2015 年度　数学特別講義 X，代数学特論 V（リー代数入門）

渡邉　究

1. はじめに

図形の「対称性」を数学的に記述しようとすると,「変換群」として群の概念が自然と生じることは代数学の授業で学んだ．同様にして，可微分多様体や複素多様体を扱うと「リー群」が，代数多様体を扱うと「群多様体」や「代数群」が自然に現れる．本講義で扱う「リー代数」はリー群や代数群の構造を代数的に調べる道具として導入されたものである．歴史的には 19 世紀末の Sophus Lie による多様体への群作用の研究に端を発する．リー群に対して，そのベクトル場や接空間を用いることによりリー代数を定義することが出来る．実は，リー群の局所的な構造はそのリー代数により一意的に決まり，大域的にも被覆の差を除いて決定されることが知られている．このことを用いて，幾何学的対象であるリー群を代数的な対象であるリー代数を介して調べることが出来る．このように，リー代数は微分幾何の研究から生じたものだが，現在では代数，幾何，解析，数理物理などあらゆる分野において応用が知られている．

リー代数の理論はリー群を導入した上で勉強することが自然だが，限られた時間内に全てを網羅することは不可能である．そこで，本講義ではリー代数の理論にスポットを当て，リー代数に関する基本事項を紹介する．また，時間が許せば代数幾何学や複素幾何学への応用に関しても触れる．線形代数の知識は仮定するが，ジョルダン標準形など学生が不慣れだと思われる箇所に関しては随時復習を行う．講義の参考文献として以下の二冊をあげておく．

- [Hu] James Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics Volume 9 1972, Springer
- [Sa] 佐武一郎,「リー環の話」新版, 2002, 日本評論社

[Hu] の 14.3 章（78 ページ）まで，[Sa] の 13 章（167 ページ）までの内容を消化することが第一の目標である．この講義ノートは [Hu] を元に書かれている．自分で勉強する場合には原著を参照のこと．

この講義を通して，断りがない限り $\mathbb{K}$ は標数 0 の体とする．体に不慣れな学生は $\mathbb{K}$ を適宜実数体 $\mathbb{R}$ や複素数体 $\mathbb{C}$ と読み替えて読めば良い．ただし，いくつかの箇所では正標数の場合も扱う．また，線形空間やリー代数は有限次元かつ $\mathbb{K}$ 上定義されたものとする．こちらに関しても，いくつかの箇所では無限次元の場合も扱う．

Date: January 19, 2016.

2. リー代数

2.1. リー代数の定義.

定義 2.1. $\mathbb{K}$ 上の線形空間 $\mathfrak{g}$ と写像 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; (x, y) \mapsto [x, y]$ が以下の三つの条件を満たすとき，$\mathfrak{g}$ を**リー代数**（**リー環**，**Lie algebra**），[,] を**括弧積**（**bracket**）と呼ぶ：

(i) 写像 [,] は双線形である．
(ii) 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対し，$[x, x] = 0$ が成り立つ．
(iii) **ヤコビの恒等式** (**ヤコビ律**，**Jacobi identity**) が成り立つ：

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

定義 2.2. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，その部分集合 $\mathfrak{h}$ が以下の二つの条件を満たすとき，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の**部分リー代数**（**Lie subalgebra**）と呼ぶ：

(i) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である．
(ii) 任意の $x, y \in \mathfrak{h}$ に対し，$[x, y] \in \mathfrak{h}$ が成り立つ．

定義から明らかに部分リー代数はリー代数である．リー代数 $\mathfrak{g}$ の線形空間としての次元をリー代数 $\mathfrak{g}$ の次元と呼び，$\dim \mathfrak{g}$ と書く．

例 2.3. 線形空間 V に対し，$[x, y] := 0$ $(x, y \in V)$ とおくと，V はリー代数となる．$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ を満たすリー代数 $\mathfrak{g}$ を**可換リー代数**もしくは**自明なリー代数**と呼ぶ.

問題 2.4. 1 次元リー代数は可換であることを示せ.

定義 2.5. リー代数の間の写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ が以下の二つの条件を満たすとき，f を**準同型写像**（**homomorphism**） と呼ぶ：

(i) f は線形写像である．
(ii) 任意の $x, y \in \mathfrak{g}_1$ に対し，$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ が成り立つ．

特に，準同型写像 f が全単射であるとき**同型写像**（**isomorphism**）とよぶ．リー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ の間に同型写像が存在するとき，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ は**同型である**といい，$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ と記す.

問題 2.6. n 次元可換リー代数の同型類はただ一つであることを示せ.

問題 2.4 と問題 2.6 により，1 次元リー代数の同型類はただ一つである．2 次元リー代数について考察しよう.

命題 2.7. $\mathfrak{g}$ を 2 次元リー代数とする．もし，$\mathfrak{g}$ が非可換であれば，$[x, y] = y$ を満たす $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x, y\}$ が存在する．

証明. $\mathfrak{g}$ の基底 e_1, e_2 に対し，$[e_1, e_2] = ae_1 + be_2$ となる $a, b \in \mathbb{K}$ が存在する．$\mathfrak{g}$ は非可換なので，$(a, b) \neq (0, 0)$ となる．$b \neq 0$ として一般性を失わない．このとき，

$$[\frac{1}{b}e_1, [e_1, e_2]] = [\frac{1}{b}e_1, ae_1 + be_2] = [e_1, e_2].$$

よって，$x := \dfrac{1}{b}e_1$, $y := [e_1, e_2]$ とおくと $[x, y] = y$ となり，$\{x, y\}$ が求める基底である． ■

系 2.8. 2 次元リー代数の同型類は二つである．

証明. 次元の等しい線形空間は同型であるので，可換リー代数はリー代数として同型である（問題 2.6）．そこで，$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ を非可換リー代数とする．命題 2.7 により，$[x_i, y_i] = y_i$ を満たす $\mathfrak{g}_i$ の基底 $\{x_i, y_i\}$ が $i = 1, 2$ に対してそれぞれ存在する．このとき，$f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ を $f(x_1) = x_2, f(y_1) = y_2$ により定めれば，f は同型写像である．従って，非自明な 2 次元リー代数の同型類は高々一つである．具体的に

$$\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{K}} \subset M_2(\mathbb{K})$$

とおき，括弧積を行列交換子 $[x, y] := xy - yx$ により定める．すると，$\mathfrak{g}$ は非自明な 2 次元リー代数になり存在も示された．■

このように，2 次元以下であればリー代数の構造は単純である．3 次元の場合については，様々な教科書でも扱われているように，分類は広く知られている．歴史的には，Sophus Lie により 3 次元複素リー代数は分類され，3 次元実リー代数は Luigi Bianchi により分類された．ここではその詳細には触れず，二つの例を挙げるにとどめる．

例 2.9. 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に対し，その標準基底を $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ とおく．任意の $x = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}, y = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$[x, y] := x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

とおくと，$\mathbb{R}^3$ はリー代数となる．

例 2.10 (Heisenberg 代数). $\mathfrak{g}$ を 3 次元リー代数とする．次の条件を満たす $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x, y, z\}$ が存在するとき，$\mathfrak{g}$ を 3 次元 Heisenberg 代数と呼ぶ：

$$[x, y] = z, [x, z] = 0, [y, z] = 0.$$

3 次元 Heisenberg 代数は行列を用いて実現される．

実際，3 次正方行列

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により生成される $M_3(\mathbb{K})$ の部分空間を $\mathfrak{g}$ とおく．任意の $v, w \in \mathfrak{g}$ に対し，行列交換子により $[v, w] := vw - wv$ と定めると $\mathfrak{g}$ は 3 次元 Heisenberg 代数となる．

問題 2.11. 例 2.9, 2.10 を確認せよ．

2.2. 線形リー代数.

3 次元 Heisenberg 代数のように，正方行列と行列交換子を用いてリー代数を構成することを考えよう．

例 2.12. n 次元線形空間 V に対し，$\mathrm{End}(V) := \{f : V \to V |$ 線形変換 $\}$ とおく．交換子 $[x, y] := xy - yx$ $(x, y \in \mathrm{End}(V))$ により，$\mathrm{End}(V)$ はリー代数の構造をもつ．$\mathrm{End}(V)$ を上記括弧積によりリー代数とみなすとき，$\mathfrak{gl}(V)$ や $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ とかき，**一般リー代数（general Lie algebra）**とよぶ．すなわち，$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ と

は $\mathbb{K}$ 係数 n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{K})$ に行列交換子によりリー代数の構造を入れたものである：

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) := M_n(\mathbb{K}),\ [x,y] := xy - yx\ (x, y \in M_n(\mathbb{K}))$$

問題 2.13. $\mathfrak{gl}(V)$ がリー代数であることを確認せよ．

定義 2.14. $\mathfrak{gl}(V)$ の任意の部分リー代数を**線形リー代数（linear Lie algebra）**とよぶ．

線形リー代数の例を確認しよう．

例 2.15 (A_l 型)**.** $l+1$ 次元線形空間 V に対し，

$$\mathfrak{sl}(V) := \mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \mathrm{Tr}(x) = 0\}$$

を**特殊リー代数（special Lie algebra）**とよぶ．ただし，$\mathrm{Tr}(x)$ は x の（ある基底に関する）表現行列のトレースを意味する．

命題 2.16. $\mathfrak{sl}(V)$ は線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{sl}(V) = (l+1)^2 - 1$ を満たす．さらに，(i,j) 成分が 1 で他の成分は 0 である $(l+1)$ 次正方行列を e_{ij}，$h_k := e_{kk} - e_{k+1,k+1}$ とおくと，$\{e_{ij}, h_k | i \neq j, 1 \leq k \leq l\}$ が $\mathfrak{sl}(V)$ の基底を成す．

証明. $\mathrm{Tr}(x) = 0$ という条件は V の基底の取り方に依らないので，$\mathfrak{sl}(V)$ は well-defined であることに注意する．また，任意の $x, y \in \mathfrak{gl}(V), a, b \in \mathbb{K}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(ax+by) = a\mathrm{Tr}(x) + b\mathrm{Tr}(y), \mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx)$$

が成り立つので，$\mathfrak{sl}(V)$ は線形リー代数であることが分かる．さらに，トレース $\mathrm{Tr} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathbb{K}$ を $\mathbb{K}$ 上の線形空間の間の線形写像とみなすと，次元定理により $\dim \mathfrak{sl}(V) = \dim \mathfrak{gl}(V) - 1 = (l+1)^2 - 1$ となる．従って，$\{e_{ij}, h_k | i \neq j, 1 \leq k \leq l\}$ が基底であることを示すには，線形独立性を示せば良いがそれは簡単に分かる． ■

例 2.17 (C_l 型)**.** $2l$ 次元線形空間 V に対し，V の基底を固定して V の元を成分表示したものと同一視する．$M = \begin{pmatrix} O & I_l \\ -I_l & O \end{pmatrix}$ により定まる V 上の非退化反対称双線形形式（シンプレクティック形式と呼ぶ）

$$\omega : V \times V \to \mathbb{K}; (v, w) \mapsto {}^t v M w$$

を考える．v, w の成分表示をそれぞれ $v = (v_i), w = (w_i)$ とすると，

$$\omega(v,w) = \sum_{i=1}^{l} v_i w_{l+i} - \sum_{i=1}^{l} w_i v_{l+i}$$

と書ける（このことから ω が実際にシンプレクティック形式であることが分かる）．このとき，

$$\mathfrak{sp}(V) := \mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w)),\ \forall v, w \in V\}$$

を**シンプレクティック代数（symplectic algebra）**とよぶ．条件

$$\omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w))$$

を行列の言葉で書き直すと，

$$^t xM + Mx = 0$$

ということに他ならない．すなわち，

$$\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{K}) = \{x \in M_{2l}(\mathbb{K}) | {}^t xM + Mx = 0\}$$

と書ける．$\mathfrak{sp}(V)$ は線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{sp}(V) = 2l^2 + l$ を満たす．

問題 2.18. $\mathfrak{sp}(V)$ は線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{sp}(V) = 2l^2 + l$ を満たすことを示せ．さらに，(i, j) 成分が 1 で他の成分は 0 である $2l$ 次正方行列を e_{ij} とするとき，以下のベクトルが $\mathfrak{sp}(V)$ の基底を成すことを示せ：

$$e_{ii} - e_{l+i,l+i}\ (1 \le i \le l),\ e_{ij} - e_{l+j,l+i}\ (1 \le i \ne j \le l)$$
$$e_{i,l+j} + e_{j,l+i},\ e_{l+i,j} + e_{l+j,i}\ (1 \le i < j \le l),\ e_{i,l+1i}, e_{l+1,i}\ (1 \le i \le l)$$

例 2.19 (B_l 型)**.** $2l+1$ 次元線形空間 V に対し，V の元を成分表示したものと同一視する．$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & O & I_l \\ 0 & I_l & O \end{pmatrix}$ により定まる V 上の非退化対称双線形形式

$$\omega : V \times V \to \mathbb{K}; (v, w) \mapsto {}^t vMw$$

を考える．v, w の成分表示をそれぞれ $v = (v_i), w = (w_i)$ とすると，

$$\omega(v, w) = v_1 w_1 + \sum_{i=2}^{l+1} v_i w_{l+i} + \sum_{i=2}^{l+1} v_{l+i} w_i$$

と書ける（このことから ω が実際に非退化対称双線形形式であることが分かる）．このとき，

$$\mathfrak{o}(V) := \mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w)),\ \forall v, w \in V\}$$

を直交リー代数（**orthogonal Lie algebra**）とよぶ．

例 2.20 (D_l 型 ($l \ge 2$))**.** $2l$ 次元線形空間 V に対し，$M = \begin{pmatrix} O & I_l \\ I_l & O \end{pmatrix}$ により定まる V 上の非退化対称双線形形式

$$\omega : V \times V \to \mathbb{K}; (v, w) \mapsto {}^t vMw$$

を考える．このとき，

$$\mathfrak{o}(V) := \mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{K}) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | \omega(x(v), w) = -\omega(v, x(w)),\ \forall v, w \in V\}$$

も直交リー代数（**orthogonal Lie algebra**）とよぶ．

問題 2.21. $\mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{K})$ と $\mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{K})$ はそれぞれ線形リー代数であり，$\dim \mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{K}) = 2l^2 + l, \dim \mathfrak{o}_{2l}(\mathbb{K}) = 2l^2 - l$ となることを示せ．さらに，それぞれの基底を求めよ．

ここで挙げた A_l, B_l, C_l, D_l 型のリー代数を**古典型線形リー代数**と呼ぶ．他にも以下の線形リー代数は重要である．

例 2.22. (i) $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}) := \left\{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | a_{ij} = 0\ \textit{if}\ i > j\right\}$.

(ii) $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) := \left\{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | a_{ij} = 0 \ \mathit{if}\ i \geq j\right\}$.
(iii) $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K}) := \left\{(a_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) | a_{ij} = 0 \ \mathit{if}\ i \neq j\right\}$.

命題 2.23. $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$ に対して，以下が成り立つ．
(i) $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{d}_n(\mathbb{K}) + \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$.
(ii) $[\mathfrak{d}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})] = \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$.
(iii) $[\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{t}_n(\mathbb{K})] = \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$.

問題 2.24. $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{n}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$ が線形リー代数であることと，命題 2.23 が成り立つことを確認せよ．

線形リー代数は多くのリー代数の例を与えることが分かる．実は，全てのリー代数は線形リー代数と同型であることが知られている：

定理 2.25 (Ado の定理 (1936))**.** 任意のリー代数 $\mathfrak{g}$ は少なくとも一つの忠実表現をもつ（表現の定義は定義 2.32 を参照のこと）．すなわち，$\mathfrak{g}$ と同型な線形リー代数が存在する．

2.3. 微分代数.

定義 2.26. $\mathbb{K}$ 上の線形空間 V と双線形写像 $f : V \times V \to V; (x, y) \mapsto xy$ の組を $\mathbb{K}$ **代数**と呼ぶ．以下，V がリー代数のときは f をリー代数の括弧積として取ることで $\mathbb{K}$ 代数とみなす．

定義 2.27. $\mathbb{K}$ 代数 V に対し，

$$\mathrm{Der}(V) := \{D \in \mathfrak{gl}(V) | D(xy) = xD(y) + D(x)y, \forall x, y \in V\}$$

を V の**微分代数（derivation algebra）**と呼ぶ．$\mathrm{Der}(V)$ は線形リー代数である．

問題 2.28. $\mathrm{Der}(V)$ が線形リー代数であることを確認せよ．

例 2.29. 一変数多項式環 $\mathbb{K}[x]$ に対し，

$$\mathrm{Der}(\mathbb{K}[x]) = \left\{ a(x)\frac{d}{dx} \;\middle|\; a(x) \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

が成り立つ（$\mathbb{K}[x]$ は線形空間として無限次元であるが，定義 2.27 と同様にして $\mathrm{Der}(\mathbb{K}[x])$ を定義する）．

証明. 任意の $D \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}[x])$ に対し，

$$D(1) = D(1^2) = D(1)1 + 1D(1) = 2D(1)$$

となるので，$D(1) = 0$ が成り立つ．さらに，$a(x) := D(x)$ とおくと $D(x^i) = ix^{i-1}a(x)$ $(i \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ が成り立つ．よって，任意の $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ に対して，

$$D(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i D(x^i) = \sum_{i=1}^{n} a_i i x^{i-1} a(x) = a(x) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

となる．逆に，$a(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して $a(x)\dfrac{d}{dx} \in \mathrm{Der}(\mathbb{K}[x])$ となることは明らか．
■

リー代数に対し，その微分代数は自然に現れる：

命題 2.30. リー代数 $\mathfrak{g}$ を括弧積により $\mathbb{K}$ 代数とみなす．このとき，

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}); x \mapsto (y \mapsto \mathrm{ad}(x)(y) := [x, y])$$

はリー代数の間の準同型写像である．さらに，$\mathrm{Im}(\mathrm{ad}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

証明. 括弧積の双線形性により $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ となるので，写像 ad は well-defined である．準同型性はヤコビの恒等式から導かれる．また，後半を示すには微分の条件

$$\mathrm{ad}(x)([y, z]) = [\mathrm{ad}(x)(y), z] + [y, \mathrm{ad}(x)(z)]$$

を確認すれば良いが，これもヤコビの恒等式に他ならない． ■

定義 2.31. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，命題 2.30 の準同型写像 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の**随伴表現（adjoint representation）**と呼ぶ．また，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元のうち $\mathrm{Im}(\mathrm{ad})$ に含まれるものを**内部微分（inner derivation）**，それ以外を**外部微分（outer derivation）**と呼ぶ．

定義 2.32. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，準同型写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を**表現 (representation)** と呼ぶ．ただし，V は線形空間とする．

3. イデアル，可解代数，冪零代数

3.1. イデアルと商リー代数.

定義 3.1. $\mathfrak{a}$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の線形部分空間とする．任意の $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{a}$ に対し $[x, y] \in \mathfrak{a}$ を満たすとき，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の**イデアル (ideal)** と呼ぶ．

例 3.2. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し，以下の集合は全て $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

(i) 0 と $\mathfrak{g}$（自明なイデアル）.

(ii) $Z(\mathfrak{g}) := \{z \mid [x, z] = 0, \ \forall\, x \in \mathfrak{g}\}$：**中心 (center)**.

(iii) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i] \,\middle|\, x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b}, m \geq 1 \right\}$.

(iv) $D\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i] \,\middle|\, x_i, y_i \in \mathfrak{g}, m \geq 1 \right\}$：**導来イデアル (derived ideal)**.

問題 3.3. 例 3.2 のそれぞれの集合がイデアルとなることを示せ．

命題 3.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ に対し，$D\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ となる．

証明. 任意の $x, y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ に対して $\mathrm{Tr}([x, y]) = 0$ となるので，$D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ が成り立つ．よって，逆の包含関係を示す．n 次正方行列全体がなす線形空間 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ に対し，その標準基底を $e_{i,j}$ もしくは e_{ij} とかく．命題 2.16 で確認した通り，e_{ij} $(i \neq j), h_i := e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ は $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ の基底をなす．このとき，次の補題 3.5 により，

$$e_{ij} = [e_{ij}, e_{jj}], \ h_i = [e_{i,i+1}, e_{i+1,i}]$$

が成り立つので，$D\mathfrak{g} \supset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ となる． ■

補題 3.5. $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$ が成り立つ．

証明. 直接計算で確かめられる． ■

命題 3.6. $\mathfrak{g}$ をリー代数とする．任意の $x \in \mathfrak{g}$ と $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ に対し，$[\delta, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}(\delta x)$ が成り立つ．よって，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルを成す．

証明. 命題 2.30 により $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の線形部分空間なので，前半が成り立てば後半も成立する．任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ と $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ に対し，

$$\begin{aligned}[\delta, \mathrm{ad}\, x](y) &= (\delta\, \mathrm{ad}\, x)(y) - (\mathrm{ad}\, x\delta)(y) = \delta[x, y] - [x, \delta y] \\ &= [\delta x, y] + [x, \delta y] - [x, \delta y] = \mathrm{ad}(\delta x)(y)\end{aligned}$$

が成り立つ． ■

定義 3.7. リー代数 $\mathfrak{g}$ が以下の二つの条件を満たすとき，**単純 (simple)** と呼ぶ:

(i) $\mathfrak{g}$ のイデアルは 0 と $\mathfrak{g}$ のみである．

(ii) $D\mathfrak{g} \neq 0$.

注意 3.8. 条件 (i) を満たす場合に「単純」と定義する流儀もある．条件 (i) の下，条件 (ii) が成り立たなければ，$\dim \mathfrak{g} = 1$ となる．実際，$D\mathfrak{g} = 0$ とすると $\mathfrak{g}$ は可換である．よって，$\mathfrak{g}$ の任意の 1 次元部分空間は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．従って，条件 (i) より $\dim \mathfrak{g} = 1$ となることが分かる．このことから，条件 (ii) は $\dim \mathfrak{g} = 1$ の場合を除くために課した条件であり，本質的ではないことが分かる．

命題 3.9. 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$Z(\mathfrak{g}) = 0$ と $D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ が成り立つ．

証明. 簡単． ■

例 3.10. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ は単純リー代数である．

証明. $\mathfrak{g}$ の基底

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$[x, y] = h, [h, x] = 2x, [h, y] = -2y$$

が成り立つ．$\mathfrak{a}$ を 0 でない $\mathfrak{g}$ のイデアルとすると，0 でない元 $ax + by + ch \in \mathfrak{a}$ が存在する．

$$\mathrm{ad}(x)^2(ax + by + ch) = \mathrm{ad}(x)(bh - 2cx) = -2bx,$$

$$\mathrm{ad}(y)^2(ax + by + ch) = \mathrm{ad}(y)(-ah + 2cy) = -2ay$$

より，$-2bx, 2ay \in \mathfrak{a}$ となる．もし $a \neq 0$ であれば $y \in \mathfrak{a}$ となり，$h = [x, y] \in \mathfrak{a}, 2x = [h, x] \in \mathfrak{a}$ となるので，$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ である．$b \neq 0$ のときも同様に $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ である．そこで $a = b = 0$ とすると，$ch \in \mathfrak{a}$ となるので $h \in \mathfrak{a}$ となる．このときも同様に $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ となる．以上により，定義 3.7 の条件 (i) を確認することができた．いま $\dim \mathfrak{g} = 3$ なので，注意 3.8 により定義 3.7 条件 (ii) についても成り立つ． ■

問題 3.11. より一般に $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ $(n \geq 2)$ は単純であることを示せ．また，$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ についてはどうか．

定義 3.12. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，線形空間としての商（剰余）$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ を考える．任意の $\overline{x}, \overline{y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ に対し，$[\overline{x}, \overline{y}] := \overline{[x, y]}$ と定めることにより，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ はリー代数となる．$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ を**商（剰余）代数（quotient (residue) algebra）**と呼ぶ．

問題 3.13. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の括弧積の定義が well-defined であることを確認し，$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ がリー代数となることを確認せよ．

命題 3.14. リー代数の間の準同型写像 $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ に対し，以下が成立する．

(i) $\mathrm{Ker} f$ は $\mathfrak{g}_1$ のイデアルである．
(ii) $\mathrm{Im} f$ は $\mathfrak{g}_2$ の部分リー代数である．
(iii) [準同型定理] $\mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker} f \cong \mathrm{Im} f$.

