埼玉大学大学院理工学研究科
博士前期課程数学専攻

平成 18 年度入学試験問題

数　学

2005 年 8 月 25 日　10:00 – 12:00

注 意 事 項

- $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ および $\boxed{4}$ の 4 問から 3 問を,
  $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{c}$ から 1 問選択し，計 4 問を解答すること.
- 解答用紙１枚につき１問ずつ解答すること.
- 数学の試験終了後，専攻分野の希望調査表を配布するので記入して提出すること.

$\boxed{1}$

行列　$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$　について次の問に答えよ.

(1)　A の固有値を求めよ.

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

$\boxed{2}$

線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ について次の問に答えよ.

(1) 次の集合が $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間であることを示せ.

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}$$

$$\mathrm{Im}\, f = \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \,\}$$

(2) 写像 f が $f \circ f = f$ を満たすとき $\mathbb{R}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \quad (\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Ker}\, f,\ \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Im}\, f)$$

という形に一意的に表せることを示せ.

$\boxed{3}$

(1)　関数 $x = \tan\theta$ の $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における逆関数を $\tan^{-1} x$ と書く．このとき

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{x^2+1}$$

を示せ.

(2)　$\tan^{-1} x$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

$\boxed{4}$

2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について次の問に答えよ．

(1) 偏微分係数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ が成立するかどうかを調べよ．

$\boxed{\text{A}}$

G を群とし，集合 $\{\, a^2 \,|\, a \in G \,\}$ によって生成される G の部分群を H とする：

$$H = \{\, a_1^2 a_2^2 \cdots a_k^2 \,|\, k \in \mathbb{N},\ a_i \in G\ (1 \leq i \leq k) \,\}.$$

(1) G の元 a, b に対して

$$ab^2a^{-1} = (aba^{-1})^2$$

を示せ.

(2) H は G の正規部分群であることを示せ.

(3) 剰余群 G/H の任意の元 x について x^2 が G/H の単位元に等しいことを示せ.

$\boxed{\mathrm{B}}$

a, b を実定数とし，微分作用素 L を

$$Lu(t) = u''(t) + au'(t) + bu(t) \qquad \bigl(u \in C^2(\mathbb{R})\bigr)$$

で定義する.

(1) $Lu = 0$ の 2 つの解 u_1, u_2 に対し，$W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)$ とおくと

$$W'(t) = -aW(t)$$

が成り立つことを示せ.

(2) φ を初期値問題 $Lu = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ の解 とし，連続関数 f に対し

$$v(t) = \int_0^t \varphi(t-s)f(s)\,ds$$

とおけば

$$Lv(t) = f(t)$$

となることを示せ.

(3) 微分方程式 $u''(t) + u(t) = \cos t$ の一般解を求めよ.

$\boxed{\text{C}}$

2 次元球面 $S^2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ から 2 次元実射影空間

$$\mathbb{R}P^2 = \{ \mathbb{R}^3 \text{ 内の原点を通る直線} \}$$

への自然な写像

$$\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2, \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto [x_1, x_2, x_3]$$

（$[x_1, x_2, x_3]$ は原点と点 (x_1, x_2, x_3) を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線）

を考える．S^2，$\mathbb{R}P^2$ の座標近傍系 (U, ϕ)，(V, ψ) をそれぞれ次のように取る．

$$\begin{cases} \phi : U = \{ (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 > 0 \} \to B = \{ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 + u_2^2 < 1 \} \\ \phi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi : V = \{ [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_1 \neq 0 \} \to \mathbb{R}^2 \\ \psi([x_1, x_2, x_3]) = (x_2/x_1, x_3/x_1) \end{cases}$$

次の問に答えよ．

(1) 原点と点 $(1, 1, 2)$ を通る $\mathbb{R}^3$ 内の直線 $[1, 1, 2]$ の写像 π による逆像 $\pi^{-1}([1, 1, 2])$ を求めよ．

(2) 関数 $g : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$ を座標近傍系 (V, ψ) で表すと

$$g \circ \psi^{-1}(v_1, v_2) = v_1^2 + 2v_2^2, \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$$

となり，関数 $g \circ \pi : S^2 \to \mathbb{R}$ を座標近傍系 (U, ϕ) で表すと

$$g \circ \pi \circ \phi^{-1}(u_1, u_2) = h(u_1, u_2), \quad (u_1, u_2) \in B$$

となるとする．このとき $h(u_1, u_2)$ を求めよ．