埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程　数理電子情報系専攻・数学コース

令和 3 年 4 月入学

試験問題

数　　　学

2021 年 2 月 10 日　10:00 〜 12:00

注 意 事 項

1．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の４問はすべてに解答すること．

2．$\boxed{\mathrm{A}}$，$\boxed{\mathrm{B}}$，$\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること．

3．答案用紙 1 枚につき 1 問ずつ，計 5 問を解答すること．

4．答案用紙は裏面も使用してよい．

5．裏面を使用する場合は，その旨を表面に明記すること．

6．配点は各問 20 点とし，合計 100 点とする．

試験問題は，次ページからです．

$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$ とする.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ挙げよ.

$\boxed{2}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定める．

(1) f は単射かどうか判定せよ．

以下，

$$V = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^4 \mid \text{任意の } \boldsymbol{z} \in \operatorname{Im} f \text{ に対し } \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = 0\}$$

とおく．ただし，$\operatorname{Im} f$ は写像 f の像を表し，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対し

$$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + y_4 z_4$$

である．

(2) V は $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(3) V の次元を求めよ．

$\boxed{3}$

2 変数関数 f を次で定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

(1) $y \neq 0$ のとき，$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(3) f は $(x,y) = (0,0)$ で不連続であることを示せ．

$\boxed{4}$

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定める.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 < x + y \leq 4\}$$

次の重積分を，$u = x + y, v = x - y$ と変数変換して求めよ.

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$$

$\boxed{\mathrm{A}}$

$R = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) R は複素数体 $\mathbb{C}$ の部分環であることを示せ．

以下，(α) は α で生成された R のイデアルを表すものとする $(\alpha \in R)$．

(2) R のイデアル (0) は素イデアルであることを示せ．

(3) R のイデアル (2) は素イデアルでないことを

$$6 = 2 \times 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

に注意して示せ．

$\boxed{\text{B}}$

$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{(-a, a) \mid a > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

と定める．

(1) $\mathcal{O}$ は位相空間論における開集合族の公理を満たすことを示せ．

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ において，$\mathbb{R}$ の部分集合 $A = [-1, 2]$ に対し，A の内部 A^i を求めよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

$f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ を下図に示す複素平面内の積分路 C で積分することにより

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

を求めよ.