問題 3.15. 命題 3.14 を示せ．

命題 3.16 (定理 2.25 の特別な場合). 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は線形リー代数と同型である．

証明. リー代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対し，$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = Z(\mathfrak{g}) = 0$ となる．従って，準同型定理から主張は従う．■

3.2. **可解リー代数.**

定義 3.17. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$D^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g},\ D^i\mathfrak{g} := [D^{i-1}\mathfrak{g}, D^{i-1}\mathfrak{g}]\ (i > 0)$$

とおく．$\mathfrak{g}$ のイデアルの列

$$\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots \supset D^i\mathfrak{g}$$

を**導来列 (derived series)** と呼ぶ．また，ある自然数 n に対して $D^n\mathfrak{g} = 0$ となるとき，$\mathfrak{g}$ を**可解 (solvable)** と呼ぶ．

例 3.18. 可換リー代数は明らかに可解である．一方，単純リー代数は可解でない．

例 3.19. 上三角行列全体 $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ は可解である．

証明. 命題 2.23 より，$\mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) = D\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ が成り立つ．命題 2.23 では証明を与えなかったので，ここでこのことを確認をする．e_{ij} $(i \leq j)$ は $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ の基底をなす．$[e_{ii}, e_{ij}] = e_{i,j}$ $(i < j)$ なので，$\mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) \subset D\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ となる．$\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{d}_n(\mathbb{K}) + \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ かつ $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$ が可換であることから，$\mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) = D\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ が成り立つ．

ここで，e_{ij} $(i<j)$ に対し，$j-i$ を e_{ij} のレベルと呼ぶ．レベルが p 以上の e_{ij} が張る $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ の線形部分空間を $\mathfrak{g}_p$ とかく：

$$\mathfrak{g}_p=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{1,p+1} & \cdots & x_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & x_{n-p,n} \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_{ij}\in\mathbb{K}\right\}.$$

定義から，$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{g}_1=\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ である．自然数 p に対し，$D\mathfrak{g}_p\subset\mathfrak{g}_{2p}$ となることを示す．$p=j-i=m-l$ を満たす n 以下の自然数 i,j,l,m に対して，$i\neq m$ ならば，

$$[e_{ij},e_{lm}]=\delta_{jl}e_{im}-\delta_{mi}e_{lj}=\delta_{jl}e_{im}$$

となる．従って，$i\neq m$ のとき，$j=l$ なら e_{im} かつ $m-i=(m-l)+(l-i)=(m-l)+(j-i)=2p$, $j\neq l$ なら 0 となる．一方，$i=m$ ならば $j>i=m>l$ なので，

$$[e_{ij},e_{lm}]=\delta_{jl}e_{im}-\delta_{mi}e_{lj}=-e_{lj}$$

となる．このとき，$j-l=(j-i)+(i-l)=(j-i)+(m-l)=2p$ となる．従って，いずれの場合も $[e_{ij},e_{lm}]\in\mathfrak{g}_{2p}$ となり，$D\mathfrak{g}_p\subset\mathfrak{g}_{2p}$ となることが示された．また，逆の包含が成り立つことも簡単に分かる．以上により，

$$D^i\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})=D^{i-1}\mathfrak{g}_1=D^{i-2}\mathfrak{g}_2=D^{i-3}\mathfrak{g}_{2^2}=\cdots=\mathfrak{g}_{2^{i-1}}$$

となるので，$2^{i-1}>n-1$ なら $D^i\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})=0$ となる． ■

命題 3.20. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して以下が成り立つ．

(i) $\mathfrak{g}$ が可解ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分リー代数や準同型像も可解である．
(ii) $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の可解イデアルで $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ も可解であれば，$\mathfrak{g}$ も可解である．
(iii) $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の可解イデアルならば，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ も可解である．

証明. (i) 部分リー代数 $\mathfrak{h}$ に対し，$D^i\mathfrak{h}\subset D^i\mathfrak{g}$ が成り立つので，$\mathfrak{g}$ が可解ならば $\mathfrak{h}$ も可解である．また，全射準同型 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ に対し，$f(D^i\mathfrak{g}_1)=D^i\mathfrak{g}_2$ となるので，後半も成立する．

(ii) $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可解なので，ある自然数 n に対し $D^n\mathfrak{g}\subset\mathfrak{a}$ となる．

$$D^{n+1}\mathfrak{g}=D^1(D^n\mathfrak{g})=[D^n\mathfrak{g},D^n\mathfrak{g}]\subset D^1\mathfrak{a}$$

に注意すると，$D^{n+i}\mathfrak{g}\subset D^i\mathfrak{a}$ となることが分かるので，$\mathfrak{g}$ も可解である．

(iii) 同型 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\cong\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ に注意すると，自然な全射 $\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ により，$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ は可解リー代数 $\mathfrak{a}$ の準同型像である．よって，(i) より $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$ は可解である．$\mathfrak{b}$ も可解なので，(ii) より題意は従う． ■

命題 3.21. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，極大可解イデアルがただ1つ存在する．そのイデアルを $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ とかき，$\mathfrak{g}$ の**根基 (radical)** と呼ぶ．

証明. 零イデアルは可解であるので，必ず $\mathfrak{g}$ は可解イデアルをもつ．従って，一意性を示せば良い．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の極大可解イデアルとする．命題 3.20 により，任意の可解イデアル $\mathfrak{b}$ に対し $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ も可解である．$\mathfrak{a}$ の極大性により $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ となるので，$\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}$ である． ■

定義 3.22. $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})=0$ となるリー代数 $\mathfrak{g}$ を**半単純 (semisimple)** と呼ぶ．

問題 3.23. 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は半単純であることを示せ．

例 3.24. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ は単純なので（例 3.10），特に半単純である．よって，0 以外の可解イデアルを含まない．しかし，可解部分リー代数は含む．実際，

$$y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

により生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数は可解である．

命題 3.25 (定理 2.25 の特別な場合，命題 3.16 の一般化)**.** 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ は線形リー代数と同型である．

証明. リー代数 $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対し，$\mathrm{Ker\,ad}=Z(\mathfrak{g})$ となる．一方，$DZ(\mathfrak{g})=0$ より $Z(\mathfrak{g})$ は可解イデアルである．従って，主張は従う． ■

3.3. 冪零代数.

定義 3.26. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$C^0\mathfrak{g}:=\mathfrak{g},\ C^i\mathfrak{g}:=[\mathfrak{g},C^{i-1}\mathfrak{g}]\ (i>0)$$

とおく．$\mathfrak{g}$ のイデアルの列

$$\mathfrak{g}=C^0\mathfrak{g}\supset C^1\mathfrak{g}\supset C^2\mathfrak{g}\supset\cdots\supset C^i\mathfrak{g}$$

を**降中心列 (descending series, lower central series)** と呼ぶ．また，ある自然数 n に対して $C^n\mathfrak{g}=0$ となるとき，$\mathfrak{g}$ を**冪零 (nilpotent)** と呼ぶ．

命題 3.27. 冪零リー代数は可解であるが，逆は一般に成り立たない．

証明. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$D^i\mathfrak{g}\subset C^i\mathfrak{g}$ が成り立つ．よって，冪零ならば可解である．一方，$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ とすると，例 3.19 より可解である．さらに，例 3.19 の証明より $C^1\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})=D^1\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})=\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ となる．さらに，

$$C^2\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})=[\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}),\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})]=\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$$

となる．よって，任意の自然数 i に対して $C^i\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})=\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ となるので，$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ は冪零でない． ■

例 3.28. 非可換 2 次元リー代数 $\mathfrak{g}$ は可解であるが冪零でない．

証明. 命題 2.7 により，$[x,y]=y$ となる $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x,y\}$ が存在する．このとき，

$$D^1\mathfrak{g}=C^1\mathfrak{g}=\langle y\rangle_{\mathbb{K}},\ D^2\mathfrak{g}=0$$

となる．一方で

$$C^2\mathfrak{g}=[\langle x,y\rangle_{\mathbb{K}},\langle y\rangle_{\mathbb{K}}]=\langle y\rangle_{\mathbb{K}}=C^1\mathfrak{g}$$

となるので，題意は成立する． ■

例 3.29. $\mathbb{K}$ が標数 0 の体のとき，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ は単純である（例 3.10）．よって，$D\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ となり冪零ではない．しかし，$\mathbb{K}$ が標数 2 の体ならば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ は冪零である．

実際，例 3.10 と同様の計算により，$\mathfrak{g}$ の基底

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$[x, y] = h, [h, x] = 2x = 0, [h, y] = -2y = 0$$

が成り立つ．よって，$C^1\mathfrak{g} = \langle h \rangle_{\mathbb{K}}$ となり，$C^2\mathfrak{g} = 0$ が成り立つ．

命題 3.30. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して以下が成り立つ．

(i) $\mathfrak{g}$ が冪零ならば，$\mathfrak{g}$ の任意の部分リー代数や準同型像も冪零である．
(ii) $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ が冪零であれば，$\mathfrak{g}$ も冪零である．
(iii) $\mathfrak{g}$ が冪零かつ $\mathfrak{g} \neq 0$ ならば，$Z(\mathfrak{g}) \neq 0$ である．

証明. 命題 3.20 の証明参照． ■

$\mathfrak{g}$ が冪零リー代数ならば，任意の $x_i, y \in \mathfrak{g}$ に対して，$\operatorname{ad} x_1 \operatorname{ad} x_2 \cdots \operatorname{ad} x_n(y) = 0$ が成り立つ．特に，任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$(\operatorname{ad} x)^n = 0$ となる．

補題 3.31. 冪零リー代数 $\mathfrak{g}$ の任意の元 x に対し，$\operatorname{ad} x$ は冪零である．

実はこの逆も成立する．

定理 3.32 (エンゲルの定理 (Engel's Theorem))**.** リー代数 $\mathfrak{g}$ の任意の元 x に対し $\operatorname{ad} x$ が冪零ならば，$\mathfrak{g}$ も冪零である．

定理を証明するために次の補題を用意する．

補題 3.33. 冪零自己準同型 $x \in \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$\operatorname{ad} x$ も冪零である．

証明. ある自然数 $n > 0$ に対して，$x^n = 0$ が成り立つと仮定する．$\mathfrak{gl}(V)$ 上の自己準同型写像

$$\lambda_x := (y \mapsto x \circ y),\ \rho_{-x} := (y \mapsto -y \circ x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$$

に対し，$\operatorname{ad} x = \lambda_x + \rho_{-x}$ が成り立つ．さらに，

$$(\lambda_x \circ \rho_{-x})(y) = \lambda_x(-y \circ x) = -x \circ y \circ x = \rho_{-x}(\lambda_x(y)) = (\rho_{-x} \circ \lambda_x)(y)$$

より，λ_x と ρ_{-x} は可換である．よって，

$$\operatorname{ad} x^{2n-1} = \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} \lambda_x^i \circ \rho_{-x}^{2n-1-i}$$

が成り立つ．任意の $0 \le i \le 2n-1$ に対して，$2n-1-i \ge n$ もしくは $i \ge n$ となるので，$\operatorname{ad} x^{2n-1} = 0$ となり題意は成立する． ■

注意 3.34. 一般に，自己準同型 $x \in \mathfrak{gl}(V)$ に対し $\operatorname{ad} x$ が冪零であっても x が冪零とは限らない．例えば，x が恒等写像（単位行列）であれば x は冪零ではないが，$\operatorname{ad} x = 0$ となる．

エンゲルの定理は次の定理から従う．

定理 3.35. 線形リー代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ の全ての元が冪零自己準同型写像であり，なおかつ $V \neq 0$ とする．このとき，$\mathfrak{g}.v = 0$ となる $v \in V \setminus \{0\}$ が存在する．

証明. 以下，n 次元ベクトル空間 V の線形変換全体 $\mathfrak{gl}(V)$ を n 次正方行列全体とみなす．$\dim \mathfrak{g}$ に関する帰納法により主張を示す．$\dim \mathfrak{g} = 0$ ならば $\mathfrak{g} = 0$ となり，任意の $v \in V \setminus \{0\}$ を取れば良い．$\dim \mathfrak{g} = 1$ のとき，$\mathfrak{g}$ の O でない行列 A をとると，$\mathfrak{g} = \langle A \rangle_{\mathbb{K}}$ となる．仮定より，$A^n = O$ となる自然数 n が存在する．このとき，A の固有値は 0 のみであり，その固有ベクトルを v と置けば良い．よって，以下 $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ とする．今我々が示そうとしている定理は，任意の $\mathfrak{g}$ の元に共通の固有ベクトルが少なくとも一つ存在することを主張している．

$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を真の部分代数とする．$\mathfrak{h}$ は随伴表現を介して $\mathfrak{g}$ に作用するが，補題 3.33 によりその作用は冪零である．$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ 自身にも随伴表現により作用することから，$\mathfrak{h}$ は線形空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に作用する（$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルとは仮定していないので $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は一般にリー代数ではないが，線形空間の商を考えることは出来る）．次元に関する帰納法の仮定から，$x \notin \mathfrak{h}$ かつ $[\mathfrak{h}, x] \subset \mathfrak{h}$ を満たす $x \in \mathfrak{g}$ が存在する．よって，$\mathfrak{h} \subsetneq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$ が成り立つ．

$\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ を極大部分代数とすると，$\mathfrak{g} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ となるので，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．よって，商リー代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を定義することが出来る．もし，$\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$ ならば，$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ の 1 次元部分代数 $\mathfrak{p}$ が存在する．すると，その $\mathfrak{g}$ での逆像は $\mathfrak{h}$ を真に含む真の部分代数となり，$\mathfrak{h}$ の極大性に矛盾する．よって，$\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$，すなわち，$\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g} - 1$ となる．従って，$z \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ により，$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}z$ とかける．

$W := \{v \in V | \mathfrak{h}.v = 0\}$ とおくと，帰納法の仮定から $W \neq 0$ である．$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbb{K}z$ より，W に冪零準同型写像 z の固有ベクトルが存在することを示せば題意は従う．$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルであることに注意すると，W は $\mathfrak{g}$ 不変であることが分かる．実際，$x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}, w \in W$ に対して，

$$y(xw) = yx(w) = xy(w) - [x, y](w) = 0$$

となる．特に，W は z の作用に関して不変なので題意は成り立つ．■

(エンゲルの定理の証明). $\dim \mathfrak{g}$ に関する帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0, 1$ のときは明らかなので，$\dim \mathfrak{g} > 1$ とする．このとき，$\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の任意の元は冪零である．定理 3.35 により，$[\mathfrak{g}, x] = 0$ を満たす元 $x \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ が存在する．すなわち，$Z(\mathfrak{g}) \neq 0$ となる．$\dim \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$ なので，帰納法の仮定より $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ は冪零である．命題 3.30 (ii) により，$\mathfrak{g}$ も冪零であることが分かる．

■

エンゲルの定理の系を述べる前に，旗の定義を述べる．

定義 3.36. n 次元線形空間 V に対し，その部分空間の鎖 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$ $(\dim V_i = i)$ を V の **旗 (flag)** と呼ぶ．

系 3.37. 定理 3.35 の仮定の下，$\mathfrak{g}.V_i \subset V_{i-1}$ $(\forall i)$ を満たす $\mathfrak{g}$ 不変な V の旗 $(0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V)$ が存在する．すなわち，V の適当な基底に対し，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ に含まれる．

証明. 定理 3.35 の $v \in V$ に対し，$V_1 := \langle v \rangle_{\mathbb{K}}$ とおく．$W = V/V_1$ に $\mathfrak{g}$ は作用し，その作用は冪零である．よって，$\dim V$ に関する帰納法により，$\mathfrak{g}$ 不変な W の旗が存在する．その V における逆像に V_1 を加えたものが求める旗である． ■

定理 3.35 の応用として，次の補題を示しておく．

補題 3.38. $\mathfrak{g}$ を冪零リー代数，$\mathfrak{a} \neq 0$ をそのイデアルとする．このとき，$\mathfrak{a} \cap Z(\mathfrak{g}) \neq 0$ が成り立つ．特に，$Z(\mathfrak{g}) \neq 0$ である．

証明. $\mathfrak{g}$ は随伴行列により $\mathfrak{a}$ に作用する．よって，定理 3.35 より $[\mathfrak{g}, x] = 0$ となる $x \in \mathfrak{a}$ が存在する． ■

注意 3.39. 証明から分かるように，エンゲルの定理やその系は正標数でも成立する．

4. リーの定理とカルタンの判定条件

これ以降，特に断りがない限り，基礎体 $\mathbb{K}$ は標数 0 の代数的閉体とする．ただし，線形代数の復習を（4.2）においてする際は単に代数的閉体とする．

4.1. リーの定理.

エンゲルの定理の証明で本質的に重要なのは定理 3.35 であり，冪零準同型写像からなる線形リー代数は共通の固有ベクトルをもつことを主張していた．次の定理は可解線形リー代数に対する類似である．

定理 4.1. $\mathbb{K}$ を代数的閉体とする．このとき，可解線形リー代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$V \neq 0$ ならば $\mathfrak{g}$ の任意の元に共通の固有ベクトルが存在する．

証明. 定理 3.35 と同様のアイデアで示すことが出来る．$\dim \mathfrak{g}$ に関する帰納法により示す．$\dim \mathfrak{g} = 0$ ならば主張は明らかなので，$\dim \mathfrak{g} > 0$ とする．

Step 1 余次元 1 のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ が存在する：$\mathfrak{g}$ は可解なので，$D^1\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{g}$ が成り立つ．$\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ は可換リー代数なので，任意の線形部分空間はイデアルとなる．よって，$\mathfrak{g}/D^1\mathfrak{g}$ の余次元 1 の線形部分空間の逆像を $\mathfrak{a}$ と置けば良い．

Step 2 $x.v = \lambda(x)v$ $(\forall x \in \mathfrak{a})$ を満たす $v \in V$ と線形写像 $\lambda : \mathfrak{a} \to \mathbb{K}$ が存在する：帰納法の仮定より，任意の $x \in \mathfrak{a}$ に対して，$x.v = \lambda(x)v$ となる $v \in V \setminus \{0\}$ と $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ が存在する．写像 λ の線形性は簡単に分かる．

Step 3 $W := \{w \in V | x.w = \lambda(x)w \ (\forall x \in \mathfrak{a})\}$ は $\mathfrak{g}$ 不変である：これを示す前に次のステップへ進む．

Step 4 Step 3 の主張が正しければ，定理は成立する：$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ において余次元 1 なので，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathbb{K}z$ と記述することが出来る．Step 3 より，z は W の線形変換を定める．$\mathbb{K}$ が代数的閉体であることから，z の固有多項式は必ず $\mathbb{K}$ に根 α をもつ．従って，z に対しその固有ベクトル $v_0 \in W$ が存在する．このとき，任意の $x \in \mathfrak{a}$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して，

$$(x + cz).v_0 = x.v_0 + cz.v_0 = \lambda(x)v_0 + c\alpha v_0 = (\lambda(x) + c\alpha)v_0$$

となるので，v_0 が題意を満たす固有ベクトルである．

従って，Step 3 の主張を示せば良い．

$w \in W, x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{a}$ に対して，

$$yx.w = xy.w - [x, y].w = \lambda(y)x.w - \lambda([x, y])w$$

となるので，$\lambda([x,y]) = 0$ を示せば良い．そこで，$w \in W, x \in \mathfrak{g}$ を固定し，$w, x.w, \cdots, x^n.w$ が線形従属になる最小の自然数を n とする．さらに，

$$W_0 := 0,\ W_i =: \langle w, x.w, \cdots, x^{i-1}.w\rangle_{\mathbb{K}}$$

とおくと，$\dim W_n = n, W_n = W_{n+i}\ (i \geq 0)$ が成り立つ．$x(W_n) \subset W_n$ より，x は W_n の線形変換とみなすことが出来る．任意の $y \in \mathfrak{a}$ に対して，$y(W_i) \subset W_i$ となることに注意する．このとき，W_n の基底 $w, x.w, \cdots, x^{n-1}.w$ に関して，$y \in \mathfrak{a}$ は対角成分が $\lambda(y)$ に等しい上三角行列により表現される．これを示すには次の合同を確認すれば良い：

$$yx^i.w \equiv \lambda(y)x^i.w \pmod{W_i}$$

帰納法によりこの合同式を確認する．$i = 0$ であれば明らか．そこで $i > 0$ として，$yx^i.w = yxx^{i-1}.w = xyx^{i-1}.w - [x,y]x^{i-1}.w \equiv xyx^{i-1}.w \pmod{W_{i-1}}$ と変形する．帰納法の仮定より，$yx^{i-1}.w \equiv \lambda(y)x^{i-1}.w \pmod{W_{i-1}}$ となるが，W_i の構成方法から $x(W_{i-1}) \subset W_i$ となるので，示したかった合同式が成立する．

上記合同式より，$y \in \mathfrak{a}$ に対して，$\mathrm{Tr}_{W_n}(y) = n\lambda(y)$ が成立する．特に $[x,y] \in \mathfrak{a}$ なので，$\mathrm{Tr}_{W_n}([x,y]) = n\lambda([x,y])$ となる．$x(W_n) \subset W_n, y(W_n) \subset W_n$ だったので，$[x,y] = xy - yx$ は W_n の 2 つの自己準同型写像 x, y の交換子として表される．よって，$\mathrm{Tr}_{W_n}([x,y]) = 0$ となる． 以上により，$\mathbb{K}$ の標数が 0 であることを用いると，$\lambda([x,y]) = 0$ となることが分かる．∎

例 4.2. $\mathbb{K}$ が正標数の体のとき，定理 4.1 は一般に成立しない．$\mathbb{K}$ を標数 $p > 0$ の体とする．p 次正方行列

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ y = \mathrm{diag}(0, 1, 2, \dots, p-1)$$

に対し，$[x,y] = x$ が成り立つ．$\mathfrak{g} := \langle x, y\rangle_{\mathbb{K}} \subset \mathfrak{gl}_p(\mathbb{K})$ とおくと，$\mathfrak{g}$ は 2 次元可解リー代数である．一方，y の固有ベクトルは $\mathbb{K}^p$ の標準基底 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_p}$ であるが，いずれも x の固有ベクトルではない．

系 4.3 (リーの定理 (Lie's Theorem))**.** $\mathbb{K}$ を代数的閉体とする．このとき，可解線形リー代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ は V のある旗を固定する．すなわち，V の適当な基底に対し，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ に含まれる．

証明. 定理 4.1 を用いて，系 3.37 の証明と同様の方法により示せる．∎

系 4.4. $\mathbb{K}$ を代数的閉体とする．このとき可解リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$\dim \mathfrak{a}_i = i$ を満たすイデアルの列 $0 = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g}$ が存在する．

証明. $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ に対し，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ は可解である．よって，系 4.3 により，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ はある旗を固定する．随伴表現の定義より，その旗は題意のイデアル列に他ならない．∎

系 4.5. $\mathbb{K}$ を代数的閉体，$\mathfrak{g}$ を可解リー代数とする．このとき，$x \in D\mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\, x$ は冪零である．特に，$D\mathfrak{g}$ は冪零である．従って，リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し $\mathfrak{g}$ が可解であることと $D\mathfrak{g}$ が冪零であることは同値である．

証明. 系 4.4 に現れるイデアル列の線形空間としての基底を取り固定する．その基底に関して，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ が成り立つ．よって，$\mathrm{ad}\,D\mathfrak{g} = D\,\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset D\mathfrak{t}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ となり題意は成立する． ■

4.2. **不変部分空間とジョルダン・シュバレー分解.** この小節において，$\mathbb{K}$ は任意標数の代数的閉体とする．特に $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は佐武一郎「線形代数学」第４章（pp. 133–151）を参照のこと．

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ を満たす非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ を A の**固有ベクトル (eigenvector)**，α を**固有値 (eigenvalue)**, $V_\alpha := \mathrm{Ker}(A - \alpha I)$ を α **に対応する** A **の固有空間（eigenspace）**と呼ぶ．また，$f_A(x) := |xI - A|$ を A の**固有多項式**もしくは**特性多項式 (characteristic polynomial)** と呼ぶ.

