平成 17 年度
埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程
数学専攻試験問題

数　　学

2004 年 8 月 26 日

10:00 – 12:00

注 意 事 項

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の中から，３問を選択し，解答すること.
- $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ の中から，１問を選択し，解答すること.
- 解答用紙１枚につき１問ずつ，計４問を解答すること.
- 配点は各問 25 点とし，合計 100 点とする.

$\boxed{1}$

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となる 3×2 行列 B を求めよ.

(2) $m \times n$ 行列 A と $n \times m$ 行列 B について, $m > n$ のとき, 積 AB が m 次単位行列にならないことを示せ.

$\boxed{2}$

高々2次の実係数多項式全体のなす実ベクトル空間

$$V = \{a\,x^2 + b\,x + c \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{R}\}$$

を考える. $f = f(x),\ g = g(x) \in V$ に対して

$$f \bullet g = f(0)\,g(0) + f(1)\,g(1) + f(2)\,g(2)$$

とおくと, この演算 $\bullet$ は内積の条件を満たしている（このことは証明なしに用いてよい）.
内積の付随したベクトル空間 $(V,\ \bullet)$ において次の問に答えよ.

(1) $x + 1$ の長さを求めよ.

(2) $1,\ x$ に直交する零でない V の元を一つ求めよ.

(3) $1,\ x$ の張る部分空間への直交射影による x^2 の像を求めよ.

$\boxed{3}$

区間 $[0,\infty)$ で定義された正値単調減少連続関数 f が

$$\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$$

を満たすとき，次の問に答えよ.

(1) $xf(x) \leq 2\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$ を示せ.

(2) $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{4}$

$t > 0$ に対し

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{t}\right)\,dxdy$$

を求めよ.

$\boxed{\text{A}}$

2次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とし，その部分集合 G を

$$G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}$$

と定める．ただし，$\det X$ は X の行列式を表す．

G の元 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とする．G が乗法に関して群をなすことは証明なしに用いてよい．

(1) A の位数および B の位数を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して

$$AB^n = B^{2n}A$$

が成り立つことを示せ．

(3) A と B で生成された G の部分群を H とする．H の位数を求めよ．

$\boxed{\text{B}}$

d を距離関数とする距離空間 $(X,\, d)$ を考える．直積集合 $X \times X$ の 2 元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対して $\rho(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \max\{d(x_1, y_1),\ d(x_2, y_2)\}$ と定める．

(1)　ρ は，$X \times X$ 上の距離関数であることを示せ．

(2)　距離関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ は ρ の定める位相に関して連続であることを示せ．

$\boxed{\text{C}}$

a を正の実数とする．複素関数 $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}$ を考える．

(1)　$f(z)$ の極をすべて求め，その点における留数を計算せよ．

(2)　広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx$ の値を求めよ．