平成 15 年度

埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程

数学専攻試験問題

数　　学

2002 年 9 月 2 日

10:00 – 12:00

注 意 事 項

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の中から，３問を選択し，解答すること.
- $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.
- 解答用紙１枚につき１問ずつ，計４問を解答すること.
- 配点は各問 25 点とし，合計 100 点とする.

$\boxed{1}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の階数は 2 であることを示せ．

(2)　$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となるような 2 次正則行列 P は存在しないことを示せ．

$\boxed{2}$

n 次複素正方行列 P は $P^2 = P$ かつ $P^* = P$ のとき，n 次の直交射影であるという．ここで P^* は P の随伴行列，すなわち ${}^t\overline{P}$ を表す．

(1)　$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \omega & \beta \end{pmatrix}$ が 2 次の直交射影になるような複素数 α, β を求めよ．ただし，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とする．

(2)　n 次の直交射影 P の固有値は 0 か 1 であることを示せ．

(3)　P を n 次の直交射影とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し，

$$\langle P\boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, P\boldsymbol{y} \rangle$$

となることを示せ．ただし，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ の標準内積である．

$\boxed{3}$

$f(x) = \tan^{-1} x$ とする．

(1)　$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ を示せ．

(2)　$f^{(4)}(0)$ および $f^{(5)}(0)$ を求めよ．

$\boxed{4}$

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \; x > 0, \; y > 0\}$ とし，Ω から Ω への写像 $\Phi : (x,y) \longmapsto (u,v)$ を

$$\begin{cases} u = \dfrac{x^2}{y} \\ \\ v = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$$

により定める.

(1) Φ の Jacobi 行列と Jacobi 行列式を求めよ.

(2) $0 < p < q, \; 0 < r < s$ に対し，

$$D = \{(x,y) \in \Omega \, ; \; py \leq x^2 \leq qy, \; rx \leq y^2 \leq sx\}$$

とする．D 上の重積分

$$\iint_D xy \, dxdy$$

を計算せよ.

$\boxed{\mathrm{A}}$

$\alpha = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)$ とする．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

(1) 実数係数多項式 $f(x)$ について，$f(\alpha) = 0$ であれば，

$$f(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)g(x)$$

となる実数係数多項式 $g(x)$ が存在することを示せ.

(2) 有理数係数多項式 $f(x)$ について，$f(\alpha) = 0$ であれば，

$$f(x) = (x^4 + 1)h(x)$$

となる有理数係数多項式 $h(x)$ が存在することを示せ.

$\boxed{\text{B}}$

(1) 集合 X の 2 点 P, Q に対して，

$$d(P,Q) = \begin{cases} 0 & (P = Q) \\ 1 & (P \neq Q) \end{cases}$$

とおくと，この $d(P,Q)$ は距離の公理を満たすことが知られている（このことは証明なしに認めてよい）．X の点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上記の距離 d に関して X の点 P に収束する場合，適当な自然数 N を取ると，その N より大きい任意の自然数 n について $P_n = P$ であることを示せ．

(2) 平面曲線 $c : (0,1) \ni s \longmapsto c(s) \in \mathbb{R}^2$ を考える．速度ベクトル $c'(s)$ を正の向きに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転して得られるベクトルが

$$\boldsymbol{n}(s) = (\sin(2s + \frac{\pi}{2}), \cos(2s + \frac{\pi}{2}))$$

であるとする．この平面曲線の曲率 $\kappa(s)$ を求めよ．

$\boxed{\text{C}}$

(1) $y = e^{\alpha x}$ が微分方程式 $y'' - y = 0$ の解になるための α の条件を求めよ．

(2) 微分方程式 $y'' - y = 0$ の解 y で $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ を満たすものを求めよ．

(3) 微分方程式 $y'' - y = e^{2x}$ の解 y をひとつ求めよ．