命題 4.6. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，α が A の固有値であることと A の固有多項式 $f_A(x)$ の根であることは同値である.

証明. α が A の固有値であることと $\mathrm{Ker}(A - \alpha I) \neq 0$ は同値である．さらにこれは $A - \alpha I$ が正則でないことと同値である．行列が正則でないこととその行列の行列式が 0 であることは同値なので，主張は成立する． ■

固有多項式に対して，次の定理は基本的である.

定理 4.7 (Hamilton-Cayley の定理)**.** $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，その固有多項式 $f_A(x)$ は $f_A(A) = O$ を満たす.

定義 4.8. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，$f(A) = O$ となるモニック多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ の中で次数最小のものを行列 A の**最小多項式 (minimal polynomial)** と呼び，$\varphi_A(x)$ と書く.

命題 4.9. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ は一意的に存在する．さらに，$f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ は $\varphi_A(x)$ で割り切れる.

証明. 定理 4.7 により，最小多項式の存在が分かる.（もしくは，$M_n(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上 n^2 次元の線形空間であることに注意すると，$I, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ は $\mathbb{K}$ 上線形従属となり，このことからも分かる.）$\varphi_A(x)$ と $\phi_A(x)$ を A の異なる最小多項式とする．このとき，多項式 $(\varphi_A - \phi_A)(x)$ は $(\varphi_A - \phi_A)(A) = O$ を満たし，かつ

$$\deg(\varphi_A - \phi_A)(x) < \deg(\varphi_A(x)), \deg(\phi_A(x))$$

を満たす．よって，$(\varphi_A - \phi_A)(x)$ を先頭項の係数で割って得られた多項式は最小多項式の定義を満たす．これは，φ_A が最小多項式であることに矛盾する．従って，一意性も示された．$f(A) = 0$ を満たす多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対し，$f(x) = p(x)\varphi_A(x) + q(x)$（ただし，$\deg q(x) < \deg \varphi_A(x)$）と書くと，$q(A) = O$ となる．従って，上と同様の議論により，$q = 0$ となる． ■

例 4.10. 単位行列 $I \in M_n(\mathbb{K})$ に対し，固有多項式は $f_I(x) = (x-1)^n$，最小多項式は $\varphi_I(x) = x - 1$ となる.

注意 4.11. 最小多項式の定義や命題 4.9 は環論を用いて次のように述べることも出来る：

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，$I(A) := \{f(x) \in \mathbb{K}[x] | f(A) = O\}$ とおくと $I(A)$ は一変数多項式環 $\mathbb{K}[x]$ のイデアルである．$\mathbb{K}[x]$ は単項イデアル聖域なので,

$I(A) = (\varphi_A(x))$ を満たすモニック多項式 $\varphi_A(x) \in \mathbb{K}[x]$ が存在し，A の最小多項式と呼ぶ．

命題 4.12. $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ の根と固有多項式 $f_A(x)$ の根（固有値）は重複度を無視して一致する．

証明. 命題 4.9 により，$\varphi_A(x)$ は固有多項式 $f_A(x)$ を割り切る．よって，$\varphi_A(x)$ の根は固有値である．一方，固有値 α とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$\varphi_A(\alpha)\boldsymbol{x} = \varphi_A(A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ．$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ なので，$\varphi_A(\alpha) = 0$ となる．すなわち，全ての固有値は $\varphi_A(x)$ の根である．■

次の命題は基本的である．

命題 4.13 (佐武一郎「線形代数学」P139-140 参照). $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して，以下は同値である．

(i) A は対角化可能である．

(ii) $\varphi_A(x)$ は相異なる一次式の積に分解される： $\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - \alpha_i)$.

(iii) $\mathbb{K}^n$ は A の固有空間の直和に分解される：$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$.

証明. (i) ⇒ (ii) A は対角化可能なので，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．このとき，$\varphi_A(x) = \varphi_{P^{-1}AP}(x)$ なので，A は対角行列であると仮定して良い．A の対角成分のうち相異なるものを $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とすると，

$$(A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \cdots (A - \alpha_s I) = O$$

となることが計算により分かる．よって，$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - \alpha_i)$ とおくと，$\varphi(A) = O$ となる．命題により，最小多項式は $\varphi(x)$ を割り切るので，重根を持たない（実際には $\varphi(x) = \varphi_A(x)$ となる）．

(ii) ⇒ (iii) 最小多項式 $\varphi_A(x)$ が相異なる一次式の積に分解されると仮定する．$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ を相異なる全ての固有値とすると，命題 4.12 により $\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - \alpha_i)$ と書ける．従って，

$$(A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \cdots (A - \alpha_s I) = O$$

となる．一般に $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して $\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n$ が成り立つことに注意すると，

$$\mathrm{rank}(A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \geq \mathrm{rank}(A - \alpha_1 I) + \mathrm{rank}(A - \alpha_2 I) - n$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\{\prod_{i=1}^{2}(A - \alpha_i I)\}(A - \alpha_3 I) &\geq \mathrm{rank}\{\prod_{i=1}^{2}(A - \alpha_i I)\} + \mathrm{rank}(A - \alpha_3 I) - n \\
&\geq \sum_{i=1}^{3} \mathrm{rank}(A - \alpha_i I) - 2n
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$
$$\operatorname{rank}\prod_{i=1}^{s}(A-\alpha_i I) \geq \sum_{i=1}^{s}\operatorname{rank}(A-\alpha_i I)-(s-1)n$$

従って，

$$\sum_{i=1}^{s}(n-\operatorname{rank}(A-\alpha_i I)) \geq n.$$

次元定理により，$\dim V_{\alpha_i} = n - \operatorname{rank}(A-\alpha_i I)$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{s}\dim V_{\alpha_i} \geq n$ となる．一方，$\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i} \subset \mathbb{K}^n$ なので，等号が成立し，$V = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$ が成り立つ．

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\mathbb{K}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$ とする．各 V_{α_i} の基底を取ることにより $\mathbb{K}^n$ の基底を作ることができる．その基底に関する表現行列は対角行列なので題意は従う． ■

定義 4.14. 線形空間 V に対し，$x \in \operatorname{End}(V)$ の表現行列が命題 4.13 の条件を満たすとき，x を**半単純 (semisimple)** と呼ぶ．

例 4.15. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，$f_A(x) = x^2 + 1 = (x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$ となる．よって，A は半単純である．一方，$\mathbb{R}$ 上において $f_A(x)$ は解を持たない．従って，さらなる考察が必要になる．このような煩わしい場合を排除するために $\mathbb{K}$ を代数的閉体と仮定している．

定義 4.16. 線形空間 V と $x \in \operatorname{End}(V)$ に対し，線形部分空間 $\Lambda \subset V$ が $x(\Lambda) \subset \Lambda$ を満たすとき，Λ を x **不変**と呼ぶ．

定義 4.17. 線形空間 V と線形部分空間 $\Lambda \subset V$ に対し，$V = \Lambda \oplus \Lambda'$ を満たす線形部分空間 Λ' を Λ の**補空間**と呼ぶ．

命題 4.18. 線形空間 V 上の線形変換 $x \in \operatorname{End}(V)$ に対し，x が半単純であることと，任意の x 不変部分空間が x 不変補空間をもつことは同値である．

証明. x を半単純とする．命題 4.13 により，V は x の固有空間の直和に分解される：$V = \bigoplus V_\alpha$．x 不変部分空間 $\Lambda \subset V$ に対して，$\Lambda_\alpha := \Lambda \cap V_\alpha$ とおく．$x|_{V_\alpha} = \alpha I$ となるので，V_α において Λ_α の補空間 Λ'_α が存在する．このとき，$\Lambda' := \bigoplus \Lambda'_\alpha$ とおくと，Λ' は Λ の補空間であり，x 不変である．

逆に，任意の x 不変部分空間が x 不変補空間をもつと仮定する．まず，次が成立することを示す：

主張：$z \in \operatorname{End}(\Lambda)$ に対し，任意の z 不変部分空間 $W \subset \Lambda$ は（Λ において）z 不変補空間をもつ．

$V = \Lambda \oplus \Lambda'$ とする．$x := z \oplus 1_{\Lambda'} \in \operatorname{End}(V)$ とおく．$W \subset \Lambda$ は z 不変なので，$W \subset V$ は x 不変である．仮定により，x 不変補空間 $W' \subset V$ が存在する．このとき，簡単に $\Lambda = W \oplus (\Lambda \cap W')$ が成り立つことが分かり，主張が成立する．

x の固有空間 V_α は x 不変なので，x 不変補空間 V'_α が存在する．$x|_{V'_\alpha} \in \mathrm{End}(V'_\alpha)$ の固有空間 V_β に対して，上の主張により $x|_{V'_\alpha}$ 不変補空間 V'_β が存在する：$V'_\alpha = V_\beta \oplus V'_\beta$．これを繰り返すことにより，$V$ の固有空間分解を得られる．よって命題 4.13 により，x は半単純である．■

注意 4.19. 一般に，線形空間 V 上の線形変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対し，x 不変部分空間が 0 と V 以外に存在しないとき，x を**単純**と呼ぶ．先に定義した「半単純」は単純線形変換の直和として書けることに他ならない．

補題 4.20. 線形空間 V 上の半単純線形変換 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対し，$\Lambda \subset V$ が x 不変であるとする．このとき，$x|_\Lambda$ も半単純である．

証明. 上記命題 4.18 により，Λ の x 不変補空間 Λ' が存在する．このとき，$x = x|_\Lambda \oplus x|_{\Lambda'}$ が成り立つ．つまり，$x,\ x|_\Lambda,\ x|_{\Lambda'}$ のそれぞれの表現行列を A, B, C とすると，

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$$

と書ける．よって，A の最小多項式 $\varphi_A(x)$ に対して，$\varphi_A(B) = O, \varphi_A(C) = O$ となる．すなわち，$x|_\Lambda$ と $x|_{\Lambda'}$ の最小多項式は共に φ_A の約数となり，従って重根を持たない．■

補題 4.21. $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ が半単純かつ $AB = BA$ を満たせば，A と B を同時に対角化することが可能である．すなわち，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ は共に対角行列となる．また，このとき $A \pm B$ も半単純である．

証明. 後半は前半から明らかなので，前半のみ示す．A の相異なる固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とする．A は半単純なので $\mathbb{K}^n$ は固有空間 V_{α_i} の直和に分解される：$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V_{\alpha_i}$．任意の $x \in V_{\alpha_i}$ に対して，

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\alpha_i x) = \alpha_i(Bx)$$

より，$Bx \in V_{\alpha_i}$ となる．すなわち，V_{α_i} は B 不変である．よって，この直和分解に即して基底を取ると，

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_s I_{n_s} \end{pmatrix},\ B \sim \begin{pmatrix} B_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & B_s \end{pmatrix}$$

となる．ただし，$\sim$ は「相似」（行列 X, Y に対し，ある正則行列 P により $Y = P^{-1}XP$ と書けるとき，X と Y は相似と呼んだ）であることを意味する．B_i は B が V_{α_i} に引き起こす変換の行列である．補題 4.20 により B_i も半単純なので，V_{α_i} の基底を適当にとることにより B も対角化される．■

補題 4.22. 共通因子を持たない多項式 $f_1(x), \cdots, f_s(x) \in \mathbb{K}[x]$ に対して，

$$h_1(x)f_1(x) + \cdots + h_s(x)f_s(x) = 1$$

を満たす多項式 $h_1(x), \cdots, h_s(x) \in \mathbb{K}[x]$ が存在する．

問題 4.23. 補題 4.22 を示せ.

命題 4.24 (広義固有空間分解). $A \in M_n(\mathbb{K})$ の固有多項式が次で与えられたとする：

$$f_A(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \alpha_i)^{m_i}$$

このとき，各固有値 α_i の広義固有空間 $\widetilde{V}_{\alpha_i}$ を

$$\widetilde{V}_{\alpha_i} := \{v \in V | (A - \alpha_i I)^{m_i} v = 0\}$$

により定義する．このとき，

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{V}_{\alpha_i}$$

が成り立つ.

証明. 固有多項式 $f_A(t)$ に対して，

$$f_i(t) = \frac{f_A(t)}{(t-\alpha_i)^{m_i}} = \prod_{j \neq i} (t - \alpha_j)^{m_j}$$

とおくと，$f_1(t), \cdots, f_s(t)$ は共通因子を持たない．よって，補題 4.22 により，

$$h_1(t) f_1(t) + \cdots + h_s(t) f_s(t) = 1 \tag{1}$$

を満たす多項式 $h_1(t), \cdots, h_s(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在する．$A_i := h_i(A) f_i(A)$ とおくと，

$$A_1 + \cdots + A_s = I$$

が成り立つ．一方，$i \neq j$ のとき $f_i(t) f_j(t)$ は $f_A(t)$ で割り切れるので，Hamilton-Cayley の定理から $f_i(A) f_j(A) = O$ となる．従って，

$$A_i A_j = O \ (i \neq j)$$

となる．さらに，$A_i = A_i E = A_i(A_1 + \cdots + A_s) = A_i^2$ となるので，

$$A_i^2 = A_i$$

も成り立つ．すなわち，$A_1, \cdots, A_s$ は射影作用素である．従って，

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i(V), \ A_i(V) = \{v \in V | A_i v = v\}$$

となる．

ここで，$A_i(V)$ は $\widetilde{V}_{\alpha_i}$ と一致する．実際，$(t - \alpha_i)^{m_i} f_i(t) = f_A(t)$ なので，$(A - \alpha_i I)^{m_i} f_i(A) = O$ となる．よって，

$$(A - \alpha_i I)^{m_i} A_i = (A - \alpha_i I)^{m_i} h_i(A) f_i(A) = h_i(A)(A - \alpha_i I)^{m_i} f_i(A) = O$$

となり，$A_i(V) \subset \widetilde{V}_{\alpha_i}$ が成り立つ．逆に，$v \in \widetilde{V}_{\alpha_i}$ に対して，$v \in A_i(V)$ を示す．このとき，$(A - \alpha_i I)^{m_i} v = 0$ が成り立つが，$(t - \alpha_i)^{m_i}$ と $h_i(t) f_i(t)$ は共通因子を持たない（$h_i(t) f_i(t)$ が $t - \alpha_i$ で割り切れると (1) の左辺が割り切れて矛盾する）．従って，補題 4.22 により多項式 $g_1(t), g_2(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在して $g_1(t)(t - \alpha_i)^l + g_2(t) h_i(t) f_i(t) = 1$ となる．よって，$g_1(A)(A - \alpha_i I)^l + g_2(A) A_i = I$

が成り立つ．これを v に施すと，$v = g_2(A)A_iv = A_i(g_2(A)v) \in A_i(V)$ となる．以上により，$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{V}_{\alpha_i}$ となることが示された．

■

補題 4.25 (中国剰余定理)**.** s 個の相異なる α_i と正の整数 m_i に対し，多項式 $f(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\alpha_i)^{m_i} \in \mathbb{K}[t]$ を考える．このとき，環の同型

$$\mathbb{K}[t]/(f(t)) \cong \prod_{i=1}^{s} \mathbb{K}[t]/((t-\alpha_i)^{m_i})$$

が成り立つ．

問題 4.26. 補題 4.25 を示せ．

命題 4.27 (Jordan-Chevalley 分解)**.** 線形空間 V 上の自己準同型写像 $x \in \mathrm{End}(V)$ に対して以下が成り立つ．

(i) 次を満たす $x_s, x_n \in \mathrm{End}(V)$ が一意的に存在する：$x = x_s + x_n$, x_s は半単純，x_n は冪零，$[x_s, x_n] = 0$.

(ii) $x_s = p(x), x_n = q(x)$ を満たす定数項を持たない一変数多項式 $p(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在する．特に，x_s, x_n は x と可換な任意の自己準同型写像と可換である．

(iii) 線形部分空間 $A \subset B \subset V$ に対し $x(B) \subset A$ が成り立てば，$x_s(B), x_n(B) \subset A$ も成り立つ．

分解 $x = x_s + x_n$ を x の **Jordan-Chevalley 分解 (Jordan 分解)** と呼ぶ．x_s を x の**半単純部分 (semisimple part)**, x_n を x の**冪零部分 (nilpotent part)** と呼ぶ.

証明. (iii) は (ii) から従うので，(i), (ii) を示せば良い．x の固有多項式 $f_x(t)$ が

$$f_x(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\alpha_i)^{m_i}$$

と表されるとする．このとき，命題 4.24 により，

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{V}_{\alpha_i}$$

が成り立つ．

0 が x の固有値のとき，$f(t) := f_x(t) \in \mathbb{K}[t]$，そうでないとき，$f(t) := tf_x(t) \in \mathbb{K}[t]$ とおく．すると，中国剰余定理により，ある多項式 $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ が存在して，

$$p(t) \equiv \alpha_i \bmod (t-\alpha_i)^{m_i},\ p(t) \equiv 0 \bmod t$$

を満たす.

$$q(t) := t - p(t),\ x_s := p(x),\ x_n := q(x)$$

とおくと，定義より

$$x = x_s + x_n,\ [x_s, x_n] = 0,\ p(0) = q(0) = 0$$

が成り立つ．さらに，$x_s|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}} = \alpha_i I_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}$ より，$x_s = \oplus \alpha_i I_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}$ となり，x_s は半単純である．一方，

$$x_n|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}} = (x - x_s)|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}} = x - \alpha_i I_{\widetilde{V}_{\alpha_i}}$$

より，$(x_n|_{\widetilde{V}_{\alpha_i}})^{m_i} = 0$ となる．よって，$m := \max\{m_i\}$ とおくと，$x_n^m = 0$ となり，x_n は冪零である．

最後に，分解の一意性を示す．x_s, x_n は上で定めたものとする．さらに，半単純変換 s と冪零変換 n が存在して，$x = s + n$ と $[s, n] = 0$ を満たすとする．このとき，$[s, x] = 0,\ [n, x] = 0$ に注意すると，$[x_s, s] = [p(x), s] = 0$ となり，同様に，$[x_n, n] = 0$ も成り立つ．すなわち，x_s と s，また x_n と n はそれぞれ可換である．従って，補題 4.21 により，$x_s - s$ は半単純である．また，$x_n - n$ は冪零であることも分かる．$x = x_s + x_n = s + n$ より，$x_s - s = n - x_n$ となり，左辺は半単純，右辺は冪零なので，結局 $x_s = s,\ x_n = n$ となり一意性も示された．

■

補題 4.28. $x \in \mathrm{End}(V)$ のジョルダン分解 $x = x_s + x_n$ に対し，$\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ は $\mathrm{ad}\, x$ のジョルダン分解である．

証明. $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n] = \mathrm{ad}[x_s, x_n] = 0$ に注意する．命題 4.27 (i) により，$\mathrm{ad}\, x_s$ が半単純であることと $\mathrm{ad}\, x_n$ が冪零であることを確認すれば良い．後半は補題 3.33 に他ならないので，$\mathrm{ad}\, x_s$ が半単純であることを確認する．V の基底を取り替えて，x_s は対角行列 $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ であると仮定して良い．このとき，$\mathfrak{gl}(V)$ の標準基底 $\{e_{i,j}\}$ に対し，$\mathrm{ad}\, x_s(e_{i,j}) = [x_s, e_{i,j}] = (a_i - a_j)e_{i,j}$ となり，$\mathrm{ad}\, x_s$ の表現行列は対角行列であることが分かる． ■

補題 4.29. 有限次元 $\mathbb{K}$ 代数 V と $\delta \in \mathrm{Der}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ に対し，$\mathrm{End}(V)$ における δ のジョルダン分解 $\delta = \sigma + \nu$ を考える．このとき，$\sigma, \nu \in \mathrm{Der}(V)$ が成り立つ．

証明. $\sigma \in \mathrm{Der}(V)$ を示せば十分である．δ に関する V の広義固有空間分解を $V = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \widetilde{V}_{\alpha_i}$ とする．ただし，$\widetilde{V}_{\alpha_i} := \{v \in V | (\delta - \alpha_i I)^m v = 0\ (m \gg 0)\}$ である．このとき，α_i は δ の固有値であると同時に，σ の固有値でもあることに注意する．帰納法により $x \in \widetilde{V}_{\alpha_i}, y \in \widetilde{V}_{\alpha_j}$ に対して，

$$(\delta - (\alpha_i + \alpha_j)I)^n(xy) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ((\delta - \alpha_i I)^{n-k} x) \cdot ((\delta - \alpha_j I)^k y)$$

が成り立つことが分かる．よって，n を十分大きくとることにより，$\widetilde{V}_{\alpha_i} \cdot \widetilde{V}_{\alpha_j} \subset \widetilde{V}_{\alpha_i + \alpha_j}$ となる．すなわち，$\sigma(xy) = (\alpha_i + \alpha_j)xy$ が成り立つ．一方，$(\sigma x)y + x(\sigma y) = (\alpha_i + \alpha_j)xy$ が成り立つ．いま V は $\widetilde{V}_{\alpha_i}$ の直和として表されるので，$\sigma \in \mathrm{Der}(V)$ となる． ■

4.3. **カルタンの判定法.** $\mathfrak{g}$ をリー代数とする．定義より，$D\mathfrak{g}$ が冪零ならば $\mathfrak{g}$ は可解である．さらに，エンゲルの定理 3.32 により，任意の $x \in D\mathfrak{g}$ に対し $\mathrm{ad}_{D\mathfrak{g}}\, x$ が冪零ならば $D\mathfrak{g}$ も冪零である．従って，任意の $x \in D\mathfrak{g}$ に対し $\mathrm{ad}_{D\mathfrak{g}}\, x$ が冪零ならば $\mathfrak{g}$ は可解である．トレースを用いた可解性判定法（カルタンの判定法）を示すために，次の補題を用意する．

補題 4.30. 線形部分空間 $A \subset B \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$M := \{x \in \mathfrak{gl}(V) | [x, B] \subset A\}$ とおく．$x \in M$ が任意の $y \in M$ に対し $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ を満たすならば，x は冪零である．

証明. 与えられた $x \in M$ のジョルダン分解を $x = s + n$ $(s = x_s, n = x_n)$ と書く．V の基底を適当に取ることで，$s = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_m)$ と仮定して良い．以下，この基底を固定する．さらに，$\mathbb{Q}$ 上の線形部分空間 $E := \langle a_1, \cdots, a_m \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{K}$ を考える．主張を示すには $s = 0$ を示せば良いが，それは $E = 0$ と同値である．さらに，E が有限次元であることから，双対空間 $E^\vee$ が 0 であることを示せば良い．そこで，線形写像 $f : E \to \mathbb{Q}$ を任意に取り，$f = 0$ を示す．

与えられた $f \in E^\vee$ に対し，$y := \mathrm{diag}(f(a_1), \cdots, f(a_m))$ とおく．$\mathfrak{gl}(V)$ の標準基底 $\{e_{i,j}\}$ に対し，

$$\mathrm{ad}\, s(e_{i,j}) = (a_i - a_j)e_{i,j},\ \mathrm{ad}\, y(e_{i,j}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{i,j}$$

が成り立つ．f の線形性より $f(a_i) - f(a_j) = f(a_i - a_j)$ となるので，中国剰余定理（もしくはラグランジュ補間）により定数項を持たない多項式 $r(T) \in \mathbb{K}[T]$ で $r(a_i - a_j) = f(a_i - a_j)$ $(\forall i, j)$ を満たすものが存在する．任意の i, j に対し，

$$\mathrm{ad}\, y(e_{i,j}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{i,j} = r(a_i - a_j)e_{i,j} = r(\mathrm{ad}\, s)(e_{i,j})$$

となるので，$\mathrm{ad}\, y = r(\mathrm{ad}\, s)$ が成立する．

補題 4.28 により $\mathrm{ad}\, s = (\mathrm{ad}\, x)_s$ なので，命題 4.27 により定数項を持たない多項式 $p(T) \in \mathbb{K}[T]$ を用いて，$\mathrm{ad}\, s = p(\mathrm{ad}\, x)$ と書ける．よって，$\mathrm{ad}\, y = r(\mathrm{ad}\, s) = (r \circ p)(\mathrm{ad}\, x)$ となる．仮定より $\mathrm{ad}\, x(B) \subset A$ なので，$\mathrm{ad}\, y(B) \subset A$ となり，$y \in M$ となる．さらに仮定から $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ なので，$\sum a_i f(a_i) = 0$ が成り立つ． 左辺は E の元なので f を取ることで，$\sum f(a_i)^2 = 0$ となる．$f(a_i) \in \mathbb{Q}$ に注意すると，任意の i に対して $f(a_i) = 0$ となるので，$f = 0$ である． ■

補題 4.31. $x, y, z \in \mathrm{End}(V)$ に対して，$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z])$ が成立する．

証明.

