorphism）**とよぶ．リー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ の間に同形写像が存在するとき，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ は**同形である**といい，$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ と記す．

例 6.6. n 次元線形空間 V に対し，$\mathrm{End}(V) := \{f : V \to V |$ 線形変換 $\}$ とおく．交換子 $[x,y] := xy - yx$ $(x,y \in \mathrm{End}(V))$ により，$\mathrm{End}(V)$ はリー代数の構造をもつ．$\mathrm{End}(V)$ を上記括弧積によりリー代数とみなすとき，$\mathfrak{gl}(V)$ や $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ とかき，**一般リー代数（general Lie algebra）**とよぶ．すなわち，$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ とは $\mathbb{C}$ 係数 n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ に行列交換子によりリー代数の構造を入れたものである：

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) := M_n(\mathbb{C}),\ [x,y] := xy - yx\ (x,y \in M_n(\mathbb{C}))$$

問 6.7. $\mathfrak{gl}(V)$ がリー代数であることを確認せよ．

定義 6.8. $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分リー代数を**線形リー代数（linear Lie algebra）**とよぶ．

線形リー代数の例を確認しよう．

例 6.9 (A_l 型)**.** $l+1$ 次元線形空間 V に対し，

$$\mathfrak{sl}(V) := \mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{Tr}(x) = 0\}$$

を**特殊リー代数（special Lie algebra）**とよぶ．ただし，$\mathrm{Tr}(x)$ は x の（ある基底に関する）表現行列のトレースを意味する．

命題 6.10. $\mathfrak{sl}(V)$ は線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{sl}(V) = (l+1)^2 - 1$ を満たす．さらに，(i,j) 成分が 1 で他の成分は 0 である $(l+1)$ 次正方行列を e_{ij}，$h_k := e_{kk} - e_{k+1,k+1}$ とおくと，$\{e_{ij}, h_k | i \neq j, 1 \leq k \leq l\}$ が $\mathfrak{sl}(V)$ の基底を成す．

証明. $\mathrm{Tr}(x) = 0$ という条件は V の基底の取り方に依らないので，$\mathfrak{sl}(V)$ は well-defined であることに注意する．また，任意の $x,y \in \mathfrak{gl}(V), a,b \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(ax+by) = a\mathrm{Tr}(x) + b\mathrm{Tr}(y), \mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$$

が成り立つので，$\mathfrak{sl}(V)$ は線形リー代数であることが分かる．さらに，トレース $\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上の線形空間の間の線形写像とみなすと，次元定理により $\dim \mathfrak{sl}(V) = \dim \mathfrak{gl}(V) - 1 = (l+1)^2 - 1$ となる．従って，$\{e_{ij}, h_k | i \neq j, 1 \leq k \leq l\}$ が基底であることを示すには，線形独立性を示せば良いがそれは簡単に分かる． ■

例 6.11 (C_l 型)**.** $2l$ 次元線形空間 V に対し，V の基底を固定して V の元を成分表示したものと同一視する．$M = \begin{pmatrix} O & I_l \\ -I_l & O \end{pmatrix}$ により定まる V 上の非退化反対称双線形形式（シンプレクティック形式と呼ぶ）

$$\omega : V \times V \to \mathbb{C}; (v, w) \mapsto {}^t vMw$$

を考える．v, w の成分表示をそれぞれ $v = (v_i), w = (w_i)$ とすると，

$$\omega(v, w) = \sum_{i=1}^{l} v_i w_{l+i} - \sum_{i=1}^{l} w_i v_{l+i}$$

と書ける（このことから ω が実際にシンプレクティック形式であることが分かる）．このとき，

$$\mathfrak{s}p(V) := \mathfrak{s}p_{2l}(\mathbb{C}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w)),\ \forall v, w \in V\}$$

を**シンプレクティックリー代数（symplectic Lie algebra）**とよぶ．条件

$$\omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w))$$

を行列の言葉で書き直すと，

$${}^t xM + Mx = 0$$

ということに他ならない．すなわち，

$$\mathfrak{s}p_{2l}(\mathbb{C}) = \{x \in M_{2l}(\mathbb{C}) | {}^t xM + Mx = 0\}$$

と書ける．$\mathfrak{s}p(V)$ は線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{s}p(V) = 2l^2 + l$ を満たす．

問 6.12. $\mathfrak{s}p(V)$ は線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{s}p(V) = 2l^2 + l$ を満たすことを示せ．さらに，(i, j) 成分が 1 で他の成分は 0 である $2l$ 次正方行列を e_{ij} とするとき，以下のベクトルが $\mathfrak{s}p(V)$ の基底を成すことを示せ：

$$e_{ii} - e_{l+i,l+i}\ (1 \leq i \leq l),\ e_{ij} - e_{l+j,l+i}\ (1 \leq i \neq j \leq l)$$
$$e_{i,l+j} + e_{j,l+i},\ e_{l+i,j} + e_{l+j,i}\ (1 \leq i < j \leq l),\ e_{i,l+1i}, e_{l+1,i}\ (1 \leq i \leq l)$$

例 6.13 (B_l 型)**.** $2l + 1$ 次元線形空間 V に対し，V の元を成分表示したものと同一視する．$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & O & I_l \\ 0 & I_l & O \end{pmatrix}$ により定まる V 上の非退化対称双線形形式

$$\omega : V \times V \to \mathbb{C}; (v, w) \mapsto {}^t vMw$$

を考える．v, w の成分表示をそれぞれ $v = (v_i), w = (w_i)$ とすると，

$$\omega(v, w) = v_1 w_1 + \sum_{i=2}^{l+1} v_i w_{l+i} + \sum_{i=2}^{l+1} v_{l+i} w_i$$

と書ける（このことから ω が実際に非退化対称双線形形式であることが分かる）．このとき，

$$\mathfrak{o}(V) := \mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{C}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w)),\ \forall v, w \in V\}$$

を**直交リー代数（orthogonal Lie algebra）**とよぶ．

例 6.14 (D_l 型 ($l \geq 2$))**.** $2l$ 次元線形空間 V に対し，$M = \begin{pmatrix} O & I_l \\ I_l & O \end{pmatrix}$ により定まる V 上の非退化対称双線形形式

$$\omega : V \times V \to \mathbb{C}; (v, w) \mapsto {}^t vMw$$

を考える．このとき，

$$\mathfrak{o}(V) := \mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{C}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w)),\ \forall v, w \in V\}$$

も**直交リー代数（orthogonal Lie algebra）**とよぶ.

問 6.15. $\mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{C})$ と $\mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{C})$ はそれぞれ線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{C}) = 2l^2 + l, \dim \mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{C}) = 2l^2 - l$ となることを示せ．さらに，それぞれの基底を求めよ.

ここで挙げた A_l, B_l, C_l, D_l 型のリー代数を**古典型線形リー代数**と呼ぶ.
線形リー代数は多くのリー代数の例を与えることが分かる．実は，全てのリー代数は線形リー代数と同形であることが知られている：

定理 6.16 (Ado の定理 (1936))**.** 任意のリー代数 $\mathfrak{g}$ は少なくとも一つの忠実表現をもつ（表現の定義は定義 6.25 を参照のこと）．すなわち，$\mathfrak{g}$ と同形な線形リー代数が存在する.

6.2. 微分代数.

定義 6.17. $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V と双線形写像 $f : V \times V \to V; (x, y) \mapsto xy$ の組を **$\mathbb{C}$ 代数**と呼ぶ．以下，V がリー代数のときは f をリー代数の括弧積として取ることで $\mathbb{C}$ 代数とみなす.

注意 6.18. 上記定義は注意 2.29 において与えた「代数」の定義と異なる．この章では「代数」とは定義 6.17 の意味で用いる.

定義 6.19. $\mathbb{C}$ 代数 V に対し，

$$\mathrm{Der}(V) := \{D \in \mathfrak{gl}(V) | D(xy) = xD(y) + D(x)y, \forall x, y \in V\}$$

を V の**微分代数（derivation algebra）**と呼ぶ．$\mathrm{Der}(V)$ は線形リー代数である.

問 6.20. $\mathrm{Der}(V)$ が線形リー代数であることを確認せよ.

例 6.21. 一変数多項式環 $\mathbb{C}[x]$ に対し，

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}[x]) = \left\{ a(x)\frac{d}{dx} \;\middle|\; a(x) \in \mathbb{C}[x] \right\}$$

が成り立つ（$\mathbb{C}[x]$ は線形空間として無限次元であるが，定義 6.19 と同様にして $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[x])$ を定義する）.

証明. 任意の $D \in \mathrm{Der}(\mathbb{C}[x])$ に対し，

$$D(1) = D(1^2) = D(1)1 + 1D(1) = 2D(1)$$

となるので，$D(1)=0$ が成り立つ．さらに，$a(x):=D(x)$ とおくと $D(x^i)=ix^{i-1}a(x)$ ($i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$) が成り立つ．よって，任意の $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i\in\mathbb{C}[x]$ に対して，

$$D(f(x))=\sum_{i=1}^n a_i D(x^i)=\sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1}a(x)=a(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

となる．逆に，$a(x)\in\mathbb{C}[x]$ に対して $a(x)\dfrac{d}{dx}\in\mathrm{Der}(\mathbb{C}[x])$ となることは明らか．
■

問 6.22. n 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ に対し，

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n])=\left\{\sum f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\;\middle|\; f_i(x)\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]\right\}$$

が成り立つことを示せ．

リー代数に対し，その微分代数は自然に現れる：

命題 6.23. リー代数 $\mathfrak{g}$ を括弧積により $\mathbb{C}$ 代数とみなす．このとき，

$$\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g});x\mapsto(y\mapsto\mathrm{ad}(x)(y):=[x,y])$$

はリー代数の間の準同形写像である．さらに，$\mathrm{Im}(\mathrm{ad})\subset\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

証明. 括弧積の双線形性により $\mathrm{ad}(x)\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ となるので，写像 ad は well-defined である．準同形性はヤコビの恒等式から導かれる．また，後半を示すには微分の条件

$$\mathrm{ad}(x)([y,z])=[\mathrm{ad}(x)(y),z]+[y,\mathrm{ad}(x)(z)]$$

を確認すれば良いが，これもヤコビの恒等式に他ならない． ■

定義 6.24. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，命題 6.23 の準同形写像 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現（adjoint representation）**と呼ぶ．また，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のうち $\mathrm{Im}(\mathrm{ad})$ に含まれるものを**内部微分（inner derivation）**，それ以外を**外部微分（outer derivation）**と呼ぶ．

定義 6.25. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，準同形写像 $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ を**表現 (representation)** と呼ぶ．ただし，V は線形空間とする．

6.3. 線形代数群のリー代数.

定義 6.26. アフィン代数的集合 V に対し，$\mathfrak{X}(V):=\mathrm{Der}(\mathcal{O}(V))$ の元を**代数的ベクトル場（algebraic vector field）**という．

注意 6.27. 非特異アフィン多様体 V に対し，$\mathfrak{X}(V)$ は V の接束 T_V の大域切断の全体のなす空間 $\Gamma(V,T_V)$ と一致する．

定義 6.28. 線形代数群 G に対し，

$$\rho_L:G\to\mathrm{GL}(\mathcal{O}(G));g\mapsto(f(x)\mapsto f(g^{-1}x))\quad(x,g\in G)$$

を**左正則表現（left regular representation）**という．また，

$$\rho_R:G\to\mathrm{GL}(\mathcal{O}(G));g\mapsto(f(x)\mapsto f(xg))\quad(x,g\in G)$$

を**右正則表現（right regular representation）**という．

問 6.29. 上記定義の記号のもと，ρ_L は群準同形写像である．また，$\rho_L(g)$ は $\mathcal{O}(G)$ の $\mathbb{C}$ 代数自己同形写像である．これらを示せ．

補題 6.30. $D \in \mathfrak{X}(G), g \in G$ に対し，$\rho_L(g) \circ D \circ \rho_L(g^{-1}) \in \mathfrak{X}(G)$ が成り立つ．

証明. $f_1, f_2 \in \mathcal{O}(G)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
& (\rho_L(g) \circ D \circ \rho_L(g^{-1}))(f_1 \cdot f_2) \\
= \ & (\rho_L(g) \circ D)(\rho_L(g^{-1})(f_1 \cdot f_2)) \\
= \ & (\rho_L(g) \circ D)(\rho_L(g^{-1})(f_1) \cdot \rho_L(g^{-1})(f_2)) \\
= \ & \rho_L(g)\{D(\rho_L(g^{-1})(f_1)) \cdot \rho_L(g^{-1})(f_2) + \rho_L(g^{-1})(f_1) \cdot D(\rho_L(g^{-1})(f_2))\} \\
= \ & \rho_L(g)(D(\rho_L(g^{-1})(f_1))) \cdot \rho_L(g)\rho_L(g^{-1})(f_2) + \rho_L(g)\rho_L(g^{-1})(f_1) \cdot \rho_L(g)D(\rho_L(g^{-1})(f_2)) \\
= \ & (\rho_L(g) \circ D \circ \rho_L(g^{-1})(f_1)) \cdot f_2 + f_1 \cdot (\rho_L(g) \circ D \circ \rho_L(g^{-1})(f_2))
\end{aligned}
$$

■

この補題により，次を得る：

$$L : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{X}(G)); g \mapsto (D \mapsto \rho_L(g) \circ D \circ \rho_L(g^{-1}))$$

問 6.31. L が群準同形写像であることを示せ．

定義 6.32. 線形代数群 G に対し，G の左正則な作用で不変な代数的ベクトル場全体の集合

$$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G) := \mathfrak{X}(G)^{L(G)} := \{D \in \mathfrak{X}(G) \mid \rho_L(g) \circ D = D \circ \rho_L(g) \ (\forall g \in G)\}$$

を G の**リー代数（Lie algebra）**という．

問 6.33. 定義 6.32 の意味のリー代数は定義 6.1 の意味でのリー代数になることを示せ．

定義 6.34. アフィン多様体 V と $x \in V$ に対して，

$$
\begin{aligned}
T_xV \ &:= \ \mathrm{Der}(\mathcal{O}(V), \mathbb{C}) \\
&:= \ \{D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(V), \mathbb{C}) \mid D(fg) = f(x)D(g) + D(f)g(x) \ \forall f, g \in \mathcal{O}(V)\}
\end{aligned}
$$

を V の x における**接空間（tangent space）**という．

命題 6.35. アフィン多様体の間の射 $f : V \to W$ と $x \in V$ に対し，$\mathbb{C}$ 線形写像

$$df_x : T_xV \to T_{f(x)}W; D \mapsto D \circ f^*$$

が定まる．ただし，$f^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ は f から定まる自然な $\mathbb{C}$ 代数準同形写像とする．写像 df_x を **x における f の微分（the differential of f at x）**という．さらに，射の微分は関手的である．すなわち，アフィン多様体の間の射 $f : V \to W, g : W \to X$ と $x \in V$ に対し，$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$ が成り立つ．

証明. 任意の $D \in T_xV$ と任意の $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(W)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(D \circ f^*)(g_1g_2) \ &= \ D(f^*(g_1)f^*(g_2)) \\
&= \ f^*(g_1)(x)D(f^*(g_2)) + D(f^*(g_1))f^*(g_2)(x) \\
&= \ g_1(f(x))(D \circ f^*)(g_2) + (D \circ f^*)(g_1)g_2(f(x))
\end{aligned}
$$

となる．よって，$D \circ f^* \in T_{f(x)}W$ となる．線型性は明らか．また後半も簡単に示せる． ■

補題 6.36. 代数群 G に対し，その単位元 e を含む G の既約成分はただ一つ存在する（既約成分の定義は命題 3.20 を確認せよ）．その既約成分を**単位成分**（**identity component**）といい，G^o とかく．

証明. $G_1, \cdots, G_m$ を e を含む G の（全ての）既約成分とする．各 G_i は既約代数多様体なので，$G_1 \times \cdots \times G_m$ も既約代数多様体である．よって，積の射の像として得られる $G_1 \cdot \ldots \cdot G_m$ も e を含む既約代数多様体である．すなわち，ある i に対して，$G_1 \times \cdots \times G_m \subset G_i$ となるが，その一方で逆の包含も成立する．よって，$G_1 \times \cdots \times G_m = G_i$ となるので，$m = 1$ であることが分かる． ■

命題 6.37. 代数群 G とその単位成分 G^0 に対し，G^0 の G における指数 $[G : G^0]$ は有限である．さらに，G の G^0 による左剰余類分解は G の既約分解を与える．

証明. 任意の $x \in G$ に対し，x 倍写像 $x : G \to G; g \mapsto xg$ は射なので，xG^0 は既約である．このとき，xG^0 は G の既約成分である．実際，xG^0 を含む G の既約成分を Z とすると，$xG^0 \subset Z$ より，$G^0 \subset x^{-1}Z \subset G$ となる．G^0 は G の既約成分なので，$G^0 = x^{-1}Z$ となり，$Z = xG^0$ が成り立つ．命題 3.21 により G は位相空間としてネターなので，命題 3.20 により既約成分は有限個である．以上により題意が成立する． ■

注意 6.38. 命題 6.37 により，代数群に対し，G が連結であることと既約であることが同値であることが分かる．群の表現の「既約」との混同を避けるために，代数多様体として既約な代数群を「連結代数群」と呼ぶのが一般的である．

定義 6.39. G を線形代数群とする．命題 6.37 により，任意の $x \in G$ に対し，x を含む G^0 の既約成分はただ一つ存在し xG^0 とかける．ただし，G^0 は G の単位成分とする．このとき，アフィン多様体 xG^0 の x における接空間 $T_x(xG^0)$ を G の x における接空間といい T_xG とかく．

定理 6.40. [10, 9.1] 線形代数群 G に対し，

$$\theta : \mathfrak{g} \to T_eG; \delta \mapsto (f \mapsto (\delta f)(e)$$

は線形同形写像である．さらに，線形代数群の射 $\varphi : G \to G'$ に対し，$d\varphi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ はリー代数の準同形写像である．

証明の詳細は [10, 9.1] に譲り，前半の主張の証明のアイデアのみ述べる．θ が線形であることは明らかなので，その逆写像 $\eta : T_eG \to \mathfrak{g}$ を構成する．鍵となるのは G が（一般には可約）G 等質であることである．これにより，一点における接ベクトルを G の代数的ベクトル場に自然に拡張できる．そのようにして得られるベクトル場が左正則表現と可換であることを示せばよい．このことをもう少し詳しく見てみよう．まず，任意の $x \in G$ に対し，写像 $G \to G; z \mapsto xz$ を再び x で現すことにする．このとき，接空間の間の（ベクトル空間としての）同形写像

$$(dx)_e : T_eG \to T_xG; v \mapsto v \circ x^*$$

を得る．ただし，ここで $x^* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G); f(z) \mapsto f(xz)$ とする．このとき，$x^* = \rho_L(x^{-1})$ なので，$\eta(v) \in \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ を

$$\eta(v)(f)(x) := v(\rho_L(x^{-1})(f)) \ (f \in \mathcal{O}(G), x \in G)$$

により定めれば良い．[10, 9.2] において，$\eta(v)$ は次のような記号を用いて記述されている：

定義 6.41. $v \in T_eG$ に対し，$\eta(v)$ を $*v$ と表し，さらに次の表記を用いる：

$$(f*v)(x) := v(\rho_L(x^{-1})(f)) \ (f \in \mathcal{O}(G), x \in G)$$

$*v$ を v による**右畳み込み (right convolution)** という．

問 6.42. 上記定理 6.40 を証明せよ．

7. 半単純リー代数

7.1. イデアルと半単純リー代数.

