

魔方陣

$N \times N$ のマス目に $1, \dots, N^2$ の数字を入れ、各行・各列・2つの対角線の N 個の数字の和が全て等しくなるものを **N 次の魔方陣** とか **N 方陣** という。

[例]

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1	12	13	8
15	6	3	10
4	9	16	5
14	7	2	11

7	11	23	5	19
3	20	9	12	21
14	22	1	18	10
16	8	15	24	2
25	4	17	6	13

問題 N方陣の各行・各列・対角線の和(定和という)を求めよ。

(答) $(1 + 2 + \dots + N^2) \div N = \frac{N(N^2 + 1)}{2}$

魔方陣はいくつある?

3 方陣 → 1 個

4 方陣 → 880 個

5 方陣 → 275, 305, 224 個

6 次以上の魔方陣の総数はまだ知られていない!

ただし、回転や鏡像(裏返し)で得られるものは同じものとする。 (区別した場合の $\frac{1}{8}$ になる)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

→ 回転 →

6	7	2
1	5	9
8	3	4

→ 回転 → ...

6	1	8
7	5	3
2	9	4

→ 回転 →

8	3	4
1	5	9
6	7	2

→ 回転 → ...

鏡像

3 方陣

3 方陣は上の例であげた 1 種類だけである。

証明:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

とおく. 定和は $(1 + \dots + 9) \div 3 = 15$

1. $e = 5$ である.

$$(a + e + i) + (c + e + g) + (b + e + h) - (a + b + c) - (g + h + i) = 15 + 15 + 15 - 15 - 15$$

$$\therefore 3e = 15$$

2. 1 は角にこない.

$a = 1$ であるとしよう. $i = 9$ となる.

1 行目, 3 列目を考えると, $2 \leq b, f \leq 8$ だから,

$$15 = 1 + b + c \leq 1 + 8 + c \quad \therefore c \geq 6$$

$$15 = c + f + 9 \geq c + 2 + 9 \quad \therefore c \leq 4$$

これが同時に成り立つのは不可能である.

3. 1 行目が決まる.

1 を含む行か列を回転により 1 行目に持ってきて, $b = 1$ として良い. このとき $a + c = 14$ であるが, $2, \dots, 8$ から 2 数を選んで和が 14 となるのは, 6 と 8 の組合せだけ.

8	1	6
	5	
	9	

6	1	8
	5	
	9	

4. 残りの数字は自動的に決まる.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

一方は他方の裏返しであり, 同じものとみなされる. ■

4 方陣

[定和は $(1 + \dots + 16) \div 4 = 34$]

1. 4 方陣では「4 隅の和」および「中心の 4 数の和」はどちらも 34 となる.

レポート問題 [1] これを証明せよ.

2. (A) が魔方陣なら (B) も魔方陣となる.

(A)

a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_2	c_2	d_2
a_3	b_3	c_3	d_3
a_4	b_4	c_4	d_4

(B)

a_1	c_1	b_1	d_1
a_3	c_3	b_3	d_3
a_2	c_2	b_2	d_2
a_4	c_4	b_4	d_4

問題 4 隅が下図のようになる 4 方陣を見つけよ.

(1)

1			13
16			4

(2)

1			14
15			4

(答) (1) 以下の 8 個

1	8	12	13
7	14	2	11
10	3	15	6
16	9	5	4

1	8	12	13
11	14	2	7
6	3	15	10
16	9	5	4

1	12	8	13
7	14	2	11
10	3	15	6
16	5	9	4

1	12	8	13
11	14	2	7
6	3	15	10
16	5	9	4

1	12	8	13
10	15	3	6
7	2	14	11
16	5	9	4

1	12	8	13
6	15	3	10
11	2	14	7
16	5	9	4

1	8	12	13
10	15	3	6
7	2	14	11
16	9	5	4

1	8	12	13
6	15	3	10
11	2	14	7
16	9	5	4

レポート問題 [2] 4 隅が (2) となる 4 方陣を全て求めよ.