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}((xy - yx)z) = \mathrm{Tr}(xyz - xzy) = \mathrm{Tr}(x(yz - zy)) = \mathrm{Tr}(x[y, z])$$

■

定理 4.32 (カルタンの判定法)**.** $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ を線形リー代数とする．任意の $x \in D\mathfrak{g}$ と $y \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{Tr}(xy) = 0$ が成り立つならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．

証明. 補題 4.30 の前で注意した通り，任意の $x \in D\mathfrak{g}$ が冪零であることを示せば良い．ここで，$A = D\mathfrak{g}, B = \mathfrak{g}$ とおく．このとき，$M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) | [x, \mathfrak{g}] \subset D\mathfrak{g}\}$ は $\mathfrak{g} \subset M$ を満たす．仮定より，任意の $x \in D\mathfrak{g}$ と $y \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{Tr}(xy) = 0$ が成り立つが，補題 4.30 を適用するために，任意の $x \in D\mathfrak{g}$ と $y \in M$ に対し，$\mathrm{Tr}(xy) = 0$ が成り立つことを確認する．$\mathfrak{g}$ の基底を x_i とすると，$D\mathfrak{g}$ は $[x_i, x_j]$ で張られる．任意の $y \in M$ に対し補題 4.31 を適用すると，

$$\mathrm{Tr}([x_i, x_j]y) = \mathrm{Tr}(x_i[x_j, y]) = \mathrm{Tr}([x_j, y]x_i)$$

が成り立つ．M の定義より $[x_j, y] \in D\mathfrak{g}$ となるので，題意は成り立つ． ■

系 4.33. $\mathfrak{g}$ をリー代数とする．任意の $x \in D\mathfrak{g}$ と $y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y) = 0$ ならば，$\mathfrak{g}$ は可解である．

証明. $\mathfrak{g}$ の随伴表現にカルタンの判定法を適用すると，$\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ は可解である．$\operatorname{Ker}\operatorname{ad} = Z(\mathfrak{g})$ も可解なので，命題 3.20 により，題意は成り立つ． ■

5. キリング形式

5.1. キリング形式と可解性.

定義 5.1. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}; (x, y) \mapsto \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$$

を $\mathfrak{g}$ 上の**キリング形式 (Killing form)** と呼ぶ．B は $\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式である．さらに，$B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ を満たす．

問題 5.2. $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ を示せ．この意味でキリング形式は結合的である．

補題 5.3. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，B と $B_{\mathfrak{a}}$ をそれぞれのキリング形式とする．このとき，$B_{\mathfrak{a}} = B|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ が成り立つ．

証明. 線形空間 V とその部分空間 W に対して，V の自己準同型写像 ϕ が $\phi(V) \subset W$ を満たすとする．このとき，$\operatorname{Tr}\phi = \operatorname{Tr}(\phi|_W)$ となることに注意する．いま，$x, y \in \mathfrak{a}$ に対して $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ かつ $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)(\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})) \subset \mathfrak{a}$ となるので，

$$B(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \operatorname{Tr}((\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)|_{\mathfrak{a}}) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} x \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} y) = B_{\mathfrak{a}}(x, y)$$

が成り立つ． ■

定義 5.4. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$\mathfrak{a}^{\perp} := \{x \in \mathfrak{g} | B(x, y) = 0 \ (\forall y \in \mathfrak{a})\}$$

と定める．特に，$\mathfrak{g}^{\perp}$ をキリング形式 B の**根基 (radical)** と呼ぶ．さらに，$\mathfrak{g}^{\perp} = 0$ のとき，B は**非退化 (nondegenerate)** という．

例 5.5. $\mathfrak{sl}_2$ のキリング形式を計算してみよう．例 3.10 と同じ記号を用いる．基底の順序を $\{x, h, y\}$ とする．このとき，

$$\operatorname{ad} h = \operatorname{diag}(2, 0, -2), \operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，B は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる．行列式は -128 なので，B は非退化である．

より一般的に，古典型線形リー代数のキリング形式は以下のようになる．

例 5.6. $\mathfrak{g}$ を古典型線形リー代数，B をそのキリング形式とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ならば，$B(x, y) = 2n\operatorname{Tr}(xy) - 2\operatorname{Tr}(x)\operatorname{Tr}(y)$.
(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ ならば，$B(x, y) = 2n\operatorname{Tr}(xy)$.
(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ ならば，$B(x, y) = (n - 2)\operatorname{Tr}(xy)$.

(iv) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ ならば，$B(x,y) = (2n+2)\mathrm{Tr}(xy)$.

証明. まず，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ のキリング形式を計算する．$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ の標準基底を e_{ij} と書くと，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl}))(e_{gh}) &= \mathrm{ad}(e_{ij})(\delta_{lg}e_{kh} - \delta_{hk}e_{gl}) = \delta_{lg}[e_{ij}, e_{kh}] - \delta_{hk}[e_{ij}, e_{gl}] \\
&= \delta_{lg}(\delta_{jk}e_{ih} - \delta_{hi}e_{kj}) - \delta_{hk}(\delta_{jg}e_{il} - \delta_{li}e_{gj}) \\
&= \delta_{lg}\delta_{jk}e_{ih} - \delta_{lg}\delta_{hi}e_{kj} - \delta_{hk}\delta_{jg}e_{il} + \delta_{hk}\delta_{li}e_{gj}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

線形空間 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ の標準内積 $(e_{ij}, e_{kl}) := \delta_{ik}\delta_{jl}$ を考える．$(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl}))(e_{gh}) \in \mathfrak{gl}_n(k)$ の e_{gh} に関する成分は $(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl}))(e_{gh}) \in \mathfrak{gl}_n(k)$ と e_{gh} の内積の値に他ならない．

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{lg}\delta_{jk}e_{ih} - \delta_{lg}\delta_{hi}e_{kj} - \delta_{hk}\delta_{jg}e_{il} + \delta_{hk}\delta_{li}e_{gj}, e_{gh}) \\
&= \delta_{lg}\delta_{jk}\delta_{ig} - \delta_{lg}\delta_{hi}\delta_{kg}\delta_{jh} - \delta_{hk}\delta_{jg}\delta_{ig}\delta_{lh} + \delta_{hk}\delta_{li}\delta_{jh}
\end{aligned}
$$

従って，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(e_{ij})\,\mathrm{ad}(e_{jl})) &= \sum_{g,h}(\delta_{lg}\delta_{jk}\delta_{ig} - \delta_{lg}\delta_{hi}\delta_{kg}\delta_{jh} - \delta_{hk}\delta_{jg}\delta_{ig}\delta_{lh} + \delta_{hk}\delta_{li}\delta_{jh}) \\
&= n\delta_{li}\delta_{jk} - \delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ij}\delta_{lk} + n\delta_{kj}\delta_{li} \\
&= 2n\delta_{li}\delta_{jk} - 2\delta_{kl}\delta_{ij} = 2n\mathrm{Tr}(e_{ij}e_{kl}) - 2\mathrm{Tr}(e_{ij})\mathrm{Tr}(e_{kl})
\end{aligned}
$$

従って，キリング形式 B の双線形性により，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ ならば $B(x,y) = 2n\mathrm{Tr}(xy) - 2\mathrm{Tr}(x)\mathrm{Tr}(y)$ が成り立つ．$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ は $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ のイデアルなので，補題 5.3 を適用すると，$B(x,y) = 2n\mathrm{Tr}(xy)$ となることが分かる．$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ と $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ の場合は演習問題とする． ■

問題 5.7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$ と $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ に対して，キリング形式が例 5.6 の形で与えられることを示せ．

問題 5.8. リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し以下が成り立つことを示せ．

(i) $\mathfrak{a}^\perp$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．
(ii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^\perp = \mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{b}^\perp$.
(iii) $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a}^\perp)^\perp$.
(iv) $\mathfrak{g}$ のキリング形式 B が非退化であることと行列 $\det(B(e_i, e_j)) \neq 0$ であることは同値である．ただし，$\{e_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の基底とする．

キリング形式を用いてカルタンの判定法を以下のようにいい換えることができる．

定理 5.9. $\mathbb{K}$ を代数閉体とする．このとき，以下の二つの条件は同値である．

(i) $\mathfrak{g}$ は可解である．
(ii) $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$ が成り立つ．

証明. $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^\perp$ は

$$
\mathrm{Tr}([\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y]\,\mathrm{ad}\,z) = 0 \ (\forall x, y, z \in \mathfrak{g}) \tag{2}
$$

という条件と同値である．条件 (2) が成り立つならば，系 4.33 により $\mathfrak{g}$ は可解である．一方，$\mathfrak{g}$ が可解とすると，系 4.5 により $D(\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ と $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ が成り立つ．従って，条件 (2) が成り立つ． ■

注意 5.10. 定理 5.9 において $\mathbb{K}$ は代数閉体と仮定したが，一般に標数 0 の任意の体について成立する．

5.2. **キリング形式と半単純性.**

命題 5.11. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，以下は同値である．

(i) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(ii) $\mathfrak{g}$ は 0 以外に可換イデアルを持たない．

証明. 一般に $\mathfrak{a}$ を可環イデアルとすると，$\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ である．$\mathfrak{g}$ を半単純とすると，定義より $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ なので $\mathfrak{a} = 0$ となる．一方，$\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ ならば，$D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ かつ $D^{k+1}\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ を満たす正の整数 k が存在する．このとき，$D^k\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ は 0 でない可換イデアルである． ■

補題 5.12. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し $\mathfrak{g}^\perp$ を B の根基とすると，$\mathfrak{g}^\perp \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

証明. 定義により，任意の $x \in \mathfrak{g}^\perp$ と $y \in D(\mathfrak{g}^\perp)$ に対して $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = 0$ となる．カルタンの判定法により，$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}^\perp)$ は可解である．$\mathrm{ad}(\mathfrak{g}^\perp) \cong \mathfrak{g}^\perp/Z(\mathfrak{g}^\perp)$ なので，$\mathfrak{g}^\perp$ も可解である．よって，$\mathfrak{g}^\perp \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ が成り立つ． ■

定理 5.13. リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，以下は同値である．

(i) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(ii) $\mathfrak{g}$ のキリング形式 B は非退化である．

証明. 補題 5.12 により，(i) $\Rightarrow$ (ii) は成り立つ．逆に (ii) $\Rightarrow$ (i) を示すには，命題 5.11 より，任意の $\mathfrak{g}$ の可換イデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}^\perp$ に含まれることを示せば良い．任意の $x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ を考えると，$(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)^2(\mathfrak{g}) \subset D\mathfrak{a} = 0$ となるので，$(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)^2$ は冪零である．従って，$B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y) = 0$ となる．すなわち，$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^\perp = 0$ が成り立つ． ■

これを用いて，古典型線形リー代数が半単純であることを確認する．

問題 5.14. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{so}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{K})$ は半単純であることを示せ．

問題 5.15. $\mathfrak{g}$ が半単純リー代数であれば，任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し $(\mathfrak{a}^\perp)^\perp = \mathfrak{a}$ が成り立つことを示せ．

定義 5.16. $\mathfrak{g}$ をリー代数，$\mathfrak{a}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ をそのイデアルとする．線形空間として $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ が成り立つとき，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ の**直和 (direct sum)** と呼ぶ．もし $i \neq j$ ならば，$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subset \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = 0$ が成り立つことに注意する．

補題 5.17. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の非自明なイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ が成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}$ は半単純リー代数である．

証明. $\mathfrak{a}^\perp$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルなので，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．$B_{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp} \equiv 0$ なので，カルタンの判定法より $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ は可解イデアルである．$\mathfrak{g}$ は半単純なので，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$ となる．このとき，$\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g}$ が成立することを示せば，

主張の前半が従う．これを示すために，$\{e_1, \cdots, e_m\}$ を $\mathfrak{a}$ の基底とし，その延長として $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ をとる．また，$\mathbb{B} := (B(e_i, e_j)) = (\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n)$ とする．ここで，$\mathbb{B}$ は n 次正方行列，$\mathbf{b}_i \in \mathbb{K}^n$ は n 項縦ベクトルである．このとき，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}^{\perp} &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathfrak{g} \,\middle|\, B(x, e_i) = 0,\, 1 \le i \le m \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathfrak{g} \,\middle|\, (a_1, \cdots, a_n)\mathbf{b}_i = 0,\, 1 \le i \le m \right\} \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \mathbb{B}'{}^{t}(a_1, \cdots, a_n) = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathbb{B}' := {}^{t}(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m)$ とする．$\mathbb{B}'$ を線形写像 $\mathbb{B}' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ とみなすと，$\mathfrak{a}^{\perp} = \operatorname{Ker} \mathbb{B}'$ となるので，

$$\dim \mathfrak{a}^{\perp} = \dim \operatorname{Ker} \mathbb{B}' = n - \operatorname{rank} \mathbb{B}' = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$$

が成り立つ．以上により，前半は示された．

後半を示すために，$\mathfrak{a}$ は半単純でないと仮定し矛盾を導く．$\mathfrak{a}$ が半単純でなければ，定理 5.13 により $B_{\mathfrak{a}}$ は退化する．すなわち，ある $a \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ に対して $B_{\mathfrak{a}}(a, x) = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{a})$ が成り立つ．しかし，補題 5.3 により $B(a, x) = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{a})$ となるので，$a \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$ となり矛盾．■

補題 5.18. $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数，$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする．$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{a}$ のイデアルならば，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

証明. $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の線形部分空間であることは明らかなので，$[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{b}$ を示す．補題 5.17 により，$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$ が成り立つ．このとき，

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \oplus [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{\perp}]$$

となる．$[\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{\perp}] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$ となるので，$[\mathfrak{b}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b}$ となる．■

注意 5.19. 上記補題 5.18 の性質は，$\mathfrak{g}$ が半単純でないときには一般に成り立たない[1]．例えば，G を n 次元ユークリッド空間の等長変換群，A を平行移動全体が定める部分群とする．このとき，A は G の正規部分群であり，それぞれに対応するリー代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$ とすると，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．$\mathfrak{a}$ は可換イデアルなので，$\mathfrak{a}$ の任意の真の部分空間 $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ のイデアルとなる．一方，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルでない．実際，連結リー群 G に対して，その連結部分群 A が正規であることと A のリー代数 $\mathfrak{a}$ が G のリー代数のイデアルであることは同値であり，今の場合，$\mathfrak{b}$ に対応するリー群は G の正規部分群でない．

特に，$n = 2$ のときにリー代数の具体的表示を考えてみると次の例を得る：

$$\mathfrak{g} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \theta & x \\ -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{a} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \supset \mathfrak{b} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

[1] O さんに教えていただいた．

定理 5.20. $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする．このとき，$\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して，$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．さらに，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の単純イデアルとすると，$\mathfrak{a}$ はある $\mathfrak{g}_i$ と一致する．また，$B_{\mathfrak{g}_i} = B|_{\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i}$ が成立する．

証明. $\mathfrak{g}$ は半単純なので，$D\mathfrak{g} \neq 0$ である．従って，$\mathfrak{g}$ が非自明なイデアルを持たないことと $\mathfrak{g}$ が単純であることは同値である．そこで，$\mathfrak{g}$ が非自明なイデアルを持つと仮定する．このとき，$\mathfrak{g}$ の零でない極小イデアル $\mathfrak{g}_1$ に対して補題 5.17 を適用すると，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^\perp$ が成立し $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1^\perp$ は共に半単純イデアルである．特に，極小性と補題 5.18 により $\mathfrak{g}_1$ は単純である．${\mathfrak{g}_1}^\perp$ に対して同様の議論をし，それを繰り返すことで単純イデアルへの分解 $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ を得る．

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の単純イデアルとする．$[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = 0$ とすると，$\mathfrak{a} \subset Z(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$ となり矛盾する．従って，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ は $\mathfrak{a}$ の非零イデアルである．$\mathfrak{g}$ は単純なので $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{a}$ となる．一方，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_n]$ となるので，1 つを除いて直和成分は 0 である．すなわち，$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$ となる i が存在する．$\mathfrak{g}_i$ は単純なので $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．最後の主張は補題 5.3 から従う． ■

系 5.21. $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする．このとき，$\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$ が成り立ち，$\mathfrak{g}$ の全てのイデアルと準同型像は半単純になる．さらに，$\mathfrak{g}$ の任意のイデアルは単純イデアルの和としてかける．

証明. 定理 5.20 により，$\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して，$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ $(i \neq j)$ かつ，$D\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$ に注意すると，

$$D\mathfrak{g} = [\oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i, \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i] = \oplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$$

が成り立つ．補題 5.17 により任意のイデアルは半単純であり，定理 5.20 を用いて，単純イデアルの和としてかけることも分かる．よって，$\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が全射ならば，$\mathfrak{h}$ も半単純であることを確認する．定理 5.20 により，$\mathfrak{g}$ が単純ならば $\mathfrak{h}$ も単純であることを示せば良いがこれは明らか． ■

キリング形式が非退化であることから，半単純リー代数の微分は全て内部微分であることが分かる：

定理 5.22. $\mathfrak{g}$ が半単純であれば，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．

証明. $\mathfrak{g}$ は半単純なので $Z(\mathfrak{g}) = 0$ となり，$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ が成り立つ．$\mathfrak{h} := \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}, \mathfrak{d} := \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ とおくと，命題 3.6 により，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{d}$ のイデアルである．よって，補題 5.3 により $B_{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{d}$ のキリング形式 $B_{\mathfrak{d}}$ の制限である．キリング形式 $B_{\mathfrak{d}}$ の根基 $\mathfrak{h}^\perp := \{x \in \mathfrak{d} | B_{\mathfrak{d}}(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{h}\}$ と，キリング形式 $B_{\mathfrak{h}}$ の根基 $(\mathfrak{h}^\perp)_{\mathfrak{h}} := \{x \in \mathfrak{h} | B_{\mathfrak{h}}(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{h}\}$ に対し，$\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}^\perp)_{\mathfrak{h}}$ となることに注意する．$\mathfrak{g}$ は半単純なので $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h} = (\mathfrak{h}^\perp)_{\mathfrak{h}} = 0$ となる．$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^\perp$ は $\mathfrak{d}$ のイデアルなので，$[\mathfrak{h}^\perp, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{h} = 0$ となる．命題 3.6 を用いると，$\delta \in \mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{d}$ に対し，$\mathrm{ad}(\delta x) = [\delta, \mathrm{ad}\,x] = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$ が成り立つことが分かる．$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ より，$\delta x = 0$ $(\forall x \in \mathfrak{g})$ となるので，$\delta = 0$ となる．従って $\mathfrak{h}^\perp = 0$ となる．

ここで，$\{e_1, \cdots, e_m\}$ を $\mathfrak{h}$ の基底とし，その延長として $\mathfrak{d}$ の基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ をとる．このとき，補題 5.17 と同様の議論により，$\mathfrak{h}^\perp = \mathrm{Ker}\,\mathbb{B}'$ となる．ただし，$\mathbb{B} := (B_{\mathfrak{d}}(e_i, e_j)) = (\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n)$ に対して，$\mathbb{B}' := {}^t(\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_m)$ とする．$\mathfrak{h}^\perp = 0$ より，$\mathrm{Ker}\,\mathbb{B}' = 0$ となり $m = n$ となる．従って，$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ が成り立つ． ■

定義 5.23 (抽象ジョルダン分解)**.** $\mathfrak{g}$ を半単純リー代数とする．定理 5.22 により，

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

が成り立つ．$x \in \mathfrak{g}$ に対し，$\mathrm{ad}\,x \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ のジョルダン分解を $\mathrm{ad}\,x = (\mathrm{ad}\,x)_s + (\mathrm{ad}\,x)_n$ とすると，$(\mathrm{ad}\,x)_s, (\mathrm{ad}\,x)_n \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ となる（補題 4.29）．$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \cong \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ より，$\mathrm{ad}(x_s) = (\mathrm{ad}\,x)_s, \mathrm{ad}(x_n) = (\mathrm{ad}\,x)_n$ となる $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ がそれぞれ唯一つ存在し，$x = x_s + x_n, [x_s, x_n] = 0$ が成り立つ．これを $x \in \mathfrak{g}$ の **(抽象) ジョルダン分解 (Jordan decomposition)** と呼び，x_s を x の**半単純成分 (semisimple part)**，x_n を x の**冪零成分 (nilpotent part)** と呼ぶ．

注意 5.24. $\mathfrak{g}$ が線形リー代数のとき，命題 4.27 と定義 5.23 のジョルダン分解の定義は一致することを後に確認する（定理 6.16）．

最後に，今までに示した半単純性と同値な条件をまとめておく：

定理 5.25 (定理 5.13, 補題 5.17, 定理 5.20 参照)**.** リー代数 $\mathfrak{g}$ に対し，以下は同値である．

(i) $\mathfrak{g}$ は半単純である．
(ii) $\mathfrak{g}$ の可換イデアルは 0 のみである．
(iii) $\mathfrak{g}$ のキリング形式 B は非退化である．
(iv) $\mathfrak{g}$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し，$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$ となる．
(v) $\mathfrak{g}$ の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して，$\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_i$ が成り立つ．

6. 表現の完全可約性

6.1. $\mathfrak{g}$ 加群と表現.

定義 6.1. $\mathfrak{g}$ をリー代数，V を線形空間とする．V と演算 $\mathfrak{g} \times V \to V; (x, v) \mapsto xv$ が以下の 3 条件を満たすとき，その組を $\mathfrak{g}$ **加群 ($\mathfrak{g}$-module)** と呼ぶ；

(M1) $(ax + by).v = a(x.v) + b(y.v)$,
(M2) $x.(av + bw) = a(x.v) + b(x.w)$,
(M3) $[x, y].v = x.y.v - y.x.v$ $(x, y \in \mathfrak{g}; v, w \in V; a, b \in \mathbb{K})$.