以下，$\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i\ (i=1,2)$ は全て $\mathbb{C}$ 上のリー代数とする．

定義 7.1. $\mathfrak{a}$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の線形部分空間とする．任意の $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{a}$ に対し $[x,y] \in \mathfrak{a}$ を満たすとき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の**イデアル (ideal)** と呼ぶ．

例 7.2. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し，以下の集合は全て $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(i) 0 と $\mathfrak{g}$（自明なイデアル）．

(ii) $Z(\mathfrak{g}) := \left\{z \,\middle|\, [x,z]=0,\ \forall\, x \in \mathfrak{g}\right\}$：**中心 (center)**.

(iii) $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] := \left\{\sum_{i=1}^{m}[x_i,y_i] \,\middle|\, x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b}, m \geq 1\right\}$.

(iv) $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] := \left\{\sum_{i=1}^{m}[x_i,y_i] \,\middle|\, x_i, y_i \in \mathfrak{g}, m \geq 1\right\}$:**導来イデアル (derived ideal)**.

問 7.3. 例 7.2 のそれぞれの集合がイデアルとなることを示せ．

命題 7.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ に対し，$D\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ となる．

証明. 任意の $x, y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{Tr}([x,y]) = 0$ となるので，$D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ が成り立つ．よって，逆の包含関係を示す．n 次正方行列全体がなす線形空間 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ に対し，その標準基底を $e_{i,j}$ もしくは e_{ij} とかく．命題 6.10 で確認した通り，$e_{ij}\ (i \neq j), h_i := e_{ii} - e_{i+1,i+1}\ (1 \leq i \leq n-1)$ は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ の基底をなす．このとき，次の補題 7.5 により，

$$e_{ij} = [e_{ij}, e_{jj}],\ h_i = [e_{i,i+1}, e_{i+1,i}]$$

が成り立つので，$D\mathfrak{g} \supset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ となる． ■

補題 7.5. $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$ が成り立つ．

証明. 直接計算で確かめられる． ■

定義 7.6. リー代数 $\mathfrak{g}$ が以下の二つの条件を満たすとき，**単純 (simple)** と呼ぶ:

(i) $\mathfrak{g}$ のイデアルは 0 と $\mathfrak{g}$ のみである．

(ii) $D\mathfrak{g} \neq 0$.

注意 7.7. 条件 (i) を満たす場合に「単純」と定義する流儀もある．条件 (i) の下，条件 (ii) が成り立たなければ，$\dim \mathfrak{g} = 1$ となる．実際，$D\mathfrak{g} = 0$ とすると $\mathfrak{g}$ は可換である．よって，$\mathfrak{g}$ の任意の 1 次元部分空間は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．従って，条件 (i) より $\dim \mathfrak{g} = 1$ となることが分かる．このことから，条件 (ii) は $\dim \mathfrak{g} = 1$ の場合を除くために課した条件であり，本質的ではないことが分かる．

命題 7.8. 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$Z(\mathfrak{g}) = 0$ と $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ が成り立つ．

証明. 簡単． ■

例 7.9. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ は単純リー代数である．

証明. $\mathfrak{g}$ の基底

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$[x, y] = h, [h, x] = 2x, [h, y] = -2y$$

が成り立つ．$\mathfrak{a}$ を 0 でない $\mathfrak{g}$ のイデアルとすると，0 でない元 $ax + by + ch \in \mathfrak{a}$ が存在する．

$$\mathrm{ad}(x)^2(ax + by + ch) = \mathrm{ad}(x)(bh - 2cx) = -2bx,$$
$$\mathrm{ad}(y)^2(ax + by + ch) = \mathrm{ad}(y)(-ah + 2cy) = -2ay$$

より，$-2bx, 2ay \in \mathfrak{a}$ となる．もし $a \neq 0$ であれば $y \in \mathfrak{a}$ となり，$h = [x, y] \in \mathfrak{a}, 2x = [h, x] \in \mathfrak{a}$ となるので，$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ である．$b \neq 0$ のときも同様に $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ である．そこで $a = b = 0$ とすると，$ch \in \mathfrak{a}$ となるので $h \in \mathfrak{a}$ となる．このときも同様に $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ となる．以上により，定義 7.6 の条件 (i) を確認することができた．いま $\dim \mathfrak{g} = 3$ なので，注意 7.7 により定義 7.6 条件 (ii) についても成り立つ． ■

問 7.10. より一般に $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$ は単純であることを示せ．また，$\mathfrak{s}p_n(\mathbb{C}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ についてはどうか．

例 7.11. 命題 7.4 により $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ は単純リー代数でない．

定義 7.12. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，線形空間としての商（剰余）$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ を考える．任意の $\overline{x}, \overline{y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ に対し，$[\overline{x}, \overline{y}] := \overline{[x, y]}$ と定めることにより，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ はリー代数となる．$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ を**商（剰余）代数（quotient (residue) algebra）**と呼ぶ．

問 7.13. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の括弧積の定義が well-defined であることを確認し，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ がリー代数となることを確認せよ．

命題 7.14. リー代数の間の準同型写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ に対し，以下が成立する．

(i) $\mathrm{Ker} f$ は $\mathfrak{g}_1$ のイデアルである．
(ii) $\mathrm{Im} f$ は $\mathfrak{g}_2$ の部分リー代数である．
(iii) [準同型定理] $\mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$.

問 7.15. 命題 7.14 を示せ．

定義 7.16. $\mathfrak{g}$ をリー代数，$\mathfrak{g}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ をそのイデアルとする．線形空間として $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ が成り立つとき，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ の**直和 (direct sum)** と呼ぶ．もし $i \neq j$ ならば，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j = 0$ が成り立つことに注意する．

定義 7.17. リー代数 $\mathfrak{g}$ が以下の条件を満たすとき，**半単純 (simple)** と呼ぶ：
(i) $\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{g}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在し，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．
(ii) イデアル $\mathfrak{g}_i$ はリー代数として単純リー代数である．

注意 7.18. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その最大可解イデアル $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ が存在し，根基と呼ぶ．リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，根基 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ となるとき，$\mathfrak{g}$ を半単純と定義するのが一般的である．例えば，[24, 第 6 章定理 2 , 第 7 章定理 1] や [11, Chap. 3.2, Chap. 5.2 Theorem] を参照のこと．ここでは，可解リー代数の議論を省略するため，同値な言い換えである上記定義 7.17 により半単純性を定義する．

命題 7.19 (定理 6.16 の特別な場合)**.** 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は線形リー代数と同型である．

証明. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ を満たす $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ が存在する．このとき，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}$ が成り立つ．実際，$x = \sum x_i, y = \sum y_i \in \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ に対し，

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(y) &= [\sum_i x_i, \sum_j y_j] \\ &= \sum_i [x_i, y_i] = \sum_i \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}(x_i)(y_i) \end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}) = \bigoplus \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}) = 0$$

となる．従って，準同型定理から主張は従う． ■

7.2. **抽象ジョルダン分解.** ここでは抽象ジョルダン分解に関する事実を紹介する．詳細は Appendix A を参照のこと．

命題 7.20 (=Appendix, 命題 A.8)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，以下は同値である．
(i) A は対角化可能である．
(ii) $\mathbb{C}^n$ は A の固有空間の直和に分解される：

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s V_{\alpha_i}.$$

ただし，$V_{\alpha_i} := \{v \in \mathbb{C} \mid Av = \alpha_i v\}$ とする．

定義 7.21. 線形空間 V に対し，$x \in \mathrm{End}(V)$ の表現行列が命題 7.20 の条件を満たすとき，x を**半単純 (semisimple)** と呼ぶ．

補題 7.22. 行列の集合 $\{A_i\}_{i \in I} \subset M_n(\mathbb{C})$ が次を満たすとする：
任意の $i, j \in I$ に対し，$A_i \in M_n(\mathbb{C})$ は半単純かつ $A_i A_j = A_j A_i$ が成り立つ．このとき，$\{A_i\}_{i \in I} \subset M_n(\mathbb{C})$ は同時対角化可能である．すなわち，ある正則行列 P が存在して，任意の $i \in I$ に対し $P^{-1} A_i P$ は対角行列である．また，このとき $A_i \pm A_j$ も半単純である．

証明. まず，$\sharp I < \infty$ に主張が成り立つと仮定して一般の場合を導く．$V := \langle\{A_i\}\rangle_{\mathbb{C}} \subset M_n(\mathbb{C})$ に対し，その底 $\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$ を取る．仮定よりそれらは半単純であり $X_iX_j = X_jX_i$ を満たす．再び仮定より $X_1, X_2, \ldots, X_m$ が同時対角化可能である．よって，$\{A_i\}$ も同時対角化可能である．従って，$m := \sharp I < \infty$ として，m に関する帰納法で主張を示せばよい．

$m = 1$ のときは明らかなので $m \geq 2$ とする．$m-1$ まで主張が正しいと仮定し，m のとき主張が成り立つことを示す．A_1 は半単純なので，A_1 による $\mathbb{C}^n$ の固有空間分解 $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$ を得る．任意の j $(2 \leq j \leq m)$ と任意の $v \in V_{\alpha_i}$ に対して，

$$A_1(A_jv) = A_j(A_1v) = A_j(\alpha_iv) = \alpha_i(A_jv)$$

より，$A_jv \in V_{\alpha_i}$ となる．すなわち，V_{α_i} は A_j 不変である．よって，上記固有空間分解に即して基底を取ると，

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_s I_{n_s} \end{pmatrix}, \ A_j \sim \begin{pmatrix} M_1^j & & O \\ & \ddots & \\ O & & M_s^j \end{pmatrix}$$

となる．ただし，$\sim$ は「相似」（行列 X, Y に対し，ある正則行列 P により $Y = P^{-1}XP$ と書けるとき，X と Y は相似と呼んだ）であることを意味する．M_i^j は A_j が V_{α_i} に引き起こす変換の表現行列である．補題 A.15 により M_i^j は半単純である．帰納法の仮定を V_{α_i} $(1 \leq i \leq s)$ 上の線形変換を引き起こす行列 $M_i^2, M_i^3, \cdots, M_i^s$ に対して用いると，それらは V_{α_i} 上同時対角化される．よって，主張が成立する． ■

命題 7.23 (Jordan-Chevalley 分解=命題 A.22)**.** 線形空間 V 上の自己準同型写像 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対して以下が成り立つ．

(i) 次を満たす $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$ が一意的に存在する：$x = x_s + x_n$, x_s は半単純，x_n は冪零，x_s と x_n は可換.

(ii) $x_s = p(x), x_n = q(x)$ を満たす定数項を持たない一変数多項式 $p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$ が存在する．特に，x_s, x_n は x と可換な任意の自己準同型写像と可換である．

(iii) 線形部分空間 $A \subset B \subset V$ に対し $x(B) \subset A$ が成り立てば，$x_s(B), x_n(B) \subset A$ も成り立つ．

分解 $x = x_s + x_n$ を x の **Jordan-Chevalley 分解 (ジョルダン分解)** と呼ぶ．x_s を x の**半単純部分 (semisimple part)**, x_n を x の**冪零部分 (nilpotent part)** と呼ぶ.

例 7.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なる分解を考える．

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

は半単純,

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は冪零であるが $SN \neq NS$ である．命題 7.23 の意味でのジョルダン分解は以下で与えられる：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + O$$

補題 7.25 (=補題 A.23). $x \in \mathrm{End}(V)$ のジョルダン分解 $x = x_s + x_n$ に対し，$\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ は $\mathrm{ad}\, x$ のジョルダン分解である．

定義 7.26 (抽象ジョルダン分解). $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする．定理 A.25 により,

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\, \mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

が成り立つ．$x \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ のジョルダン分解を $\mathrm{ad}\, x = (\mathrm{ad}\, x)_s + (\mathrm{ad}\, x)_n$ とすると，$(\mathrm{ad}\, x)_s, (\mathrm{ad}\, x)_n \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ となる（補題 A.24）．$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ より，$\mathrm{ad}(x_s) = (\mathrm{ad}\, x)_s, \mathrm{ad}(x_n) = (\mathrm{ad}\, x)_n$ となる $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ がそれぞれ唯一つ存在し，$x = x_s + x_n, [x_s, x_n] = 0$ が成り立つ．これを $x \in \mathfrak{g}$ の **(抽象) ジョルダン分解 (Jordan decomposition** と呼び，x_s を x の**半単純成分 (semisimple part)**，x_n を x の**冪零成分 (nilpotent part)** と呼ぶ．

より一般に次が成り立つ：

定理 7.27 ([24, 第 8 章補題 4] 参照). 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対し，次を満たす $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ が一意的に存在する：任意の表現 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$\rho(x_s) = \rho(x)_s, \rho(x_n) = \rho(x)_n$ が成り立つ．

7.3. 半単純リー代数のルート分解.

この章ではリー代数 $\mathfrak{g}$ は全て半単純とする．任意の $\mathfrak{g}$ の元が冪零ならば，エンゲルの定理（例えば，[11, Chapter 3.2], [24, 第 3 章定理 5]）により $\mathfrak{g}$ が冪零となり矛盾である．すなわち，$\mathfrak{g}$ は半単純元 x をもつ．$\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\langle x \rangle_{\mathbb{C}}$ の任意の元は半単純である．従って，$\mathfrak{g}$ は任意の元が半単純である部分リー代数を含む．半単純元からなる部分リー代数を **toral** と呼ぶ．

補題 7.28 (例えば [11, Chapter 8.1, Lemma], [24, 第 8 章補題 5]). $\mathfrak{g}$ の toral 部分リー代数は可換である．

証明. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の toral 部分リー代数とする．$\mathfrak{h}$ が可換でないと仮定して矛盾を導く．このとき，ある $x \in \mathfrak{h}$ が存在して，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x \neq 0$ となる．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ は対角化可能かつ $\mathfrak{h}$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ 不変なので，補題 A.15 により $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x|_{\mathfrak{h}}$ も対角化可能である．従って，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\, x$ に関する 0 でない固有値 λ_1 が存在する．すなわち，ある $\lambda_1 \neq 0$ と $y \in \mathfrak{h}$ が存在して，$\mathrm{ad}\, x(y) = \lambda_1 y$ となる．$\mathrm{ad}\, y$ は対角化可能なので，対応する $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を以下のように書く：

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\mu} \mathfrak{g}(y, \mu),\ \mathfrak{g}(x, \mu) := \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = \mu y\}$$

$x=\sum x_\mu$ $(x_\mu \in \mathfrak{g}(y,\mu))$ なる分解に対して，

$$\sum \mu x_\mu = [y,x] = -\lambda_1 y \in \mathfrak{g}(y,0)$$

なので，$\sum \mu^2 x_\mu = [y, \sum \mu x_\mu] = 0$ となる．よって，$\mu \neq 0$ ならば $x_\mu = 0$ となる．従って，$[y,x]=0$ となり矛盾する． ■

以下，$\mathfrak{h}$ を極大 toral 部分リー代数とする．$\mathfrak{h}$ の基底 $\{h_1,\ldots,h_\ell\}$ をとる．補題 7.25 により，$\mathrm{ad}(h_1),\ldots,\mathrm{ad}(h_\ell)$ は半単純である．さらに，補題 7.28 により $\mathfrak{h}$ は可換なので，補題 7.22 を適用すると同時対角化可能であることが分かる．すなわち，$\mathfrak{g}$ の基底 $\{\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}\}$ が存在して，任意の i に対し，$\boldsymbol{e_i}$ は $\mathrm{ad}(h_1),\ldots,\mathrm{ad}(h_\ell)$ の共通の固有ベクトルである．そこで，

$$\mathrm{ad}(h_j)(\boldsymbol{e_i}) = \alpha_i^j \boldsymbol{e_i}$$

とかくと，

$$\mathrm{ad}\left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j h_j\right)(\boldsymbol{e_i}) = \left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_i^j\right)\boldsymbol{e_i}$$

が成り立つ．そこで，$\alpha_i \in \mathfrak{h}^\vee$ を任意の $\sum_{j=1}^{\ell} c_j h_j \in \mathfrak{h}$ に対し，

$$\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{\ell} c_j h_j\right) = \sum_{j=1}^{\ell} c_j \alpha_i^j$$

により定める．$\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ に対し，

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h,x] = \alpha(h)x \ (\forall h \in \mathfrak{h})\}$$

とおくと，$\mathfrak{g}_{\alpha_i} \supset \langle \boldsymbol{e_i} \rangle_{\mathbb{C}}$ が成立する．よって，

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee} \mathfrak{g}_\alpha$$

を得る．

問 7.29. 上記記号のもと，$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee} \mathfrak{g}_\alpha$ が成り立つことを示せ．

$\mathfrak{h}$ の中心化部分代数 $c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,\mathfrak{h}] = 0\}$ は $\mathfrak{g}_0$ と一致する．さらに，

$$\Phi := \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

とおき，$\alpha \in \Phi$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する**ルート (root)**，$\mathfrak{g}_\alpha$ を**ルート空間 (root space)** と呼ぶ．このとき，直和分解

$$\mathfrak{g} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

を $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）**ルート (空間) 分解 (root space decomposition, Cartan decomposition)** と呼ぶ．

例 7.30. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ のルート分解を求める．

$$\mathfrak{h} := \left\{h = \mathrm{diag}(\xi_1,\cdots,\xi_n) \mid \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0\right\}$$

とおくと，$\mathfrak{h}$ は明らかに toral である．上記と同様の方法により（$\mathfrak{h}$ が極大 toral であることは示していないが），ルート分解

$$\mathfrak{g} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

を得る．$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の標準基底 $\{e_{i,j}\}$ と $h = \mathrm{diag}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に対し，

$$[h, e_{ij}] = (\xi_i - \xi_j)e_{ij}$$

となる．よって，

$$\alpha_{ij} : h \mapsto \xi_i - \xi_j$$

とおくと，$\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^\vee$ で，

$$\mathfrak{h} \subset c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}),\ \langle e_{ij}\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}\ (i \neq j)$$

が成り立つ．明らかに $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i\neq j}\langle e_{ij}\rangle_{\mathbb{C}}$ が成り立つので，

$$\mathfrak{h} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}),\ \langle e_{ij}\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}\ (i \neq j), \Phi = \{\alpha_{ij}\ (i \neq j)\}$$

となる．$\mathfrak{h} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ より $\mathfrak{h}$ は極大可換部分代数であることが分かるので，極大 toral である．

7.4. **キリング形式.**

定義 7.31. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}; (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)$$

を $\mathfrak{g}$ 上の**キリング形式 (Killing form)** と呼ぶ．κ は $\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式である．さらに，$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$ を満たす．

問 7.32. $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$ を示せ．この意味でキリング形式は結合的である．

補題 7.33. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，κ と $\kappa_{\mathfrak{a}}$ をそれぞれのキリング形式とする．このとき，$\kappa_{\mathfrak{a}} = \kappa|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ が成り立つ．

証明. 線形空間 V とその部分空間 W に対して，V の自己準同型写像 ϕ が $\phi(V) \subset W$ を満たすとする．このとき，$\mathrm{Tr}\phi = \mathrm{Tr}(\phi|_W)$ となることに注意する．いま，$x, y \in \mathfrak{a}$ に対して $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ かつ $(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)(\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{a}$ となるので，

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)|_{\mathfrak{a}}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\,x\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\,y) = \kappa_{\mathfrak{a}}(x, y)$$

が成り立つ． ■

定義 7.34. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$\mathfrak{a}^\perp := \{x \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, y) = 0\ (\forall y \in \mathfrak{a})\}$$

と定める．特に，$\mathfrak{g}^\perp$ をキリング形式 κ の**根基 (radical)** と呼ぶ．さらに，$\mathfrak{g}^\perp = 0$ のとき，κ は**非退化 (nondegenerate)** という．

例 7.35. $\mathfrak{sl}_2$ のキリング形式を計算してみよう．例7.9と同じ記号を用いる．基底の順序を $\{x, h, y\}$ とする．このとき，

$$\mathrm{ad}\, h = \mathrm{diag}(2, 0, -2), \mathrm{ad}\, x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{ad}\, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，κ は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる．行列式は -128 なので，κ は非退化である．

より一般的に，古典型線形リー代数のキリング形式は以下のようになる．

例 7.36. $\mathfrak{g}$ を古典型線形リー代数，κ をそのキリング形式とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ならば，$\kappa(x, y) = 2n\mathrm{Tr}(xy) - 2\mathrm{Tr}(x)\mathrm{Tr}(y)$.
(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ならば，$\kappa(x, y) = 2n\mathrm{Tr}(xy)$.
(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ ならば，$\kappa(x, y) = (n-2)\mathrm{Tr}(xy)$.
(iv) $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}p_{2n}(\mathbb{C})$ ならば，$\kappa(x, y) = (2n+2)\mathrm{Tr}(xy)$.

