平成 16 年度
埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程
数学専攻試験問題

数　　学

2003 年 8 月 28 日

10:00 – 12:00

注 意 事 項

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の中から，３問を選択し，解答すること.
- $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.
- 解答用紙１枚につき１問ずつ，計４問を解答すること.
- 配点は各問 25 点とし，合計 100 点とする.

$\boxed{1}$

(1) a を実数とし, $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ a \end{pmatrix}$$

が一次従属であるとする. a を求めよ.

(2) 実ベクトル空間 V の 3 つの元 u, v, w が一次独立であるとする.

このとき, $u+v$, $u-v$, $3v+w$ は一次独立であることを示せ.

$\boxed{2}$

次の行列 A の固有値をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, f_n, f は区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数であるとし, 関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は区間 $[0,1]$ 上で f に一様収束するとする. すなわち

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, 適当な } N \in \mathbb{N} \text{ が存在して,}$$
$$n \geq N \text{ ならば } \max\{|f_n(x) - f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} < \varepsilon$$

と仮定する. また, 関数 g_n, g を

$$g_n(x) = f_n(x)^2, \quad g(x) = f(x)^2 \quad (0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N})$$

と定める.

(1) $\{|f_n(x)| : 0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N}\}$ は有界であることを示せ.

(2) 関数列 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は区間 $[0,1]$ 上で g に一様収束することを示せ.

$\boxed{4}$

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}\sqrt{t}}$ の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対し, 関数 $I(f)$ を

$$I(f)(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds$$

により定義する.

$$I(I(f))(t) = \pi \int_0^t f(s)\,ds$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\text{A}}$

$R = \mathbb{Z}[X]$ とおき,

$$I = \{f(X) \in R : \ f(0) \text{ は偶数}\}$$

とおく.

(1) I は R のイデアルであることを示せ.

(2) I は R の単項イデアルであるかどうか判定せよ.

$\boxed{\text{B}}$

(1) $x,\, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$d(x, y) = \min\{|x - y + n| : n \in \mathbb{Z}\}$$

とする. このとき, d は $\mathbb{R}$ 上の距離とならないことを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

と定義し, その商集合を M とする. このとき, $\alpha,\, \beta \in M$ に対し

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) = \min\{|x - y| : x, y \text{ はそれぞれ } \alpha, \beta \text{ の代表元}\}$$

としたとき, $\tilde{d}$ は M 上の距離となることを示せ.

$\boxed{\text{C}}$

$a > 0$ を定数とし, 次の微分方程式の初期値問題を考える.

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = |x(t)|^a \quad (t > 0), \\ \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(1) $x_0 \geq 0$ のとき, (E) の解 $x(t)$ が $0 \leq t \leq T$ で存在すれば, その範囲で $x(t) \geq 0$ となることを示せ.

(2) $x_0 = 1$ のとき, (E) の解 $x(t)$ が $0 \leq t < \infty$ で存在するような a の範囲を求めよ.

(3) $x_0 = 0$ のとき, (E) の解が 2 つ以上存在する a の条件を述べ, その場合に解を 2 つ求めよ.