注意 6.2. $\mathfrak{g}$ 加群 V を与えることは $\mathfrak{g}$ の表現 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を与えることと同値である．実際，V を $\mathfrak{g}$ 加群とすると，$\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V); x \mapsto (v \mapsto x.v)$ により表現が定まり，逆に $\mathfrak{g}$ の表現 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$x.v := \phi(x)(v)$ により V は $\mathfrak{g}$ 加群の構造を持つ．

定義 6.3. $\mathfrak{g}$ 加群 V, W に対し，$\phi(x.v) = x.\phi(v)$ を満たす線形写像 $\phi : V \to W$ を $\mathfrak{g}$ 加群の**準同型写像 (homomorphism)** と呼ぶ．さらに，線形写像として同型写像のとき，$\mathfrak{g}$ 加群の**同型写像 (isomorphism)** と呼ぶ．

定義 6.4. V を $\mathfrak{g}$ 加群とする．V の線形部分空間 W が $\mathfrak{g}.W \subset W$ を満たすとき，W を $\mathfrak{g}$ 不変部分空間または $\mathfrak{g}$ 部分加群と呼ぶ．V が 0 と V 自身以外の $\mathfrak{g}$ 不変部分空間を持たないとき，V を **irreducible (既約)** という．V が既約な $\mathfrak{g}$ 不変部分空間の直和に分解するとき，V を**完全可約 (completely reducible)** という．

命題 6.5. リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ に対し，以下の二つの条件は同値である．

(i) V は完全可約である．
(ii) V の任意の $\mathfrak{g}$ 不変部分空間 W に対し，不変部分空間 W' が存在して $V = W \oplus W'$ となる．

証明. (i) ⇒ (ii) $V = \oplus V_i$ (V_i は既約不変部分空間) と仮定し，W を V の不変部分空間とする．W' を $W \cap W' = 0$ を満たす V の極大不変部分空間とする（少なくとも $\{0\}$ は不変部分空間なので，V が有限次元であることから W' の存在が分かる）．このとき，$V = W + W'$ を示せば良い．$W + W' \subsetneq V$ とすると，ある i_0 に対し $V_{i_0} \not\subset W + W'$ となる．$V_{i_0} \cap (W + W')$ は V_{i_0} の不変部分空間であるが，V_{i_0} は既約なので $V_{i_0} \cap (W + W') = 0$ となる．このとき，$W' + V_{i_0}$ は不変部分空間であり，$(W' + V_{i_0}) \cap W = 0$ かつ $W' \subsetneq W' + V_{i_0}$ を満たす．これは W' の極大性に矛盾する．

(ii) ⇒ (i) V の有限個の既約不変部分空間の直和で表される極大部分空間を W とおく．このとき，$V = W$ を示せば良い．$W \subsetneq V$ とすると，仮定 (i) より，$V = W \oplus W'$ を満たす不変部分空間 W' が存在する．W' に含まれる 0 でない極小不変部分空間を U とすると，U は既約で $W \subsetneq W \oplus U$ となり，W の極大性に矛盾する． ■

補題 6.6 (Schur の補題). リー代数の既約表現 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ に対し，$f \in \mathfrak{gl}(V)$ が全ての $\phi(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ と可換であれば f はスカラー倍写像である．

証明. λ を f の固有値とすると，$f - \lambda \cdot 1_V \in \mathfrak{gl}(V)$ となる．固有空間 $V_\lambda := \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot 1_V)$ の元 v（λ の固有ベクトル）と任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対し，

$$f(\phi(x)(v)) = \phi(x)(f(v)) = \phi(x)(\lambda v) = \lambda(\phi(x)(v))$$

となるので， V_λ は $\mathfrak{g}$ 不変部分空間である．ϕ は既約表現なので，$V_\lambda = V$ となる．すなわち，$f = \lambda \cdot 1_V$ が成り立つ． ■

命題 6.7. $\mathfrak{g}$ をリー代数，V, W を $\mathfrak{g}$ 加群とする．このとき，以下が成立する．

(i) $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ を V の双対空間とする．このとき，

$$\mathfrak{g} \times V^* \to V^*; (x, f) \mapsto x.f := [v \mapsto -f(x.v)]$$

と定めることにより，V^* は $\mathfrak{g}$ 加群になる．

(ii) V, W の $\mathbb{K}$ 上のテンソル積 $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ に対し，

$$\mathfrak{g} \times (V \otimes_{\mathbb{K}} W) \to V \otimes_{\mathbb{K}} W; (x, v \otimes w) \mapsto x.v \otimes w + v \otimes x.w$$

と定めることにより，$V \otimes_{\mathbb{K}} W$ は $\mathfrak{g}$ 加群になる．

(iii) V から W への線形写像全体がなす線形空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ に対し，

$$\mathfrak{g} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W); (x, f) \mapsto x.f := [v \mapsto x.f(v) - f(x.v)]$$

と定めることにより，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は $\mathfrak{g}$ 加群になる．

証明. (i) 定義 6.1 の (M1), (M2) は簡単に確認できるので，(M3) のみ示す．

$$\begin{aligned}[x, y].f(v) &= -f([x, y].v) = -f(x.y.v - y.x.v) = -f(x.y.v) + f(y.x.v) \\ &= (x.y.f)(v) - (y.x.f)(v) = ((x.y - y.x).f)(v).\end{aligned}$$

(ii) これも (M3) のみ示す.

$$\begin{aligned}[x,y].(v\otimes w) &= ([x,y].v)\otimes w + v\otimes([x,y].w)\\ &= (x.y.v - y.x.v)\otimes w + v\otimes(x.y.w - y.x.w)\\ &= (x.y.v\otimes w + v\otimes x.y.w) - (y.x.v\otimes w + v\otimes y.x.w))\\ &= (x.y - y.x).(v\otimes w).\end{aligned}$$

(iii) これも同様. ■

6.2. カシミール作用素とワイルの定理.

定義 6.8. リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の対称双線形形式 β に対し，

$$S := \{x\in\mathfrak{g} | \beta(x,y) = 0\ (\forall y\in\mathfrak{g})\}$$

を**根基 (radical)** と呼ぶ．$S = \{0\}$ のとき，β を**非退化 (nondegenerate)** という．さらに，$\beta([x,y],z) = \beta(x,[y,z])\ (\forall x,y,x\in\mathfrak{g})$ が成り立つとき，**結合的 (associative)** という.

補題 6.9. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその忠実表現 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ に対して，$\beta(x,y) := \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ とおく．このとき，β は $\mathfrak{g}$ 上の結合的な非退化対称双線形形式である.

証明. β が対称双線形形式であることはトレースの性質から分かる．また，結合的であることは補題 4.31 から従う．よって，非退化であることを示せば良い． β の根基 S を考えると，β が結合的であることから S は $\mathfrak{g}$ のイデアルであることが分かる．さらに，カルタンの判定法を $\phi(S)\cong S$ に用いると，S は可解である．$\mathfrak{g}$ は半単純なので $S=0$ となり，β は非退化である. ■

定義 6.10. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその忠実表現 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ に対して，$\beta(x,y) := \mathrm{Tr}(\phi(x)\phi(y))$ とおく．$\mathfrak{g}$ の基底 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ を一つ固定し，β に関する双対底 $\{y_1,\cdots,y_n\}\subset\mathfrak{g}$ を考える.（双対底は $\mathfrak{g}^*$ の元だが，β が非退化なので β により $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}^*$ が成り立ち，$\{y_1,\cdots,y_n\}\subset\mathfrak{g}$ とみなす.）

$$c_\phi(\beta) := \sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\phi(y_i)\in\mathrm{End}(V)$$

を ϕ の**カシミール作用素 (Casimir operator)** と呼ぶ．β を省略して c_ϕ とも記す.

命題 6.11. 定義 6.10 の記号の下，カシミール作用素 c_ϕ は任意の $x\in\mathfrak{g}$ に対し，$\phi(x)$ と可換である．言い換えると，$c_\phi : V\to V$ は $\mathfrak{g}$ 加群の準同型写像となる．また，$\mathrm{Tr}(c_\phi) = \dim\mathfrak{g}$ が成り立つ．さらに，ϕ が既約表現ならば c_ϕ は $(\dim\mathfrak{g}/\dim V)$ 倍写像であり $\mathfrak{g}$ の基底の取り方に依らない.

証明. $[x,x_i] = \sum_j a_{ij}x_j, [x,y_i] = \sum_j b_{ij}y_j$ とかける．このとき，

$$a_{ik} = \sum a_{ij}\beta(x_j,y_k) = \beta([x,x_i],y_k) = -\beta(x_i,[x,y_k]) = -\beta(x_i,\sum b_{kj}y_j) = -b_{kj}$$

となる．$[x,yz]=[x,y]z+y[x,z]$ に注意すると，

$$\begin{aligned}[\phi(x),c_\phi(\beta)] &= \sum_i [\phi(x),\phi(x_i)\phi(y_i)] \\ &= \sum_i [\phi(x),\phi(x_i)]\phi(y_i)+\sum_i \phi(x_i)[\phi(x),\phi(y_i)] \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i)+\sum_{i,j} b_{ij}\phi(x_i)\phi(y_j) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i)-\sum_{i,j} a_{ji}\phi(x_i)\phi(y_j)=0\end{aligned}$$

となる．さらに，

$$\mathrm{Tr}(c_\phi)=\sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}(\phi(x_i)\phi(y_i))=\sum_{i=1}^n \beta(x_i,y_i)=\dim\mathfrak{g}$$

が成り立つ．

最後に ϕ が既約であれば，シューアの補題により c_ϕ はスカラー倍写像である．$\mathrm{Tr}(c_\phi)=\dim\mathfrak{g}$ なので，$(\dim\mathfrak{g}/\dim V)$ 倍写像である．

■

例 6.12. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}), V=\mathbb{K}^2$, ϕ は恒等写像 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ とする．$\{x,h,y\}$ を例 3.10 の証明に現れる標準的な $\mathfrak{sl}_2$-triple とする．いま，$\beta(x,y)=\mathrm{Tr}(x,y)$ となることに注意する．この β に関する $\{x,h,y\}$ の双対底は $\{y,h/2,x\}$ である．従って，

$$c_\phi=xy+h^2/2+yx=\begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}=(\dim\mathfrak{g}/\dim V)\cdot\mathrm{id}_V$$

となる．

カシミール作用素を用いてワイルの定理を証明する．まず，簡単な補題から始める．

補題 6.13. 半単純リー代数の表現 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ に対し，$\phi(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{sl}(V)$ が成り立つ．特に，$\mathfrak{g}$ の任意の 1 次元表現は自明である．

証明. $\phi(\mathfrak{g})=\phi(D\mathfrak{g})=D(\phi(\mathfrak{g}))\subset D(\mathfrak{gl}(V))=\mathfrak{sl}(V)$. ■

定理 6.14 (Weyl の定理). 半単純リー代数の任意の表現 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ は完全可約である．

証明. 命題 6.5 により，任意の $\mathfrak{g}$ 不変部分空間 W に対し，不変部分空間 W' が存在して $V=W\oplus W'$ となることを示せば良い．$\dim W=0$ なら明らかに定理は成り立つので，$\dim W>0$ とする．$\dim\mathfrak{g}$ に関する帰納法により表現 ϕ は忠実であると仮定して良い．以下，いくつかのステップに分けて定理を証明する．

<u>V が余次元 1 の $\mathfrak{g}$ 不変空間 W をもつとき</u> 表現 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ が余次元 1 の $\mathfrak{g}$ 不変空間 W をもつと仮定したとき，1 次元不変部分空間 W' が存在して $V=W\oplus W'$ となることを $\dim W$ に関する帰納法により示す．$\dim V/W=1$ な

ので，補題 6.13 により $\mathfrak{g}$ の V/W への自然な作用は自明である．$\dim V/W = 1$ なので，$V/W = \mathbb{K}$ と略記する：$0 \to W \to V \to \mathbb{K} \to 0$（完全）．

まずは，W を既約と仮定して良いことを示す．W が既約でないとすると，非自明な $\mathfrak{g}$ 不変空間 W' が存在する．このとき，完全列

$$0 \to W/W' \to V/W' \to \mathbb{K} \to 0$$

を得る．$\dim W/W' < \dim W$ なので，帰納法の仮定によりこの完全列は分裂する．すなわち，V/W' の 1 次元 $\mathfrak{g}$ 不変部分空間 $\tilde{W}/W'$ が存在して

$$V/W' = W/W' \oplus \tilde{W}/W' \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，再び完全列

$$0 \to W' \to \tilde{W} \to \mathbb{K} \to 0$$

を得る．$\dim W' < \dim W$ なので，帰納法の仮定によりこの完全列は分裂する．すなわち，W の 1 次元 $\mathfrak{g}$ 不変部分空間 X が存在して

$$\tilde{W} = W' \oplus X \tag{4}$$

が成り立つ．(3), (4) より，$W \cap X = 0$ である．$\dim V = \dim W + \dim X$ と合わせて，$V = W \oplus X$ となる．以上により，W は既約として良い．

$c = c_\phi$ を ϕ のカシミール作用素とする．$c : V \to V$ は $\mathfrak{g}$ 加群の自己準同型写像であり，$c(W) \subset W$ かつ $\mathrm{Ker}\, c$ は $\mathfrak{g}$ 不変空間である．また，$\mathfrak{g}$ は V/W に自明に作用するので，c の構成より c も自明に作用する．一方，$c|_W = (\dim \mathfrak{g}/\dim W) \cdot \mathrm{id}_W \neq 0$ なので，$\mathrm{Ker}\, c$ は 1 次元 $\mathfrak{g}$ 不変空間で $V = W \oplus \mathrm{Ker}\, c$ が成り立つ．以上により，V が余次元 1 の $\mathfrak{g}$ 不変空間 W をもつときは示された．

一般の場合 W を V の真の $\mathfrak{g}$ 不変部分空間とする．このとき，$\mathfrak{g}$ 加群 $\mathrm{Hom}(V, W)$ の部分集合

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : &= \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) | f_{|W} \text{ はスカラー倍写像 }\} \\ \mathcal{W} : &= \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) | f_{|W} = 0\} \end{aligned}$$

は共に $\mathfrak{g}$ 不変部分空間であり，$\phi(\mathfrak{g})(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$ を満たす．実際，$f \in \mathcal{V}$ が $f|_W = a \cdot \mathrm{id}_W$ を満たすならば，$x \in \mathfrak{g}, w \in W$ に対し，

$$(x.f)(w) = x.f(w) - f(x.w) = a(x.w) - a(x.w) = 0 \tag{5}$$

となるので，$x.f|_W = 0$ となる．さらに，$\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = 1$ であることは簡単に分かる．

ここで，前半の結果を適用すると，1 次元 $\mathfrak{g}$ 不変部分空間 $\mathcal{W}'$ が存在して $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}'$ となる．ここで，$\mathcal{W}'$ の基底 $f : V \to W$ を $f|_W = \mathrm{id}_W$ を満たすように選ぶ．(5) により，f は $\mathfrak{g}$ 加群の準同型写像を定める．従って，$\mathrm{Ker}\, f$ は V の $\mathfrak{g}$ 不変部分空間である．f の構成法より $V = W \oplus \mathrm{Ker}\, f$ となることが分かる．■

例 6.15. 一般のリー代数に対して，その表現は完全可約でない．例えば，$\mathfrak{g}$ を 1 次元リー代数とする．このとき，表現

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}); t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えると，この表現は完全可約でない．

ワイルの定理の応用として，命題 4.27 と定義 5.23 のジョルダン分解の定義は一致することを確認する．

定理 6.16. 半単純線形リー代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ に対し，任意の元 $x \in \mathfrak{g}$ の $\mathfrak{gl}(V)$ における半単純部分 x_s と冪零部分 x_n は $\mathfrak{g}$ に含まれる．特に，命題 4.27 と定義 5.23 のジョルダン分解の定義は一致する．

証明. 後半は前半を認めるとジョルダン分解の一意性から従う．よって前半を示せば良い．

$x \in \mathfrak{g}$ の $\mathfrak{gl}(V)$ における半単純部分を x_s，冪零部分を x_n とする．$\mathrm{ad}\, x(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ と命題 4.27 (iii) より，$\mathrm{ad}\, x_s(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ と $\mathrm{ad}\, x_n(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ が成り立つ（ただし，$\mathrm{ad} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$）．従って，$\mathfrak{g}$ をイデアルとして含む正規化部分代数

$$N := N_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{g}) := \{y \in \mathfrak{gl}(V) | \, \mathrm{ad}\, y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}\}$$

に対し，$x_s, x_n \in N$ となる．さらに，V の $\mathfrak{g}$ 不変空間 W に対し，$\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数

$$\mathfrak{g}_W := \{y \in \mathfrak{gl}(V) | y(W) \subset W, \ \mathrm{Tr}(y|_W) = 0\}$$

を考える．$\mathfrak{g} = D\mathfrak{g}$ が成り立つので，$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_W$ となる．また，$y \in \mathfrak{g}_W$ ならば，命題 4.27 (ii), (iii) により $y_s, y_n \in \mathfrak{g}_W$ となる．そこで，

$$\mathfrak{g}' := N \cap (\cap_{W \subset V} \mathfrak{g}_W)$$

とおく．ただし，後ろの共通部分は全ての V の既約 $\mathfrak{g}$ 不変空間 W に対しとるものとする．$\mathfrak{g}'$ は N の部分リー代数であり，$\mathfrak{g}$ をイデアルとして含む．さらに，$x \in \mathfrak{g}'$ の半単純部分と冪零部分は再び $\mathfrak{g}'$ に含まれる．従って，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ を示せば良い．

$\mathfrak{g}'$ を $\mathfrak{g}$ 加群とみると，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}'$ の不変空間である．よって，ワイルの定理より $\mathfrak{g}'$ の不変空間 $\mathfrak{h}$ が存在して，$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ とかける．$\mathfrak{g}' \subset N$ より $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}$ が成り立つので，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ への作用は自明である．よって，$y \in \mathfrak{h}$ なら $[\mathfrak{g}, y] = 0$ となるので，シューアの補題により y は W にスカラー倍写像として作用する．一方，$y \in \mathfrak{g}_W$ より $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$ となるので，$y|_W = 0$ となる．再びワイルの定理により V は既約 $\mathfrak{g}$ 不変空間の直和としてかけるので，$y = 0$ となる．従って，$\mathfrak{h} = 0$ となり題意は従う． ■

系 6.17. 半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその表現 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ を考える．$x \in \mathfrak{g}$ に対し $x = s + n$ を抽象ジョルダン分解とすると，$\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ における通常のジョルダン分解を与える．

証明. $\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ は半単純なので，定理 6.16 により $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ が $\mathfrak{gl}(V)$ における抽象ジョルダン分解を与えることを示せば良い．すなわち，$\mathrm{ad}\, \phi(s)$ は半単純で $\mathrm{ad}\, \phi(n)$ は冪零であることを示せば良い．抽象ジョルダン分解の定義より，$\mathrm{ad}\, s$ は半単純で $\mathrm{ad}\, n$ は冪零である．$\mathrm{ad}\, s$ が半単純であることから，$\mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}\, s$ の固有ベクトル $v_1, \cdots, v_m$ により張られる．v_i に対する固有値を λ_i $(1 \leq i \leq n)$ とすると，

$$\mathrm{ad}\, \phi(s)(\phi(v_i)) = \phi(\mathrm{ad}\, s(v_i)) = \phi(\lambda_i v_i) = \lambda_i \phi(v_i)$$

となるので，$\mathrm{ad}\, \phi(s)$ は半単純である．一方，$\mathrm{ad}\, n$ は冪零なので，ある正の整数 k が存在して $(\mathrm{ad}\, n)^k = 0 \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ が成り立つ．$\mathrm{ad}\, \phi(n) \in \mathfrak{gl}(\phi(\mathfrak{g}))$ と $z \in \mathfrak{g}$ に

対して，
$$(\mathrm{ad}\,\phi(n))^k(\phi(z)) = \phi((\mathrm{ad}\,n)^k z) = \phi(0) = 0$$
となるので，$\mathrm{ad}\,\phi(n)$ は冪零である． ■

例 6.18. 一般のリー代数に対して，抽象ジョルダン分解と通常のジョルダン分解は一致しない．例えば，$\mathfrak{g}$ を 1 次元リー代数とする．このとき，表現
$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}); t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
を考えると，$t \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ は半単純だが $\phi(t)$ は冪零である．

7. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ の表現

この章では $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ とする．今までと同様に $\mathfrak{g}$ の基底
$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
に対し，
$$[x, y] = h, [h, x] = 2x, [h, y] = -2y$$
が成り立つことに注意する．

V を $\mathfrak{g}$ 加群とする．h は半単純なので系 6.17 により，V は h に関する固有空間へ分解する：
$$V = \oplus V_\lambda,$$
$$V_\lambda := \{v \in V | h.v = \lambda v\}.$$
λ が h の固有値でなくても $V_\lambda := \{v \in V | h.v = \lambda v\} = 0$ とすることで，任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ に関して V_λ を定義することができる．$V_\lambda \neq 0$ のとき λ を V における h の**ウェイト (weight)** と呼び，V_λ を**ウェイト空間 (weight space)** と呼ぶ．

補題 7.1. 上記記号の下，$v \in V_\lambda$ ならば，
$$x.v \in V_{\lambda+2},\ y.v \in V_{\lambda-2},\ h.v \in V_\lambda$$
が成り立つ．

証明.
$$h.(x.v) = [h, x].v + x.h.v = 2x.v + x.(\lambda v) = (\lambda + 2)x.v.$$
$y.v$ についても同様．さらに，$h = [x, y]$ より $h.v$ についても従う． ■

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "x"] & V_{\lambda-2} \arrow[l, "y"] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[loop below, "h"] & V_\lambda \arrow[l, "y"] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[loop below, "h"] & V_{\lambda+2} \arrow[l, "y"] \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[loop below, "h"] & \cdots \arrow[l, "y"]
\end{tikzcd}$$

$\dim V < \infty$ より，$V_\lambda \neq 0$ かつ $V_{\lambda+2} = 0$ を満たす λ が存在する．このような λ を V の**最高ウェイト (highest weight)** と呼ぶ．さらに，V_λ の元をウェイト λ の**極大ベクトル (maximal vector)** と呼ぶ．

補題 7.2. 極大ベクトル $v_0 \in V_\lambda$ に対し，

$$v_i := \frac{1}{i!} y^i.v_0 \ (i \geq 0), \ v_{-1} = 0$$

とおく．このとき，

(i) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$,
(ii) $y.v_i = (i+1)v_{i+1}$,
(iii) $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \ (i \geq 0)$.