証明. まず，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のキリング形式を計算する．$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の標準基底を e_{ij} と書くと，

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl}))(e_{gh}) &= \mathrm{ad}(e_{ij})(\delta_{lg}e_{kh} - \delta_{hk}e_{gl}) = \delta_{lg}[e_{ij}, e_{kh}] - \delta_{hk}[e_{ij}, e_{gl}] \\ &= \delta_{lg}(\delta_{jk}e_{ih} - \delta_{hi}e_{kj}) - \delta_{hk}(\delta_{jg}e_{il} - \delta_{li}e_{gj}) \\ &= \delta_{lg}\delta_{jk}e_{ih} - \delta_{lg}\delta_{hi}e_{kj} - \delta_{hk}\delta_{jg}e_{il} + \delta_{hk}\delta_{li}e_{gj}\end{aligned}$$

が成り立つ．

線形空間 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の標準内積 $(e_{ij}, e_{kl}) := \delta_{ik}\delta_{jl}$ を考える．$(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl}))(e_{gh}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の e_{gh} に関する成分は $(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl}))(e_{gh}) \in \mathfrak{gl}_n(k)$ と e_{gh} の内積の値に他ならない．

$$\begin{aligned}&(\delta_{lg}\delta_{jk}e_{ih} - \delta_{lg}\delta_{hi}e_{kj} - \delta_{hk}\delta_{jg}e_{il} + \delta_{hk}\delta_{li}e_{gj}, e_{gh}) \\ &= \delta_{lg}\delta_{jk}\delta_{ig} - \delta_{lg}\delta_{hi}\delta_{kg}\delta_{jh} - \delta_{hk}\delta_{jg}\delta_{ig}\delta_{lh} + \delta_{hk}\delta_{li}\delta_{jh}\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl})) &= \sum_{g,h}(\delta_{lg}\delta_{jk}\delta_{ig} - \delta_{lg}\delta_{hi}\delta_{kg}\delta_{jh} - \delta_{hk}\delta_{jg}\delta_{ig}\delta_{lh} + \delta_{hk}\delta_{li}\delta_{jh}) \\ &= n\delta_{li}\delta_{jk} - \delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ij}\delta_{lk} + n\delta_{kj}\delta_{li} \\ &= 2n\delta_{li}\delta_{jk} - 2\delta_{kl}\delta_{ij} = 2n\mathrm{Tr}(e_{ij}e_{kl}) - 2\mathrm{Tr}(e_{ij})\mathrm{Tr}(e_{kl})\end{aligned}$$

従って，キリング形式 κ の双線形性により，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ならば $\kappa(x, y) = 2n\mathrm{Tr}(xy) - 2\mathrm{Tr}(x)\mathrm{Tr}(y)$ が成り立つ．$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ のイデアルなので，補題7.33を適用すると，$\kappa(x, y) = 2n\mathrm{Tr}(xy)$ となることが分かる．$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ と $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}p_{2n}(\mathbb{C})$ の場合は演習問題とする． ■

問 7.37. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ と $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}p_{2n}(\mathbb{C})$ に対して，キリング形式が例7.36の形で与えられることを示せ．

命題 7.38. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，以下は同値である．

(i) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(ii) $\mathfrak{g}$ は 0 以外に可換イデアルを持たない．

証明. 一般に $\mathfrak{a}$ を可環イデアルとすると，$\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ である．$\mathfrak{g}$ を半単純とすると，定義より $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ なので $\mathfrak{a} = 0$ となる．一方，$\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ ならば，$D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ かつ $D^{k+1}\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ を満たす正の整数 k が存在する．このとき，$D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ は 0 でない可換イデアルである．■

補題 7.39. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し $\mathfrak{g}^\perp$ を B の根基とすると，$\mathfrak{g}^\perp \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

証明. 定義により，任意の $x \in \mathfrak{g}^\perp$ と $y \in D(\mathfrak{g}^\perp)$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$ となる．カルタンの判定法により，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}^\perp)$ は可解である．$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}^\perp) \cong \mathfrak{g}^\perp/Z(\mathfrak{g}^\perp)$ なので，$\mathfrak{g}^\perp$ も可解である．よって，$\mathfrak{g}^\perp \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．■

定理 7.40. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，以下は同値である．

(i) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(ii) $\mathfrak{g}$ のキリング形式 κ は非退化である．

証明. 補題 7.39 により，(i) $\Rightarrow$ (ii) は成り立つ．逆に (ii) $\Rightarrow$ (i) を示すには，命題 7.38 より，任意の $\mathfrak{g}$ の可換イデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}^\perp$ に含まれることを示せば良い．任意の $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ を考えると，$(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)^2(\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{a} = 0$ となるので，$(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)^2$ は冪零である．従って，

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$$

となる．すなわち，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\perp = 0$ が成り立つ．■

7.5. **ルートの性質.** 以下，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその極大 toral $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ に対し，ルート分解

$$\mathfrak{g} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

を考える．

命題 7.41. 上の記号の下，以下が成立する．

(i) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
(ii) キリング形式 κ に関する直交補空間 ${\mathfrak{g}_\alpha}^\perp$ は ${\mathfrak{g}_\alpha}^\perp = \bigoplus_{\beta \neq -\alpha} \mathfrak{g}_\beta$ とかける．
(iii) $\kappa|_{c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \times c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})}$ は非退化である．

命題 7.42. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の極大 toral とすると，$\mathfrak{h} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ が成り立つ．よって，$\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化である．

$\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化なので，

$$\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^\vee; x \mapsto \kappa(x, \cdot)$$

は線形空間の間の同型写像を与える．これにより $\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ に対応する $\mathfrak{h}$ の元を t_α とかく．このとき $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha, h)$ が成り立つ．ルート全体の集合 Φ は $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ と対応する．

命題 7.43. 上の記号の下，$\alpha \in \Phi$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\langle\Phi\rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^\vee$.
(ii) $-\alpha \in \Phi$.
(iii) $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ならば，$[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.
(iv) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{C}t_\alpha$.
(v) $\alpha(t_\alpha) = \kappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.
(vi) $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ ならば $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ が $\mathfrak{sl}_2$-*triple* を成す．ただし，$h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha]$ とする．
(vii) $h_\alpha = 2t_\alpha/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$; $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

以下，命題 7.43 (vi) の $\mathfrak{sl}_2$-triple を $\mathfrak{s}_\alpha$ とかく．

命題 7.44. 上の記号の下，以下が成り立つ．
(i) $\alpha \in \Phi$ ならば，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.
(ii) $\alpha, c\alpha \in \Phi$ $(c \in \mathbb{C})$ ならば，$c = \pm 1$.
(iii) $\alpha, \beta \in \Phi$ ならば，$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ かつ $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.
(iv) $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$ ならば，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
(v) $\alpha, \beta \in \Phi$ かつ $\beta \neq \pm\alpha$ とする．さらに，$r, q \in \mathbb{Z}$ を $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha \in \Phi$ となる最大の整数とする．このとき，$\beta + i\alpha \in \Phi$ $(-r \leq i \leq q)$ かつ $\beta(h_\alpha) = r - q$.
(vi) $\mathfrak{g}$ はリー代数として $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$ により生成される．

キリング形式 κ の $\mathfrak{h}$ への制限により同型写像
$$\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^\vee; x \mapsto \kappa(x, \cdot)$$
を得た．この同型により $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^\vee$ を同一視し，任意の $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\vee$ に対して，$(\lambda, \mu) := \kappa(t_\lambda, t_\mu)$ と置くことで，$\mathfrak{h}^\vee$ 上の非退化対称双線形形式を定める．さらに，命題 7.43 (i) により，Φ の部分集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ が存在して，$\mathfrak{h}^\vee$ の基底をなす．以下，この基底を固定して話を進める．

補題 7.45. 上の記号の下，$\beta \in \Phi$ を $\beta = \sum_{j=1}^{l} c_j\alpha_j$ と表すと，$c_j \in \mathbb{Q}$ である．

証明. 全ての i に対し，$(\alpha_i, \beta) = \sum_{j=1}^{l}(\alpha_i, \alpha_j)c_j$ となるが，両辺に $2/(\alpha_i, \alpha_i)$ をかければ，
$$\frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \sum_{j=1}^{l} \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} c_j.$$
一方，キリング形式 $\kappa|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化で $\{\alpha_i\}$ は $\mathfrak{h}$ の基底なので，$\det((\alpha_i, \alpha_j)) \neq 0$ となる．従って，
$$\det\left(\frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right) = \left(\prod_{i=1}^{l} \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right)\det((\alpha_i, \alpha_j)) \neq 0.$$
これから題意は従う． ∎

Φ が $\mathbb{Q}$ 上生成する $\mathfrak{h}^\vee$ の部分空間を $E_{\mathbb{Q}}$ とすると，上記補題により，$E_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上の l 次元線形空間で $\mathfrak{h}^\vee = E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ となる．

補題 7.46. $\mathfrak{h}$ 上の非退化対称双線形形式 $(\ ,\ )$ を $E_{\mathbb{Q}}$ に制限したものは有理数値をとり，正定値符号（すなわち，任意の $\lambda \in E_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ に対し，$(\lambda, \lambda) > 0$）である．

証明. 任意の $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\vee$ に対して，

$$(\lambda, \mu) = \kappa(t_\lambda, t_\mu) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, t_\lambda\, \mathrm{ad}\, t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)(\alpha, \mu).$$

特に，$\beta \in \Phi$ に対して，

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2$$

となり，両辺を $(\beta, \beta)^2$ で割ると，

$$\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in \Phi} \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}$$

を得る．命題 7.44 (iii) により，$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)^2} \in \mathbb{Z}$ なので，上記式の右辺は有理数である．すなわち，$(\beta, \beta) \in \mathbb{Q}$ となる．よって，任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し，

$$(\alpha, \beta) = \frac{(\beta, \beta)}{2} \times \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \in \mathbb{Q}$$

となる．任意の $E_{\mathbb{Q}}$ の元はルートの $\mathbb{Q}$ 上の線形結合でかけるので，$(\ ,\ )$ を $E_{\mathbb{Q}}$ に制限したものは有理数値をとる．さらに，任意の λ に対し，

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \lambda)^2 \geq 0.$$

$(\lambda, \lambda) = 0$ ならば，任意の $\alpha \in \Phi$ に対し $(\alpha, \lambda) = 0$ となる．このとき，$\lambda \in \mathfrak{g}^\perp = 0$ となり題意は成立する． ■

$E := E_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ と置くと，$(\ ,\ )$ は E 上に延長することができる．この $(\ ,\ )$ は E 上の実数値をとる正定値非退化対称双線形形式である．すなわち，$(E, (\ ,\ ))$ は内積空間である．

8. ルート系

この章では E を内積空間，つまり，内積 (α, β) をもった $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．さらに，非零ベクトル $\alpha \in E$ に対し，α と直交するベクトル全体がなす E の超平面を P_α とかく：

$$P_\alpha = \{\beta \in E \mid (\beta, \alpha) = 0\}.$$

定義 8.1. 線形変換 $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ が以下の二つの条件を満たすとき，σ を E における**鏡映 (reflection)** と呼ぶ．

(i) 非零ベクトル $\alpha \in E$ が存在して，σ による固定点の集合が超平面 P_α と一致する．

(ii) $\sigma(\alpha) = -\alpha$ が成り立つ．

さらに，このとき鏡映 σ を σ_α とかく．

補題 8.2. 定義 8.1 の記号の下，

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

が成り立つ．

証明. E の直交分解 $E=\mathbb{R}\alpha\oplus P_\alpha$ を用いて，$\beta=c\alpha+\gamma$ $(c\in\mathbb{R},\gamma\in P_\alpha)$ とかく．このとき，β と α の内積を取ると，$c=\dfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ となることが分かる．さらに，

$$\sigma_\alpha(\beta)=\sigma_\alpha(c\alpha+\gamma)=c\sigma_\alpha(\alpha)+\sigma_\alpha(\gamma)=-c\alpha+\gamma=\beta-2c\alpha$$

となるので題意は従う． ■

以下，$\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ を $\langle\beta,\alpha\rangle$ もしくは $c_{\alpha,\beta}$ とかく．

補題 8.3. Φ を E を張る有限部分集合とする．任意の $\alpha\in\Phi$ に対し，$\sigma_\alpha(\Phi)=\Phi$ が成り立つとする．$\sigma\in\mathrm{GL}(E)$ が以下の三つの条件を満たすとする．

(i) $\sigma(\Phi)=\Phi$.
(ii) $\sigma(\alpha)=-\alpha$.
(iii) ある超平面 P が σ の固定点集合に含まれる．

このとき，$\sigma=\sigma_\alpha$ かつ $P=P_\alpha$ が成り立つ．

証明. $\tau:=\sigma\circ\sigma_\alpha$ とおく．このとき，$\tau(\alpha)=\alpha,\tau(\Phi)=\Phi$ となる．前半より，τ は $\mathbb{R}\alpha$ に自明に作用することが分かる．従って，τ は $E/\mathbb{R}\alpha$ に作用するが，この作用は自明である．実際，分解 $E=\mathbb{R}\alpha\oplus P$ に即して任意の $\beta\in E$ を分解すると，$\beta=c\alpha+\gamma$ $(c\in\mathbb{R},\gamma\in P)$ とかける．このとき，

$$\tau(\beta)=\sigma(\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha)=\sigma(\beta)-\langle\beta,\alpha\rangle\sigma(\alpha)=\gamma+(\langle\beta,\alpha\rangle-c)\alpha$$

となるので，τ は $E/\mathbb{R}\alpha$ へ自明に作用する．従って，τ の全ての固有値は 1 に等しいので，τ の最小多項式 $f_\tau(x)$ は $(x-1)^\ell$ の因子となる $(\ell=\dim E)$．一方，$\tau(\Phi)=\Phi$ に注意し，$\beta,\tau(\beta),\cdots,\tau^k(\beta)$ $(k\geq|\Phi|)$ を考えると，ある k_0 に対し，$\tau^{k_0}(\beta)=\beta$ となることが分かる．よって，k を十分大きくとると，任意の β に対して $\tau^k(\beta)=\beta$ となる．Φ は E を生成するので $\tau^k=1$ となる．従って，τ の最小多項式 $f_\tau(x)$ は x^k-1 の因子となる．以上により，$f_\tau(x)=x-1$ となるので，$\tau=1$ である． ■

定義 8.4. E の部分集合 Φ が以下の四つの条件を満たすとき，Φ を**ルート系**と呼ぶ:

(R1) $\Phi\subset E$ は E を張る有限集合で 0 を含まない．
(R2) 実数 k が $\alpha,k\alpha\in\Phi$ を満たすならば $k=\pm1$ である.
(R3) 任意の $\alpha\in\Phi$ に対し，鏡映 σ_α は $\sigma_\alpha(\Phi)\subset\Phi$ を満たす．
(R4) $\alpha,\beta\in\Phi$ ならば，$\langle\beta,\alpha\rangle$ は整数である.

ルート系 Φ の元を**ルート**といい，E のベクトル空間としての次元を Φ の**階数**と呼ぶ．さらに，鏡映 σ_α $(\alpha\in\Phi)$ によって生成される群を Φ の**ワイル群**と呼び W とかく.

定理 8.5. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ のルート空間分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha$ に対し，$E:=\langle\Phi\rangle_\mathbb{R}\subset\mathfrak{h}^\vee$ とおく．さらに，キング形式によって定まる E 上の内積を $(\ ,\ )$ とかく．このとき，$(E,(\ ,\ ),\Phi)$ はルート系である．

補題 8.6. ルート系 Φ のワイル群 W の位数は有限である．

証明. $\Phi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_d\}$ とする．任意の $w \in W$ に対し，$w(\Phi) = \Phi$ なので，W から対称群 $\mathrm{Sym}(\Phi)$ への群準同形写像を得る；

$$W \to \mathrm{Sym}(\Phi); w \mapsto [i \mapsto j \text{ if } w(\alpha_i) = \alpha_j]$$

Φ は E を生成するので，この写像は単射である．従って，$\mathrm{Sym}(\Phi)$ の有限性から題意が従う． ■

補題 8.7. Φ を E のルート系，W をそのワイル群とする．もし $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ が $\sigma(\Phi) = \Phi$ を満たすならば，任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し，以下が成り立つ：

(i) $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$.
(ii) $\langle\beta, \alpha\rangle = \langle\sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle$.

証明. 前半は補題 8.3 より従う．よって，後半を示せば良い．任意の $\beta \in \Phi$ に対し，

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma(\sigma_\alpha(\beta)) = \sigma(\beta - \langle\beta, \alpha\rangle\alpha) = \sigma(\beta) - \langle\beta, \alpha\rangle\sigma(\alpha)$$

$$\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \langle\sigma(\beta), \sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)$$

となるので，前半から後半が従う． ■

定義 8.8. 内積空間とルート系の組み $(E, \Phi), (E', \Phi')$ に対し，ベクトル空間としての同形写像 $\phi : E \to E'$ が存在し，$\phi(\Phi) = \Phi'$ と $\langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$ $(\forall\alpha, \beta \in \Phi)$ が成り立つとき，(E, Φ) と (E', Φ')（もしくはルート系 Φ と Φ'）は**同形 (isomorphic)** であるという.