(4 個ある)

簡単な4方陣の作り方

パソコンがあれば、880個の全ての4方陣をリストするのに1秒もかからないが、特別な4方陣については規則的な作り方が知られている。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

対角線を対称移動 →

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

同じ方法で4の倍数次の魔方陣(8方陣, 12方陣, ...)を作ることができる。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

→

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

奇数方陣の作り方

奇数方陣には良く知られた複数の規則的な作り方がある。

斜行法 (紀元前にインドで考案)

- 1行目中央に1を入れる。
 - 順次斜め右上に進みながら, 2, 3, ... を入れてゆく。
 - 枠をはみ出したら, 反対側へ入れる。
 - すでに数字が入っていて斜めに進めないときは, 下へ進む。
- ただし, (3), (4) では上と下の辺および左と右の辺が糊付けされているものとする。

			2	
		1		
4				4
				3
				2

			1	
		5	*	
4		6		
				3
				2

			1	8
		5	7	
		4	6	
10				3
				2
				9

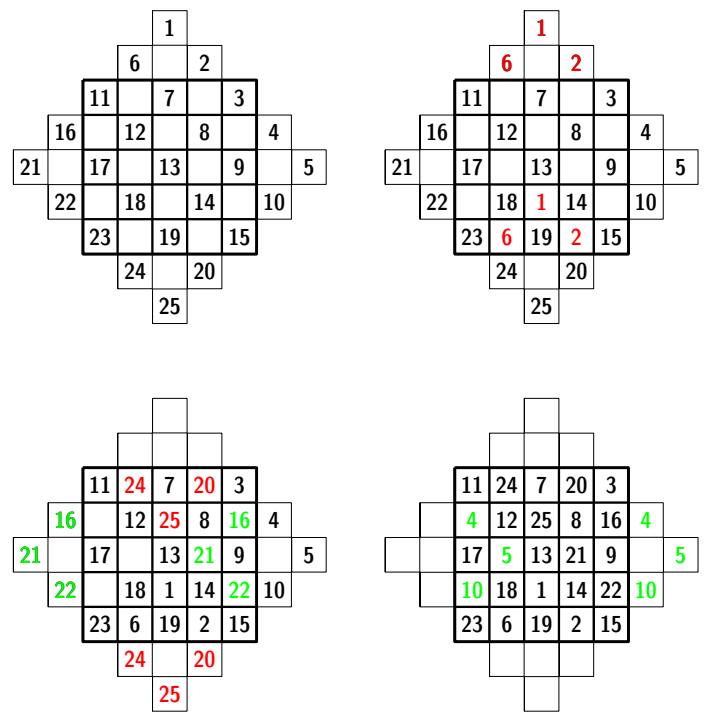
			11	
		1	8	15
		5	7	14
4		6	13	16
10	12			3
11				2
				9

			18	
17		1	8	15
		5	7	14
4		6	13	20
10	12	19	21	3
11	18		2	9

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

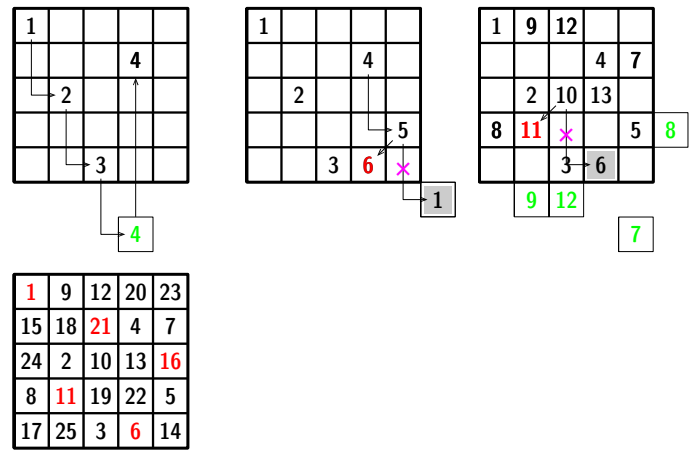
バシェーの方法 (16世紀フランスの数学者)

- 元の方陣よりひとまわり大きい45°回転した方陣を考える。
- 中央上端に1を入れ, 順次右下へ2, 3, ... を入れてゆく。
- 元の方陣をはみ出した数字を反対側の空きへ入れる。



桂馬飛び法 (3の倍数でない場合)

- どこでも良いから1を入れる。
- 右下桂馬の位置に2, 3, ... を入れてゆく。
- 枠をはみ出したら, 反対側へ入れる。
- すでに数字が入っていて飛べないときは, 左斜め下に進む。



レポート問題 [3] それぞれの方法で7方陣を作れ。