証明. 補題 7.1 により，$v_i \in V_{\lambda-2i}$ となる．よって，(i) が従う．(ii) は定義から明らか．(iii) を i に関する帰納法により示す．$i = 0$ ならば明らか．

$$\begin{aligned} ix.v_i &= x.y.v_{i-1} \\ &= [x,y].v_{i-1} + y.x.v_{i-1} \\ &= h.v_{i-1} + y.x.v_{i-1} \\ &= (\lambda - 2(i-1))v_{i-1} + (\lambda - i + 2)y.v_{i-2} \\ &= (\lambda - 2i + 2)v_{i-1} + (i-1)(\lambda - i + 2)v_{i-1} \\ &= i(\lambda - i + 1)v_{i-1} \end{aligned}$$

両辺を i で割ると，$x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \ (i \geq 0)$ を得る． ■

定理 7.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ と $(m+1)$ 次元既約 $\mathfrak{g}$ 加群 V に対して，以下が成立する．

(i) V の最高ウェイトは m であり，特に整数である．
(ii)

$$V = \bigoplus_{i=0}^{m} V_{m-2i}.$$

(iii) $V_\mu \neq 0$ ならば $\dim V_\mu = 1$ である．
(iv) ある基底に関する x, y, h の表現行列はそれぞれ次で与えられる：

$$\begin{pmatrix} 0 & m & & & 0 \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & m-1 & 0 & \\ 0 & & & m & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m & & & & 0 \\ & m-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -m+2 & \\ 0 & & & & -m \end{pmatrix}.$$

この行列表現を ϕ_m とかく．

証明. $v_0 \in V_\lambda$ を極大ベクトルとし，補題 7.2 と同様に v_i を定義する．$v_1, v_2, \cdots$ の中で最初に 0 になるものを v_{m_0+1} とすると，$v_i = 0 \ (i \geq m_0 + 1)$ である．補題 7.2 (iii) により，

$$0 = x.v_{m_0+1} = (\lambda - m_0)v_{m_0}, \ v_{m_0} \neq 0$$

なので，$\lambda = m_0$ となる．補題 7.2 により，$\langle v_0, \cdots, v_{m_0}\rangle_{\mathbb{K}} \subset V$ は $\mathfrak{g}$ 不変空間であるが，V は既約なので $V = \langle v_0, \cdots, v_{m_0}\rangle_{\mathbb{K}}$ となる．$v_0, \cdots, v_{m_0}$ は h の相異なる固有値に対応する固有ベクトルなので線形独立である．従って，$\dim V = m_0+1$ である．特に，$m_0 = m \in \mathbb{Z}$ となる．$v_i \in V_{m-2i}$ $(0 \leq i \leq m)$ なので，

$$V = \langle v_0, \cdots, v_m\rangle_{\mathbb{K}} \subset \bigoplus_{i=0}^{m} V_{m-2i} \subset V$$

となり，$V = \bigoplus_{i=0}^{m} V_{m-2i}$，$\dim V_{m-2i} = 1$ となることが分かる．さらに，基底 $\{v_0, \cdots, v_m\}$ に関する x, y, h の表現行列はそれぞれ (iv) の行列で与えられる．

■

系 7.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ に対し，V を $\mathfrak{g}$ 加群とする．ワイルの定理により V は既約 $\mathfrak{g}$ 不変空間の直和に分解する：

$$V = \oplus W_i,\ W_i : \text{既約}\ .$$

このとき，この分解に現れる既約 $\mathfrak{g}$ 不変空間の個数は $\dim V_0 + \dim V_1$ と等しい．特に，V が既約であることと $\dim V_0 + \dim V_1 = 1$ が成り立つことは同値である．従って，定理 7.3 (v) の ϕ_m は既約表現である．

証明. V の $\mathfrak{g}$ 加群構造を与える表現を $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ とする．定理 7.3 により，各 i に対してある非負整数 m が存在して $\phi|_{W_i} \equiv \phi_m$ となる．W_i における $\phi(h)$ の固有値は

$$m, m-2, \cdots, -m+2, -m$$

であり，それぞれ 1 回ずつ現れる．つまり，各 W_i に対し $\phi(h)$ は固有値 0 か 1 どちらかをもち，定理 7.3 (iii) によりその固有空間は 1 次元である．すなわち，各 i に対し $\dim(W_i)_0 + \dim(W_i)_1 = 1$ が成り立つ．よって，既約 $\mathfrak{g}$ 不変空間の個数は $\dim V_0 + \dim V_1$ と等しい．ϕ_m が表現を与えることは簡単な計算で分かる．さらに，$\dim V_0 + \dim V_1 = 1$ となることは明らかなので，ϕ_m は既約である． ■

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ の既約表現 ϕ_m $(m \geq 0)$ を具体的に考察しよう．ϕ_m の定義から，

$$\phi_0 = 0,\ \phi_1 = \mathrm{id},\ \phi_2 = \mathrm{ad}$$

となる．$m = 0, 1$ のときは明らか．$m = 2$ のときは，$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ の基底を $\{-x, h, y\}$ ととることにより，例 3.10 と同様の計算をすると，$\mathrm{ad} = \phi_2$ となることが分かる．

2 次元線形空間 V の基底を s, t とし，この基底に関する表現

$$\phi_1 = \mathrm{id} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}(V)$$

を考えると，$h(s) = s, h(t) = -t$ となる．ここで，$W := \mathrm{Sym}^2(V)$ に対して ϕ_1 から自然に定まる表現 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) \to \mathfrak{gl}(W)$ を考察する．まず，W の基底として s^2, st, t^2 を考える．すると，

$$\begin{aligned}
h(s\cdot s) &= s\cdot h(s) + h(s)\cdot s = 2s^2\\
h(s\cdot t) &= s\cdot h(t) + h(s)\cdot t = 0\\
h(t\cdot t) &= t\cdot h(t) + h(t)\cdot t = -2t^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(s\cdot s) &= s\cdot x(s)+x(s)\cdot s=0\\
x(s\cdot t) &= s\cdot x(t)+x(s)\cdot t=s^2\\
x(t\cdot t) &= t\cdot x(t)+x(t)\cdot t=2st
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(s\cdot s) &= s\cdot y(s)+y(s)\cdot s=2st\\
y(s\cdot t) &= s\cdot y(t)+y(s)\cdot t=t^2\\
y(t\cdot t) &= t\cdot y(t)+y(t)\cdot t=0
\end{aligned}
$$

となり，この表現は ϕ_2 と同値である．同様に考えていくと，ϕ_1 から自然に定まる表現 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})\to\mathfrak{gl}(\mathrm{Sym}^m(V))$ と ϕ_m は同値であることが分かる．

問題 7.5. このことを確認せよ．

定理 7.3 以降の内容をまとめて次が分かる：

定理 7.6. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ の任意の既約表現は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ の $\mathbb{K}^2$ への自然な表現の対称代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})\to\mathfrak{gl}(\mathrm{Sym}^m(V))$ で与えられる．

8. ルート分解

この章ではリー環 $\mathfrak{g}$ は全て半単純とする．任意の $\mathfrak{g}$ の元が冪零ならば，エンゲルの定理により $\mathfrak{g}$ が冪零となり矛盾である．すなわち，$\mathfrak{g}$ は半単純元をもつ．従って，$\mathfrak{g}$ は半単純元からなる部分リー代数を含む．半単純元からなる部分リー代数を **toral** と呼ぶ．

補題 8.1. $\mathfrak{g}$ の toral 部分リー代数は可換である．

証明. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の toral 部分リー代数とする．$\mathfrak{h}$ が可換でないと仮定して矛盾を導く．このとき，ある $x\in\mathfrak{h}$ が存在して，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,x\neq 0$ となる．$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ は対角化可能かつ $\mathfrak{h}$ は $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ 不変なので，補題 4.20 により $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,x=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x|_{\mathfrak{h}}$ も対角化可能である．従って，$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}\,x$ に関する 0 でない固有値 λ_1 が存在する．すなわち，ある $\lambda_1\neq 0$ と $y\in\mathfrak{h}$ が存在して，$\mathrm{ad}\,x(y)=\lambda_1 y$ となる．$\mathrm{ad}\,y$ は対角化可能なので，対応する $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を以下のように書く：

$$\mathfrak{g}=\oplus_\mu\mathfrak{g}(y,\mu),\ \mathfrak{g}(x,\mu):=\{y\in\mathfrak{g}|[x,y]=\mu y\}$$

$x=\sum x_\mu$ $(x_\mu\in\mathfrak{g}(y,\mu))$ なる分解に対して，

$$\sum\mu x_\mu=[y,x]=-\lambda_1 y\in\mathfrak{g}(y,0)$$

なので，$\sum\mu^2x_\mu=[y,\sum\mu x_\mu]=0$ となる．よって，$\mu\neq 0$ ならば $x_\mu=0$ となる．従って，$[y,x]=0$ となり矛盾する． ■

ここで，次の線形代数の定理を思い出そう．

命題 8.2. 集合 $S\subset M_n(\mathbb{K})$ の全ての元が対角化可能だとする．このとき，以下の二つの条件は同値である：

(i) S の元は同時対角化可能である：正則行列 P が存在して，任意の $A\in S$ に対して $P^{-1}AP$ は対角行列である．

(ii) S の元は可換である：任意の $A, B \in S$ に対し，$AB = BA$ である．

以下，$\mathfrak{h}$ を極大 toral 部分リー代数とする．補題 8.1 により $\mathfrak{h}$ は可換なので，命題 8.2 を適用すると同時対角化可能であることが分かる．x を $h, h' \in \mathfrak{h}$ の共通の固有ベクトルとすると，

$$[h, x] = \alpha(h)x,\ [h', x] = \alpha(h')x$$

を満たす $\alpha(h), \alpha(h') \in \mathbb{K}$ が存在する．

$$[h + h', x] = (\alpha(h) + \alpha(h'))x,\ [ch, x] = c\alpha(h')x\ (c \in \mathbb{K})$$

より，$\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{K}$ は $\mathfrak{h}$ 上の 1 次形式を定める：$\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$．そこで，$\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ に対して，

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} | [h, x] = \alpha(h)x\ (\forall h \in \mathfrak{h})\}$$

とおく．特に，$\mathfrak{h}$ の中心化部分代数 $c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{h}] = 0\}$ は $\mathfrak{g}_0$ と一致する．さらに，

$$\Phi := \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in \mathfrak{h}^\vee \setminus \{0\} | \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

とおき，$\alpha \in \Phi$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関する**ルート (root)**，$\mathfrak{g}_\alpha$ を**ルート空間 (root space)** と呼ぶ．このとき，直和分解

$$\mathfrak{g} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

を $\mathfrak{g}$ の（$\mathfrak{h}$ に関する）**ルート (空間) 分解 (root space decomposition, Cartan decomposition)** と呼ぶ．

例 8.3. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ のルート分解を求める．

$$\mathfrak{h} := \left\{h = \mathrm{diag}(\xi_1, \cdots, \xi_n) | \sum_{i=1}^n \xi_i = 0\right\}$$

とおくと，$\mathfrak{h}$ は明らかに toral である．上記と同様の方法により（$\mathfrak{h}$ が極大 toral であることは示していないが），ルート分解

$$\mathfrak{g} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

を得る．$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ の標準基底 $\{e_{i,j}\}$ と $h = \mathrm{diag}(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ に対し，

$$[h, e_{ij}] = (\xi_i - \xi_j)e_{ij}$$

となる．よって，

$$\alpha_{ij} : h \mapsto \xi_i - \xi_j$$

とおくと，$\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^\vee$ で，

$$\mathfrak{h} \subset c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}),\ \langle e_{ij} \rangle_{\mathbb{K}} \subset \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}\ (i \neq j)$$

が成り立つ．明らかに $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \langle e_{ij} \rangle_{\mathbb{K}}$ が成り立つので，

$$\mathfrak{h} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}),\ \langle e_{ij} \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}\ (i \neq j), \Phi = \{\alpha_{ij}\ (i \neq j)\}$$

となる．$\mathfrak{h} = c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ より $\mathfrak{h}$ は極大可換部分代数であることが分かるので，極大 toral である．

以下，ルート分解の種々の性質を調べていく．

命題 8.4. 上の記号の下，以下が成立する．

(i) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$
(ii) キリング形式 B に関する直交補空間 ${\mathfrak{g}_\alpha}^\perp$ は ${\mathfrak{g}_\alpha}^\perp = \bigoplus_{\beta\neq-\alpha} \mathfrak{g}_\beta$ とかける．
(iii) $B|_{c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})\times c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})}$ は非退化である．

証明. $h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$ に対して，

$$\begin{aligned}[h,[x,y]] &= [[y,h],x] + [[h,x],y] = [x,[h,y]] + [[h,x],y] \\ &= [x,\alpha(h)y] + [\beta(h)x,y] = (\alpha+\beta)(h)[x,y]\end{aligned}$$

となるので，(i) は成立する．

(i) を用いると，$x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$ に対し，

$$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\gamma}$$

となる．ルート分解に即して $\mathfrak{g}$ の基底をとり $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$ の行列表示を考えると，$\alpha+\beta \neq 0$ ならば，$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$ の対角成分はすべて 0 である．従って，$B(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$ となる．よって，$\mathfrak{g}_\beta \subset {\mathfrak{g}_\alpha}^\perp$ であり，${\mathfrak{g}_\alpha}^\perp \supset \bigoplus_{\beta\neq-\alpha} \mathfrak{g}_\beta$ が成り立つ．よって，$\dim \mathfrak{g}_\alpha \leq \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を得るが，α を $-\alpha$ で置き換えると逆の等式を得る．従って，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$ となり，(ii) の ${\mathfrak{g}_\alpha}^\perp = \bigoplus_{\beta\neq-\alpha} \mathfrak{g}_\beta$ が成り立つ．特に $\alpha = 0$ とすると，$c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})^\perp = \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha$ となるので，$c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) \cap c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})^\perp = \{0\}$ となる．よって (iii) が従う． ■

命題 8.5. $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の極大 toral とすると，$\mathfrak{h} = c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ が成り立つ．よって，$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化である．

証明. いくつかのステップに分けて証明する．$C := c_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ とおく．リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 S に対し，その元の半単純部分全体を S_n，冪零部分全体を S_s とかく．

(i) $C_n, C_s \subset C$ が成立 $x \in C$ とすると，$\mathrm{ad}\,x(\mathfrak{h}) = 0$ となる．よって，命題 4.27 (iii) により $(\mathrm{ad}\,x)_s(\mathfrak{h}) = 0, (\mathrm{ad}\,x)_n(\mathfrak{h}) = 0$ となる．一方，系 6.17 により $(\mathrm{ad}\,x)_s = \mathrm{ad}\,x_s, (\mathrm{ad}\,x)_n = \mathrm{ad}\,x_n$ となるので，$x_s, x_n \in C$ となる．

(ii) $C_s \subset \mathfrak{h}$ が成立 $x \in C_s$ とする．$\mathfrak{h} + \mathbb{K}x$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分リー代数であるが，命題 8.2 により toral である．$\mathfrak{h}$ の極大性により $\mathfrak{h} + \mathbb{K}x = \mathfrak{h}$ となるので，$x \in \mathfrak{h}$ である．

(iii) $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化 $h \in \mathfrak{h}$ に対して $B(h,\mathfrak{h}) = 0$ と仮定する．このとき，$h = 0$ を示せば良い．そのためには，命題 8.4 (iii) より $B(h,C) = 0$ を示せば十分である．さらに，(ii) より $C_s \subset \mathfrak{h}$ であるが，仮定より $B(h,\mathfrak{h}) = 0$ なので $B(h,C_s) = 0$ となる．よって，$B(h,C_n) = 0$ を示せば良い．$x \in C_n$ とすると，(i) より $x \in C_n \subset C$ である．このとき，$[x,h] = 0$ かつ $\mathrm{ad}\,x$ は冪零である．よって，$\mathrm{ad}\,x$ は $\mathrm{ad}\,h$ と可換な冪零元なので，$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,h\,\mathrm{ad}\,x) = 0$，すなわち $B(h,x) = 0$ となる．よって，$B(h,C_n) = 0$ となる．

(iv) C は冪零元 エンゲルの定理により任意の $x \in C$ に対し，$\mathrm{ad}\,x$ が冪零であることを示せば良い．$x \in C$ のジョルダン分解 $x = x_s + x_n$ に対し，$\mathrm{ad}\,x_s$ と $\mathrm{ad}\,x_n$ は可換なので，$\mathrm{ad}\,x_s$ と $\mathrm{ad}\,x_n$ がそれぞれ冪零であることを示せば十分で

ある．まず，(ii) より $x_s \in \mathfrak{h}$ なので，$\operatorname{ad} x_s = 0$ となり特に冪零である．一方，x_n が冪零ならば $\operatorname{ad} x_n$ も冪零である．

(v) $\mathfrak{h} \cap D(C) = 0$ が成立 B は結合的であり $[\mathfrak{h}, C] = 0$ なので，$B(\mathfrak{h}, D(C)) = 0$ となる．よって，(iii) から従う．

(vi) C は可換 $D(C) \neq 0$ として矛盾を導く．(iv) により C は冪零なので補題 3.38 により $Z(C) \cap D(C) \neq 0$ となる．$z \in Z(C) \cap D(C) \setminus \{0\}$ とすると，(ii) と (v) により z は半単純でない．よって，(i) より $z_n \in C \setminus \{0\}$ となる．命題 4.27 (iii) より $z_n \in Z(C)$ となるが，可換性と冪零性より $B(x_n, C) = 0$ となり命題 8.4 (iii) に矛盾する．

(vi) $C = \mathfrak{h}$ が成立 $C \neq \mathfrak{h}$ とすると，(i), (ii) により，C が零でない冪零元 x を含む．(vi) により $B(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$ $(\forall y \in C)$ となり命題 8.4 (iii) に矛盾する．

■

$B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化なので，

$$\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^\vee; x \mapsto B(x, \cdot)$$

は線形空間の間の同型写像を与える．これにより $\alpha \in \mathfrak{h}^\vee$ に対応する $\mathfrak{h}$ の元を t_α とかく．このとき $\alpha(h) = B(t_\alpha, h)$ が成り立つ．ルート全体の集合 Φ は $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ と対応する．

命題 8.6. 上の記号の下，$\alpha \in \Phi$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{K}} = \mathfrak{h}^\vee$.
(ii) $-\alpha \in \Phi$.
(iii) $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ならば，$[x, y] = B(x, y)t_\alpha$.
(iv) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{K}t_\alpha$.
(v) $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$.
(vi) $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ ならば $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ が $\mathfrak{sl}_2$-*triple* を成す．ただし，$h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha]$ とする．
(vii) $h_\alpha = 2t_\alpha / B(t_\alpha, t_\alpha)$; $h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

証明. (i) $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{K}} \subsetneq \mathfrak{h}^\vee$ とする．このとき，$h \in (\mathfrak{h}^\vee)^\vee \setminus \{0\} = \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ で $h|_\Phi = 0$ となる元が存在する．すなわち，任意の $\alpha \in \Phi$ に対して $\alpha(h) = 0$ となる．このとき，任意の $\alpha \in \Phi$ に対して $[h, \mathfrak{g}_\alpha] = 0$ が成り立つ．さらに $[h, \mathfrak{h}] = 0$ なので，$[h, \mathfrak{g}] = 0$ となる．よって，$h \in Z(\mathfrak{g})$ となるが，$\mathfrak{g}$ が半単純であることから $Z(\mathfrak{g}) = 0$ となり矛盾する．

(ii) $\alpha \in \Phi$ に対して $-\alpha \notin \Phi$ とすると，$\mathfrak{g}_{-\alpha} = 0$ となる．すると，命題 8.4 (ii) により $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$ となる．しかし，これは B が非退化であることに矛盾する（定理 5.13）．

(iii) $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ と任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して，

$$\begin{aligned} B(h, [x, y]) &= B([h, x], y) = B(\alpha(h)x, y) = \alpha(h)B(x, y) \\ &= B(t_\alpha, h)B(x, y) = B(h, B(x, y)t_\alpha) \end{aligned}$$

となるので，$B(h, [x, y] - B(x, y)t_\alpha) = 0$ が成り立つ．命題 8.4 (i) により $[x, y] \in c_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ なので $[x, y] - B(x, y)t_\alpha \in \mathfrak{h}$ である．命題 8.5 により $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化なので，$[x, y] = B(x, y)t_\alpha$ が成立する．

(iv) $B(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$ ならば主張は (iii) から従う．$x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対して，$B(x, \mathfrak{g}_{-\alpha}) = 0$ とする．すると，(ii) の議論と同様に $B(x, \mathfrak{g}) = 0$ となる．これは B が非退化であることに矛盾する．従って，$B(x, y) \neq 0$ となる $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在する．

(v) $\alpha(t_\alpha) = B(t_\alpha, t_\alpha)$ は t_α の定義から直ちに従う．$\alpha(t_\alpha) = 0$ として矛盾を導く．このとき，$[t_\alpha, \mathfrak{g}_\alpha] = [t_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 0$ となる．また，(iv) より $B(x, y) \neq 0$ となる $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在する．スカラー倍することにより，$B(x, y) = 1$ として良い．すると，$[x, y] = t_\alpha$ となる．$S := \langle x, y, t_\alpha \rangle_{\mathbb{K}}$ とおくと，S は 3 次元可解リー代数であり，$S \cong \operatorname{ad} S \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ かつ $D(S) = \mathbb{K} t_\alpha$ が成り立つ．よって，系 4.5 により t_α は冪零となるが，一方で $t_\alpha \in \mathfrak{h}$ より半単純である．従って，$\operatorname{ad} t_\alpha$ は冪零かつ半単純であるので，$\operatorname{ad} t_\alpha = 0$ となる．しかし，$t_\alpha \in Z(\mathfrak{g}) = 0$ となり矛盾する．

(vi) (iii)-(v) により，任意の $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ に対し $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が存在して $B(x_\alpha, y_\alpha) = 2/B(t_\alpha, t_\alpha)$ となる．そこで，$h_\alpha := 2t_\alpha / B(t_\alpha, t_\alpha)$ とおくと，

$$[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha,\ [h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha,\ [h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$$

が成り立つ．従って，$\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ は $\mathfrak{sl}_2$-triple である．

(vii) $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha] = B(x_\alpha, y_\alpha) t_\alpha$ である．$\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ が $\mathfrak{sl}_2$-triple であることから，$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$ であるが，一方で

$$[h_\alpha, x_\alpha] = [B(x_\alpha, y_\alpha) t_\alpha, x_\alpha] = B(x_\alpha, y_\alpha)[t_\alpha, x_\alpha] = B(x_\alpha, y_\alpha)\alpha(t_\alpha) x_\alpha$$

が成り立つ．従って，$B(x_\alpha, y_\alpha) = 2/B(t_\alpha, t_\alpha)$ となる．後半は $t_\alpha = -t_{-\alpha}$ より明らか． ■

以下，命題 8.6 (vi) の $\mathfrak{sl}_2$-triple を $\mathfrak{s}_\alpha$ とかく．

命題 8.7. 上の記号の下，以下が成り立つ．

(i) $\alpha \in \Phi$ ならば，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$．

(ii) $\alpha, c\alpha \in \Phi$ $(c \in \mathbb{K})$ ならば，$c = \pm 1$．

(iii) $\alpha, \beta \in \Phi$ ならば，$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ かつ $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$．

(iv) $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$ ならば，$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$．

(v) $\alpha, \beta \in \Phi$ かつ $\beta \neq \pm\alpha$ とする．さらに，$r, q \in \mathbb{Z}$ を $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha \in \Phi$ となる最大の整数とする．このとき，$\beta + i\alpha \in \Phi$ $(-r \leq i \leq q)$ かつ $\beta(h_\alpha) = r - q$．

(vi) $\mathfrak{g}$ はリー代数として $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$ により生成される．

証明. (i), (ii) $\alpha \in \Phi$ に対応する $\mathfrak{sl}_2$-triple $\mathfrak{s}_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha \rangle_{\mathbb{K}}$ を考える．随伴表現により $\mathfrak{sl}_2$ は $\mathfrak{g}$ に作用する．ワイルの定理により，$\mathfrak{g}$ は既約 $\mathfrak{sl}_2$ 不変部分空間の直和に分解する．それぞれの既約 $\mathfrak{sl}_2$ 不変部分空間への $\mathfrak{sl}_2$ の作用は定理 7.3 の ϕ_m で与えられる．従って，$\mathfrak{g}$ は $\operatorname{ad} h_\alpha$ の固有ベクトルからなる基底をもち，それぞれの固有値は整数である．特に，任意の固有値は整数である．

そこで $c\alpha \in \Phi$ とすると，$2c = c\alpha(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ となる．すなわち，ルートのスカラー倍が再びルートになるならば，そのスカラーは $m/2$ $(m \in \mathbb{Z})$ とかける．いま $|c| > 1$ とする．$(1/c)(c\alpha) = \alpha \in \Phi$ よりルート $c\alpha$ の $(1/c)$ 倍が再びルートなので，$1/c = m/2$ を満たす $m \in \mathbb{Z}$ が存在する．$1 > |1/c| = |m/2|$ なので，$c = \pm 2$ となる．同様にして，$|c| < 1$ ならば $c = \pm 1/2$ となる．以上により，$\alpha \in \Phi$ のスカラー倍のうちルートになり得るのは $\pm\alpha, \pm\alpha/2, \pm 2\alpha$ である．

$\alpha/2 = (1/4)2\alpha$ とかけることから，$\alpha/2$ と 2α が同時にルートになることはないことに注意する．

2α がルートでないことを示すために，

$$\mathfrak{s} := \mathbb{K}y_\alpha \oplus \mathbb{K}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$$

とおく．$\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数である．また，$h_\alpha \in D\mathfrak{s}$ なので，$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{s} h_\alpha) = 0$ が成り立つ．一方，$\alpha(h_\alpha) = 2$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_\mathfrak{s} h_\alpha) &= -\alpha(h_\alpha) + 0 + \alpha(h_\alpha)\dim\mathfrak{g}_\alpha + 2\alpha(h_\alpha)\dim\mathfrak{g}_{2\alpha} \\ &= -2 + 0 + 2\dim\mathfrak{g}_\alpha + 4\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}\end{aligned}$$

すなわち，

$$\dim\mathfrak{g}_\alpha + 2\dim\mathfrak{g}_{2\alpha} = 1$$

となる．$\dim\mathfrak{g}_\alpha \geq 1$ より，$\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1, \dim\mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$ となる．よって，2α はルートでない．$2(\alpha/2) = \alpha \in \Phi$ より，$\alpha/2$ もルートでないことが分かる．以上により，(i) と (ii) が成り立つ．