系 8.9. $(E, (\ ,\ )_E, \Phi), (E', (\ ,\ )_{E'}, \Phi')$ をそれぞれルート系とする．もし線形空間としての同形写像 $\phi : E \to E'$ が存在して，$\phi(\Phi) = \Phi'$ を満たすならば，ルート系 $(E, (\ ,\ )_E, \Phi), (E', (\ ,\ )_{E'}, \Phi')$ は同形である．さらに，$(E, (\ ,\ )_E, \Phi)$ がルート系ならば，任意の $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $(E, c(\ ,\ )_E, d\Phi)$ もルート系で，それらは同形である.

証明. $(E, (\ ,\ )_E, \Phi)$ がルート系ならば，任意の $c, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して $(E, c(\ ,\ )_E, d\Phi)$ もルート系であることは簡単に分かる．よって，後半は前半から従うので，前半を示せば十分である．前半を示すには，任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し，$\langle\beta, \alpha\rangle_E = \langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle_{E'}$ が成り立つことを示せば良い．仮定より E と E' は同形なので，線形空間として同一視することが出来る．このとき，$\phi \in \mathrm{GL}(E)$ とみなすことにより，補題 8.7 を適用すると，題意が成り立つことが分かる． ■

この系により，線形空間としての同形写像 $\phi : E \to E'$ が $\phi(\Phi) = \Phi'$ を満たすならば，後半の条件 $\langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$ は自動的に成立する．また，ϕ により同形なルート系 Φ と Φ' のワイル群をそれぞれ W, W' としたとき，$W \to W'; \sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ によりワイル群も同形であることに注意する.

Φ の自己同形群を

$$\mathrm{Aut}(\Phi) := \{g \in \mathrm{GL}(E) | g(\Phi) = \Phi\}$$

により定めると，補題 8.7(i) により，ワイル群 W は $\mathrm{Aut}(\Phi)$ の正規部分群であることが分かる．さらに，次が成立する：

定理 8.10 ([11, 14.2 Theorem], [24, 第 13 章定理 2])**.** $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ を半単純リー代数に対し，それらに付随するルート系が同形ならば，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ はリー代数として同形である．

上記定理により，同形の差を除いてルート系を分類することが今後の最も大きな目標の一つである．そこで，内積空間とルート系の組み (E, Φ) を考える．内積空間 E に付随する内積に対し，正規直交底を取ることにより，E は通常の内積を備えた $\mathbb{R}^l$，すなわちユークリッド空間として良い．従って，今後は内積空間 E はユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ と仮定する．ルート系の分類に向け，まずは 2 つのルートの関係を調べることから始めよう．

命題 8.11. ルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し，それらのなす角を θ とする．$\alpha \neq \pm\beta$ かつ $||\beta|| \geq ||\alpha||$ のとき，$(\langle \alpha, \beta \rangle,\ \langle \beta,\ \alpha \rangle,\ \theta,\ ||\beta||^2/||\alpha||^2)$ の組は以下の表のいずれかを満たす．

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta,\ \alpha \rangle$	θ	$\|\|\beta\|\|^2/\|\|\alpha\|\|^2$
0	0	$\pi/2$	定まらない
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

証明. $(\alpha, \beta) = ||\alpha||\ ||\beta|| \cos\theta$ なので，

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2||\beta||}{||\alpha||} \cos\theta$$

となる．従って，

$$\langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\theta$$

が成り立つ．$0 \leq \cos^2 \leq 1$ かつ $\langle \alpha, \beta \rangle$，$\langle \beta, \alpha \rangle$ は整数なので，

$$0 \leq \langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle \leq 4$$

となるが，仮定より $\alpha \neq \pm\beta$ なので，$\langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle \neq 4$ である．また，$\theta = \pi/2$ であることと $\langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle = 0$ であることは同値である．よって，$\langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle = 1, 2$ または 3 であるときを考えれば良い．ここで，仮定より $||\beta|| \geq ||\alpha||$ なので，

$$\frac{|\langle \beta, \alpha \rangle|}{|\langle \alpha, \beta \rangle|} = \frac{||\beta||^2}{||\alpha||^2} \geq 1$$

となることに注意する．どの場合も同じようにできるので，$\langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle = 2$ のときのみ証明を与える．このとき，$(\langle \alpha, \beta \rangle\ \langle \beta, \alpha \rangle) = (2, 1)$ もしくは $(-2, -1)$ となる．$\cos^2\theta = 1/2$ なので，$\theta = \pi/4$ もしくは $3\pi/4$ となる．このとき，$||\beta||^2/||\alpha||^2 = 2$ となり題意は成立する． ■

補題 8.12. 定数倍でない 2 つのルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し，$(\alpha, \beta) > 0$ ならば，$\alpha - \beta$ はルートである．また，$(\alpha, \beta) < 0$ ならば，$\alpha + \beta$ はルートである．

証明. 後半は前半において β を $-\beta$ とすれば得られる．従って前半を示せば良い．$(\alpha,\beta)>0$ ならば，命題 8.11 により $\langle\alpha,\beta\rangle$ もしくは $\langle\beta,\alpha\rangle$ は 1 と等しい．$\langle\alpha,\beta\rangle=1$ ならば，$\sigma_\alpha(\beta)=\alpha-\beta\in\Phi$ となる．$\langle\beta,\alpha\rangle=1$ ならば，$\beta-\alpha\in\Phi$ となるが，$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ となる． ■

命題 8.13. 階数 2 のルート系は $A_1\times A_1$, A_2, B_2, G_2 のいずれかと同形である．

証明. $\dim E=2$ なので，ルート系 Φ は平面ベクトルの集合である．相異なるルートのうち，それらのなす角 θ が最小であるルートの組みを一つ固定し，$\alpha_1,\alpha_2\in\Phi$ とかく．すなわち，$\alpha_1,\alpha_2\in\Phi$ は隣り合ったルートである．補題 8.12 により，$0\leq\theta\leq\pi/2$ である． さらに，定理 8.11 により，θ の値は $\pi/2,\pi/3,\pi/4,\pi/6$ のいずれかであることに注意する．このとき，$\alpha_3:=\sigma_{\alpha_2}(-\alpha_1)$ は α_2 を含む直線に関する鏡映により α_1 を移して得られる．さらに，$\alpha_4:=\sigma_{\alpha_3}(-\alpha_2)$ は α_3 を含む直線に関する鏡映により α_2 を移して得られる．これを繰り返すことにより $2\pi/\theta$ 個のルートを得るが，θ の最小性から Φ に含まれるルートは全てこのようにして構成される．θ の値 $\pi/2,\pi/3,\pi/4,\pi/6$ に対応して，ルート系は $A_1\times A_1$, A_2, B_2, G_2 とそれぞれ同形になる． ■

9. 基底とワイル群

9.1. 基底とワイルの部屋.

定義 9.1. ルート系 $\Phi\subset E$ の部分集合 Δ が以下の二つの条件を満たすとき，Φ の基底という：

- (B1) Δ はベクトル空間 E の基底である．
- (B2) 任意のルート $\beta\in\Phi$ を $\beta=\Sigma k_\alpha\alpha$ $(\alpha\in\Delta)$ と表したとき k_α は整数で，任意の α に対して $k_\alpha\geq 0$ もしくは $k_\alpha\leq 0$ が成り立つ．

このような Δ の元を**単純ルート**と呼ぶ．上記 (B2) における β に対して，$\mathrm{ht}\beta:=\Sigma k_\alpha$ を（Δ に関する）β の**高さ (height)** と呼ぶ．また，任意の α に対して $k_\alpha\geq 0$ が成り立つ β を**正のルート**と呼ぶ．一方，任意の α に対して $k_\alpha\leq 0$ が成り立つ β を**負のルート**と呼ぶ．正のルート全体を Φ^+，負のルート全体を Φ^- で表す．また，$\xi,\eta\in E$ に対し $\xi-\eta=\Sigma k_\alpha\alpha$ と表したとき，全ての単純ルート $\alpha\in\Delta$ に対し $k_\alpha\geq 0$ となるとき，$\xi\succ\eta$ と定める．$\succ$ はルート系の基底の選び方に依存して定まる E 上の半順序である．

補題 9.2. ルート系 Φ の基底 Δ に対し，$\alpha\neq\beta\in\Delta$ ならば，$(\alpha,\beta)\leq 0$ となる．

証明. $(\alpha,\beta)>0$ とする．仮定より $\alpha\neq\pm\beta$ なので，補題 8.12 より $\alpha-\beta\in\Phi$ となる．しかし，これは (B2) に矛盾する． ■

$\gamma\in E$ に対し，

$$\Phi^+(\gamma):=\{\alpha\in\Phi|(\gamma,\alpha)>0\}$$

とおく．$\gamma\in E\setminus\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$ のとき，γ を**正則 (regular)** と呼び，それ以外のとき，**特異 (singular)** と呼ぶ．γ が正則なとき，$\Phi=\Phi^+(\gamma)\cup-\Phi^+(\gamma)$ と表される．$\alpha\in\Phi^+(\gamma)$ に対して，$\alpha=\beta_1+\beta_2$ となる $\beta_1,\beta_2\in\Phi^+(\gamma)$ が存在するとき，α を**分解可能 (decomposable)** と呼び，そうでないとき**分解不可能 (indecomposable)** と呼ぶ．

定理 9.3. 正則な元 $\gamma \in E$ に対し，$\Delta(\gamma)$ を $\Phi^+(\gamma)$ における分裂不可能なルート全体の集合とする．このとき，$\Delta(\gamma)$ は Φ の基底をなす．また，全ての基底はこのようにして得られる．

証明. 5 段階に分けて証明する．

<u>ステップ 1</u> $\Phi^+(\gamma)$ におけるルートは $\Delta(\gamma)$ の元の非負 $\mathbb{Z}$ 係数和として表される：$\Delta(\gamma)$ の元の非負 $\mathbb{Z}$ 係数和として表されない $\Phi^+(\gamma)$ の元が存在すると仮定する．そのうち，γ との内積の値が最小のものを α とする．$\alpha \notin \Delta(\gamma)$ なので，α は分解可能である．すなわち，$\alpha = \beta_1 + \beta_2$ となる $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ が存在する．$(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$ において $(\gamma, \beta_1), (\gamma, \beta_2) > 0$ なので，(γ, α) の最小性より，β_1, β_2 は $\Delta(\gamma)$ の元の非負 $\mathbb{Z}$ 係数和として表される．これは矛盾．

<u>ステップ 2</u> $\alpha \neq \beta \in \Delta(\gamma)$ に対して，$(\alpha, \beta) \leq 0$：$(\alpha, \beta) > 0$ とすると，$\beta \neq \pm\alpha$ なので，補題 8.12 により $\alpha - \beta \in \Phi$ となる．よって，$\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$ または $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$ が成り立つ．前者の場合，$\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ となり α が分解可能となり矛盾．後者も同様に β が分解可能となり矛盾．

<u>ステップ 3</u> $\Delta(\gamma)$ の元は線形独立である：$\sum r_\alpha \alpha = 0$ $(\alpha \in \Delta(\gamma), r_\alpha \in \mathbb{R})$ とする．r_α の正負で分けることにより，$\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ と変形できる（$s_\alpha, t_\beta \geq 0$ かつ $\alpha \neq \beta$）．$\epsilon = \sum s_\alpha \alpha$ とおくと，$(\epsilon, \epsilon) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$（ステップ 2 より）となり $\epsilon = 0$ となる．よって，$0 = (\gamma, \epsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$ となるので，$s_\alpha = 0$ かつ $t_\beta = 0$ となり，線形独立性が示された．

また，同様の方法により次のことも分かる：E の 1 つの超平面とその超平面の片側にあるベクトルの集合 S を固定する．S に含まれるいかなる 2 つのベクトルのなす角も鈍角であるならば S の元は線形独立である．

<u>ステップ 4</u> $\Delta(\gamma)$ は Φ の底である：ステップ 1 と $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ により (B2) が成り立つ．よって，$\Delta(\gamma)$ は E を張る．ステップ 3 により $\Delta(\gamma)$ の元は線形独立なので，(B1) も成り立つ．

<u>ステップ 5</u> Φ の任意の基底 Δ に対し，ある $\gamma \in E$ が存在し $\Delta = \Delta(\gamma)$ が成立する：基底 Δ に対し，任意の $\alpha \in \Delta$ に対し，$(\gamma, \alpha) > 0$ となる $\gamma \in E$ を選ぶ．(B2) により γ は正則である．また，$\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$ かつ $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ が成り立つ．$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-, \Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ より，$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ かつ $\Phi^- = -\Phi^+(\gamma)$ が成り立つ．$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ なので，$\Delta \subset \Delta(\gamma)$ となるが，$|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = \dim E$ より $\Delta = \Delta(\gamma)$ となる．■

$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ の連結成分を**ワイルの部屋 (Weyl chamber)** と呼ぶ．正則な元 $\gamma \in E$ に対し，それを含むワイルの部屋 $\mathcal{C}(\gamma)$ が一意に定まる．$\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$ となるのは，任意の超平面 P_α $(\alpha \in \Phi)$ に対し，γ, γ' が同じ側にあることと同値である．これは $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$，すなわち $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ が成り立つことに他ならない．さらに，

$$W \times \{\text{ ワイルの部屋 }\} \to \{\text{ ワイルの部屋 }\}; (\sigma, \mathcal{C}(\gamma)) \mapsto \mathcal{C}(\sigma(\gamma)),$$

$$W \times \{\text{ ルート系の基底 }\} \to \{\text{ ルート系の基底 }\}; (\sigma, \Delta) \mapsto \sigma(\Delta)$$

により，ワイル群 W はワイルの部屋からなる集合とルート系の基底からなる集合にそれぞれ作用する．他方，$\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ に対して，$(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) = (\alpha, \gamma)$ が成り立つ．よって，$\sigma(\Phi^+(\gamma)) = \Phi^+(\sigma(\gamma))$ となるが，これは $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$ が成り立つことを意味する．以上により次が分かった．

命題 9.4. ルート系の基底とワイルの部屋は一対一に対応する：

$$\{\text{ルート系の基底}\} \leftrightarrow \{\text{ワイルの部屋}\};\ \ \Delta(\gamma) \mapsto \mathcal{C}(\gamma).$$

さらに，この対応はワイル群の作用と可換である．

$\Delta = \Delta(\gamma)$ のとき，$\mathcal{C}(\Delta) := \mathcal{C}(\gamma)$ とかき，Δ **に関する基本ワイルの部屋 (fundamental Weyl chamber relative to Δ)** と呼ぶ．

9.2. **単純ルートの性質．** 引き続き，Φ をルート系，Δ をその基底とする．

補題 9.5. $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta$ ならば，ある $\beta \in \Delta$ に対して $\alpha - \beta \in \Phi^+$ となる．

証明． Δ は基底なので，$\alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} s_\gamma \gamma$ とかける．α は正のルートなので，$s_\gamma \geq 0$ である．任意の $\gamma \in \Delta$ に対して，$(\alpha, \gamma) \leq 0$ とすると，

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{\gamma\in\Delta} s_\gamma(\alpha, \gamma) \leq 0$$

が成り立つので，$\alpha = 0$ となり矛盾．よって，ある $\beta \in \Delta$ に対して，$(\alpha, \beta) > 0$ が成立する．このとき，補題 8.12 により，$\alpha - \beta \in \Phi$ となる．$\alpha \neq \beta$ より，ある $\gamma \neq \beta$ に対して $s_\gamma > 0$ となる．よって，$\alpha - \beta$ の γ の係数も正である． 従って，基底の性質 (B2) により，$\alpha - \beta$ は正のルートである． ■

系 9.6. 任意の $\beta \in \Phi^+$ に対し，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Delta$ ($i < j$ のとき $\alpha_i = \alpha_j$ となることも許す) が存在して，$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Phi$ $(\forall i)$ が成り立つ．

証明． 補題 9.5 と $\mathrm{ht}\beta$ に関する帰納法により従う． ■

補題 9.7. $\alpha \in \Delta$ に対して，$\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ となる．

証明． $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} s_\gamma\gamma \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ $(s_\gamma \geq 0)$ に対して，$\beta \neq \pm\alpha$ なので，ある $\gamma \neq \alpha$ に対して，$s_\gamma > 0$ である．$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle\beta, \alpha\rangle\alpha$ の γ に関する係数も s_γ と等しい．従って，基底の性質 (B2) により，$\sigma_\alpha(\beta)$ は正のルートである．また，$\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ である． ■

系 9.8. $\delta := \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+} \beta$ とおく．このとき，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ が成り立つ．

証明． 補題 9.7 より従う． ■

補題 9.9. $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in \Delta$ （$i < j$ のとき $\alpha_i = \alpha_j$ となることも許す）に対して，$\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$ とおく．もし，$\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t) \in \Phi^-$ ならば，ある s $(1 \leq s < t)$ に対して，$\sigma_1 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$ が成り立つ．

証明． $\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ $(0 \leq i \leq t-2)$, $\beta_{t-1} = \alpha_t$ とおく．$\beta_0 \in \Phi^-, \beta_{t-1} \in \Phi^+$ なので，$\beta_s \in \Phi^+$ となる最小の s が存在する．このとき，$\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \in \Phi^-$ となるので，補題 9.7 により，$\beta_s = \alpha_s$ となる．さらに，補題 8.7 により，$\sigma \in W$ に対して，$\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ が成り立つ．よって，

$$\sigma_s = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_s} = \sigma_{\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}(\alpha_t)} = \cdots = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})^{-1}.$$

これを用いると，

$$\sigma_1\cdots\sigma_t = (\sigma_1\cdots\sigma_{s-1})\sigma_s(\sigma_{s+1}\cdots\sigma_t) = (\sigma_1\cdots\sigma_{s-1})(\sigma_{s+1}\cdots\sigma_{t-1}).$$

■

系 9.10. $\sigma \in W$ が $\sigma = \sigma_1\cdots\sigma_t$ と表されたとする．この表示が σ を単純ルートの鏡映の合成として表す表示の中で最短の表示（簡約表示）であれば，$\sigma(\alpha_t) \in \Phi^-$ が成り立つ．

証明.

$$\sigma(\alpha_t) = \sigma_1\cdots\sigma_t(\alpha_t) = -(\sigma_1\cdots\sigma_{t-1})(\alpha_t)$$

なので，$\sigma(\alpha_t) \in \Phi^+$ とすると，$(\sigma_1\cdots\sigma_{t-1})(\alpha_t) \in \Phi^-$ となる．しかし，これは補題 9.9 により簡約表示であることに矛盾する． ■

9.3. ワイル群.

