埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

令和 3 年 4 月入学，令和 2 年秋期入学

試験問題

数　　学

2020 年 8 月 20 日　13:00 〜 15:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の 4 問はすべてに解答すること.

2．$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ の中から，1 問を選択し，解答すること.

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること.

4．答案用紙は裏面も使用してよい.

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること.

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする.

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$$

で定める．

(1)　f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(2)　f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

$\boxed{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ とする

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　$P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ挙げよ．

$\boxed{3}$

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ で定義する．

(1) $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2$ の 原点 $(0,0)$ での値を求めよ．

(2) 原点を通る直線に f を制限して得られる関数は，原点で極小になることを示せ．

(3) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は原点で極小になるかどうか判定せよ．

$\boxed{4}$

関数 $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ は連続とし

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2,\ y^2 \geq x^2,\ y \geq 0\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1)　変数変換

$$\begin{cases} x = s \\ y = \sqrt{t - s^2} \end{cases}$$

のヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \dfrac{\partial x}{\partial s}\dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial s}$ を求めよ．

(2)　集合 $E = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (s, \sqrt{t - s^2}) \in D\}$ を st 平面に図示せよ．

(3)　$\displaystyle\iint_D f(x^2 + y^2)dx\,dy = \frac{\pi}{4}\int_1^2 f(t)dt$ を示せ．

$\boxed{\text{A}}$

有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})$ と，K の元 $\gamma=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 有理数係数の 4 次多項式 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ で，最高次の係数が 1 であり，$f(\gamma)=0$ となるものを求めよ．

(2) $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ であることを示せ．ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

(3) $\sqrt{2}$ を γ と $\dfrac{1}{\gamma}$ の $\mathbb{Q}$ 上の 1 次結合として表せ．

(4) $K=\mathbb{Q}(\gamma)$ であることを示し，拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ．

(5) γ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

$\boxed{\text{B}}$

$I = [0,1]\ (\subset \mathbb{R})$ とする．$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in I \times I$ に対し，実数 $\ell(x,y)$ を

$$\ell(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & (x_2 = y_2 \text{ のとき}) \\ 1 & (x_2 \neq y_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．

(1)　$\ell(x,y)$ は $I \times I$ の距離関数であることを示せ．

(2)　$0 < \varepsilon < 1$ とする．距離空間 $(I \times I, \ell)$ について点 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right) \in I \times I$ の ε 近傍を求めよ．

(3)　$A = \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \times \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \subset I \times I$ とする．距離空間 $(I \times I, \ell)$ において A は開集合であることを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

$P(x)$, $Q(x)$ は既知の連続関数とし，微分方程式 $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$ を考える．y_1, y_2 を 1 次独立な解としたとき，

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $\dfrac{d}{dx} W[y_1, y_2](x) = -P(x) W[y_1, y_2](x)$ を示せ．

(2) y_3, y_4 を y_1, y_2 と異なる 1 次独立な解としたとき，$W[y_1, y_2](x)$ と $W[y_3, y_4](x)$ の比は x に依らないことを示せ．