次に (iii)-(v) を示す．$\alpha, \beta \in \Phi$ とする．$\alpha(h_\alpha) = 2$ なので，$\beta = \pm\alpha$ であれば (iii) は成り立つ．また，(iv) では $\alpha + \beta \in \Phi$ なので，$\beta \neq \pm\alpha$ である．従って，(iii)-(v) を示すにあたり，$\beta \neq \pm\alpha$ として良い．

$$V := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+i\alpha}$$

とおく．(i) より $\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha} \neq \emptyset$ ならば $\dim\mathfrak{g}_{\beta+i\alpha} = 1$ である．また，$\beta \neq \pm\alpha$ かつ (ii) より $\beta + i\alpha \neq 0$ となる．V は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{s}_\alpha$ 不変部分空間であり，ウェイトは $\beta(h_\alpha) + 2i$（ただし，i は $\beta + i\alpha \in \Phi$ を満たす整数）で与えられる．特に，$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ となる．与えられた α に対し 0 と 1 が同時に $\beta(h_\alpha) + 2i$ という形で表されることはないので，系 7.4 により V は既約であることが分かる．q, r の定め方と定理 7.3 により，$\beta + i\alpha \in \Phi$ $(-r \leq i \leq q)$ かつ $(\beta - r\alpha)(h_\alpha) = -(\beta + q\alpha)(h_\alpha)$ となることが分かる．よって，(v) が成り立つ．さらに，最高ウェイトは $\beta(h_\alpha + 2q)$ であり，補題 7.2 を用いることで $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$ となるので，(vi) も成り立つ．■

キリング形式 B の $\mathfrak{h}$ への制限により同型写像

$$\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^\vee; x \mapsto B(x, \cdot)$$

を得た．この同型により $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^\vee$ を同一視し，任意の $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^\vee$ に対して，$(\lambda, \mu) := B(t_\lambda, t_\mu)$ と置くことで，$\mathfrak{h}^\vee$ 上の非退化対称双線形形式を定める．さらに，命題 8.6 (i) により，Φ の部分集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ が存在して，$\mathfrak{h}^\vee$ の基底をなす．以下，この基底を固定して話を進める．

補題 8.8. 上の記号の下，$\beta \in \Phi$ を $\beta = \sum_{j=1}^l c_j\alpha_j$ と表すと，$c_j \in \mathbb{Q}$ である．

証明. 全ての i に対し，$(\alpha_i, \beta) = \sum_{j=1}^l (\alpha_i, \alpha_j)c_j$ となるが，両辺に $2/(\alpha_i, \alpha_i)$ をかければ，

$$\frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \sum_{j=1}^l \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} c_j.$$

一方，キリング形式 $B|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ は非退化で $\{\alpha_i\}$ は $\mathfrak{h}$ の基底なので，$\det((\alpha_i,\alpha_j))\neq 0$ となる．従って，

$$\det\left(\frac{2(\alpha_i,\beta)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)=\left(\prod_{i=1}^{l}\frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right)\det((\alpha_i,\alpha_j))\neq 0.$$

これから題意は従う． ■

Φ が $\mathbb{Q}$ 上生成する $\mathfrak{h}^\vee$ の部分空間を $E_{\mathbb{Q}}$ とすると，上記補題により，$E_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 上の l 次元線形空間で $\mathfrak{h}^\vee=E_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{K}$ となる．

補題 8.9. $\mathfrak{h}$ 上の非退化対称双線形形式 $(\ ,\ )$ を $E_{\mathbb{Q}}$ に制限したものは有理数値をとり，正定値符号である．

証明. 任意の $\lambda,\mu\in\mathfrak{h}^\vee$ に対して，

$$(\lambda,\mu)=B(t_\lambda,t_\mu)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,t_\lambda\,\mathrm{ad}\,t_\mu)=\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\lambda)(\alpha,\mu).$$

特に，$\beta\in\Phi$ に対して，

$$(\beta,\beta)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\beta)^2$$

となり，両辺を $(\beta,\beta)^2$ で割ると，

$$\frac{1}{(\beta,\beta)}=\sum_{\alpha\in\Phi}\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\beta,\beta)^2}$$

を得る．命題 8.7 (iii) により，$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)^2}\in\mathbb{Z}$ なので，上記式の右辺は有理数である．すなわち，$(\beta,\beta)\in\mathbb{Q}$ となる．よって，任意の $\alpha,\beta\in\Phi$ に対し，

$$(\alpha,\beta)=\frac{(\beta,\beta)}{2}\times\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\in\mathbb{Q}$$

となる．任意の $E_{\mathbb{Q}}$ の元はルートの $\mathbb{Q}$ 上の線形結合でかけるので，$(\ ,\ )$ を $E_{\mathbb{Q}}$ に制限したものは有理数値をとる．さらに，任意の λ に対し，

$$(\lambda,\lambda)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha,\lambda)^2\geq 0.$$

$(\lambda,\lambda)=0$ ならば，任意の $\alpha\in\Phi$ に対し $(\alpha,\lambda)=0$ となる．このとき，$\lambda\in\mathfrak{g}^\perp=0$ となり題意は成立する． ■

$E:=E_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ と置くと，$(\ ,\ )$ は E 上に延長することができる．この $(\ ,\ )$ は E 上の実数値をとる正定値非退化対称双線形形式である．すなわち，$(E,(\ ,\ ))$ はユークリッド空間である．今までのことをまとめると，$(E,\Phi,(\ ,\ ))$ は以下を満たすことが分かる：

(R1) $\Phi\subset E$ は E を張る有限集合で 0 を含まない．
(R2) 実数 k が $\alpha,k\alpha\in\Phi$ を満たすならば $k=\pm1$ である．
(R3) 任意の $\alpha\in\Phi$ に対し，鏡映 σ_α は $\sigma_\alpha(\Phi)\subset\Phi$ を満たす．
(R4) $\alpha,\beta\in\Phi$ ならば，$\langle\beta,\alpha\rangle$ は整数である．

9. ルート系

この章では E をユークリッド空間，つまり，内積 (α, β) をもった $\mathbb{R}$ 上の有限次ベクトル空間とする．さらに，非零ベクトル $\alpha \in E$ に対し，α と直交するベクトル全体がなす E の超平面を P_α とかく：

$$P_\alpha = \{\beta \in E | (\beta, \alpha) = 0\}.$$

定義 9.1. 線形変換 $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ が以下の二つの条件を満たすとき，σ を E における**鏡映 (reflection)** と呼ぶ.

(i) 非零ベクトル $\alpha \in E$ が存在して，σ による固定点の集合が超平面 P_α と一致する.

(ii) $\sigma(\alpha) = -\alpha$ が成り立つ.

さらに，このとき鏡映 σ を σ_α とかく.

補題 9.2. 定義 9.1 の記号の下，

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

が成り立つ.

証明. E の直交分解 $E = \mathbb{R}\alpha \oplus P_\alpha$ を用いて，$\beta = c\alpha + \gamma$ $(c \in \mathbb{R}, \gamma \in P_\alpha)$ とかく．このとき，β と α の内積を取ると，$c = \dfrac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ となることが分かる．さらに，

$$\sigma_\alpha(\beta) = \sigma_\alpha(c\alpha + \gamma) = c\sigma_\alpha(\alpha) + \sigma_\alpha(\gamma) = -c\alpha + \gamma = \beta - 2c\alpha$$

となるので題意は従う. ■

以下，$\dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ を $\langle \beta, \alpha \rangle$ もしくは $c_{\alpha,\beta}$ とかく.

補題 9.3. Φ を E を張る有限部分集合とする．任意の $\alpha \in \Phi$ に対し，$\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$ が成り立つとする．$\sigma \in \mathrm{GL}(E)$ が以下の三つの条件を満たすとする.

(i) $\sigma(\Phi) = \Phi$.

(ii) $\sigma(\alpha) = -\alpha$.

(iii) ある超平面 P が σ の固定点集合に含まれる.

このとき，$\sigma = \sigma_\alpha$ かつ $P = P_\alpha$ が成り立つ.

証明. $\tau := \sigma \circ \sigma_\alpha$ とおく．このとき，$\tau(\alpha) = \alpha, \tau(\Phi) = \Phi$ となる．前半より，τ は $\mathbb{R}\alpha$ に自明に作用することが分かる．従って，τ は $E/\mathbb{R}\alpha$ に作用するが，この作用は自明である．実際，分解 $E = \mathbb{R}\alpha \oplus P$ に即して任意の $\beta \in E$ を分解すると，$\beta = c\alpha + \gamma$ $(c \in \mathbb{R}, \gamma \in P)$ とかける．このとき，

$$\tau(\beta) = \sigma(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \sigma(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \sigma(\alpha) = \gamma + (\langle \beta, \alpha \rangle - c)\alpha$$

となるので，τ は $E/\mathbb{R}\alpha$ へ自明に作用する．従って，τ の全ての固有値は 1 に等しいので，τ の最小多項式 $f_\tau(x)$ は $(x-1)^\ell$ の因子となる $(\ell = \dim E)$．一方，$\tau(\Phi) = \Phi$ に注意し，$\beta, \tau(\beta), \cdots, \tau^k(\beta)$ $(k \geq |\Phi|)$ を考えると，ある k_0 に対し，$\tau^{k_0}(\beta) = \beta$ となることが分かる．よって，k を十分大きくとると，任意

の β に対して $\tau^k(\beta)=\beta$ となる．Φ は E を生成するので $\tau^k=1$ となる．従って，τ の最小多項式 $f_\tau(x)$ は x^k-1 の因子となる．以上により，$f_\tau(x)=x-1$ となるので，$\tau=1$ である． ■

定義 9.4. E の部分集合 Φ が以下の四つの条件を満たすとき， Φ を**ルート系**と呼ぶ:

(R1) $\Phi\subset E$ は E を張る有限集合で 0 を含まない．
(R2) 実数 k が $\alpha, k\alpha\in\Phi$ を満たすならば $k=\pm1$ である.
(R3) 任意の $\alpha\in\Phi$ に対し，鏡映 σ_α は $\sigma_\alpha(\Phi)\subset\Phi$ を満たす．
(R4) $\alpha,\beta\in\Phi$ ならば，$\langle\beta,\alpha\rangle$ は整数である.

ルート系 Φ の元を**ルート**といい，E のベクトル空間としての次元を Φ の**階数**と呼ぶ．さらに，鏡映 σ_α $(\alpha\in\Phi)$ によって生成される群を Φ の**ワイル群**と呼び W とかく.

補題 9.5. ルート系 Φ のワイル群 W の位数は有限である．

証明. $\Phi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_d\}$ とする．任意の $w\in W$ に対し，$w(\Phi)=\Phi$ なので，W から対称群 $\mathrm{Sym}(\Phi)$ への群準同型写像を得る；

$$W\to\mathrm{Sym}(\Phi); w\mapsto[i\mapsto j \text{ if } w(\alpha_i)=\alpha_j]$$

Φ は E を生成するので，この写像は単射である．従って，$\mathrm{Sym}(\Phi)$ の有限性から題意が従う． ■

補題 9.6. Φ を E のルート系，W をそのワイル群とする．もし $\sigma\in\mathrm{GL}(E)$ が $\sigma(\Phi)=\Phi$ を満たすならば，任意の $\alpha,\beta\in\Phi$ に対し，以下が成り立つ：

(i) $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=\sigma_{\sigma(\alpha)}$.
(ii) $\langle\beta,\alpha\rangle=\langle\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\rangle$.

証明. 前半は補題 9.3 より従う．よって，後半を示せば良い．任意の $\beta\in\Phi$ に対し，

$$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta))=\sigma(\sigma_\alpha(\beta))=\sigma(\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha)=\sigma(\beta)-\langle\beta,\alpha\rangle\sigma(\alpha)$$
$$\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta))=\sigma(\beta)-\langle\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)$$

となるので，前半から後半が従う． ■

定義 9.7. ユークリッド空間とルート系の組み $(E,\Phi),(E',\Phi')$ に対し，ベクトル空間としての同型写像 $\phi:E\to E'$ が存在し，$\phi(\Phi)=\Phi'$ と $\langle\phi(\beta),\phi(\alpha)\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$ $(\forall\alpha,\beta\in\Phi)$ が成り立つとき，(E,Φ) と (E',Φ')（もしくはルート系 Φ と Φ'）は**同型 (isomorphic)** であるという.

系 9.8. $(E,(\ ,\ )_E,\Phi),(E',(\ ,\ )_{E'},\Phi')$ をそれぞれルート系とする．もし線形空間としての同型写像 $\phi:E\to E'$ が存在して，$\phi(\Phi)=\Phi'$ を満たすならば，ルート系 $(E,(\ ,\ )_E,\Phi),(E',(\ ,\ )_{E'},\Phi')$ は同型である．さらに，$(E,(\ ,\ )_E,\Phi)$ がルート系ならば，任意の $c,d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して $(E,c(\ ,\ )_E,d\Phi)$ もルート系で，それらは同型である．

証明. $(E,(\ ,\ )_E,\Phi)$ がルート系ならば，任意の $c,d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して $(E,c(\ ,\ )_E,d\Phi)$ もルート系であることは簡単に分かる．よって，後半は前半から従うので，前半を示せば十分である．前半を示すには，任意の $\alpha,\beta\in\Phi$ に対し，$\langle\beta,\alpha\rangle_E=$

$\langle\phi(\beta),\phi(\alpha)\rangle_{E'}$ が成り立つことを示せば良い．仮定より E と E' は同型なので，線形空間として同一視することが出来る．このとき，$\phi\in \mathrm{GL}(E)$ とみなすことにより，補題 9.6 を適用すると，題意が成り立つことが分かる．■

この系により，線形空間としての同型写像 $\phi : E \to E'$ が $\phi(\Phi) = \Phi'$ を満たすならば，後半の条件 $\langle\phi(\beta),\phi(\alpha)\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$ は自動的に成立する．また，ϕ により同型なルート系 Φ と Φ' のワイル群をそれぞれ W, W' としたとき，$W\to W';\sigma\mapsto\phi\circ\sigma\circ\phi^{-1}$ によりワイル群も同型であることに注意する．

Φ の自己同型群を

$$\mathrm{Aut}(\Phi) := \{g\in \mathrm{GL}(E) | g(\Phi) = \Phi\}$$

により定めると，補題 9.6(i) により，ワイル群 W は $\mathrm{Aut}(\Phi)$ の正規部分群であることが分かる．

同型の差を除いてルート系を分類することが今後の最も大きな目標の一つである．そこで，ユークリッド空間とルート系の組み (E,Φ) を考える．ユークリッド空間 E に付随する内積に対し，正規直交底を取ることにより，E は通常の内積を備えた $\mathbb{R}^l$ として良い（そもそもこの場合をユークリッド空間と呼び，我々の意味でのユークリッド空間は計量空間と呼ぶべき??）．従って，今後はユークリッド空間 E は通常の内積を備えた $\mathbb{R}^l$ と仮定する．ルート系の分類に向け，まずは 2 つのルートの関係を調べることから始めよう．

命題 9.9. ルート $\alpha,\beta\in\Phi$ に対し，それらのなす角を θ とする．$\alpha\neq\pm\beta$ かつ $||\beta||\geq||\alpha||$ のとき，$(\langle\alpha,\beta\rangle,\ \langle\beta,\ \alpha\rangle,\ \theta,\ ||\beta||^2/||\alpha||^2)$ の組は以下の表のいずれかを満たす．

$\langle\alpha,\beta\rangle$	$\langle\beta,\ \alpha\rangle$	θ	$\|\|\beta\|\|^2/\|\|\alpha\|\|^2$
0	0	$\pi/2$	定まらない
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	2
-1	-2	$3\pi/4$	2
1	3	$\pi/6$	3
-1	-3	$5\pi/6$	3

証明． $(\alpha,\beta) = ||\alpha||\ ||\beta||\cos\theta$ なので，

$$\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = \frac{2||\beta||}{||\alpha||}\cos\theta$$

となる．従って，

$$\langle\alpha,\beta\rangle\ \langle\beta,\alpha\rangle = 4\cos^2\theta$$

が成り立つ．$0\leq\cos^2\leq 1$ かつ $\langle\alpha,\beta\rangle$, $\langle\beta,\alpha\rangle$ は整数なので，

$$0\leq\langle\alpha,\beta\rangle\ \langle\beta,\alpha\rangle\leq 4$$

となるが，仮定より $\alpha\neq\pm\beta$ なので，$\langle\alpha,\beta\rangle\ \langle\beta,\alpha\rangle\neq 4$ である．また，$\theta=\pi/2$ であることと $\langle\alpha,\beta\rangle\ \langle\beta,\alpha\rangle = 0$ であることは同値である．よって，$\langle\alpha,\beta\rangle\ \langle\beta,\alpha\rangle = 1, 2$ または 3 であるときを考えれば良い．ここで，仮定より $||\beta||\geq||\alpha||$ なので，

$$\frac{|\langle\beta,\alpha\rangle|}{|\langle\alpha,\beta\rangle|} = \frac{||\beta||^2}{||\alpha||^2}\geq 1$$

となることに注意する．どの場合も同じようにできるので，$\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle = 2$ のときのみ証明を与える．このとき，$(\langle\alpha,\beta\rangle\langle\beta,\alpha\rangle) = (2,1)$ もしくは $(-2,-1)$ となる．$\cos^2\theta = 1/2$ なので，$\theta = \pi/4$ もしくは $3\pi/4$ となる．このとき，$||\beta||^2/||\alpha||^2 = 2$ となり題意は成立する． ∎

補題 9.10. 定数倍でない 2 つのルート $\alpha,\beta\in\Phi$ に対し，$(\alpha,\beta) > 0$ ならば，$\alpha-\beta$ はルートである．また，$(\alpha,\beta) < 0$ ならば，$\alpha+\beta$ はルートである．

証明. 後半は前半において β を $-\beta$ とすれば得られる．従って前半を示せば良い．$(\alpha,\beta) > 0$ ならば，命題 9.9 により $\langle\alpha,\beta\rangle$ もしくは $\langle\beta,\alpha\rangle$ は 1 と等しい．$\langle\alpha,\beta\rangle = 1$ ならば，$\sigma_\alpha(\beta) = \alpha-\beta\in\Phi$ となる．$\langle\beta,\alpha\rangle = 1$ ならば，$\beta-\alpha\in\Phi$ となるが，$\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha) = \alpha-\beta\in\Phi$ となる． ∎

命題 9.11. 階数 2 のルート系は $A_1\times A_1,\ A_2,\ B_2,\ G_2$ のいずれかと同型である．

証明. $\dim E = 2$ なので，ルート系 Φ は平面ベクトルの集合である．相異なるルートのうち，それらのなす角 θ が最小であるルートの組みを一つ固定し，$\alpha_1,\alpha_2\in\Phi$ とかく．すなわち，$\alpha_1,\alpha_2\in\Phi$ は隣り合ったルートである．補題 9.10 により，$0\le\theta\le\pi/2$ である． さらに，定理 9.9 により，θ の値は $\pi/2,\pi/3,\pi/4,\pi/6$ のいずれかであることに注意する．このとき，$\alpha_3 := \sigma_{\alpha_2}(-\alpha_1)$ は α_2 を含む直線に関する鏡映により α_1 を移して得られる．さらに，$\alpha_4 := \sigma_{\alpha_3}(-\alpha_2)$ は α_3 を含む直線に関する鏡映により α_2 を移して得られる．これを繰り返すことにより $2\pi/\theta$ 個のルートを得るが，θ の最小性から Φ に含まれるルートは全てこのようにして構成される．θ の値 $\pi/2,\pi/3,\pi/4,\pi/6$ に対応して，ルート系は $A_1\times A_1,\ A_2,\ B_2,\ G_2$ とそれぞれ同型になる． ∎

補題 9.12. 一次独立な二つのルート $\alpha,\beta\in\Phi$ に対し，ある $p,q\ge 0$ が存在し，$i\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$\beta+i\alpha\in\Phi \Leftrightarrow -q\le i\le p$$

が成り立つ．

証明. $I := \{i\in\mathbb{Z}|\beta+i\alpha\in\Phi\}$ とおく．I は有限集合なので，その最大元，最小元をそれぞれ $p,-q$ とする．$\beta\in I$ なので $p,q\ge 0$ である．このとき，$\Rightarrow$ は明らかなので，$\Leftarrow$ を示す．$-q\le i\le p$ に対して $\beta+i\alpha\notin\Phi$ として矛盾を導く．このとき，$I' := \{i\in\mathbb{Z}|-q\le i\le p, \beta+i\alpha\notin\Phi\}$ は空でない有限集合なので，その最大元，最小元が存在し，それぞれ r,s とする．すると，$-q<s\le r<p$ かつ

$$\beta+r\alpha\notin\Phi,\ \beta+(r+1)\alpha\in\Phi,\ \beta+s\alpha\notin\Phi,\ \beta+(s-1)\alpha\in\Phi.$$

補題 9.10 により

$$(\alpha,\beta+(r+1)\alpha)\le 0,\ (\alpha,\beta+(s-1)\alpha)\ge 0$$

となるので辺々を引いて，$(r-s+2)(\alpha,\alpha)\le 0$ となり矛盾である． ∎

定義 9.13. 補題 9.12 において，$\{\beta+i\alpha\in\Phi|i\in\mathbb{Z}\} = \{\beta+i\alpha|-q\le i\le p\}$ を β **を含む** α **列** (α**-string through** β) と呼ぶ．

問題 9.14. 一次独立なルート $\alpha,\beta\in\Phi$ の張る部分空間を $E'\subset E$ とする．このとき，$E\cap\Phi$ は E' のルート系であることを示せ．

10. 基底とワイル群

10.1. 基底とワイルの部屋.

定義 10.1. ルート系 $\Phi \subset E$ の部分集合 Δ が以下の二つの条件を満たすとき，Φ の**基底**という：

(B1) Δ はベクトル空間 E の基底である.
(B2) 任意のルート $\beta \in \Phi$ を $\beta = \Sigma k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ と表したとき k_α は整数で，任意の α に対して $k_\alpha \geq 0$ もしくは $k_\alpha \leq 0$ が成り立つ.

このような Δ の元を**単純ルート**と呼ぶ．上記 (B2) における β に対して，$\mathrm{ht}\beta := \Sigma k_\alpha$ を（Δ に関する）β の**高さ (height)** と呼ぶ．また，任意の α に対して $k_\alpha \geq 0$ が成り立つ β を**正のルート**と呼ぶ．一方，任意の α に対して $k_\alpha \leq 0$ が成り立つ β を**負のルート**と呼ぶ．正のルート全体を Φ^+，負のルート全体を Φ^- で表す．また，$\xi, \eta \in E$ に対し $\xi - \eta = \Sigma k_\alpha \alpha$ と表したとき，全ての単純ルート $\alpha \in \Delta$ に対し $k_\alpha \geq 0$ となるとき，$\xi \succ \eta$ と定める．$\succ$ はルート系の基底の選び方に依存して定まる E 上の半順序である.

補題 10.2. ルート系 Φ の基底 Δ に対し，$\alpha \neq \beta \in \Delta$ ならば，$(\alpha, \beta) \leq 0$ となる.

証明. $(\alpha, \beta) > 0$ とする．仮定より $\alpha \neq \pm\beta$ なので，補題 9.10 より $\alpha - \beta \in \Phi$ となる．しかし，これは (B2) に矛盾する. ■

$\gamma \in E$ に対し，

$$\Phi^+(\gamma) := \{\alpha \in \Phi | (\gamma, \alpha) > 0\}$$

とおく．$\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ のとき，γ を**正則 (regular)** と呼び，それ以外のとき，**特異 (singular)** と呼ぶ．γ が正則なとき，$\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ と表される．$\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ に対して，$\alpha = \beta_1 + \beta_2$ となる $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ が存在するとき，α を**分解可能 (decomposable)** と呼び，そうでないとき**分解不可能 (indecomposable)** と呼ぶ.

定理 10.3. 正則な元 $\gamma \in E$ に対し，$\Delta(\gamma)$ を $\Phi^+(\gamma)$ における分裂不可能なルート全体の集合とする．このとき，$\Delta(\gamma)$ は Φ の底をなす．また，全ての基底はこのようにして得られる.

証明. 5 段階に分けて証明する.