定理 9.11. ルート系 Φ の基底 Δ，ワイル群を W とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\gamma \in E$ が正則ならば，ある $\sigma \in W$ が存在して，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ となる．従って，ワイル群はワイルの部屋の集合に推移的に作用する．
(ii) Δ' を Φ の異なる基底とすると，$\sigma(\Delta') = \Delta$ となる $\sigma \in W$ が存在する．従って，ワイル群はルート系の基底からなる集合に推移的に作用する．
(iii) $\alpha \in \Phi$ に対し，$\sigma(\alpha) \in \Delta$ となる $\sigma \in W$ が存在する．
(iv) $W = \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$.
(v) $\sigma \in W$ に対して $\sigma(\Delta) = \Delta$ ならば，$\sigma = 1$ となる．従って，(i), (ii) のワイル群の作用はそれぞれ単純推移的である．

証明. $W' := \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle \subset W$ とおく．まず，(i) – (iii) を W' に対して示し，それを用いて $W = W'$ であることを示す．

(i) $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$ に対して，$(\sigma(\gamma), \delta)$ が最大になる $\sigma \in W'$ を選ぶ．$\alpha \in \Delta$ なので，$\sigma_\alpha\sigma \in W'$ である．このとき，σ の選び方と系 9.8 により，

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha\sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

となる．よって，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，$(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ が成り立つ．γ が正則であることから，$(\sigma(\gamma), \alpha) \neq 0$ である．実際，$(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ なら，$\gamma \in P_{\sigma^{-1}\alpha}$ となり矛盾する．従って，$(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ となる．

(ii) 命題 9.4 と (i) より従う．

(iii) (ii) により，任意のルート α がある基底に含まれていることを示せば十分である．$\gamma \in P_\alpha \setminus \cup_{\beta\in\Phi\setminus\{\pm\alpha\}} P_\beta$ に対し，γ' を γ の十分近くに取ることにより，$(\gamma', \alpha) = \epsilon > 0$ かつ $|(\gamma', \beta)| > \epsilon$ $(\forall\beta \neq \pm\alpha)$ が成り立つとして良い．前半の条件から $\alpha \in \Phi^+(\gamma')$ となることが分かり，後半から α が分解不可能であることが分かる．

(iv) $W = W'$ を示す．そのためには，任意の $\alpha \in \Phi$ に対し，$\sigma_\alpha \in W'$ を示せば良い．(iii) により，$\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$ を満たす $\sigma \in W'$ が存在する．このとき，$\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ なので，$\sigma(\alpha) = \sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in W'$ が成り立つ．

(v) $\sigma(\Delta)=\Delta$ かつ $\sigma\neq 1$ とする．このとき，(iv) により σ は 1 つ以上の単純鏡映の積として表される．しかし，これは系 9.10 により $\sigma(\Delta)=\Delta$ に矛盾する． ■

定理 9.11 により，任意の $\sigma\in W$ は単純鏡映の積として表される．

9.4. **既約ルート系．** ルート系 Φ に対し，$\Phi_1,\Phi_2\subsetneq\Phi$ が存在して $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ かつ $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ が成り立つとき，Φ は可約 (reducible) と呼ぶ．また可約でないとき，既約 (irreducible) と呼ぶ．例えば，階数 2 のルート系は $A_1\times A_1, A_2, B_2, G_2$ の 4 種類であったが，$A_1\times A_1$ は可約であり，それ以外は既約である．

命題 9.12. Δ をルート系 Φ の底とする．このとき，Φ が可約であることと，$\Delta_1,\Delta_2\subsetneq\Delta$ が存在して $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ かつ $(\Delta_1,\Delta_2)=0$ が成り立つことは同値である．

証明． Φ が可約とする．このとき，$\Phi_1,\Phi_2\subsetneq\Phi$ が存在して $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ かつ $(\Phi_1,\Phi_2)=0$ が成り立つ．もし，$\Delta\subset\Phi_1$ ならば，$(\Delta,\Phi_2)=0$ となる．Δ は E の基底なので，$(E,\Phi_2)=0$ が成り立つ．よって，$\Phi_2=\emptyset$ となり矛盾する．従って，$\Delta\not\subset\Phi_1$ かつ $\Delta\not\subset\Phi_2$ となるので，分解 $\Delta=(\Delta\cap\Phi_1)\cup(\Delta\cap\Phi_2)$ を得る．

逆に，Φ を既約とする．このとき，$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ かつ $(\Delta_1,\Delta_2)=0$ が成り立つと仮定する．ここで，$\Phi_i:=W(\Delta_i)$ $(i=1,2)$ とおくと，定理 9.11 (iii) により，$\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$ と分解する．一方，$\alpha_i\in\Delta_i$ $(i=1,2)$ に対して，

$$(\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}-\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1})(\gamma)=\frac{4(\alpha_1,\alpha_2)}{||\alpha_1||^2||\alpha_2||^2}((\gamma,\alpha_2)\alpha_1-(\gamma,\alpha_1)\alpha_2)=0$$

となるので，任意の $\alpha_i\in\Delta_i$ $(i=1,2)$ に対して，$\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}=\sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}$ が成り立つ．さらに，$(\alpha_1,\alpha_2)=0$ なので，$\sigma_{\alpha_2}(\alpha_1)=\alpha_1$ となる．従って，

$$\Phi_i=W(\Delta_i)=\langle\sigma_\alpha|\alpha\in\Delta_i\rangle(\Delta_i)$$

が成り立つ．$\langle\sigma_\alpha|\alpha\in\Delta_i\rangle(\Delta_i)$ の任意の元は Δ_i の元を足したり引いたりして得られるので，$\Phi_i\subset\langle\Delta_i\rangle$ となる．よって，$(\Phi_1,\Phi_2)=0$ となるが，仮定より Φ は既約なので $\Phi_{i_0}=\emptyset$ $(i_0\in\{1,2\})$ が成り立つ．このとき，$\Delta_{i_0}=\emptyset$ となり主張が成り立つ．

■

10. ルート系の分類

この章では Φ を階数 ℓ のルート系，Δ を基底，W をワイル群とする．

10.1. **カルタン行列．** $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ に対して，行列 $(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)$ を Φ の**カルタン行列 (Cartan matrix)** と呼ぶ．また，その成分 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle$ を**カルタン整数 (Cartan integers)** と呼ぶ．階数 2 のルート系に対するカルタン行列は以下のいずれかになる：

$$A_1\times A_1\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\ A_2\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix},\ B_2\begin{pmatrix}2&-1\\-2&0\end{pmatrix},\ G_2\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$$

カルタン行列は基底の順序に依る．一方で，定理 9.11 により W は基底の集合に推移的に作用するので，カルタン行列は順序の差を除いて基底の取り方には依存しない．さらに，ルート系の同型類はカルタン行列により決定される：

命題 10.1. $\Phi' \subset E'$ を他のルート系とし，$\Delta' := \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_\ell\}$ をその基底とする．さらに，任意の $1 \le i, j \le \ell$ に対して $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$ が成り立つとする．このとき，以下の二つの条件を満たす同型写像 $\phi : E \to E'$ が存在する：

(i) $\phi(\Phi) = \Phi'$.

(ii) 任意の $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して，$\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$.

従って，カルタン行列は同型類の差を除いてルート系を特徴付ける．

証明. 自然な同型写像 $\phi : E \to E'; \alpha_i \mapsto \alpha'_i$ が二つの条件を満たすことを示せば良い．(ii) が成り立つのは明らかなので，(i) が成り立つことを確認する．$\alpha, \beta \in \Delta$ に対して，

$$\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle \phi(\alpha) = \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$$

が成り立つ．Δ, Δ' はそれぞれ E と E' の基底だから

$$\phi^{-1} \circ \sigma_{\phi(\alpha)} \circ \phi = \sigma_\alpha, \ \sigma_{\phi(\alpha)} = \phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}$$

が成り立つ．W, W' はそれぞれ単純鏡映により生成されるから，$W \to W'; \sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ は全射である．この写像が群の単射準同型写像であることは明らかなので，W と W' は同型である．このとき，

$$\phi(\Phi) = \phi(W(\Delta)) = (\phi W \phi^{-1})(\phi(\Delta)) = W'(\Delta') = \Phi'$$

となり，題意は成立する． ■

10.2. **コクセター図形とディンキン図形.** ルート系 Φ の基底 $\Delta := \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ を固定する．$i \neq j$ ならば命題 8.11 により，

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$$

が成り立つ．そこで，Δ の各元 α_i に対し頂点を対応させ，α_i, α_j $(i \neq j)$ に対応する頂点を $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ 本の線で結ぶ．例えば，階数 2 のルート系の対してはそれぞれ以下の図形を対応させる：

$$\begin{array}{rl}
A_1 \times A_1 : & \underset{\beta}{\circ} \qquad\quad \underset{\alpha}{\circ} \\
A_2 : & \underset{\beta}{\circ} \text{ ——— } \underset{\alpha}{\circ} \\
B_2 : & \underset{\beta}{\circ} \text{ ═══ } \underset{\alpha}{\circ} \\
G_2 : & \underset{\beta}{\circ} \text{ ≡≡≡ } \underset{\alpha}{\circ}
\end{array}$$

このようにしてできる図形を Φ の**コクセター図形 (Coxeter graph)** と呼ぶ．さらに，相異なる単純ルート α, β が $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$ かつ $||\alpha|| > ||\beta||$ を満たすとき，α に対応する頂点から β に対応する頂点に矢印をつけ，$||\alpha|| = ||\beta||$ のときは矢印を付けない．このようにして得られた図形を Φ の**ディンキン図形**

(Dynkin diagram) と呼ぶ．例えば，階数 2 のルート系に対してはそれぞれ以下の図形を対応させる：

$$
\begin{array}{rl}
A_1 \times A_1 : & \underset{\beta}{\circ} \qquad\quad \underset{\alpha}{\circ} \\
A_2 : & \underset{\beta}{\circ} \text{———} \underset{\alpha}{\circ} \\
B_2 : & \underset{\beta}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha}{\circ} \\
G_2 : & \underset{\beta}{\circ} \Rrightarrow \underset{\alpha}{\circ}
\end{array}
$$

ディンキン図形からカルタン行列を復元することができることに注意する．従って，命題10.1により，<u>ルート系の分類はディンキン図形の分類問題に帰着される．</u>

問 10.2. 次のディンキン図形を考える： $\underset{\alpha_1}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_2}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha_3}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_4}{\circ}$

このとき，対応するカルタン行列は次で与えられることを確認せよ：

$$
\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -2 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
$$

10.3. **分類．** ルート系 Φ が既約であることと対応するディンキン図形が連結であることは同値である．よって，連結なディンキン図形を分類することと既約ルート系を分類することは同値である．

定理 10.3. 階数 ℓ の既約ルート系 Φ に対応するディンキン図形は以下のいずれか：

A_ℓ 型 $(\ell \geq 1)$ $\quad \underset{\alpha_1}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_2}{\circ} \text{———} \cdots \text{———} \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_\ell}{\circ}$

B_ℓ 型 $(\ell \geq 2)$ $\quad \underset{\alpha_1}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_2}{\circ} \text{———} \cdots \text{———} \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha_\ell}{\circ}$

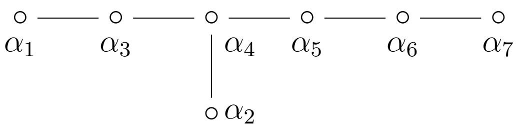
C_ℓ 型 $(\ell \geq 3)$ $\quad \underset{\alpha_1}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_2}{\circ} \text{———} \cdots \text{———} \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \Leftarrow \underset{\alpha_\ell}{\circ}$

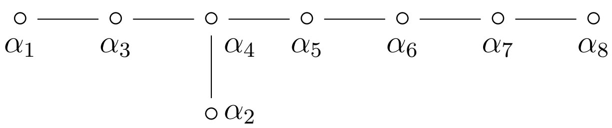
D_ℓ 型 $(\ell \geq 4)$

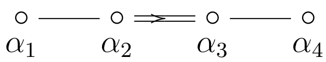
$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & \circ\ \alpha_{\ell-1} \\
 & & & & & & \diagup & \\
\underset{\alpha_1}{\circ} & \text{———} & \underset{\alpha_2}{\circ} & \text{———} & \cdots & \text{———} & \underset{\alpha_{\ell-2}}{\circ} & \\
 & & & & & & \diagdown & \\
 & & & & & & & \underset{\alpha_\ell}{\circ}
\end{array}
$$

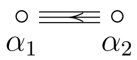
E_6 型

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\underset{\alpha_1}{\circ} & \text{———} & \underset{\alpha_3}{\circ} & \text{———} & \underset{\alpha_4}{\circ} & \text{———} & \underset{\alpha_5}{\circ} & \text{———} & \underset{\alpha_6}{\circ} \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & \circ\ \alpha_2 & & & &
\end{array}
$$

E_7 型


E_8 型


F_4 型


G_2 型


証明. 例えば

■

問 10.4. 定理 10.3 に現れる既約なディンキン図形に対応するカルタン行列をそれぞれ求めよ.

今までの結果をまとめると，以下の結果を得る：

定理 10.5. 単純リー代数と既約ディンキン図形は一対一に対応する.

11. 等質多様体の分類について

11.1. **等質多様体の分類.** この章では射影等質多様体の分類について述べる. 線形代数群 G に対し，そのリー代数 $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$ は G 上の左不変代数的ベクトル場全体の集合として定義される（定義 6.32）. 幾つか定義を思い出そう.

定義 11.1. G を連結線形代数群，$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする.

(i) $\mathfrak{g}$ が非自明なイデアルを含まず，かつ導来イデアル $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が 0 でないとき，G と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ**単純（simple）**という.
(ii) $\mathfrak{g}$ が単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ の直和 $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$ とかけるとき，G と $\mathfrak{g}$ はそれぞれ**半単純（semisimple）**という.
(iii) G が半単純のとき，G の閉部分群 P のうち幾何学的商 G/P が射影多様体となるものを**放物的部分群（parabolic subgroup）**という.

先にも述べた通り，A. Borel と R. Remmert により，以下の等質多様体の構造定理が知られている：

定理 11.2 (=定理 5.45, [3]). 任意の射影等質多様体はアーベル多様体と有理的射影等質多様体の積と同形である. さらに，任意の有理的射影等質多様体は半単純線形代数群 G の放物的部分群 P による幾何学的商 G/P と同形である. また，この G/P は単純線形代数群 G_i とその放物的部分群 P_i により

$$G/P \cong G_1/P_1 \times \ldots \times G_m/P_m$$

とかける.

定理 11.2 により，有理等質多様体を分類するためには,（半）単純線形代数群 G とその放物的部分群 P の商 G/P を分類すればよい. まずは，定義から始める.

定義 11.3. 線形代数群の射 $\varphi : G \to H$ が以下の条件を満たすとき，射 φ を**同種写像（isogeny）**という：

(i) φ は全射である．
(ii) $\sharp(\mathrm{Ker}(\varphi)) < \infty$ を満たす．

定理 11.4 (半単純リー代数と半単純線形代数群の対応 [12, Proposition 9.15], [10, Chapter XI, Section 31])**.** 任意の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，以下の性質を満たす半単純線形代数群 G_{sc} がただ一つ存在する：$\mathfrak{g}$ をリー代数としてもつ任意の線形代数群 G に対し，同種写像 $\varphi : G_{sc} \to G$ が存在する．

G_{sc} を，$\mathfrak{g}$ をリー代数としてもつ**単連結線形代数群（simply connected linear algebraic group）**という．また，$\mathfrak{g}$ をリー代数としてもつ線形代数群 G に対し，$G_{sc} \to G$ を G の**普遍被覆（universal cover）**という．

この定理により，単連結半単純線形代数群 G と半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は一対一に対応することに注意する．さらに，定理 10.5 により，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ はディンキン図形と一対一に対応する．従って，単連結半単純線形代数群 G はディンキン図形と，単連結単純線形代数群 G は既約ディンキン図形と一対一に対応する．

11.2. ボレル部分群と放物的部分群.

定義 11.5. 群 G に対し，

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1} \ (x, y \in G)$$

を x, y の交換子という．G の交換子全体で生成される群 $\langle\{[x, y] \mid x, y \in G\}\rangle$ を $D(G)$ とかき，G の**導来部分群（derived subgroup）**もしくは**交換子群（commutator subgroup）**という．さらに，帰納的に i **次導来部分群（i-th derived subgroup）**を

$$D^0(G) := G,\ D^i(G) := [D^{i-1}(G), D^{i-1}(G)] \ (i > 0)$$

により定める．

$$G = D^0(G) \supset D^1(G) \supset D^2(G) \supset \cdots \supset D^i(G)$$

を**導来列 (derived series)** と呼ぶ．また，ある自然数 n に対して $D^n(G) = 0$ となるとき，G を**可解（solvable）**と呼ぶ．

定義 11.6. 連結線形代数群 G の極大連結可解閉部分群 B を G の**ボレル部分群（Borel subgroup）**と呼ぶ．

ボレル部分群の性質を調べるために，幾つか定理を紹介する：

定理 11.7 (Borel fixed point theorem [10, Theorem 21.2])**.** G を連結可解線形代数群，X を射影的 G 多様体（もしくはより一般に完備 G 多様体）とする．このとき，G は X において固定点をもつ．すなわち，$X^G := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ は空でない．

この定理の系として次を得る：

定理 11.8 (Lie-Kolchin theorem [10, Theorem 17.6])**.** V を 0 でない有限次元ベクトル空間とする．このとき，連結可解線形代数群 $G \subset \mathrm{GL}(V)$ は V において共通の固有ベクトルをもつ．

証明. $\dim V = n$ とする．$G \subset \mathrm{GL}(V)$ は旗多様体 $\mathbb{F} := F(1, 2, \ldots, n-1, V)$ に作用するので，Borel fixed point theorem により，旗 $([V_1], [V_2], \ldots, [V_{n-1}]) \in \mathbb{F}$ が存在し，任意の $g \in G$ と任意の $1 < i < n$ に対し，$g \cdot V_i = V_i$ が成り立つ．$V_i := \langle \boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_i} \rangle$ となるように V の基底をとると，この基底に関する $g \in G$ の表現行列は上三角行列になる．よって，特に主張が従う． ■

定理 11.9 (Chevalley theorem [10, Theorem 11.2])**.** G を線形代数群，H をその閉部分群とする．このとき，有理表現（すなわち線形代数群の射）$\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ と 1 次元部分空間 $V_1 \subset V$ が存在し，$H = \{x \in G \mid \varphi(x)V_1 = V_1\}$ が成り立つ．

注意 11.10. 線形代数群 G とその部分群 H に対し，Chevalley theorem により，有理表現 $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ と 1 次元部分空間 $L \subset V$ が存在し，$H = \{x \in G \mid \varphi(x)L = L\}$ が成り立つ．このとき，G が $\mathbb{P}_*(V)$ に作用するが，H はこの作用に関する $[L]$ の固定化部分群である：$\mathrm{Stab}_G([L]) = H$．よって，G/H と軌道 $G \cdot [L]$ は一対一に対応する．証明は述べなかったが，定理 5.40 はこのことを用いて証明をする．

これらを用いて次を示そう：

定理 11.11 ([10, Theorem, Corollary B, 21.3])**.** 連結線形代数群 G に対し，以下が成立する．

(i) ボレル部分群は放物的部分群である．
(ii) G の任意のボレル部分群は互いに共役である．
(iii) G の閉部分群 P に対し，P がボレル部分群を含むことと P が放物的部分群であることは同値である．

