埼玉大学大学院理工学研究科

博士前期課程数理電子情報専攻

数学コース

平成 18 年度 入学試験問題

数　学

2006 年 2 月 20 日（月）　　10:00 – 12:00

注 意 事 項

○ $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 問から 3 問を,
$\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$ から 1 問選択し，計 4 問を解答すること.

○ 解答用紙１枚につき１問ずつ解答すること.

$\boxed{1}$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \\ x-2y-5z \end{pmatrix}$$

で与えられる $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^4$ への写像 T について，次の問に答えよ．

(1) T は線形写像であることを示せ．

(2) T の像の次元と核の次元を求めよ．

$\boxed{2}$

$m \times n$ 実行列 A に対して，実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間 W を

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

と定め，複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の部分空間 V を

$$V = \{\, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \,\}$$

と定める．

(1) 実ベクトル空間 W の $\mathbb{R}$ 上一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ を複素ベクトル空間 V のベクトルと考えたとき，$\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ．

(2) $\{\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s \,\}$ が実ベクトル空間 W の基底であるならば，$\{\, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s \,\}$ は複素ベクトル空間 V の基底となることを示せ．

$\boxed{3}$

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする．

(1)　ライプニッツの公式 $\dfrac{d^n}{dx^n}(fg) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ を用いて $L_n(x)$ を x の多項式として表せ．

(2)　$L_n(x)$ の導関数を $L_n'(x)$，二階導関数を $L_n''(x)$ とすると

$$xL_n''(x) - (x-1)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

を満たすことを示せ．

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})dx$ は正の値に収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\int_1^\infty dx \int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})dy$ は負の値に収束することを示せ.

$\boxed{\text{A}}$

G を群とし，H を G の部分群 とする．

(1) G の元 g_1，g_2 に対して，$g_1^{-1}g_2 \in H$ となることと，$g_1H = g_2H$ となることは同値であることを証明せよ．

(2) G における H の指数 $(G : H)$ が 2 ならば， 任意の $g \in G$ に対し $gH = Hg$ となることを証明せよ．

(3) $(G : H) = 2$ となるような群 G と，その部分群 H の組の例を一例挙げよ．

$\boxed{\mathrm{B}}$

(1) 「二次元トーラス」と「メビウスの帯」の絵を描け．

(2) M を C^∞ 多様体とする．写像 $f:\mathbb{R}\to M$ が C^∞ 級であることの定義を述べよ．

$\boxed{\mathrm{C}}$

$x > 0$ で定義された関数 $u(x)$ の微分方程式

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 3x \frac{du}{dx} + u = 0 \tag{A}$$

を考える．以下に答えよ．

(1) (A) の解 $u(x)$ に対し，$f(t) = u(e^t)$ とおくとき，$f(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2) $u(1) = 0$，$\dfrac{du}{dx}(1) = 1$ を満たす (A) の解 $u(x)$ を求めよ．