<u>ステップ 1</u>　$\Phi^+(\gamma)$ におけるルートは $\Delta(\gamma)$ の元の非負 $\mathbb{Z}$ 係数和として表される：$\Delta(\gamma)$ の元の非負 $\mathbb{Z}$ 係数和として表されない $\Phi^+(\gamma)$ の元が存在すると仮定する．そのうち，γ との内積の値が最小のものを α とする．$\alpha \notin \Delta(\gamma)$ なので，α は分解可能である．すなわち，$\alpha = \beta_1 + \beta_2$ となる $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ が存在する．$(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$ において $(\gamma, \beta_1), (\gamma, \beta_2) > 0$ なので，(γ, α) の最小性より，β_1, β_2 は $\Delta(\gamma)$ の元の非負 $\mathbb{Z}$ 係数和として表される．これは矛盾.

<u>ステップ 2</u>　$\alpha \neq \beta \in \Delta(\gamma)$ に対して，$(\alpha, \beta) \leq 0$：$(\alpha, \beta) > 0$ とすると，$\beta \neq \pm\alpha$ なので，補題 9.10 により $\alpha - \beta \in \Phi$ となる．よって，$\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$ または $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$ が成り立つ．前者の場合，$\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ となり α が分解可能となり矛盾．後者も同様に β が分解可能となり矛盾.

<u>ステップ 3</u>　$\Delta(\gamma)$ の元は線形独立である：$\sum r_\alpha \alpha = 0$ $(\alpha \in \Delta(\gamma), r_\alpha \in \mathbb{R})$ とする．r_α の正負で分けることにより，$\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ と変形できる（$s_\alpha, t_\beta \geq 0$

かつ $\alpha \neq \beta$）．$\epsilon = \sum s_\alpha \alpha$ とおくと，$(\epsilon, \epsilon) = \sum_{\alpha,\beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0$（ステップ 2 より）となり $\epsilon = 0$ となる．よって，$0 = (\gamma, \epsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$ となるので，$s_\alpha = 0$ かつ $t_\beta = 0$ となり，線形独立性が示された．

また，同様の方法により次のことも分かる：E の 1 つの超平面とその超平面の片側にあるベクトルの集合 S を固定する．S に含まれるいかなる 2 つのベクトルのなす角も鈍角であるならば S の元は線形独立である．

ステップ 4 $\Delta(\gamma)$ は Φ の底である：ステップ 1 と $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ により (B2) が成り立つ．よって，$\Delta(\gamma)$ は E を張る．ステップ 3 により $\Delta(\gamma)$ の元は線形独立なので，(B1) も成り立つ．

ステップ 5 Φ の任意の基底 Δ に対し，ある $\gamma \in E$ が存在し $\Delta = \Delta(\gamma)$ が成立する：基底 Δ に対し，任意の $\alpha \in \Delta$ に対し，$(\gamma, \alpha) > 0$ となる $\gamma \in E$ を選ぶ．(B2) により γ は正則である．また，$\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$ かつ $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ が成り立つ．$\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-, \Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$ より，$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ かつ $\Phi^- = -\Phi^+(\gamma)$ が成り立つ．$\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$ なので，$\Delta \subset \Delta(\gamma)$ となるが，$|\Delta| = |\Delta(\gamma)| = \dim E$ より $\Delta = \Delta(\gamma)$ となる． ■

$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ の連結成分を**ワイルの部屋 (Weyl chamber)** と呼ぶ．正則な元 $\gamma \in E$ に対し，それを含むワイルの部屋 $\mathcal{C}(\gamma)$ が一意に定まる．$\mathcal{C}(\gamma) = \mathcal{C}(\gamma')$ となるのは，任意の超平面 P_α $(\alpha \in \Phi)$ に対し，γ, γ' が同じ側にあることと同値である．これは $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$，すなわち $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ が成り立つことに他ならない．さらに，

$$W \times \{\text{ ワイルの部屋 }\} \to \{\text{ ワイルの部屋 }\}; (\sigma, \mathcal{C}(\gamma)) \mapsto \mathcal{C}(\sigma(\gamma)),$$

$$W \times \{\text{ ルート系の基底 }\} \to \{\text{ ルート系の基底 }\}; (\sigma, \Delta) \mapsto \sigma(\Delta)$$

により，ワイル群 W はワイルの部屋からなる集合とルート系の基底からなる集合にそれぞれ作用する．他方，$\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ に対して，$(\sigma(\alpha), \sigma(\gamma)) = (\alpha, \gamma)$ が成り立つ．よって，$\sigma(\Phi^+(\gamma)) = \Phi^+(\sigma(\gamma))$ となるが，これは $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$ が成り立つことを意味する．以上により次が分かった．

命題 10.4. ルート系の基底とワイルの部屋は一対一に対応する：

$$\{\text{ ルート系の基底 }\} \leftrightarrow \{\text{ ワイルの部屋 }\}; \ \Delta(\gamma) \mapsto \mathcal{C}(\gamma).$$

さらに，この対応はワイル群の作用と可換である．

$\Delta = \Delta(\gamma)$ のとき，$\mathcal{C}(\Delta) := \mathcal{C}(\gamma)$ とかき，**Δ に関する基本ワイルの部屋 (fundamental Weyl chamber relative to Δ)**（正しい和訳は???）と呼ぶ．

10.2. **単純ルートの性質．** 引き続き，Φ をルート系，Δ をその基底とする．

補題 10.5. $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Delta$ ならば，ある $\beta \in \Delta$ に対して $\alpha - \beta \in \Phi^+$ となる．

証明． Δ は基底なので，$\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} s_\gamma \gamma$ とかける．α は正のルートなので，$s_\gamma \geq 0$ である．任意の $\gamma \in \Delta$ に対して，$(\alpha, \gamma) \leq 0$ とすると，

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{\gamma \in \Delta} s_\gamma (\alpha, \gamma) \leq 0$$

が成り立つので，$\alpha = 0$ となり矛盾．よって，ある $\beta \in \Delta$ に対して，$(\alpha, \beta) > 0$ が成立する．このとき，補題 9.10 により，$\alpha - \beta \in \Phi$ となる．$\alpha \neq \beta$ より，あ

る $\gamma \neq \beta$ に対して $s_\gamma > 0$ となる．よって，$\alpha - \beta$ の γ の係数も正である．従って，基底の性質 (B2) により，$\alpha - \beta$ は正のルートである．■

系 10.6. 任意の $\beta \in \Phi^+$ に対し，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Delta$ ($i < j$ のとき $\alpha_i = \alpha_j$ となることも許す) が存在して，$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ かつ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i \in \Phi$ ($\forall i$) が成り立つ．

証明. 補題 10.5 と $\mathrm{ht}\beta$ に関する帰納法により従う．■

補題 10.7. $\alpha \in \Delta$ に対して，$\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ となる．

証明. $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} s_\gamma \gamma \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$ ($s_\gamma \geq 0$) に対して，$\beta \neq \pm\alpha$ なので，ある $\gamma \neq \alpha$ に対して，$s_\gamma > 0$ である．$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ の γ に関する係数も s_γ と等しい．従って，基底の性質 (B2) により，$\sigma_\alpha(\beta)$ は正のルートである．また，$\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ である．■

系 10.8. $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ とおく．このとき，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ が成り立つ．

証明. 補題 10.7 より従う．■

補題 10.9. $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in \Delta$ （$i < j$ のとき $\alpha_i = \alpha_j$ となることも許す）に対して，$\sigma_i := \sigma_{\alpha_i}$ とおく．もし，$\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t) \in \Phi^-$ ならば，ある s ($1 \leq s < t$) に対して，$\sigma_1 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$ が成り立つ．

証明. $\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ ($0 \leq i \leq t-2$), $\beta_{t-1} = \alpha_t$ とおく．$\beta_0 \in \Phi^-, \beta_{t-1} \in \Phi^+$ なので，$\beta_s \in \Phi^+$ となる最小の s が存在する．このとき，$\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \in \Phi^-$ となるので，補題 10.7 により，$\beta_s = \alpha_s$ となる．さらに，補題 9.6 により，$\sigma \in W$ に対して，$\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ が成り立つ．よって，

$$\sigma_s = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_{\beta_s} = \sigma_{\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)} = \cdots = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}) \sigma_t (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1})^{-1}.$$

これを用いると，

$$\sigma_1 \cdots \sigma_t = (\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1}) \sigma_s (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_t) = (\sigma_1 \cdots \sigma_{s-1})(\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}).$$

■

系 10.10. $\sigma \in W$ が $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_t$ と表されたとする．この表示が σ を単純ルートの鏡映の合成として表す表示の中で最短の表示（簡約表示）であれば，$\sigma(\alpha_t) \in \Phi^-$ が成り立つ．

証明.

$$\sigma(\alpha_t) = \sigma_1 \cdots \sigma_t(\alpha_t) = -(\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1})(\alpha_t)$$

なので，$\sigma(\alpha_t) \in \Phi^+$ とすると，$(\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1})(\alpha_t) \in \Phi^-$ となる．しかし，これは補題 10.9 により簡約表示であることに矛盾する．■

10.3. ワイル群.

定理 10.11. ルート系 Φ の基底 Δ，ワイル群を W とする．このとき，以下が成り立つ．

(i) $\gamma \in E$ が正則ならば，ある $\sigma \in W$ が存在して，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ となる．従って，ワイル群はワイルの部屋の集合に推移的に作用する．

(ii) Δ' を Φ の異なる基底とすると，$\sigma(\Delta') = \Delta$ となる $\sigma \in W$ が存在する．従って，ワイル群はルート系の基底からなる集合に推移的に作用する．

(iii) $\alpha \in \Phi$ に対し，$\sigma(\alpha) \in \Delta$ となる $\sigma \in W$ が存在する．

(iv) $W = \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle$.

(v) $\sigma \in W$ に対して $\sigma(\Delta) = \Delta$ ならば，$\sigma = 1$ となる．従って，(i), (ii) のワイル群の作用はそれぞれ単純推移的である．

証明. $W' := \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle \subset W$ とおく．まず，(i) – (iii) を W' に対して示し，それを用いて $W = W'$ であることを示す．

(i) $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ に対して，$(\sigma(\gamma), \delta)$ が最大になる $\sigma \in W'$ を選ぶ．$\alpha \in \Delta$ なので，$\sigma_\alpha \sigma \in W'$ である．このとき，σ の選び方と系 10.8 により，

$$(\sigma(\gamma), \delta) \geq (\sigma_\alpha \sigma(\gamma), \delta) = (\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta)) = (\sigma(\gamma), \delta - \alpha) = (\sigma(\gamma), \delta) - (\sigma(\gamma), \alpha)$$

となる．よって，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して，$(\sigma(\gamma), \alpha) \geq 0$ が成り立つ．γ が正則であることから，$(\sigma(\gamma), \alpha) \neq 0$ である．実際，$(\sigma(\gamma), \alpha) = 0$ なら，$\gamma \in P_{\sigma^{-1}\alpha}$ となり矛盾する．従って，$(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ となる．

(ii) 命題 10.4 と (i) より従う．

(iii) (ii) により，任意のルート α がある基底に含まれていることを示せば十分である．$\gamma \in P_\alpha \setminus \cup_{\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}} P_\beta$ に対し，γ' を γ の十分近くに取ることにより，$(\gamma', \alpha) = \epsilon > 0$ かつ $|(\gamma', \beta)| > \epsilon$ $(\forall \beta \neq \pm\alpha)$ が成り立つとして良い．前半の条件から $\alpha \in \Phi^+(\gamma')$ となることが分かり，後半から α が分解不可能であることが分かる．

(iv) $W = W'$ を示す．そのためには，任意の $\alpha \in \Phi$ に対し，$\sigma_\alpha \in W'$ を示せば良い．(iii) により，$\beta = \sigma(\alpha) \in \Delta$ を満たす $\sigma \in W'$ が存在する．このとき，$\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$ なので，$\sigma(\alpha) = \sigma^{-1} \sigma_\beta \sigma \in W'$ が成り立つ．

(v) $\sigma(\Delta) = \Delta$ かつ $\sigma \neq 1$ とする．このとき，(iv) により σ は 1 つ以上の単純鏡映の積として表される．しかし，これは系 10.10 により $\sigma(\Delta) = \Delta$ に矛盾する． ■

定理 10.11 により，任意の $\sigma \in W$ は単純鏡映の積として表される：

$$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_l}.$$

このような表示の最小の l を $\ell(\sigma)$ とかき（Δ に関する）σ の**長さ (length)** と呼ぶ．また，$l = \ell(\sigma)$ を満たす σ の表示を**簡約表示 (reduced expression)** と呼ぶ．他方，

$$n(\sigma) := \sharp\{\alpha \in \Phi^+ | \sigma(\alpha) \in \Phi^-\}$$

とおく．

補題 10.12. 任意の $\sigma \in W$ に対して，$\ell(\sigma) = n(\sigma)$ が成り立つ．

証明. $\ell(\sigma)$ に関する帰納法により示す．$\ell(\sigma) = 0$ ならば $\sigma = 1$ なので，$n(\sigma) = 0$ となり成立する．そこで，$\ell(\tau) < \ell(\sigma)$ を満たす任意の $\tau \in W$ に対して $\ell(\tau) = n(\tau)$ が成り立つと仮定する．

$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_l}$ を簡約表示とし，$\alpha := \alpha_l$ とおく．補題 10.10 により，$\sigma(\alpha_t) \in \Phi^-$ となる．また，補題 10.7 により，$n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$ が成り立つ．一方，$\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma)$ なので，帰納法の仮定より $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$ となる．従って，$\ell(\sigma) = n(\sigma)$ が成り立つ． ■

補題 10.13. $\lambda, \mu \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ と $\sigma \in W$ に対して，$\sigma(\lambda) = \mu$ が成り立つならば，$\lambda = \mu$ となる．

証明. $\ell(\sigma)$ に関する帰納法により示す．$\ell(\sigma) = 0$ ならば $\sigma = 1$ なので成立する．そこで，$\ell(\sigma) > 0$ とする．補題 10.12 により，σ はある正のルートを負のルートに移す．従って，ある単純ルート $\alpha \in \Delta$ が存在して $\sigma(\alpha) \in \Phi^-$ となる．

$$0 \geq (\mu, \sigma\alpha) = (\sigma^{-1}\mu, \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0$$

なので，$(\lambda, \alpha) = 0$ となる．よって，$\sigma_\alpha \lambda = \lambda$ となり，$(\sigma\sigma_\alpha)(\lambda) = \mu$ が成り立つ．補題 10.12 と補題 10.7 により，$\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma) - 1$ なので，帰納法の仮定により $\lambda = \mu$ となる．

$\sigma = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_l}$ を簡約表示とし，$\alpha := \alpha_l$ とおく．補題 10.10 により，$\sigma(\alpha_t) \in \Phi^-$ となる．また，補題 10.7 により，$n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$ が成り立つ．一方，$\ell(\sigma\sigma_\alpha) = \ell(\sigma) - 1 < \ell(\sigma)$ なので，帰納法の仮定より $\ell(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$ となる．従って，$\ell(\sigma) = n(\sigma)$ が成り立つ． ■

10.4. **既約ルート系.** ルート系 Φ に対し，$\Phi_1, \Phi_2 \subsetneq \Phi$ が存在して $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ かつ $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ が成り立つとき，Φ は可約 (reducible) と呼ぶ．また可約でないとき，既約 (irreducible) と呼ぶ．例えば，階数 2 のルート系は $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2$ の 4 種類であったが，$A_1 \times A_1$ は可約であり，それ以外は既約である．

命題 10.14. Δ をルート系 Φ の底とする．このとき，Φ が既約であることと，$\Delta_1, \Delta_2 \subsetneq \Delta$ が存在して $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ が成り立つことは同値である．

証明. Φ が可約とする．このとき，$\Phi_1, \Phi_2 \subsetneq \Phi$ が存在して $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ かつ $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ が成り立つ．もし，$\Delta \subset \Phi_1$ ならば，$(\Delta, \Phi_2) = 0$ となる．Δ は E の基底なので，$(E, \Phi_2) = 0$ が成り立つ．よって，$\Phi_2 = \emptyset$ となり矛盾する．従って，$\Delta \not\subset \Phi_1$ かつ $\Delta \not\subset \Phi_2$ となるので，分解 $\Delta = (\Delta \cap \Phi_1) \cup (\Delta \cap \Phi_2)$ を得る．

逆に，Φ を既約とする．このとき，$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ かつ $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$ が成り立つと仮定する．ここで，$\Phi_i := W(\Delta_i)$ $(i = 1, 2)$ とおくと，定理 10.11 (iii) により，$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ と分解する．一方，$\alpha_i \in \Delta_i$ $(i = 1, 2)$ に対して，

$$(\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2} - \sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1})(\gamma) = \frac{4(\alpha_1, \alpha_2)}{||\alpha_1||^2||\alpha_2||^2}((\gamma, \alpha_2)\alpha_1 - (\gamma, \alpha_1)\alpha_2) = 0$$

となるので，任意の $\alpha_i \in \Delta_i$ $(i = 1, 2)$ に対して，$\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2} = \sigma_{\alpha_2}\sigma_{\alpha_1}$ が成り立つ．さらに，$(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ なので，$\sigma_{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_1$ となる．従って，

$$\Phi_i = W(\Delta_i) = \langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta_i \rangle (\Delta_i)$$

が成り立つ．$\langle \sigma_\alpha | \alpha \in \Delta_i \rangle (\Delta_i)$ の任意の元は Δ_i の元を足したり引いたりして得られるので，$\Phi_i \subset \langle \Delta_i \rangle$ となる．よって，$(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ となるが，仮定より Φ は既約なので $\Phi_{i_0} = \emptyset$ $(i_0 \in \{1, 2\})$ が成り立つ．このとき，$\Delta_{i_0} = \emptyset$ となり主張が成り立つ．

■

補題 10.15. 既約なルート系 Φ は半順序 $\prec$ に関して，ただ一つの最大ルート $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ をもつ．特に，任意のルート $\alpha \neq \beta$ に対し，$\mathrm{ht}\alpha < \mathrm{ht}\beta$ が成り立つ．さらに，$k_\alpha > 0$ となる．

証明. 一般に，有限半順序集合 S は極大元をもつ．実際，S の元 x を固定し，x が極大でなければ，$x < x_1$ なる $x_1 \in S$ が存在する．x_1 が極大でなければ，$x_1 < x_2$ なる $x_2 \in S$ が存在する．これを繰り返し，$x < x_1 < x_2 < \cdots$ なる列を得るが，S が有限であることからこの列も有限である．

そこで，$(\Phi, \prec)$ の極大元を $\beta = \sum k_\alpha \alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ とおく．$\beta \prec 0$ とすると，任意の単純ルート $\alpha \in \Delta$ に対して，$\alpha \succ \beta$ となり極大性に反する．よって，$\beta \succ 0$ である．

$\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha > 0\}$, $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta | k_\alpha = 0\}$ とおくと，$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ である．$\Delta_2 \neq \emptyset$ と仮定し矛盾を導く．このとき，補題 10.2 により，任意の $\alpha \in \Delta_2$ に対して，$(\alpha, \beta) \leq 0$ となる．また，Φ の既約性により，ある $\alpha \in \Delta_2$ に対して $(\Delta_1, \alpha) \neq 0$ となる． すなわち，ある $\alpha' \in \Delta_1$ に対して $(\alpha, \alpha') < 0$ となる．このとき，$(\alpha, \beta) < 0$ となるが，補題 9.10 により $\beta + \alpha \in \Phi$ となり，β の極大性に矛盾する．以上により $\Delta_2 = \emptyset$ となり，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $k_\alpha > 0$ となることが分かる．

最後に一意性を示す．β' を β と異なる極大元とする．まず，先と同様の議論により，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta) \geq 0$ が成り立つことに注意する．また，$\langle \Delta \rangle = E$ なので，ある $\alpha \in \Delta$ に対しては $(\alpha, \beta) > 0$ が成り立つ．よって，$(\beta', \beta) > 0$ となるが，補題 9.10 により $\beta - \beta' \in \Phi$ となる，従って，$\beta \prec \beta'$ もしくは $\beta' \prec \beta$ となり題意が従う． ■

補題 10.16. Φ を既約ルート系とする．このとき，ワイル群 W は E に既約に作用する（すなわち， W 不変な部分空間は $\{0\}$ か E のみ）．特に，ルート α の W 軌道は E を張る．

証明. W 軌道 $W(\alpha)$ は $W(W(\alpha)) = W(\alpha)$ を満たすので，W 不変空間である．従って，後半は前半から従う．そこで後半を示す．E' を E の 0 でない W 不変空間とする．E'' を E' の直交補空間とすると，$E = E'' \oplus E'$ が成り立つ．任意の $x \in E''$, $y \in E'$, $w \in W$ に対し，$(wx, y) = (x, w^{-1}y) = 0$ となるので，$wx \in (E')^\perp = E''$ が成り立つ．すなわち，E'' も W 不変空間である．E' は W 不変空間なので，$\alpha \in \Phi$ に対し，$\sigma_\alpha(E') = E'$ となる．よって，$\alpha \in E'$ または $E' \subset P_\alpha$ が成り立つ．すなわち，α は E' か E'' のどちらか一方に含まれる．これにより Φ を直交する二つの部分集合へ分けることができる．しかし，Φ は既約かつ $E' \neq 0$ なので，$E = E'$ となる． ■

補題 10.17. Φ を既約ルート系とする．このとき，Φ のルートの長さは高々2つであり，同じ長さのルートは W の元により移り合う．

証明. 長さの異なるルート $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ が存在したと仮定する．補題 10.16 により $W(\alpha)$ は E を張るので，ある $\sigma \in W$ が存在して，$(\sigma(\alpha), \beta) \neq 0$ となる．そこで，α を $\sigma(\alpha)$ により取り替えることで，$(\alpha, \beta) \neq 0$ として良い．さらに，同様の議論により，ある $\sigma \in W$ が存在して，$(\sigma(\gamma), \beta) \neq 0$ となるので，$(\gamma, \beta) \neq 0$

として良い．このとき，命題 9.9 により，

$$\frac{||\beta||^2}{||\alpha||^2}, \frac{||\beta||^2}{||\gamma||^2} \in \{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$$

となる．しかし，$\dfrac{||\gamma||^2}{||\alpha||^2} = \dfrac{||\beta||^2}{||\alpha||^2}\dfrac{||\gamma||^2}{||\beta||^2}$ を考えると，$\{2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ のいずれの値にもならず矛盾する．以上により前半は示された．

同じ長さのルート $\alpha, \beta \in \Phi$ に対し，ある $\sigma \in W$ が存在して $\sigma(\alpha) = \beta$ となることを示す．$\alpha = \pm\beta$ のときは明らかなので，$\alpha \neq \pm\beta$ とする．このとき，前半と同様の議論により $(\alpha, \beta) \neq 0$ として良い．このとき，命題 9.9 により，$\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle = \pm 1$ となる．必要であれば，β を $-\beta = \sigma_\beta(\beta)$ で置き換えることにより，$\langle\alpha, \beta\rangle = 1$ として良い．このとき，

$$(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha)(\beta) = \sigma_\alpha\sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$$

となり題意は成り立つ．

■

既約ルート系 Φ が長さの異なる 2 つのルートを持つとき，長さの値が大きいルートを**長いルート (long root)**，小さいルートを**短いルート (short root)** と呼ぶ．全てのルートの長さが等しいときは全て**長いルート (long root)** と呼ぶ．

補題 10.18. Φ を長さの異なるルートを持つ既約ルート系とする．このとき，補題 10.15 の最大ルート β は長いルートである．

証明. 任意の $\alpha \in \Phi$ に対し，$(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$ となることを示せば良い．W で移すことにより，$\alpha \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ として良い．このとき，補題 10.15 により $\beta - \alpha \succ 0$ となるので，任意の $\gamma \in \overline{\mathcal{C}(\Delta)}$ に対して，$(\gamma, \beta - \alpha) \geq 0$ となる．$\gamma = \beta$，$\gamma = \alpha$ に対してそれぞれ適用すると，$(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha) \geq (\alpha, \alpha)$ となる． ■

Course of Mathematics, Programs in Mathematics, Electronics and Informatics, Graduate School of Science and Engineering, Saitama University. Shimo-Okubo 255, Sakura-ku Saitama-shi, 338-8570, Japan.

E-mail address: kwatanab@rimath.saitama-u.ac.jp