証明. (i), (ii) G のボレル部分群のうち次元が最大のものを S とかく．Chevalley theorem により，有理表現 $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ と 1 次元部分空間 $V_1 \subset V$ が存在し，$S = \{x \in G \mid \varphi(x)V_1 = V_1\}$ が成り立つ．すると，表現 $S \to \mathrm{GL}(V/V_1)$ を得る．さらに，この作用に対して Lie-Kolchin theorem を適用すると，旗 $f_0 := ([V_1], [V_2], \ldots, [V_{n-1}]) \in \mathbb{F} := F(1, 2, \ldots, n-1, V)$ が存在し，任意の $s \in S$ と任意の $1 < i < n$ に対し，$s \cdot V_i = V_i$ が成り立つ．このとき，次が成立する：

主張 11.12. $S = \{g \in G \mid g \cdot f_0 = f_0 \in \mathbb{F}\}$

左が右に含まれることは良い．右が左に含まれることを示すときに，$S = \{x \in G \mid \varphi(x)V_1 = V_1\}$ を用いる（最初から Lie-Kolchin theorem を適用すると，この箇所が保証されない）．

いま，$G \curvearrowright \mathbb{F}$ に対し，f_0 の G 軌道を考える：

$$G \to G \cdot f_0 = \{g \cdot f_0 \mid g \in G\} \subset \mathbb{F}$$

S がこの固定化部分群なので，命題 5.43 により，$G/S \cong Gf_0$ となる．一方，任意の（完全）旗 $f \in \mathbb{F}$ の固定化部分群 $\mathrm{Stab}_G(f)$ は可解である．S の次元の最大性により，$\dim S \geq \dim \mathrm{Stab}_G(f)$ が成立する．従って，$Gf_0 \cong G/S$ は作用 $G \curvearrowright \mathbb{F}$ の極小軌道である．極小軌道は閉集合なので（例えば，[10, Proposition, 8.3] 参照），$\mathbb{F}$ の射影性より，$Gf_0 \cong G/S$ も射影的である．

従って，(ii) を示せば (i) も従う．ボレル部分群 B を射影多様体 G/S に左から掛けることにより作用させる．すると，Borel fixed point theorem により，ある $g_0 \in G$ が存在し，B は $g_0 S$ を固定する．すなわち，$Bg_0 S = g_0 S$ となる．従って，$g_0^{-1} B g_0 \subset S$ となる．どちらもボレル部分群なので，その極大性により $g_0^{-1} B g_0 = S$ となり，主張が成り立つ．

最後に (iii) を示す．P をボレル部分群 B を含む閉部分群とする．このとき，全射 $G/B \to G/P$ が存在する．G/B は射影的であり，命題 5.42 により G/P は準射影的である．このことから G/P が射影的であることが従う（例えば,）．逆に，P を G の放物的部分群とすると，G/P は射影多様体である．B を G のボレル部分群とすると，Borel fixed point theorem により，固定点が存在する：$BgP = gP$．よって，$g^{-1}Bg \subset P$ となるので，P はボレル部分群 $g^{-1}Bg$ を含む． ■

定理 11.13. G を連結線形代数群，B と P をそれぞれ G のボレル群と放物的部分群とする．このとき，以下が成り立つ：

(i) $B = N_G(B)$．ただし，$N_G(B) := \{x \in G \mid xBx^{-1} = B\}$ とする．
(ii) $P = N_G(P)$．特に，放物的部分群 P は連結である．

証明. (i) は [10, Theorem 23.1] 参照．(i) を認めた上で，(ii) を示す．

放物的部分群 P の単位成分を P^0 とかく．放物的部分群 P はあるボレル部分群 B を含む（(i) の B とは関係ない）．任意の元 $x \in N_G(P)$ に対し，B と xBx^{-1} は P^0 のボレル部分群である．よって，ある $y \in P^0$ が存在し，$yBy^{-1} = xBx^{-1}$ が成り立つ．すなわち，$y^{-1}x \in N_G(B) = B \subset P^0$ となる．よって，$x \in P^0$ となるので，

$$N_G(P) \subset P^0 \subset P \subset N_G(P)$$

となり，$N_G(P) = P^0 = P$ が成り立つ． ■

定義 11.14. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$D^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g},\ D^i\mathfrak{g} := [D^{i-1}\mathfrak{g}, D^{i-1}\mathfrak{g}]\ (i > 0)$$

とおく．$\mathfrak{g}$ のイデアルの列

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^i\mathfrak{g}$$

を**導来列 (derived series)** と呼ぶ．また，ある自然数 n に対して $D^n\mathfrak{g} = 0$ となるとき，$\mathfrak{g}$ を**可解 (solvable)** と呼ぶ．

定義 11.15. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その極大可解部分リー代数 $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の**ボレル部分代数（Borel sualgebra）**，ボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を含む $\mathfrak{g}$ の部分リー代数 $\mathfrak{p}$ を**放物的部分代数（parabolic subalgebra）**と呼ぶ．

命題 11.16 ([10, Theorem 13.1], [25, 命題 9.3, 9.31])**.** 半単純線形代数群 G とそのリー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$\{G \text{ の連結閉部分群 }\} \to \{\mathfrak{g} \text{ の部分リー代数 }\}; H \mapsto \mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$$

なる写像は単射である．さらに，この写像の下，G のボレル部分群と $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数，G の放物的部分群と $\mathfrak{g}$ の放物的部分代数はそれぞれ一対一に対応する．

証明. 前半の主張の証明の概略だけ述べる．

[25, 命題 9.3] では解析的に前半を示している．G の連結閉部分群 H に対し，そのリー代数 $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ を考える．G に対しある正整数 n が存在し，G は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の閉部分群として埋め込むことができる．ここで，指数写像を考える：

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C});\ A \mapsto \exp(A) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m$$

行列の冪級数 $\exp(A) := \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!} A^m$ は各成分ごとに絶対収束するので，$\exp(A) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ となる．指数写像 $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の制限として $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を得る．この写像は G の $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ への埋め込みに依存せずに定義される．いま，$\exp(\mathfrak{h})$ の生成する G の部分群 $\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle$ に対し，そのザリスキ閉包 $\overline{\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle}$ を考える．このとき，$\overline{\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle}$ は G の閉部分群となり，さらに $H = \overline{\langle \exp(\mathfrak{h}) \rangle}$ が成り立つ．このことから，一対一対応が従う．

一方，[10, Theorem 13.1] では代数的に示している．標数 0 の代数閉体上定義された閉部分群 $A, B \subset G$ に対し，

$$\mathrm{Lie}(A) \cap \mathrm{Lie}(B) = \mathrm{Lie}(A \cap B)$$

が成り立つことがポイントである [10, Theorem 12.5].（一般に正標数では成り立たないことに注意する [10, Section 12, Exercises 1].）このことを認めると簡単に導かれる．実際，G の連結閉部分群 H, H' に対し，$\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Lie}(H') \subset \mathfrak{g}$ とすると，

$$\mathrm{Lie}(H \cap H') = \mathrm{Lie}(H) \cap \mathrm{Lie}(H') = \mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Lie}(H')$$

となり，

$$\dim H \cap H' = \dim H = \dim H'$$

が成立する．従って，H と H' の連結性より $H = H \cap H' = H'$ が成立する．

後半の主張は [25, 命題 9.31] を参照されたい． ■

11.3. **有理等質多様体の分類.** ここまで紹介した結果を用いて，有理等質多様体の分類を考えよう．定理 11.2 により，単純線形代数群 G とその放物的部分群 P に対し，その商 G/P を考えれば良い．

まず，G の普遍被覆 $G_{sc} \to G$ をとると，G_{sc} は $\mathrm{Lie}(G_{sc}) \cong \mathrm{Lie}(G)$ を満たす単純線形代数群である．さらに，G/P は G_{sc} の作用に関して等質になる．よって，ある放物的部分群 $P_{sc} \subset G_{sc}$ が存在して，$G/P \cong G_{sc}/P_{sc}$ となる．従って，G を初めから単連結単純線形代数群としてよい．このようにとることにより，単連結単純線形代数群 G と単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は一対一に対応する．以下，単連結単純線形代数群 G に対応する半単純リー代数 $\mathrm{Lie}(G)$ を $\mathfrak{g}$ と記す．

G のボレル部分群 B_0 を固定する．上で与えた P は G の任意の放物的部分群であった．定理 11.11(iii) より，P はあるボレル部分群 B を含む．B_0 と B は互いに共役なので，ある $g \in G$ が存在して，$B_0 = g^{-1}Bg$ となる．このとき，$P_0 := g^{-1}Pg$ と定めると，$G/P \cong G/P_0$ かつ P_0 は B_0 を含む放物的部分群である．従って，単連結単純線形代数群 G のボレル部分群 B を一つ固定し，その B を含む放物的部分群 P に対し，G/P を考えれば良い．

命題 11.16 により，単連結単純線形代数群 G とその放物的部分群 P に対し，その商として得られる有理等質多様体 G/P を分類するためには，各単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，そのボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を一つ固定し，$\mathfrak{b}$ を含む放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ を分類すればよい．そこで，単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその極大 toral $\mathfrak{h}$ を一つ固定する．この $\mathfrak{h}$ により，$\mathfrak{g}$ のルート空間分解を得る：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

ただし，

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(h)(x) = \alpha(h)x \text{ for all } h \in \mathfrak{h}\},$$
$$\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

とする．さらに，Φ の基底 $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\ell\}$ を固定し，Φ を正のルートの集合と負のルートの集合へ分解する：$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$．このとき，以下が成立する．

命題 11.17. 上記記号の下，以下が成立する．

(i) $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ は $\mathfrak{g}$ のボレル部分代数である．

(ii) (i) の $\mathfrak{b}$ を含む任意の放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ に対し，$I \subset \Delta$ が存在し，

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(I)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

と表される．ただし，$\Phi^+(I) := \{\sum_{\alpha_i \in \Delta \setminus I} k_{\alpha_i} \alpha_i \in \Phi \mid k_{\alpha_i} \in \mathbb{Z}\}$ とする．

以下，この $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p}_I$ とかく．さらに，$\mathfrak{p}_I$ に対応する放物的部分群を P_I とかく．

証明. (i) ルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対して $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ が成り立つことに注意する．このとき，導来イデアル $D\mathfrak{b} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ となる．このことから，十分大きい正整数 n について，$D^n\mathfrak{b} = 0$ となることが簡単に分かる．従って，$\mathfrak{b}$ は可解リー代数である．極大性を示すために，$\mathfrak{b}$ を真に含む $\mathfrak{g}$ の可解部分リー代数 $\mathfrak{b}'$ が存在したと仮定する．このとき，$\mathfrak{b}'$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$-不変なので，ルート空間分解と同様に，ある Φ の部分集合 S が存在し，$\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$ とかける．仮定より，$\Phi^+ \subset S$ かつ S は少なくとも一つの負のルート $-\alpha \in \Phi^-$ を含む．このとき，

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{b}'$$

となるが，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ は可解でないので矛盾．

(ii) $\mathfrak{b}$ を含む任意の放物的部分代数 $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p}$ が $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$-不変なので，(i) と同様にある Φ の部分集合 T が存在し，$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in T} \mathfrak{g}_\alpha$ とかける．このとき，$\Phi^+ \subset T$ が成り立つ．さらに，$\alpha, \beta, \gamma \in \Phi^+$ が $\alpha = \beta + \gamma$ かつ $-\alpha \in T$ を満たすならば $-\beta, -\gamma \in T$ が成り立つ．このことから主張は従う． ■

これにより，有理等質多様体 G/P は，半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ と単純ルートの集合 Δ の部分集合 I の組 $(\mathfrak{g}, I)$ により決まる．半単純リー代数は単純ルートを頂点として得られるディンキン図形により分類されるので，有理等質多様体 G/P は $(\mathcal{D}, I)$ により一意的に定まる．ただし，$\mathcal{D}$ は $\mathfrak{g}$ から定まるディンキン図形またはその型（$A_\ell, B_\ell \ldots$ など）を表し，$I \subset \Delta$ は対応するディンキン図形の頂点の部分集合とする．以下，場合に応じて単純ルート α_k を k，ルートの基底 Δ

を $\{1,2,\cdots,\ell\}$ と略記する．ディンキン図形の頂点の番号付けは [11, P. 58] に従う．以下，印付きディンキン図形 $(\mathcal{D},I)$ に対応する有理等質多様体を $\mathcal{D}(I)$ とかく．また，印付きディンキン図形 $(\mathcal{D},I)$ やそれに対応する有理等質多様体を，ディンキン図形 $\mathcal{D}$ の I に対応する頂点にしるし（バツ印や黒丸）をつけて表す．例えば，$A_3(1,2)$ は以下のように表す：

$$A_3(1,2)\quad \underset{1}{\times}\text{——}\underset{2}{\times}\text{——}\underset{3}{\circ}$$

例 11.18. (i) $A_\ell(r)$ は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{\ell+1}$ の r 次元線形部分空間をパラメータ付けするグラスマン多様体 $G(r,\mathbb{C}^{\ell+1})$ に対応する．

(ii) 正整数の組 $(r_1<r_2<\cdots<r_s\le\ell)$ に対し，$A_\ell(r_1,r_2,\cdots,r_s)$ は旗多様体

$$\{(V_{r_1},V_{r_2},\cdots,V_{r_s})\mid V_{r_i}\subset V_{r_{i+1}},\ V_{r_i}\text{ は }\mathbb{C}^{\ell+1}\text{ の }r_i\text{ 次元線形部分空間}\}$$

に対応する．

(iii) ω を $\mathbb{C}^n$ の非退化対称双線形形式とする．このとき，グラスマン多様体 $G(r,\mathbb{C}^n)$ の部分集合

$$OG(r,\mathbb{C}^n):=\{[W]\in G(r,\mathbb{C}^n)\mid\omega(W,W)=0\}$$

を考える．$n=2\ell+1$ かつ $1\le r\le\ell$ のとき，$B_\ell(r)$ は $OG(r,\mathbb{C}^{2\ell+1})$ に対応する．また，$n=2\ell$ かつ $1\le r\le\ell-2$ のとき，$D_\ell(r)$ は $OG(r,\mathbb{C}^{2\ell})$ に対応する．一方，$OG(\ell,\mathbb{C}^{2\ell})$ は二つの互いに同形な既約成分 $S_{\ell-1}$ からなり，$D_\ell(\ell-1)$ と $D_\ell(\ell)$ は $S_{\ell-1}$ と同形である．$OG(r,\mathbb{C}^n)$ を**直交グラスマン多様体**，$S_{\ell-1}$ を**スピノール多様体**という（$OG(\ell+1,\mathbb{C}^{2\ell+2})$ の既約成分として S_ℓ を定義することもあるが，ここでは [16] の記号に従う）．

(iv) ω を $\mathbb{C}^{2\ell}$ の非退化反対称双線形形式（シンプレクティック形式）とする．このとき，グラスマン多様体 $G(r,\mathbb{C}^{2\ell})$ の部分集合

$$SG(r,\mathbb{C}^{2\ell}):=\{[W]\in G(r,\mathbb{C}^{2\ell})\mid\omega(W,W)=0\}$$

を考える．$1\le r\le\ell$ のとき，$C_\ell(r)$ は $SG(r,\mathbb{C}^{2\ell+1})$ に対応する．$SG(r,\mathbb{C}^{2\ell})$ を**シンプレクティックグラスマン多様体**という．

注意 11.19. 上記例から，例えば $A_{2\ell-1}(1),A_{2\ell-1}(2\ell-1),C_\ell(1)$ は全て $(2\ell-1)$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{2\ell-1}$ と同形である．多様体としては全て同形だが，最初の二つは互いに双対の関係にあり，ともに対応する群は特殊線形群 $\mathrm{SL}(2\ell)$ である．一方，$C_\ell(1)$ に対応する群はシンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2\ell)$ である．

命題 11.20. $\dim\mathcal{D}(I)=\sharp(\Phi^+\setminus\Phi^+(I))$

証明. 任意の点 $o\in\mathcal{D}(I)$ に対し $\mathcal{D}(I)$ の o における接空間を $T_o(\mathcal{D}(I))$ と書くと，$\dim\mathcal{D}(I)=\dim T_o(\mathcal{D}(I))=\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_I$ が成り立つ．命題 11.17 により，ベクトル空間として $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_I\cong\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+\setminus\Phi^+(I)}\mathfrak{g}_{-\alpha}$ となり，任意のルート α に対し $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$ であることから主張は従う． ■

例 11.21. $\sharp I=1$ のとき，F_4 型の有理等質多様体 $F_4(I)$ の次元を求めてみよう．

$$F_4\text{ 型}\quad \begin{array}{ccccccc} \circ & — & \circ & \Rightarrow & \circ & — & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 \end{array}$$

上のディンキン図形に現れる単純ルート $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ に対し，F_4 のルート $\sum_{i=1}^{4} c_i\alpha_i$ を $[c_1c_2c_3c_4]$ とかくことにする．このとき，F_4 の正ルート全体の集合は以下のような 24 個のルートからなる：

$$\begin{gathered}[1000],\ [0100],\ [0010],\ [0001],\ [1100],\ [0110],\ [0011],\ [1110],\\ [0120],\ [0111],\ [1120],\ [1111],\ [0121],\ [1220],\ [1121],\ [0122],\\ [1221],\ [1122],\ [1231],\ [1222],\ [1232],\ [1242],\ [1342],\ [2342].\end{gathered}$$

よって，F_4 型の線形代数群の次元は

$$\dim \mathfrak{h} + \dim \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha + \dim \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}_\alpha = 4 + 24 + 24 = 52$$

である．

いま，$\Phi^+(1)$ は $[0c_2c_3c_4]$ なる形の正ルート全体の集合なので，

$$\Phi^+(1) = \{[0100],\ [0010],\ [0001],\ [0110],\ [0011],\ [0120],\ [0111],\ [0121],\ [0122]\}$$

となる．よって，$\dim F_4(1) = 24 - 9 = 15$ となる．同様に考えると，

$$\Phi^+(2) = \{[1000],\ [0010],\ [0001],\ [0011]\}$$
$$\Phi^+(3) = \{[0100],\ [0100],\ [0001],\ [1100]\}$$
$$\Phi^+(4) = \{[1000],\ [0100],\ [0010],\ [1100],\ [0110],\ [1110],\ [0120],\ [1120],\ [1220]\}$$

となるので，それぞれ，

$$\begin{aligned}\dim F_4(2) &= 24 - 4 = 20,\\ \dim F_4(3) &= 24 - 4 = 20,\\ \dim F_4(4) &= 24 - 9 = 15,\end{aligned}$$

となる．

問 11.22. $E_6(i)$ $(1 \le i \le 6)$ の次元を求めよ．

$I \subset J \subset \Delta$ に対して，対応する放物的部分代数 $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{p}_I \subset \mathfrak{g}$ とそれらに対応する放物的部分群 $P_J \subset P_I \subset G$ を考える．このとき，自然な射影 $\pi_{J,I} : G/P_J \to G/P_I$ は代数多様体の射となる．この射に対して以下が成立する．

命題 11.23. 上記記号の下，$\pi_{J,I}$ の任意のファイバーは $(\mathcal{D} \setminus I, J \setminus I)$ なる印付きディンキン図形に対応する有理等質多様体である．ただし，$\mathcal{D} \setminus I$ はディンキン図形 $\mathcal{D}$ から I に対応する頂点を取り除いて得られるディンキン図形とする．

証明. $\pi_{J,I}$ の任意のファイバーは P_I/P_J と表すことができる．放物的部分群 P_I のレヴィ分解を考えると，P_I のユニポテント根基 $R_u(P_I)$ による P_I の商は簡約代数群となる（[10, Theorem 30.2]）．さらにその簡約代数群をその中心で割ることにより半単純線形代数群 G_I を得る．G_I に対応するリー代数 $\mathrm{Lie}(G_I)$ は

$$\bigoplus_{\alpha\in\Phi^+(I)} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}])$$

とかける．これはディンキン図形 $\mathcal{D} \setminus I$ に対応するリー代数である．さらに，自然な射影 $\mathfrak{p}_I \to \mathrm{Lie}(G_I)$ による $\mathfrak{p}_J \subset \mathfrak{p}_I$ の像 $\overline{\mathfrak{p}_J}$ は

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(I)} ([\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_\alpha) \right) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+(J)} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

とかける．これは $\mathrm{Lie}(G_I)$ の放物的部分代数である．そこで，$\overline{\mathfrak{p}_J}$ に対応する G_I の放物的部分群を $\overline{P_J}$ とかくと，$P_I/P_J \cong G_I/\overline{P_J}$ となる．上記 $\overline{\mathfrak{p}_J}$ の記述から主張が従う． ■

有理等質多様体 $\mathcal{D}(I)$ のピカール群や曲線の錐，因子の錐，コホモロジーの計算についても多くのことが知られている（例えば，[23] 参照）．特に，$\mathcal{D}(I)$ のピカール数 $\rho(\mathcal{D}(I))$ は $\sharp I$ と一致する．

定義 11.24. 有理等質多様体 $\mathcal{D}(\Delta)$ を**完全旗多様体**と呼ぶ．$\mathcal{D}(\Delta)$ は G/B に他ならない．

多様体間の非特異射 $f : X \to Y$ の全てのファイバーが $\mathbb{P}^1$ と同形なとき f を $\mathbb{P}^1$ **束**という．完全旗多様体は多くの $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつ．まず，例として階数 2 の線形代数群に対する完全旗多様体を例として扱う．

例 11.25. $\mathfrak{g}$ のディンキン型を $A_1 \times A_1$ 型とする：

$$A_1 \times A_1 \text{ 型} \quad \underset{1}{\circ} \qquad \underset{2}{\circ}$$

このとき，対応するリー代数は $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$，対応する単連結半単純線形代数群は $G_{sc} = SL(2) \times SL(2)$ である．このとき，対応する等質多様体は二つの（1 点からなる自明な場合を含む）多様体の積として表される：

$$G_{sc}/P = SL(2)/Q \times SL(2)/R$$

$A_1 \times A_1(1,2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，$A_1 \times A_1(1) = \mathbb{P}^1$，$A_1 \times A_1(2) = \mathbb{P}^1$ である．このとき以下の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \times A_1(1,2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

ここで，p_1, p_2 は共に（自明な）$\mathbb{P}^1$ 束である．

例 11.26. $\mathfrak{g}$ のディンキン型を A_2 型とする：

$$A_2 \text{ 型} \quad \underset{1}{\circ} \text{——} \underset{2}{\circ}$$

このとき，対応するリー代数は $\mathfrak{sl}(3)$，対応する単連結半単純線形代数群は $G_{sc} = SL(3)$ である．このとき，対応する等質多様体は $A_2(1,2) = F(1,2,\mathbb{C}^3) \cong \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$，$A_2(1) = G(1,\mathbb{C}^3) \cong \mathbb{P}^2$，$A_2(2) = G(2,\mathbb{C}^3) \cong \mathbb{P}^{2\vee}$ である．このとき以

下の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A_2(1,2) = F(1,2,\mathbb{C}^3) \cong \mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2}) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ G(1,\mathbb{C}^3) = \mathbb{P}^2 & & G(2,\mathbb{C}^3) = \mathbb{P}^{2\vee} \end{tikzcd}$$

ここで，p_1, p_2 は共に $\mathbb{P}^1$ 束である．

例 11.27. $\mathfrak{g}$ のディンキン型を B_2 型とする：

$$B_2\text{ 型}\quad \underset{1}{\circ} \Rightarrow \underset{2}{\circ}$$

このとき，対応するリー代数は $\mathfrak{so}(5)$，対応する単連結半単純線形代数群は $G_{sc} = Spin(5) \cong Sp(4)$ である．ただし，$Spin(5)$ は $SO(5)$ の普遍被覆である．このとき，対応する等質多様体は $B_2(1,2) = \{([p],[\ell]) \in F(0,1,\mathbb{P}^4) \mid p \in \ell \subset Q^3\}$，$B_2(1) = \{[p] \in F(0,\mathbb{P}^4) \mid p \in Q^3\} = Q^3$，$B_2(2) = \{[\ell] \in F(1,\mathbb{P}^4) \mid \ell \subset Q^3\} \cong \mathbb{P}^3$ である．最後の同形は例えば [8, Exercise 22.6] から従う．このとき，以下の図式を得る：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & B_2(1,2) = \{([p],[\ell]) \in F(0,1,\mathbb{P}^4) \mid p \in \ell \subset Q^3\} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ Q^3 & & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

ここで，p_1, p_2 は共に $\mathbb{P}^1$ 束であるが，$p_1 : B_2(1,2) \to Q^3$ は Q^3 上のスピノール束 $\mathcal{S}$ を用いて，$p_1 : B_2(1,2) \cong \mathbb{P}(\mathcal{S}^\vee) \to Q^3$ とかける．ここで，スピノール束 $\mathcal{S}$ とは Q^3 を $G(2,\mathbb{C}^4) \cong Q^4$ の部分多様体とみたとき，$G(2,\mathbb{C}^4)$ の普遍束の Q^3 への制限として定義される．一方，$p_2 : B_2(1,2) \to \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{P}^3$ 上の *null-correlation bundle* $\mathcal{N}$ を用いて，$p_2 : B_2(1,2) \cong \mathbb{P}(\mathcal{N}) \to \mathbb{P}^3$ とかける．ただし，$\mathbb{P}^3$ 上の *null-correlation bundle* $\mathcal{N}$ は以下の完全列を満たすベクトル束である：

$$0 \to \mathcal{N} \to T_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to 0.$$

例 11.28. $\mathfrak{g}$ のディンキン型を G_2 型とする：

$$G_2\text{ 型}\quad \underset{1}{\circ} \Lleftarrow \underset{2}{\circ}$$

この場合の詳細は省略するが，以下の図式を得る：

$$\begin{tikzcd} & G_2(1,2) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ G_2(1) = Q^5 & & G_2(2) = K(G_2) \end{tikzcd}$$

ここで，$K(G_2)$ は G_2 型の 5 次元接触ファノ多様体である．$K(G_2)$ は余指数 3 のファノ多様体（向井多様体）の例としても有名である．また，p_1, p_2 は共に $\mathbb{P}^1$ 束である．

命題 11.29. 完全旗多様体 $\mathcal{D}(\Delta) = G/B$ は $\sharp\Delta$ 個の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもつ．

証明. 命題 11.23 により，任意の $\alpha_k \in \Delta$ に対して，$\mathcal{D}(\Delta) \to \mathcal{D}(\Delta \setminus \{\alpha_k\})$ は $\mathbb{P}^1$ 束である． ■

実はこの性質により，完全旗多様体は特徴付けられる：

定理 11.30 ([17], [18, Theorem A.1])**.** 非特異射影多様体 X に対し，以下は同値である．

(i) X はピカール数 $\rho(X)$ と同じ数の $\mathbb{P}^1$ 束構造をもち，それらの張る端射線は $N_1(X)$ において線形独立である．

(ii) X はあるディンキン図形 $\mathcal{D}$ に付随する完全旗多様体 $\mathcal{D}(\Delta) = G/B$ と同型である．

定義 11.31. 有理等質多様体 X が長いルート α_k（定義は [11, 10.4] を参照）を用いて $\mathcal{D}(\alpha_k)$ と表されるとき，X を**長いルートに対応する有理等質多様体**と呼ぶ．

命題 11.32. 長いルートに**対応しない**ピカール数 1 の有理等質多様体 $\mathcal{D}(k)$ はシンプレクティックグラスマン多様体 $C_\ell(k)$ (ただし，$1 < k < \ell$) と $F_4(k)$（ただし，$k = 3$ または 4）である．

証明. 長いルートに対応しないピカール数 1 の有理等質多様体 $\mathcal{D}(k)$ に対し，ディンキン図形 $\mathcal{D}$ は連結であり，α_k は短いルートである．従って，連結ディンキン図形の分類 [11, 11.4] により，$\mathcal{D}(k)$ は以下のいずれかである：

$$B_\ell(\ell),\ C_\ell(k)\ (k < \ell),\ F_4(k)\ (k = 3,\ 4),\ G_2(1).$$

$B_\ell(\ell)$ は多様体として $D_{\ell+1}(\ell+1)$ と同形である．実際，$B_\ell(\ell)$ は非特異 2 次超曲面 $Q^{2\ell-1}$ に含まれる $(\ell-1)$ 次元線形部分空間をパラメータ付けする直交グラスマン $OG(\ell-1, Q^{2\ell-1})$ であり，$D_{\ell+1}(\ell+1)$ は非特異 2 次超曲面 $Q^{2\ell}$ に含まれる ℓ 次元線形部分空間をパラメータ付けする直交グラスマンの既約成分 $OG(\ell, Q^{2\ell})^o$ である．ここで，$Q^{2\ell}$ が張る射影空間の超平面 H を用いて $Q^{2\ell-1} = Q^{2\ell} \cap H$ とみることにより，

$$OG(\ell, Q^{2\ell})^o \to OG(\ell-1, Q^{2\ell-1}); [\mathbb{P}^\ell] \mapsto [\mathbb{P}^\ell \cap H]$$

なる射を得るが，これは同形射である．また，注意 11.19 で述べた通り，$C_\ell(1) \cong A_{2\ell-1}(1)$ である．最後に，$G_2(1)$ は Q^5 と同形であることが知られている（例えば，[7, 23.3] 参照）．従って，$G_2(1) \cong B_3(1)$ である．以上により，$B_\ell(\ell), C_\ell(1), G_2(1)$ はそれぞれ $D_{\ell+1}(\ell+1), A_{2\ell-1}(1), B_3(1)$ とみなすことができるので，長いルートに対応する有理等質多様体である． ■

Appendix A. 不変部分空間とジョルダン・シュバレー分解

ここでは，$\mathbb{K}$ は任意標数の代数的閉体とする．特に $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は佐武一郎「線形代数学」第 4 章（pp. 133–151）を参照のこと．

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ を満たす非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ を A の**固有ベクトル (eigenvector)**，α を**固有値 (eigenvalue)**, $V_\alpha := \mathrm{Ker}(A - \alpha I)$ を α **に対応する** A **の固有空間（eigenspace）**と呼ぶ．また，$f_A(x) := |xI - A|$ を A の**固有多項式**もしくは**特性多項式 (characteristic polynomial)** と呼ぶ．

命題 A.1. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，α が A の固有値であることと A の固有多項式 $f_A(x)$ の根であることは同値である．

証明. α が A の固有値であることと $\mathrm{Ker}(A-\alpha I) \neq 0$ は同値である．さらにこれは $A-\alpha I$ が正則でないことと同値である．行列が正則でないこととその行列の行列式が 0 であることは同値なので，主張は成立する． ■

固有多項式に対して，次の定理は基本的である．

定理 A.2 (Hamilton-Cayley の定理)**.** $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，その固有多項式 $f_A(x)$ は $f_A(A) = O$ を満たす．

定義 A.3. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，$f(A) = O$ となるモニック多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ の中で次数最小のものを行列 A の**最小多項式 (minimal polynomial)** と呼び，$\varphi_A(x)$ と書く．

命題 A.4. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ は一意的に存在する．さらに，$f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ は $\varphi_A(x)$ で割り切れる．

証明. 定理A.2により，最小多項式の存在が分かる．(もしくは，$M_n(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上 n^2 次元の線形空間であることに注意すると，$I, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ は $\mathbb{K}$ 上線形従属となり，このことからも分かる．）$\varphi_A(x)$ と $\phi_A(x)$ を A の異なる最小多項式とする．このとき，多項式 $(\varphi_A - \phi_A)(x)$ は $(\varphi_A - \phi_A)(A) = O$ を満たし，かつ

$$\deg(\varphi_A - \phi_A)(x) < \deg(\varphi_A(x)), \deg(\phi_A(x))$$

を満たす．よって，$(\varphi_A - \phi_A)(x)$ を先頭項の係数で割って得られた多項式は最小多項式の定義を満たす．これは，φ_A が最小多項式であることに矛盾する．従って，一意性も示された．$f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対し，$f(x) = p(x)\varphi_A(x) + q(x)$（ただし，$\deg q(x) < \deg \varphi_A(x)$）と書くと，$q(A) = O$ となる．従って，上と同様の議論により，$q = 0$ となる． ■

例 A.5. 単位行列 $I \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，固有多項式は $f_I(x) = (x-1)^n$，最小多項式は $\varphi_I(x) = x - 1$ となる．

注意 A.6. 最小多項式の定義や命題A.4は環論を用いて次のように述べることも出来る：

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，$I(A) := \{f(x) \in \mathbb{K}[x] | f(A) = O\}$ とおくと $I(A)$ は一変数多項式環 $\mathbb{K}[x]$ のイデアルである．$\mathbb{K}[x]$ は単項イデアル聖域なので，$I(A) = (\varphi_A(x))$ を満たすモニック多項式 $\varphi_A(x) \in \mathbb{K}[x]$ が存在し，A の最小多項式と呼ぶ．

命題 A.7. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ の根と固有多項式 $f_A(x)$ の根（固有値）は重複度を無視して一致する．

証明. 命題A.4により，$\varphi_A(x)$ は固有多項式 $f_A(x)$ を割り切る．よって，$\varphi_A(x)$ の根は固有値である．一方，固有値 α とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$\varphi_A(\alpha)\boldsymbol{x} = \varphi_A(A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なので，$\varphi_A(\alpha) = 0$ となる．すなわち，全ての固有値は $\varphi_A(x)$ の根である． ■

次の命題は基本的である．

命題 A.8 (佐武一郎「線形代数学」P139-140 参照). $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，以下は同値である.

(i) A は対角化可能である.

(ii) $\varphi_A(x)$ は相異なる一次式の積に分解される： $\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)$.

(iii) $\mathbb{K}^n$ は A の固有空間の直和に分解される：$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$.

証明. (i) ⇒ (ii) A は対角化可能なので，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．このとき，$\varphi_A(x) = \varphi_{P^{-1}AP}(x)$ なので，A は対角行列であると仮定して良い．A の対角成分のうち相異なるものを $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とすると，

$$(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I)\cdots(A-\alpha_s I) = O$$

となることが計算により分かる．よって，$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)$ とおくと，$\varphi(A) = O$ となる．命題により，最小多項式は $\varphi(x)$ を割り切るので，重根を持たない（実際には $\varphi(x) = \varphi_A(x)$ となる）.

(ii) ⇒ (iii) 最小多項式 $\varphi_A(x)$ が相異なる一次式の積に分解されると仮定する．$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ を相異なる全ての固有値とすると，命題A.7により $\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\alpha_i)$ と書ける．従って，

$$(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I)\cdots(A-\alpha_s I) = O$$

となる．一般に $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$ が成り立つことに注意すると，

$$\mathrm{rank}(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I) \geq \mathrm{rank}(A-\alpha_1 I) + \mathrm{rank}(A-\alpha_2 I) - n$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\{\prod_{i=1}^{2}(A-\alpha_i I)\}(A-\alpha_3 I) &\geq \mathrm{rank}\{\prod_{i=1}^{2}(A-\alpha_i I)\} + \mathrm{rank}(A-\alpha_3 I) - n \\
&\geq \sum_{i=1}^{3}\mathrm{rank}(A-\alpha_i I) - 2n \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\mathrm{rank}\prod_{i=1}^{s}(A-\alpha_i I) \geq \sum_{i=1}^{s}\mathrm{rank}(A-\alpha_i I) - (s-1)n$$

従って，

$$\sum_{i=1}^{s}(n - \mathrm{rank}(A-\alpha_i I)) \geq n.$$

次元定理により，$\dim V_{\alpha_i} = n - \mathrm{rank}(A - \alpha_i I)$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\alpha_i} \geq n$ となる．一方，$\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i} \subset \mathbb{K}^n$ なので，等号が成立し，$V = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$ が成り立つ．

(iii) ⇒ (i) $\mathbb{K}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$ とする．各 V_{α_i} の基底を取ることにより $\mathbb{K}^n$ の基底を作ることができる．その基底に関する表現行列は対角行列なので題意は従う． ■

定義 A.9. 線形空間 V に対し，$x \in \mathrm{End}(V)$ の表現行列が命題 A.8 の条件を満たすとき，x を**半単純 (semisimple)** と呼ぶ．

例 A.10. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，$f_A(x) = x^2 + 1 = (x + \sqrt{-1})(x - \sqrt{-1})$ となる．よって，A は半単純である．一方，$\mathbb{R}$ 上において $f_A(x)$ は解を持たない．従って，さらなる考察が必要になる．このような煩わしい場合を排除するために $\mathbb{K}$ を代数的閉体と仮定している．

定義 A.11. 線形空間 V と $x \in \mathrm{End}(V)$ に対し，線形部分空間 $\Lambda \subset V$ が $x(\Lambda) \subset \Lambda$ を満たすとき，Λ を x **不変**と呼ぶ．

定義 A.12. 線形空間 V と線形部分空間 $\Lambda \subset V$ に対し，$V = \Lambda \oplus \Lambda'$ を満たす線形部分空間 Λ' を Λ の**補空間**と呼ぶ．

命題 A.13. 線形空間 V 上の線形変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対し，x が半単純であることと，任意の x 不変部分空間が x 不変補空間をもつことは同値である．

証明. x を半単純とする．命題 A.8 により，V は x の固有空間の直和に分解される：$V = \bigoplus V_\alpha$．x 不変部分空間 $\Lambda \subset V$ に対して，$\Lambda_\alpha := \Lambda \cap V_\alpha$ とおく．$x|_{V_\alpha} = \alpha I$ となるので，V_α において Λ_α の補空間 Λ'_α が存在する．このとき，$\Lambda' := \bigoplus \Lambda'_\alpha$ とおくと，Λ' は Λ の補空間であり，x 不変である．

逆に，任意の x 不変部分空間が x 不変補空間をもつと仮定する．まず，次が成立することを示す：

<u>主張</u>：$z \in \mathrm{End}(\Lambda)$ に対し，任意の z 不変部分空間 $W \subset \Lambda$ は（Λ において）z 不変補空間をもつ．

$V = \Lambda \oplus \Lambda'$ とする．$x := z \oplus 1_{\Lambda'} \in \mathrm{End}(V)$ とおく．$W \subset \Lambda$ は z 不変なので，$W \subset V$ は x 不変である．仮定により，x 不変補空間 $W' \subset V$ が存在する．このとき，簡単に $\Lambda = W \oplus (\Lambda \cap W')$ が成り立つことが分かり，主張が成立する．

x の固有空間 V_α は x 不変なので，x 不変補空間 V'_α が存在する．$x|_{V'_\alpha} \in \mathrm{End}(V'_\alpha)$ の固有空間 V_β に対して，上の主張により $x|_{V'_\alpha}$ 不変補空間 V'_β が存在する：$V'_\alpha = V_\beta \oplus V'_\beta$．これを繰り返すことにより，$V$ の固有空間分解を得られる．よって命題 A.8 により，x は半単純である． ■

注意 A.14. 一般に，線形空間 V 上の線形変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対し，x 不変部分空間が 0 と V 以外に存在しないとき，x を**単純**と呼ぶ．先に定義した「半単純」は単純線形変換の直和として書けることに他ならない．

補題 A.15. 線形空間 V 上の半単純線形変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対し，$\Lambda \subset V$ が x 不変であるとする．このとき，$x|_\Lambda$ も半単純である．

証明. 上記命題 A.13 により，Λ の x 不変補空間 Λ' が存在する．このとき，$x = x|_\Lambda \oplus x|_{\Lambda'}$ が成り立つ．つまり，$x,\ x|_\Lambda,\ x|_{\Lambda'}$ のそれぞれの表現行列を A, B, C とすると，

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

と書ける．よって，A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ に対して，$\varphi_A(B) = O, \varphi_A(C) = O$ となる．すなわち，$x|_\Lambda$ と $x|_{\Lambda'}$ の最小多項式は共に φ_A の約数となり，従って重根を持たない． ■

補題 A.16. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ が半単純かつ $AB = BA$ を満たせば，A と B を同時に対角化することが可能である．すなわち，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ は共に対角行列となる．また，このとき $A \pm B$ も半単純である．

証明. 後半は前半から明らかなので，前半のみ示す．A の相異なる固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とする．A は半単純なので $\mathbb{K}^n$ は固有空間 V_{α_i} の直和に分解される：$\mathbb{K}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^s V_{\alpha_i}$．任意の $x \in V_{\alpha_i}$ に対して，

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\alpha_i x) = \alpha_i(Bx)$$

より，$Bx \in V_{\alpha_i}$ となる．すなわち，V_{α_i} は B 不変である．よって，この直和分解に即して基底を取ると，

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_s I_{n_s} \end{pmatrix},\ B \sim \begin{pmatrix} B_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & B_s \end{pmatrix}$$

となる．ただし，$\sim$ は「相似」（行列 X, Y に対し，ある正則行列 P により $Y = P^{-1}XP$ と書けるとき，X と Y は相似と呼んだ）であることを意味する．B_i は B が V_{α_i} に引き起こす変換の行列である．補題 A.15 により B_i も半単純なので，V_{α_i} の基底を適当にとることにより B も対角化される． ■

補題 A.17. 共通因子を持たない多項式 $f_1(x), \cdots, f_s(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して，

$$h_1(x)f_1(x) + \cdots + h_s(x)f_s(x) = 1$$

を満たす多項式 $h_1(x), \cdots, h_s(x) \in \mathbb{K}[x]$ が存在する．

問 A.18. 補題 A.17 を示せ．

命題 A.19 (広義固有空間分解)**.** $A \in M_n(\mathbb{K})$ の固有多項式が次で与えられたとする：

$$f_A(t) = \prod_{i=1}^s (t - \alpha_i)^{m_i}$$

このとき，各固有値 α_i の広義固有空間 $\widetilde{V}_{\alpha_i}$ を

$$\widetilde{V}_{\alpha_i} := \{v \in V | (A - \alpha_i I)^{m_i} v = 0\}$$

により定義する．このとき，

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{V}_{\alpha_i}$$

が成り立つ．

証明. 固有多項式 $f_A(t)$ に対して，

$$f_i(t) = \frac{f_A(t)}{(t-\alpha_i)^{m_i}} = \prod_{j \neq i} (t-\alpha_j)^{m_j}$$

とおくと，$f_1(t), \cdots, f_s(t)$ は共通因子を持たない．よって，補題 A.17 により，

$$h_1(t)f_1(t) + \cdots + h_s(t)f_s(t) = 1 \tag{2}$$

を満たす多項式 $h_1(t), \cdots, h_s(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在する．$A_i := h_i(A)f_i(A)$ とおくと，

$$A_1 + \cdots + A_s = I$$

が成り立つ．一方，$i \neq j$ のとき $f_i(t)f_j(t)$ は $f_A(t)$ で割り切れるので，Hamilton-Cayley の定理から $f_i(A)f_j(A) = O$ となる．従って，

$$A_iA_j = O \ (i \neq j)$$

となる．さらに，$A_i = A_iE = A_i(A_1 + \cdots + A_s) = A_i^2$ となるので，

$$A_i^2 = A_i$$

も成り立つ．すなわち，$A_1, \cdots, A_s$ は射影作用素である．従って，

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i(V), \ A_i(V) = \{v \in V | A_iv = v\}$$

となる．

ここで，$A_i(V)$ は $\widetilde{V}_{\alpha_i}$ と一致する．実際，$(t-\alpha_i)^{m_i}f_i(t) = f_A(t)$ なので，$(A-\alpha_iI)^{m_i}f_i(A) = O$ となる．よって，

$$(A-\alpha_iI)^{m_i}A_i = (A-\alpha_iI)^{m_i}h_i(A)f_i(A) = h_i(A)(A-\alpha_iI)^{m_i}f_i(A) = O$$

となり，$A_i(V) \subset \widetilde{V}_{\alpha_i}$ が成り立つ．逆に，$v \in \widetilde{V}_{\alpha_i}$ に対して，$v \in A_i(V)$ を示す．このとき，$(A-\alpha_iI)^{m_i}v = 0$ が成り立つが，$(t-\alpha_i)^{m_i}$ と $h_i(t)f_i(t)$ は共通因子を持たない（$h_i(t)f_i(t)$ が $t-\alpha_i$ で割り切れると (2) の左辺が割り切れて矛盾する）．従って，補題 A.17 により多項式 $g_1(t), g_2(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在して $g_1(t)(t-\alpha_i)^l + g_2(t)h_i(t)f_i(t) = 1$ となる．よって，$g_1(A)(A-\alpha_iI)^l + g_2(A)A_i = I$ が成り立つ．これを v に施すと，$v = g_2(A)A_iv = A_i(g_2(A)v) \in A_i(V)$ となる．

以上により，$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{V}_{\alpha_i}$ となることが示された．

■

補題 A.20 (中国剰余定理). s 個の相異なる α_i と正の整数 m_i に対し，多項式 $f(t)=\prod_{i=1}^{s}(t-\alpha_i)^{m_i}\in\mathbb{K}[t]$ を考える．このとき，環の同型

$$\mathbb{K}[t]/(f(t))\cong\prod_{i=1}^{s}\mathbb{K}[t]/((t-\alpha_i)^{m_i})$$

が成り立つ．

問 A.21. 補題 A.20 を示せ．

命題 A.22 (Jordan-Chevalley 分解). 線形空間 V 上の自己準同型写像 $x\in\mathrm{End}(V)$ に対して以下が成り立つ．

(i) 次を満たす $x_s,x_n\in\mathrm{End}(V)$ が一意的に存在する：$x=x_s+x_n$, x_s は半単純，x_n は冪零，x_s と x_n は可換..

(ii) $x_s=p(x),x_n=q(x)$ を満たす定数項を持たない一変数多項式 $p(t),q(t)\in\mathbb{K}[t]$ が存在する．特に，x_s,x_n は x と可換な任意の自己準同型写像と可換である．

(iii) 線形部分空間 $A\subset B\subset V$ に対し $x(B)\subset A$ が成り立てば，$x_s(B),x_n(B)\subset A$ も成り立つ．

分解 $x=x_s+x_n$ を x の **Jordan-Chevalley 分解 (Jordan 分解)** と呼ぶ．x_s を x の**半単純部分 (semisimple part)**, x_n を x の**冪零部分 (nilpotent part)** と呼ぶ.

証明. (iii) は (ii) から従うので，(i), (ii) を示せば良い．x の固有多項式 $f_x(t)$ が

$$f_x(t)=\prod_{i=1}^{s}(t-\alpha_i)^{m_i}$$

と表されるとする．このとき，命題 A.19 により，

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\widetilde{V}_{\alpha_i}$$

が成り立つ．

0 が x の固有値のとき，$f(t):=f_x(t)\in\mathbb{K}[t]$，そうでないとき，$f(t):=tf_x(t)\in\mathbb{K}[t]$ とおく．すると，中国剰余定理により，ある多項式 $p(t)\in\mathbb{K}[t]$ が存在して，

$$p(t)\equiv\alpha_i \bmod (t-\alpha_i)^{m_i},\ p(t)\equiv 0 \bmod t$$

を満たす.

$$q(t):=t-p(t),\ x_s:=p(x),\ x_n:=q(x)$$

とおくと，定義より

$$x=x_s+x_n,\ [x_s,x_n]=0,\ p(0)=q(0)=0$$

が成り立つ．さらに，$x_s|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}=\alpha_i I_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}$ より，$x_s=\oplus\alpha_i I_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}$ となり，x_s は半単純である．一方，

$$x_n|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}=(x-x_s)|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}=x-\alpha_i I_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}$$

より，$(x_n|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}})^{m_i}=0$ となる．よって，$m:=\max\{m_i\}$ とおくと，$x_n^m=0$ となり，x_n は冪零である．

最後に，分解の一意性を示す．x_s, x_n は上で定めたものとする．さらに，半単純変換 s と冪零変換 n が存在して，$x=s+n$ と $[s,n]=0$ を満たすとする．このとき，$[s,x]=0,\ [n,x]=0$ に注意すると，$[x_s,s]=[p(x),s]=0$ となり，同様に，$[x_n,n]=0$ も成り立つ．すなわち，x_s と s，また x_n と n はそれぞれ可換である．従って，補題 A.16 により，x_s-s は半単純である．また，x_n-n は冪零であることも分かる．$x=x_s+x_n=s+n$ より，$x_s-s=n-x_n$ となり，左辺は半単純，右辺は冪零なので，結局 $x_s=s,\ x_n=n$ となり一意性も示された．

■

補題 A.23. $x\in\mathrm{End}(V)$ のジョルダン分解 $x=x_s+x_n$ に対し，$\mathrm{ad}\,x=\mathrm{ad}\,x_s+\mathrm{ad}\,x_n$ は $\mathrm{ad}\,x$ のジョルダン分解である．

証明. $[\mathrm{ad}\,x_s,\mathrm{ad}\,x_n]=\mathrm{ad}[x_s,x_n]=0$ に注意する．命題 A.22 (i) により，$\mathrm{ad}\,x_s$ が半単純であることと $\mathrm{ad}\,x_n$ が冪零であることを確認すれば良い．後半は補題**??**に他ならないので，$\mathrm{ad}\,x_s$ が半単純であることを確認する．V の基底を取り替えて，x_s は対角行列 $\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n)$ であると仮定して良い．このとき，$\mathfrak{gl}(V)$ の標準基底 $\{e_{i,j}\}$ に対し，$\mathrm{ad}\,x_s(e_{i,j})=[x_s,e_{i,j}]=(a_i-a_j)e_{i,j}$ となり，$\mathrm{ad}\,x_s$ の表現行列は対角行列であることが分かる． ■

補題 A.24. 有限次元 $\mathbb{K}$ 代数 V と $\delta\in\mathrm{Der}(V)\subset\mathrm{End}(V)$ に対し，$\mathrm{End}(V)$ における δ のジョルダン分解 $\delta=\sigma+\nu$ を考える．このとき，$\sigma,\nu\in\mathrm{Der}(V)$ が成り立つ．

証明. $\sigma\in\mathrm{Der}(V)$ を示せば十分である．δ に関する V の広義固有空間分解を $V=\bigoplus_{i=1}^{\ell}\widetilde{V}_{\alpha_i}$ とする．ただし，$\widetilde{V}_{\alpha_i}:=\{v\in V|(\delta-\alpha_i I)^m v=0\ (m\gg 0)\}$ である．このとき，α_i は δ の固有値であると同時に，σ の固有値でもあることに注意する．帰納法により $x\in\widetilde{V}_{\alpha_i}, y\in\widetilde{V}_{\alpha_j}$ に対して，

$$(\delta-(\alpha_i+\alpha_j)I)^n(xy)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((\delta-\alpha_i I)^{n-k}x)\cdot((\delta-\alpha_j I)^k y)$$

が成り立つことが分かる．よって，n を十分大きくとることにより，$\widetilde{V}_{\alpha_i}\cdot\widetilde{V}_{\alpha_j}\subset\widetilde{V}_{\alpha_i+\alpha_j}$ となる．すなわち，$\sigma(xy)=(\alpha_i+\alpha_j)xy$ が成り立つ．一方，$(\sigma x)y+x(\sigma y)=(\alpha_i+\alpha_j)xy$ が成り立つ．いま V は $\widetilde{V}_{\alpha_i}$ の直和として表されるので，$\sigma\in\mathrm{Der}(V)$ となる． ■

定理 A.25. $\mathfrak{g}$ が半単純であれば，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}=\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

証明. $\mathfrak{g}$ は半単純なので $Z(\mathfrak{g})=0$ となり，$\mathfrak{g}\cong\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ が成り立つ．$\mathfrak{h}:=\mathrm{ad}\,\mathfrak{g},\mathfrak{d}:=\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ とおくと，命題**??**により，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{d}$ のイデアルである．よって，補題 7.33 により $B_{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{d}$ のキリング形式 $B_{\mathfrak{d}}$ の制限である．キリング形式 $B_{\mathfrak{d}}$ の根基 $\mathfrak{h}^{\perp}:=\{x\in\mathfrak{d}|B_{\mathfrak{d}}(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{h}\}$ と，キリング形式 $B_{\mathfrak{h}}$ の根基 $(\mathfrak{h}^{\perp})_{\mathfrak{h}}:=\{x\in\mathfrak{h}|B_{\mathfrak{h}}(x,y)=0,\forall y\in\mathfrak{h}\}$ に対し，$\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{h}=(\mathfrak{h}^{\perp})_{\mathfrak{h}}$ となることに注意する．$\mathfrak{g}$ は半単純なので $\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{h}=(\mathfrak{h}^{\perp})_{\mathfrak{h}}=0$ となる．$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^{\perp}$ は $\mathfrak{d}$ のイデアルなので，$[\mathfrak{h}^{\perp},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}^{\perp}\cap\mathfrak{h}=0$ となる．命題**??**を用いると，$\delta\in\mathfrak{h}^{\perp}\subset\mathfrak{d}$ に対し，

$\mathrm{ad}(\delta x) = [\delta, \mathrm{ad}\, x] = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$ が成り立つことが分かる．$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ より，$\delta x = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$ となるので，$\delta = 0$ となる．従って $\mathfrak{h}^{\perp} = 0$ となる．

ここで，$\{e_1, \cdots, e_m\}$ を $\mathfrak{h}$ の基底とし，その延長として $\mathfrak{d}$ の基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ をとる．このとき，補題**??**と同様の議論により，$\mathfrak{h}^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\mathbb{B}'$ となる．ただし，$\mathbb{B} := (B_{\mathfrak{d}}(e_i, e_j)) = (\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n)$ に対して，$\mathbb{B}' := {}^t(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m)$ とする．$\mathfrak{h}^{\perp} = 0$ より，$\mathrm{Ker}\,\mathbb{B}' = 0$ となり $m = n$ となる．従って，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ が成り立つ．■

定義 A.26 (抽象ジョルダン分解)**.** $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする．定理 A.25 により，

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

が成り立つ．$x \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{ad}\, x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ のジョルダン分解を $\mathrm{ad}\, x = (\mathrm{ad}\, x)_s + (\mathrm{ad}\, x)_n$ とすると，$(\mathrm{ad}\, x)_s, (\mathrm{ad}\, x)_n \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ となる（補題 A.24）．$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ より，$\mathrm{ad}(x_s) = (\mathrm{ad}\, x)_s, \mathrm{ad}(x_n) = (\mathrm{ad}\, x)_n$ となる $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ がそれぞれ唯一つ存在し，$x = x_s + x_n, [x_s, x_n] = 0$ が成り立つ．これを $x \in \mathfrak{g}$ の **(抽象) ジョルダン分解 (Jordan decomposition** と呼び，x_s を x の**半単純成分 (semisimple part)**，x_n を x の**冪零成分 (nilpotent part)** と呼ぶ．

参考文献

[1] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Pub. Co., 1969.

[2] Iacopo Barsotti. Un teorema di struttura per le varietà gruppali. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, 18:43–50, 1955.

[3] Armand Borel and Reinhold. Remmert. Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 145:429–439, 1961/1962.

[4] Michel Brion, Preena Samuel, and V. Uma. *Lectures on the structure of algebraic groups and geometric applications*, volume 1 of *CMI Lecture Series in Mathematics*. Hindustan Book Agency, New Delhi; Chennai Mathematical Institute (CMI), Chennai, 2013.

[5] C. Chevalley. Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 39:307–317, 1960.

[6] Brian Conrad. A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 17(1):1–18, 2002.

[7] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[8] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[9] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[10] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[11] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978. Second printing, revised.

[12] Gunter Malle and Donna Testerman. *Linear algebraic groups and finite groups of Lie type*, volume 133. Cambridge University Press, 2011.

[13] Hideyuki Matsumura and Frans J. Oort. Representability of group functors, and automorphisms of algebraic schemes. *Invent. Math.*, 4:1–25, 1967.

[14] James Milne.

[15] David Mumford. *Abelian varieties.* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London, 1970.

[16] Roberto Muñoz, Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski. A survey on the Campana-Peternell conjecture. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 47:127–185, 2015.

[17] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, Kiwamu Watanabe, and Jarosław A. Wiśniewski. Fano manifolds whose elementary contractions are smooth $\mathbb{P}^1$-fibrations: a geometric characterization of flag varieties. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 17(2):573–607, 2017.

[18] Gianluca Occhetta, Luis E. Solá Conde, and Jarosław A. Wiśniewski. Flag bundles on Fano manifolds. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 106(4):651–669, 2016.

[19] Maxwell Rosenlicht. Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78:401–443, 1956.

[20] Carlos Sancho de Salas. Complete homogeneous varieties: structure and classification. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(9):3651–3667, 2003.

[21] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, second edition, 2009.

[22] Joseph H. Silverman and John T. Tate. *Rational points on elliptic curves*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, second edition, 2015.

[23] Dennis M. Snow. Homogeneous vector bundles. In *Group actions and invariant theory (Montreal, PQ, 1988)*, volume 10 of *CMS Conf. Proc.*, pages 193–205. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[24] 佐武一郎. **新版　リー環の話**. 日評数学選書. 日本評論社, 2002.

[25] 西山享 太田琢也. **代数群と軌道**. 数学の杜. 数学書房, 2015.

Course of Mathematics, Programs in Mathematics, Electronics and Informatics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University. Shimo-Okubo 255, Sakura-ku Saitama-shi, 338-8570, Japan.

Email address: `kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp`